Zbornik radova **PrimMath[2001]**
Mathematica u znanosti, tehnologiji i obrazovanju
Zagreb, 27–28. 9. 2001. pp. 155–169

Vizualizacija svojstava algebarskih pravčastih ploha pomoću sustava *Mathematica*

Sonja Gorjanc*

Sažetak

U radu su dani primjeri primjene programa Mathematica u nastavi konstruktivne geometrije na Građevinskom fakultetu u Zagrebu.

Abstract

This article provides some examples of how the program Mathematica is applied in teaching constructive geometry at the Faculty of Civil Engineering in Zagreb.

1. Uvod

Za razumijevanje, a potom i prosuđivanje o primjerenosti uporabe tako slojevitog programskog sustava kao što je *Mathematica* u konkretnom nastavnom procesu, svakako je potrebno sagledati uvjete u kojima se ta nastava odvija. Za početak je dobro prebrojiti računala koja nastavnik i studenti mogu koristiti.

Na Građevinskom fakultetu u Zagrebu za studente prve godine, njih oko 250, nastava se održava u aveniji V. Holjevca. Na toj lokaciji studenti nemaju na raspolaganju niti jedno (!) računalo. Uputiti ih se može na kompjutorsku učionicu u Kačićevoj ulici, gdje se održava nastava za ostale godine studija. Tamo se i studenti prve godine, u vrijeme kad nemaju nastavu u Holjevčevoj ili na FER-u te kad se nastava za više godine ne održava u kompjutorskoj učionici, mogu koristiti nekim od dvadeset i pet računala na kojima je instalirana *Mathematica.* U takvim se uvjetima slobodno može reći da nastavnik na prvoj godini Građevinskog fakulteta u Zagrebu nema na raspolaganju niti jedno računalo na kojem bi svakom studentu bilo omogućeno da barem pola sata godišnje nešto samostalno radi uz prisustvo nastavnika. Izuzetak je nastava fizike koja se održava na FER-u.

*Zavod za matematiku Građevinskog fakulteta u Zagrebu

Što se opremljenost nastavnika tiče može se reći da oni koji u nastavi na bilo koji način koristite program *Mathematica* imaju na raspolaganju, zajedno s drugim kolegama, svaki po jedno računalo na koje se taj program može instalirati.

U takvim se uvjetima program *Mathematica* može upotrijebiti za izradu internet stranica (čime se broj računala koja studenti koriste znatno povećava), za poneka predavanjima uz projektor te u individualnom radu s rijetkim studentima koji *Mathematicu* imaju na kućnom računalu.

2. *Mathematica* u nastavi konstruktivne geometrije na Građevinskom fakultetu u Zagrebu

Konstruktivna se geometrija na Građevinskom fakultetu u Zagrebu predaje u okviru kolegija Nacrtna i Primijenjena geometrija. To su tradicionalni kolegiji, obavezni u obrazovanju inženjera te posebno važni za graditeljske struke. Osnovni im je zadatak povećanje spoznajno-perceptivnih sposobnosti studenata u području geometrije trodimenzionalnog Euklidskog prostora, te savladavanje konstruktivnih metoda i alata za grafičku komunikaciju budućih inženjera.

U kompjutorizaciji nastave, za koju smo na žalost potpuno neopremljeni, razvoj konstruktivnih metoda i vještina vezan je, bez sumnje, uz različite CAD programe.

U okviru nastave tih kolegija *Mathematica* se može vrlo dobro upotrijebiti pri učenju geometrije Euklidskoga prostora. Velike mogućnosti tog programa došle bi do punog izražaja kada bi se, vremenski i sadržajno, uskladile nastave konstruktivne geometrije i matematike na prvoj i drugoj godini studija.

Budući da sam, za potrebe svog znanstvenog rada u području projektivne geometrije, prije sedam godina počela koristiti program *Mathematica*, te se tako upoznala s njegovim velikim grafičkim mogućnostima, pokušala sam ga barem donekle uvesti u nastavu. Koristila sam ga u onim sadržajima za koje, na temelju osobnog nastavničkog iskustva, znam da studentima zadaju najviše poteškoća pri vizualizaciji. Posljednje četiri godine, u terminima kada se obrađuju algebarske pravčaste plohe, dva sata predavanja održavam pomoću računala. Studentima prezentiram *Mathematica* crteže i animacije koji vizualiziraju neka od važnih svojstava ploha ili pak pokazuju njihovo generiranje na konkretnim primjerima. Dijelove tih predavanja prezentirala sam na nekoliko međunarodnih skupova na kojima su bili vrlo pozitivno komentirani, a tiskani oblici tih prezentacija mogu se naći u [3], [2] i [4].

Ove sam godine, koristeći samo grafike ili cijele *Mathematica* bilježnice, počela uređivati internet stranicu **www.grad.hr/nastava/geometrija** na kojoj uz razne obavijesti o geometrijskim kolegijima, te ispitnih zadataka s prošlih rokova, studenti mogu naći tzv. **ilustracije** koje im pomažu pri učenju za obranu programa ili za ispit. Već je prve godine taj način pokazao dobre rezultate.

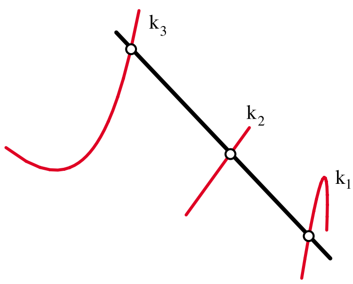
Akademske godine 2000/01 bila sam mentorica Sanji Filipan i Hrvoju Kvasnički, studentima 2. godine Građevinskoga fakulteta, pri izradi radnje *Natkrivanje paraboličkim konoidom.* U dosta jakoj konkurenciji sa studentima završnih godina studija njihov je rad nagrađen Rektorovom nagradom. Mislim da je za visoko rangiranje toga rada bila presudna uporaba programa *Mathematica* pri vizualizaciji primjera natkrivanja. Pojedini dijelovi toga rada, prošireni vizualizacijom Gaussove i srednje zakrivljenosti sadržaj su članka [1].

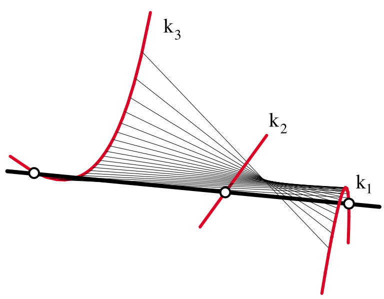
3. Primjeri vizualizacije nekih svojstava pravčastih ploha pomoću sustava *Mathematica*

Kod većine sljedećih grafika može se animacijom poboljšati vizualizacija svojstva kojeg opisuju.

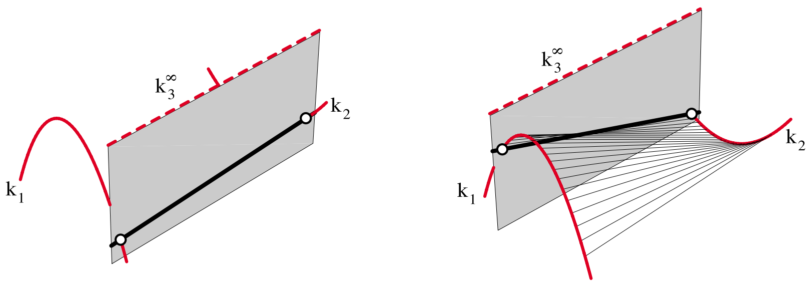
3.1. Izvođenje pravčastih ploha

Postoji više načina konstruktivnog izvođenja pravčastih ploha. Jedan od njih, koji koristimo u okviru našeg kolegija, je taj da su pravčaste plohe sistemi pravaca koji sijeku tri prostorne krivulje k_1, k_2 i k_3. Prostorne krivulje k_1, k_2 i k_3 nazivamo *ravnalicama*, a pravce koji ih sijeku *izvodnicama* pravčaste plohe.





Pravčaste plohe kojima je jedna ravnalica beskonačno daleki pravac nazivamo *konoidima.* Ravnine koje sadrže takvu beskonačno daleku ravnalicu nazivamo *direkcijskim* ravninama plohe.



Ako se za ravnalice odaberu algebarske krivulje, koje su karakterizirane redom i razredom, nastaje *algebarska* pravčasta ploha. Red i razred takve plohe uvijek se podudaraju, tj. algebarske pravčaste plohe imaju *stupanj*.

Čitatelja koji se želi podrobnije upoznati s općom teorijom takvog načina izvođenja pravčastih ploha upućujemo na literaturu [8], [9], [6].

3.2. Teoremi o dirnim ravninama pravčastih ploha

Za dirne ravnine pravčastih ploha vrijede sljedeći teoremi.

Teorem 1.

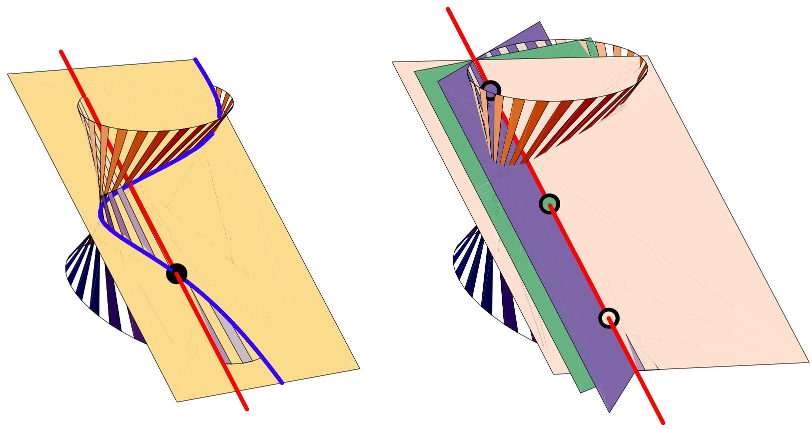
Dirna ravnina, s diralištem na izvodnici i algebarske pravčaste plohe stupnja n, siječe tu plohu po izvodnici i i krivulji reda $n-1$.

Teorem 2.

Za izvodnicu i pravčaste plohe pramen dirnih ravnina $[i]$ i niz njima pridruženih dirališta (i) u projektivnom su odnosu.

Na lijevoj slici prikazana je dirna ravnina u jednoj točki konoida 4. stupnja, izvodnica plohe kroz diralište i ostatak presječne krivulje dirne ravnine i konoida koji je krivulja 3. reda.

Na desnoj su slici prikazane tri dirne ravnine i njima pridružena dirališta duž jedne izvodnice konoida 4. stupnja.



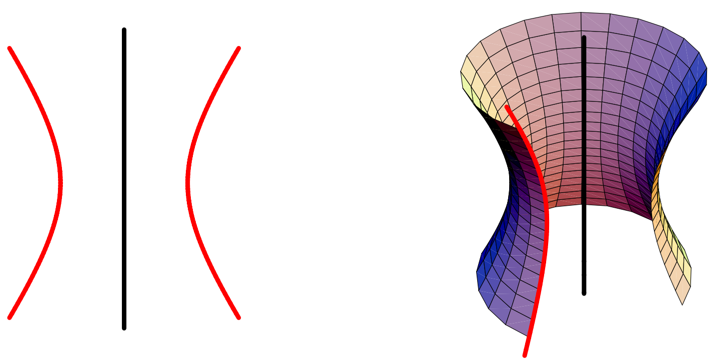
3.3. Pravčaste plohe 2. stupnja

Postoje samo dvije vrste *vitoperih*, onih koje se ne mogu razmotati u ravninu, pravčastih ploha 2. stupnja. To su jednokrilni hiperboloid (JH) i hiperbolički paraboloid (HIPAR). To su ujedno i jedine algebarske pravčaste plohe s dva sistema izvodnica. Sve ostale imaju samo jedan sistem izvodnica.

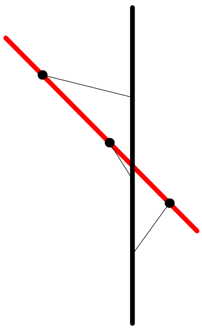
3.3.1. Jednokrilni hiperboloid

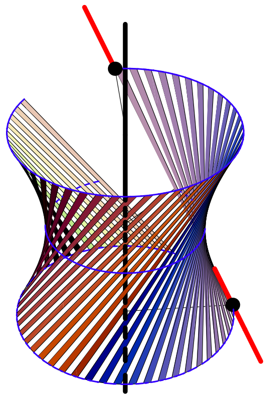
Ova ploha 2. stupnja može nastati na nekoliko načina. Navodimo neke od njih.

1. Rotacijom hiperbole oko njezine imaginarne osi.

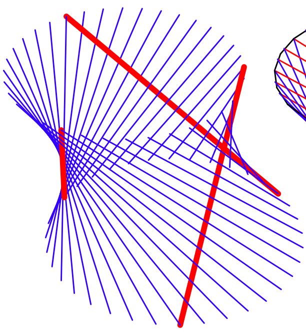


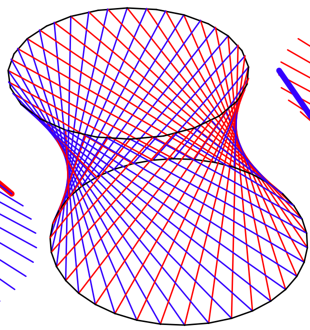
2. Rotacijom pravca oko njemu mimosmjerne osi.

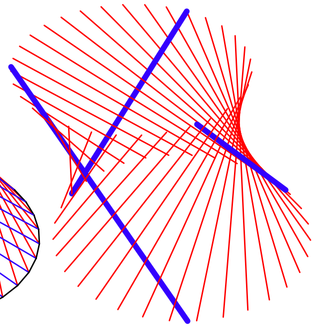




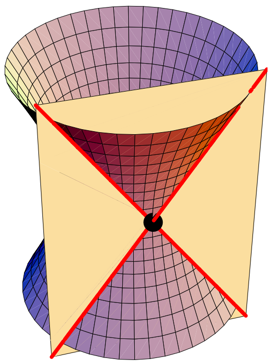
3. Najopćenitije, izvodnice jednog sistema su transverzale bilo kojih triju izvodnica drugog sistema.







U svakoj točki jednokrilnog hiperboloida dirna je ravnina određena izvodnicama koje se u toj točki sijeku.

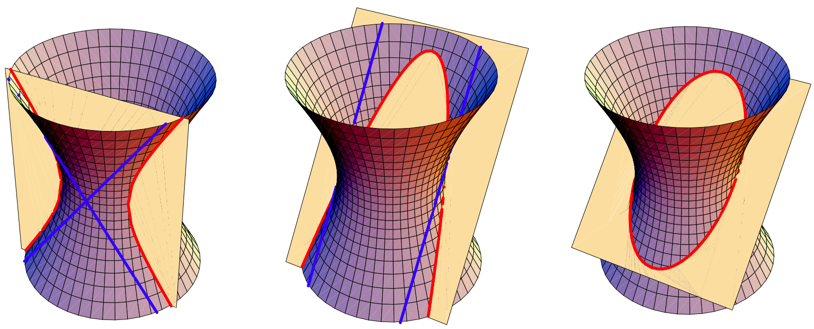


Osim dviju izvodnica presjek jednokrilnog hiperboloida može biti:

hiperbola (ako je presječna ravnina paralelna s dvije njegove ukrštene izvodnice),

parabola (ako je presječna ravnina paralelna s dvije njegove paralelne izvodnice) ili

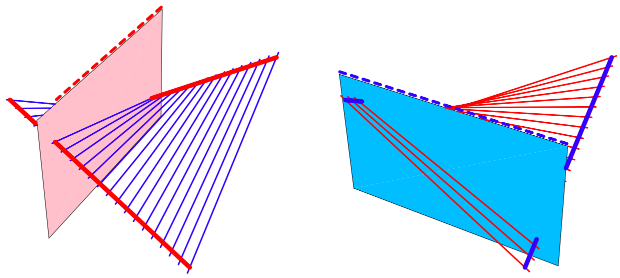
elipsa (ako presječna ravnina nije paralelna niti s jednom njegovom izvodnicom).



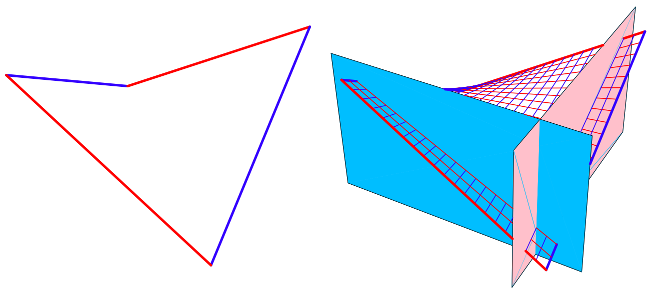
3.3.2. Hiperbolički paraboloid

Ova pravčasta ploha, s dva sistema izvodnica, je konoid 2. stupnja. Zadavati se može na više načina.

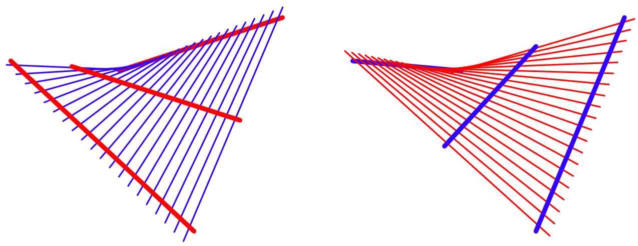
1. S dva pravca u konačnosti i jednim u beskonačnosti kao ravnalicama. (Beskonačno daleka ravnalica zadaje se direkcijskom ravninom.)



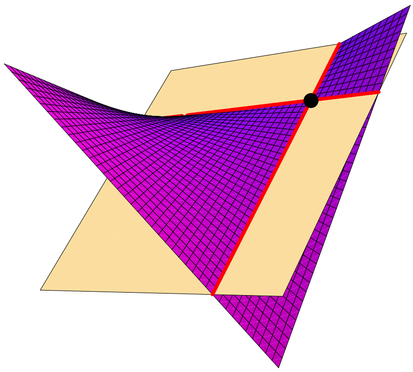
2. S vitoperim četverovrhom.



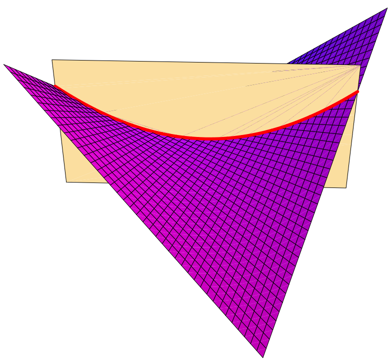
3. S tri pravca u konačnosti koji su paralelni s jednom ravninom.

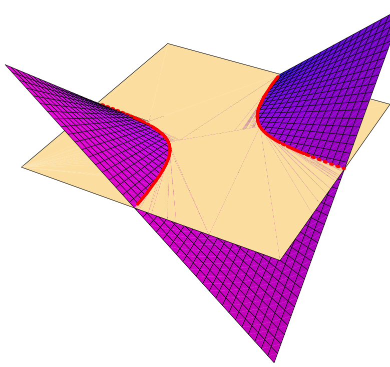


U svakoj točki HIPAR-a dirna je ravnina određena izvodnicama koje se u toj točki sijeku.



Osim dviju izvodnica presjek HIPAR-a može biti *parabola* (ako je presječna ravnina paralelna s presječnicom direkcijskih ravnina) ili *hiperbola*.





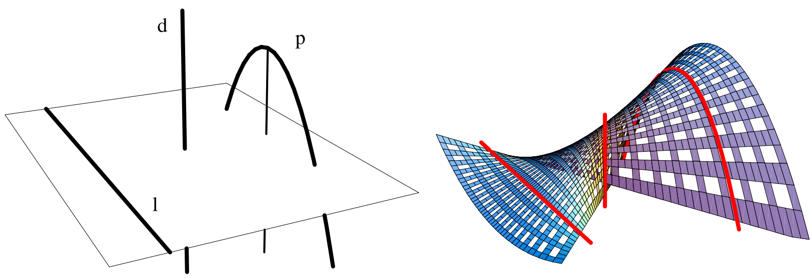
3.4. Primjeri konstrukcije izvodnica pravčastih ploha 3. i 4. stupnja

3.4.1. Ploha 3. stupnja

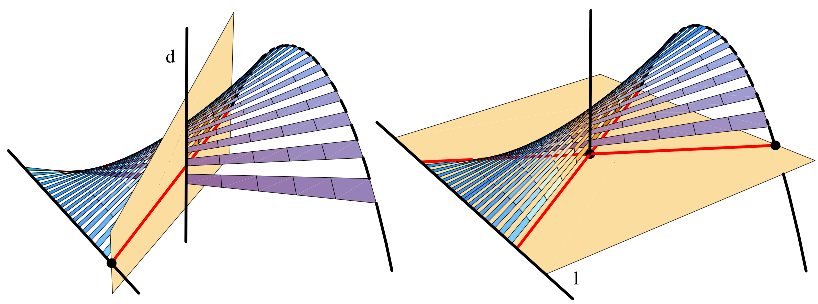
Ravnalice plohe su parabola p i pravci d i l u položaju kao na lijevoj slici.

Budući da je pravac d paralelan s osi parabole p ploha je 3. stupnja. Naime, pravac d siječe parabolu u njezinoj beskonačno dalekoj točki.

Transverzale tih ravnalica izvode plohu na desnoj slici.

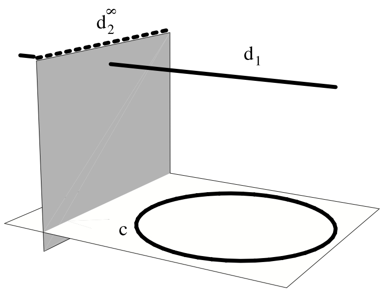


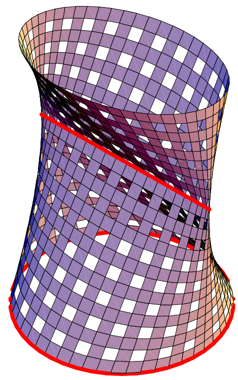
Izvodnice plohe konstruiraju se u ravninama pramena $[d]$ (slika lijevo) ili $[l]$ (slika desno). Pravac d je dvostruki pravac plohe pa u svakoj ravnini pramena $[d]$ leži samo jedna izvodnica.



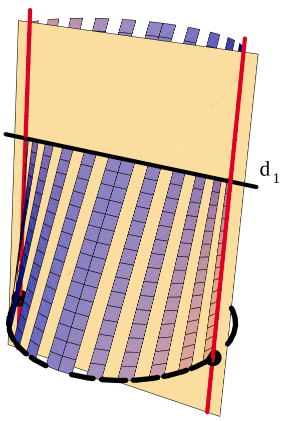
3.4.2. Ploha 4. stupnja

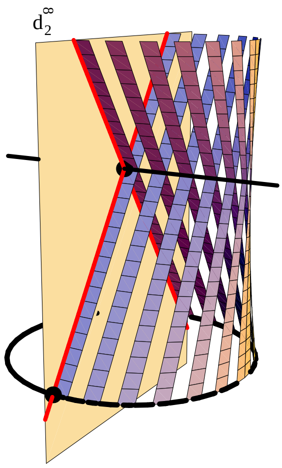
Ravnalice plohe su kružnica c te pravci d_1 i d_2^{∞} u položaju kao na lijevoj slici. Pravac d_2^{∞} je beskonačno dalek i određen je direkcijskom ravninom. Ravnalice se ne sijeku pa određuju konoid 4. stupnja. Izvedena ploha prikazana je na desnoj slici.





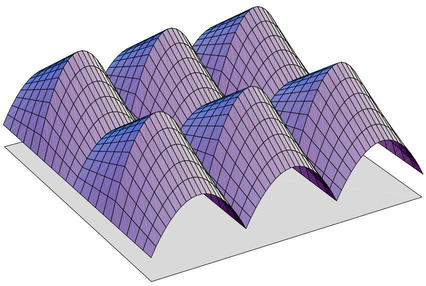
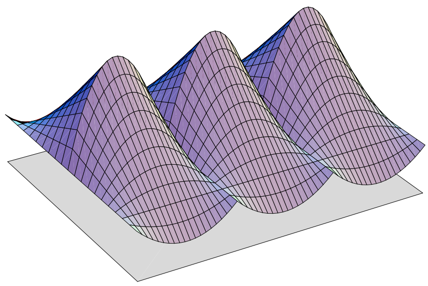
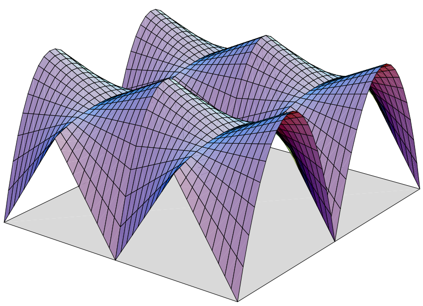
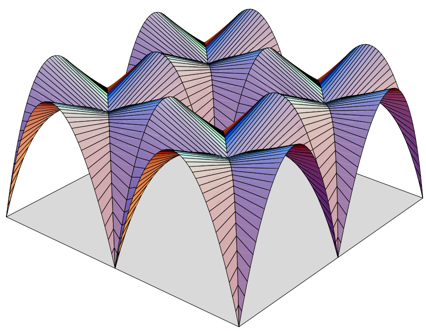
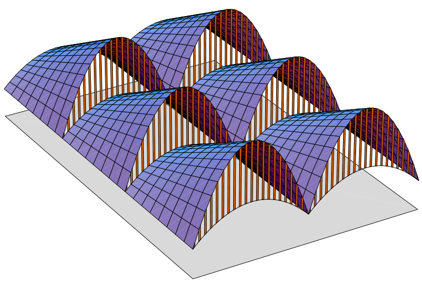
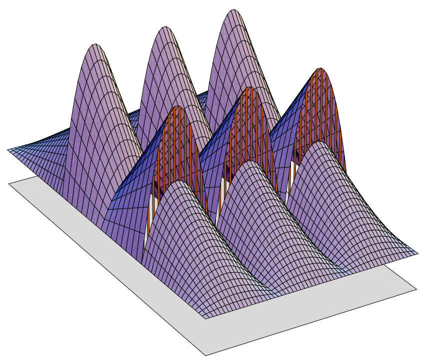
Izvodnice plohe konstruiraju se u ravninama pramena $[d_1]$ (lijeva slika) ili $[d_2^\infty]$ (desna slika). Pravci d_1 i d_2^∞ dvostruke su linije plohe.





3.5. Prikazi moguće primjene paraboličkog konoida pri natkrivanju pravokutnoga tlocrta

U radu [1] izvedena je analitička baza za prikaz jednog tipa paraboličkog konoida 3. stupnja u programu *Mathematica*. Taj se konoid na mnogo načina može koristiti za natkrivanje. Elementi su razni izrezi plohe koji se jednostavno slažu u nizove. Na sljedećim je crtežima prikazano nekoliko ideja za natkrivanje pravokutnoga tlocrta.

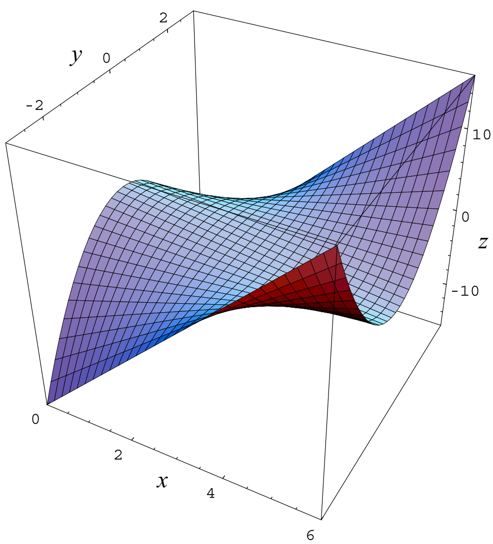
3.6. Gaussova i srednja zakrivljenost paraboličkog konoida 3. stupnja

U radu [1] definirane su funkcije

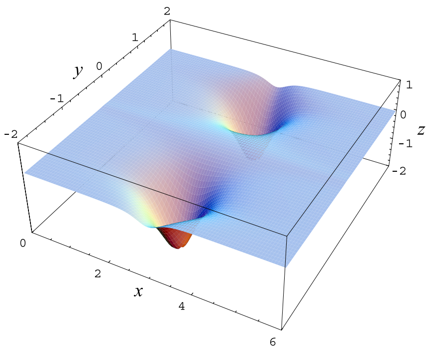
```
Kon[a_,b_,c_][x_,y_]:=c/(a*b^2)(y^2-b^2)(a-x)
Konoid[a_,b_,c_][u_,v_]:={u,v,c/(a*b^2)(v^2-b^2)(a-u)}
```

koje za odabir konkretnih parametara $a, b, c \in R$, $a, b, c \neq 0$ omogućuju prikaze ranije spomenutog konoida 3. stupnja.

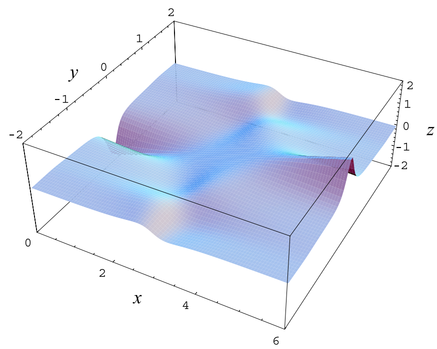
Gaussova i *srednja* zakrivljenost u regularnoj točki plohe važni su pojmovi diferencijalne geometrije ploha. *Glavne* zakrivljenosti u nekoj regularnoj točki plohe su ekstremne zakrivljenosti onih krivulja na plohi koje prolaze tom točkom, a leže u ravninama koje sadrže normalu plohe. U točki plohe Gaussova je zakrivljenost jednaka *produktu*, a srednja *polovini zbroja* glavnih zakrivljenosti. Za njihovo izračunavanje koriste se I. i II. diferencijalna forma [7, str. 252], [5, str. 373-380]. U knjizi [5, str. 394] definirane su, u jeziku *Mathematica*, funkcije `gcurvature` i `mcurvature` koje za bilo koju plohu zadanu parametarskim jednadžbama računaju vrijednosti Gaussove i srednje zakrivljenosti u svakoj njezinoj regularnoj točki. Te su definicije upotrijebljene pri izradi sljedećih crteža.



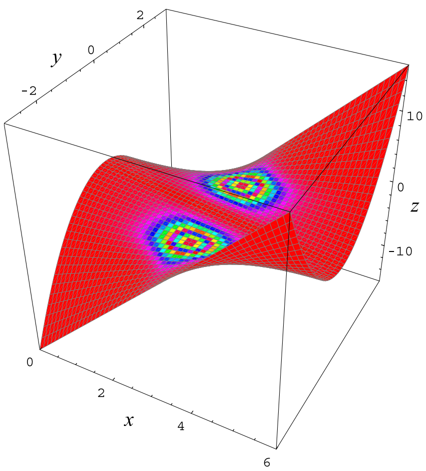
Slika 1. Graf funkcije `Kon[3,1,-2]` u području $[0, 6] \times [-1, 1]$.



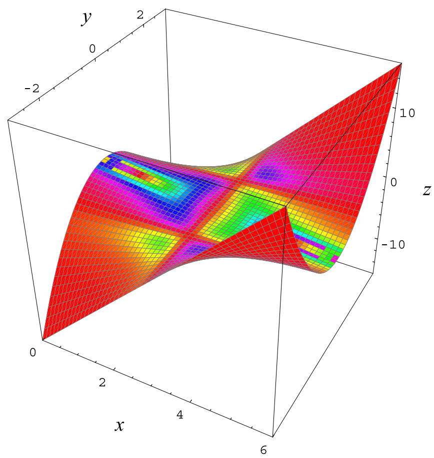
Graf funkcije
`gcurvature[Konoid[3,1,-2]]`
u području $[0,6] \times [-1,1]$.



Graf funkcije
`mcurvature[Konoid[3,1,-2]]`
u području $[0,6] \times [-1,1]$.



Graf sa slike 1 obojan bojom koja je funkcija Gaussove zakrivljenosti.



Graf sa slike 1 obojan bojom koja je funkcija srednje zakrivljenosti.

4. Zaključak

Uz program *Mathematica* moglo bi se, čak i u ovako lošim uvjetima (što se opremljenosti računalima tiče), poboljšati nastavu konstruktivne geometrije na prvim godinama većine naših tehničkih fakulteta.

Međutim, izrada primjerenih internet stranica ili notebooka koji se mogu koristiti za pojedina predavanja sa sadržajima kao što su metode projiciranja, vizualizacija rješenja teorijskih položajnih zadataka, presjeci i prodori 3D objekata te niza drugih geometrijskih sadržaja bitnih u obrazovanju velikog broja inženjera, zahtijevala bi, uz interfakultetsku suradnju nastavnika i neku financijsku potporu.

Literatura

[1] S. Filipan, S. Gorjanc, H. Kvasnička: *Natkrivanje paraboličkim konoidom* KoG No. 5, 57-64, 2000/01.

[2] S. Gorjanc: *The Generation of Ruled Quartics in Mathematica 3.0* Special European SEFI Seminar on Geometry in Engineering Education, Bratislava-Smolenice, Slovakia, 1997.

[3] S. Gorjanc: *The Generation of Ruled Cubics by Using Mathematica 3.0.* Proceedings of 8th International Conference on Goemetry and Graphics, Austin,Texas, USA, 1998.

[4] S. Gorjanc: *Izvođenje pet tipova pravčastih ploha 4. stupnja* KoG No. 2, 57-67, 1997.

[5] A. Gray: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.* CRC Press, Boca Raton, 1998.

[6] B. Kučinić, O. Kristoforović, I. Saler: *Oble forme u graditeljstvu.* Građevinar, Zagreb, 1992.

[7] Ž. Marković: *Uvod u višu analizu, II. dio.* Školska knjiga, Zagreb, 1952.

[8] E. Müller, J. L. Krames: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen.* Franc Deuticke, Leipzig und Wien, 1931.

[9] V. Niče: *Deskriptivna geometrija II.* Školska knjiga, Zagreb, 1980.

[10] S. Wolfram: *Mathematica 4.0.*

Zavod za Matematiku Građevinskog Fakulteta, Kačićeva 26, Zagreb
e-mail: sgorjanc@grad.hr