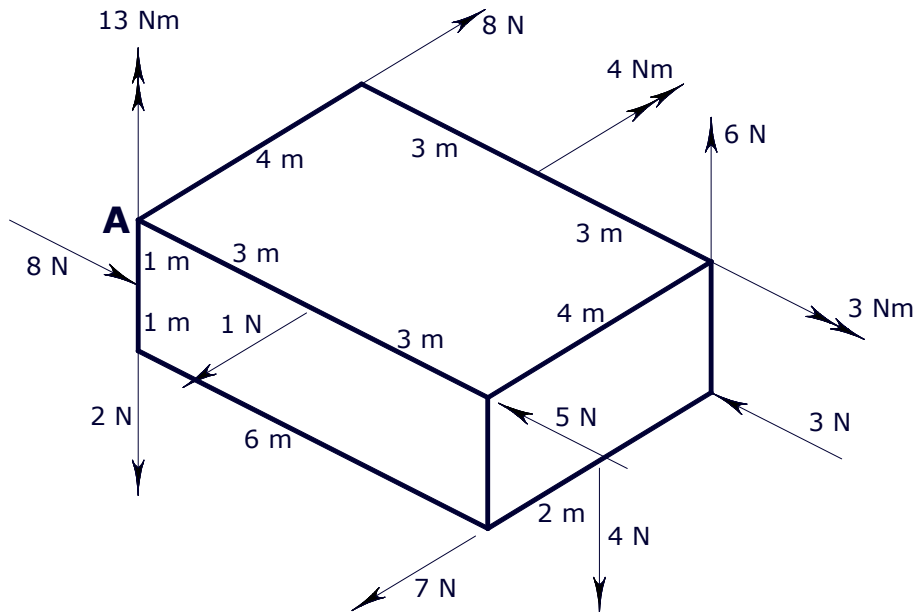


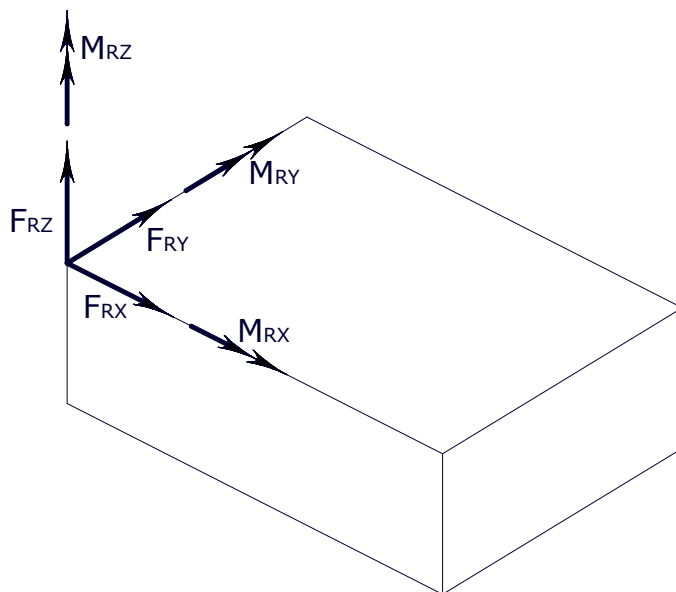
1. TREBA ODREDITI REZULTIRAJUĆE DJELOVANJE PRIKAZANOG SUSTAVA KONCENTRIRANIH DJELOVANJA U TOČKI A.



REZULTIRAJUĆE DJELOVANJE SADRŽI REZULTIRAJUĆU SILU I REZULTIRAJUĆI MOMENT KOJI SU STATIČKI EKVIVALENTNI ZADANIM DJELOVANJIMA.

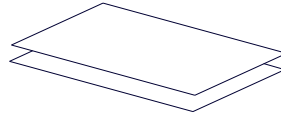
POLOŽAJ REZULTIRAJUĆEG MOMENTA SE NE MOŽE ODREDITI PA SE MOŽE UCRTATI NA BILO KOJEM MJESTU.

UMJESTO PRIKAZANIH DJELOVANJA UVEST ĆE SE:



NAJEDNOSTAVNIJE JE KROZ TOČKU A POSTAVITI ISHODIŠTE KARTEZIJEVOG SUSTAVA.

(PRI NAVOĐENJU SILA POGODNO JE ODABRATI SISTEM NPR. PO RAVNINAMA ODOZGO NA DOLJE. POČETAK → PA SLJEDEĆI RED I ONDA SLJEDEĆA RAVNINA.)



IZ UVJETA EKVIVALENCIJE SLJEDI:

$$F_{Rx} = -5 + 8 - 3 = 0$$

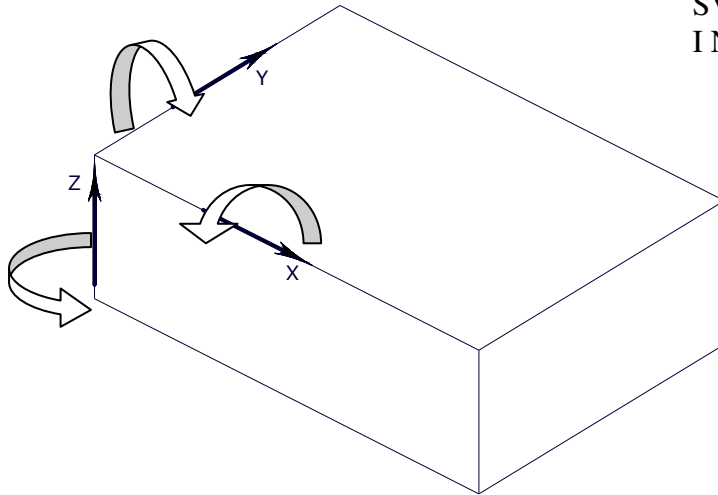
$$F_{Ry} = +8 - 1 - 7 = 0$$

$$F_{Rz} = +6 - 4 - 2 = 0$$

U OVOM JE SLUČAJU

$$\vec{F}_R = \vec{0}$$

SUSTAV DJELOVANJA SE SVODI NA SPREG A MOŽE BITI I NEUTRALAN.



$$M_{Rx} = +4 \cdot 6 + 3 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 5 Nm$$

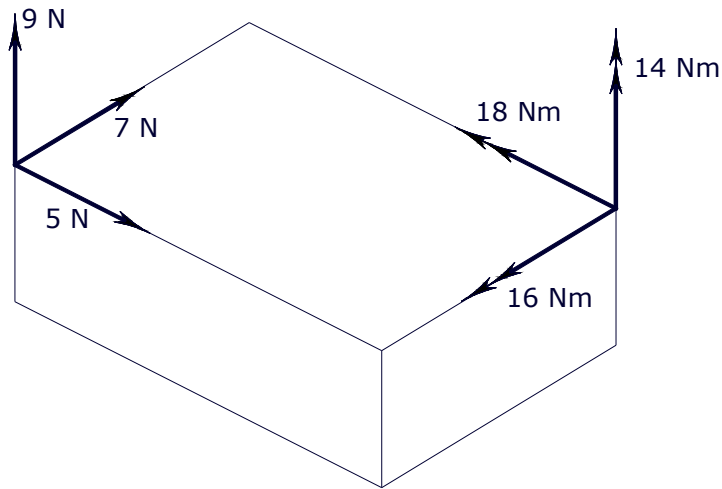
$$M_{Ry} = +4 - 6 \cdot 6 - 1 \cdot 8 - 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = -10 Nm$$

$$M_{Rz} = +13 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 7 = -20 Nm$$

SUSTAV DJELOVANJA SE SVODI NA SPREG ODNOSNO  $\vec{M}_R \neq \vec{0}$ .  
MOŽE SE POSTAVITI PITANJE  $|\vec{M}_R|$  I ODREĐIVANJE KUTOVA.

**NAPOMENA:** U OVOM SLUČAJU CENTRALNA OS NIJE DEFINIRANA.

2. TREBA ODREDITI CENTRALNU OS ZADANOG SUSTAVA KONCENTRIRANIH DJELOVANJA.



ZADANI SU S KOMPONENTANMA – SAMO JEDNA SILA I JEDAN MOMENT. MOŽE SE PRETPOSTAVIT DA JE BILO ZADANO VIŠE DJELOVANJA A DA JE OVO REZULTIRAJUĆE DJELOVANJE:

$$\vec{F}_R = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$\vec{M}_R = -18\vec{i} - 16\vec{j} + 14\vec{k}$$

ZA ODREĐIVANJE CENTRALNE OSI TREBA REZULTIRAJUĆI MOMENT RASTAVITI NA DVA VEKTORA – JEDAN PARALELAN S  $\vec{F}_R$  ( $\vec{M}_{RC}$ ) I JEDAN OKOMIT NA  $\vec{F}_R$  ( $\vec{M}_{RO}$ ):

$$\vec{M}_R = \vec{M}_{RC} + \vec{M}_{RO}$$

POSTUPAK ĆE SE PROVESTI BEZ UVOĐENJA JEDINIČNOG VEKTORA ZA  $\vec{F}_R$

$$\vec{M}_{RC} = \lambda \cdot \vec{F}_R; \quad (\lambda \text{ JE SKALARNI FAKTOR ALI DAKAKO NIJE DULJINA VEKTORA } \vec{M}_{RC}.)$$

SLIJEDI:

$$\vec{M}_R = \lambda \cdot \vec{F}_R + \vec{M}_{RO} \quad (\text{IZRAZ SE SKALARNO MNOŽI S } \vec{F}_R)$$

$$\vec{M}_R \cdot \vec{F}_R = \lambda \cdot (\vec{F}_R \cdot \vec{F}_R) + \vec{M}_{RO} \cdot \vec{F}_R \quad (\text{POSLJEDNJI ČLAN} = 0)$$

SLIJEDI:

$$\lambda = \frac{\vec{M}_R \cdot \vec{F}_R}{\vec{F}_R \cdot \vec{F}_R}$$

$$\vec{M}_R \cdot \vec{F}_R = -18 \cdot 5 - 7 \cdot 16 + 9 \cdot 14 = -76$$

$$\vec{F}_R \cdot \vec{F}_R = 5^2 + 7^2 + 9^2 = 155$$

$$\lambda = -0,49032258 \quad (\text{ZA PRIMJENU ODBACIT 3 MJESTA})$$

$$M_{RCx} = \lambda \cdot F_{Rx} = -2,4516129$$

$$M_{RCy} = \lambda \cdot F_{Ry} = -3,4322581$$

$$M_{RCz} = \lambda \cdot F_{Rz} = -4,4129032$$

OKOMITI PRIBROJNIK  $M_{RO}$  ODREĐUJE SE IZ UVODNOG IZRAZA:

$$\vec{M}_{RO} = \vec{M}_R - \vec{M}_{RC} \quad \text{PA SLIJEDI}$$

$$M_{ROx} = M_{Rx} - M_{RCx} = -15,548387$$

$$M_{ROy} = M_{Ry} - M_{RCy} = -12,567742$$

$$M_{ROz} = M_{Rz} - M_{RCz} = +18,4129032$$

KONTROLIRAT ĆE SE OKOMITOST  $\vec{M}_R$  I  $\vec{F}_R$ :

$$\vec{F}_R \cdot \vec{M}_R = 5 \cdot (-15,548387) + 7 \cdot (-12,567742) + 9 \cdot (18,412903) = 0,000000$$

DIO MOMENTA  $M_{RC}$  KOJI JE PARALELAN JE DIO REZULTANTNOG

DJELOVANJA NA CENTRALNOJ OSI (DIO TZV DINAMIČKOG VIJKA).

OKOMITI DIO MOMENTA I REZULTIRAJUĆA SILA U A MOGU SE ZAMJENITI

EKVIVALENTNOM SILOM NA TRAŽENOJ OSI. VEKTORSKI SE

REZULTIRAJUĆA SILA NE MIJENJA. TREBA ODREDITI JEDNU TOČKU S

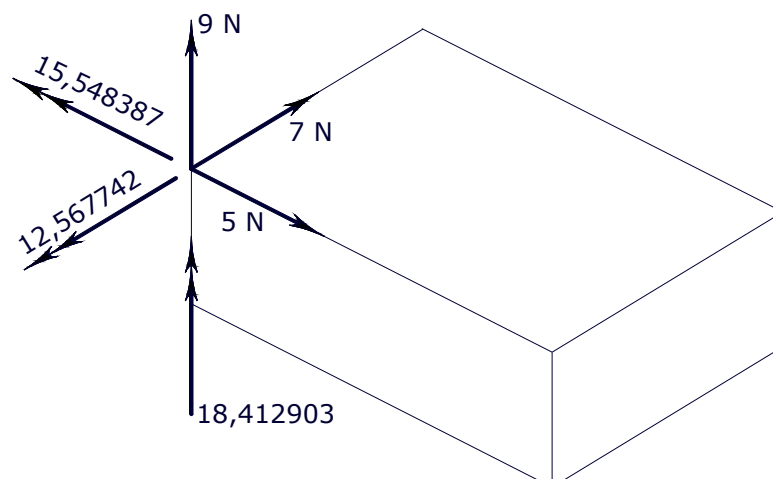
CENTRALNE OSI. MOGUĆA SU DVA RAČUNSKA PRISTUPA:

a) NEFORMALNI POSTUPAK

ZBOG PREGLEDNOSTI JE UZ REZULTIRAJUĆU SILU U A PRIKAZAN U

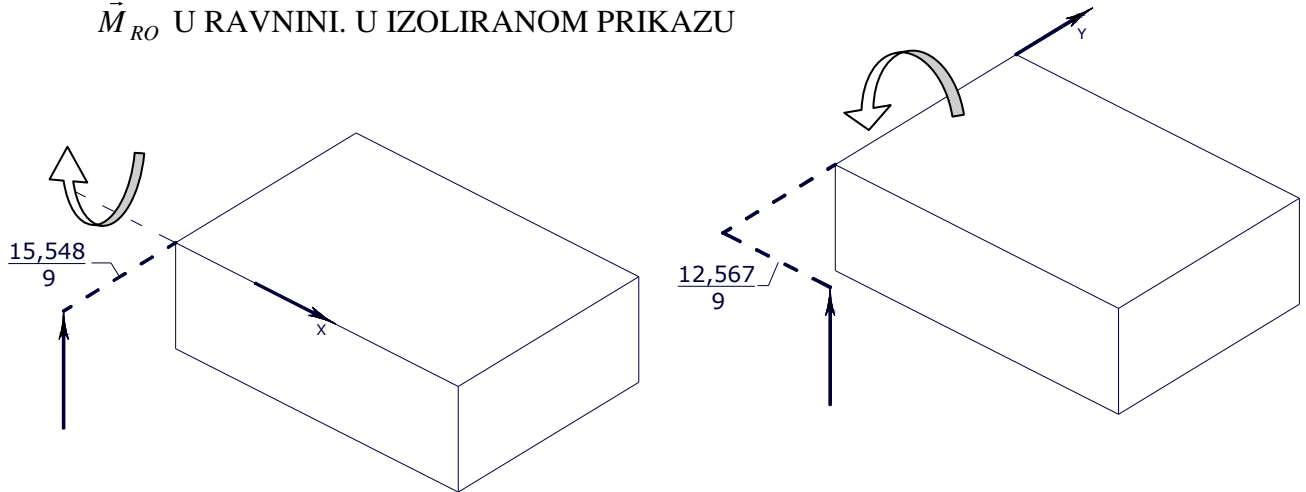
KOMPONENTAMA SAMO OKOMIT DIO REZULTIRAJUĆEG MOMENTA

(STVARNE ORJENTACIJE; UZ NJIH POZITIVAN BROJ ILI |VEKTOR| ).

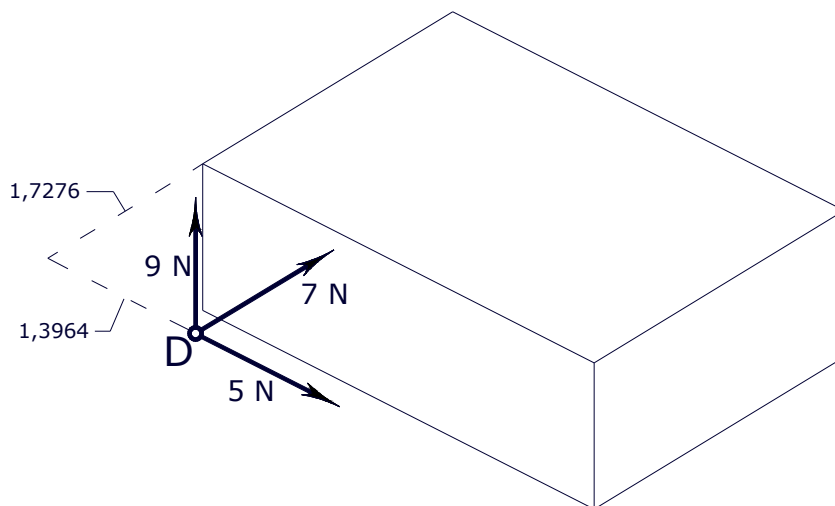


TRAŽENA TOČKA SE MOŽE POTRAŽITI U BILO KOJOJ RAVNINI. OVDJE JE ODABRANA RAVNINA GORNJE "HORIZONTALNE" STRANICE.

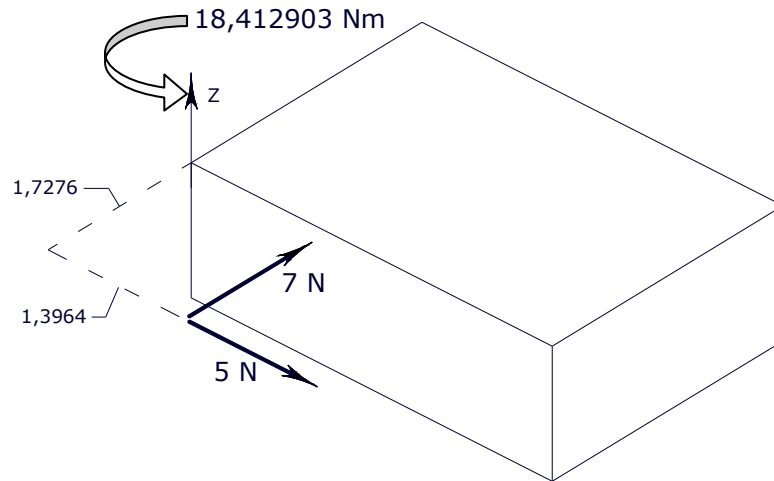
ODREĐUJE SE TOČKA U KOJOJ ĆE KOMPONENTA  $F_{Rz}$  OKO OSI  $x$  I OKO OSI  $y$  DATI TOČNO MOMENTE KOJI ODGOVARAJU KOMPONENTAMA  $\vec{M}_{RO}$  U RAVNINI. U IZOLIRANOM PRIKAZU



DA ZAMIJENI  $M_{ROx}$  NOVA SILA SE MORA NALAZITI NA ODGOVARAJUĆEM RAZMAKU OD OSI  $x$ . DA K TOME JOŠ ZAMIJENI I  $M_{ROy}$  NOVA SILA SE MORA ODMAKNUTI I OD OSI  $y$ . DOBIVA SE:



TIME JE ODREĐENA TOČKA **D** S CENTRALNE OSI. TAKO POSTAVLJENA SILA MORA ZAMIJENITI I  $M_{ROz}$ . TO ĆE SE ISKORISTITI ZA KONTROLU.



$$+1,7276 \cdot 5 + 1,3964 \cdot 7 = 18,412903$$

b) FORMALNI POSTUPAK

U TOČKI A NALAZI SE POČETAK VEKTORA  $\vec{l}_c$ . VRH SE NALAZI NA CENTRALNOJ OSI I OZNAČITI ĆE SE S C.

$$\vec{l}_c \times \vec{F}_R = \vec{M}_{RO} = \vec{M}_R - \vec{M}_{RC}$$

PRIHVATLJIVI SU SVI VEKTORI KOJIMA SE VRH NALAZI NA CENTRALNOJ OSI. POSTUPAK JE NAJLAKŠI AKO SE ODABERE SAMO JEDAN  $\vec{l}_c$  KOJI JE OKOMIT NA  $\vec{F}_R$ .

JEDNADŽBA ĆE SE S LIJEVA VEKTORSKI POMNOŽITI S  $\vec{F}_R$

$$\begin{aligned} \vec{F}_R \times (\vec{l}_c \times \vec{F}_R) &= \vec{F}_R \times (\vec{M}_R - \vec{M}_{RC}) \\ \vec{l}_c (\vec{F}_R \cdot \vec{F}_R) - \underbrace{\vec{F}_R (\vec{l}_c \cdot \vec{F}_R)}_{0 \text{ zbog okomitosti}} &= \underbrace{\vec{F}_R \times \vec{M}_R}_{0 \text{ zbog paralelnosti}} - \underbrace{\vec{F}_R \times \vec{M}_{RC}}_{0 \text{ zbog paralelnosti}} \end{aligned}$$

SLIJEDI:

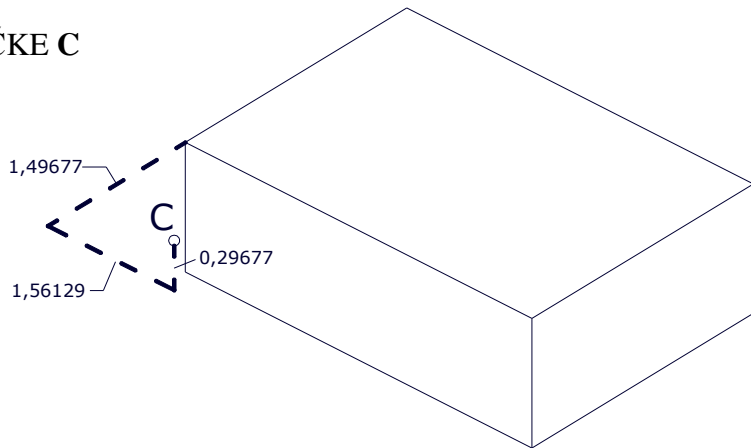
$$\vec{l}_c = \frac{\vec{F}_R \times \vec{M}_R}{\vec{F}_R \cdot \vec{F}_R}$$

$$\vec{F}_R \times \vec{M}_R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ +5 & +7 & +9 \\ -18 & -16 & +14 \end{vmatrix}$$

$$\vec{F}_R \cdot \vec{F}_R = 155$$

$$\vec{l}_c = +1,5612903 \cdot \vec{i} - 1,4967742 \cdot \vec{j} + 0,29677419 \cdot \vec{k}$$

## SKICA POLOŽAJA TOČKE C



VEKTOR  $\vec{p}$  KOJI SPAJA TOČKE D I C MORA LEŽATI NA CENTRALNOJ OSI  
ŠTO ZNAČI DA MORA BITI PARALELAN S VEKTOROM  $\vec{F}_R$ .

$$\vec{p} = \vec{l}_C - \vec{l}_D$$

$$p_x = 0,16487452$$

$$p_y = 0,23082436$$

$$p_z = 0,29677419$$

OMJERI PRIPADNIH KOORDINATA BI TREBALI BITI JEDNAKI:

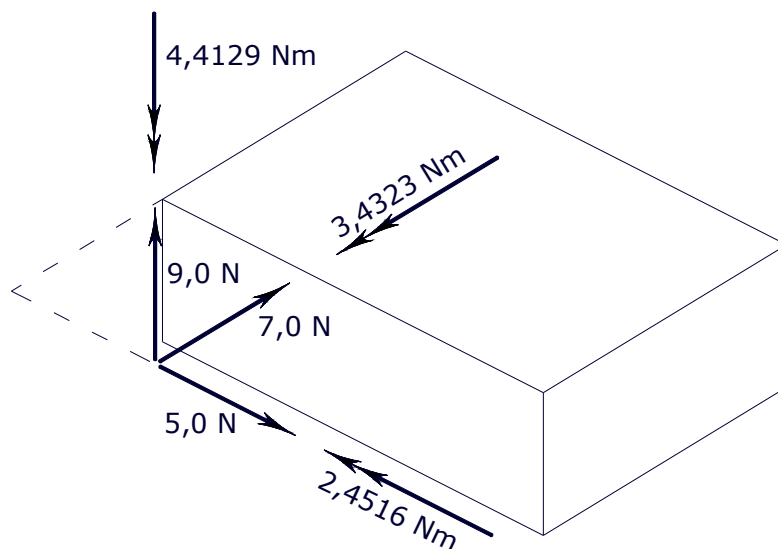
$$\frac{5}{p_x} = 30,326092$$

$$\frac{7}{p_y} = 30,326092$$

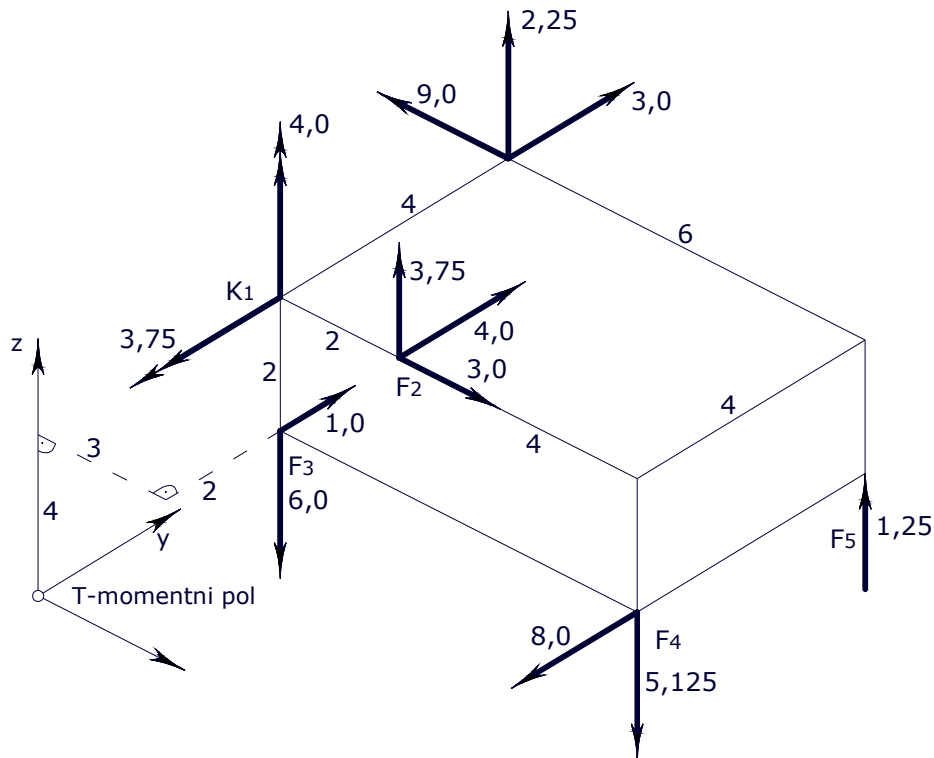
$$\frac{9}{p_z} = 30,326092$$

ŠTO JE I POKAZANO.

RJEŠENJE PRIKAZANO U TEHNIČKOJ NOTACIJI:



## NASTAVAK PROSTORNOG ZADATKA (VJEŽBE 2.)



KONTROLA RAVNOTEŽE POMOĆU VEKTORSKOG FORMALIZMA:

$$\sum \vec{l}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{K}_j = \vec{0}$$

- SILA  $F_1$ : 
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 6 & 6 \\ -9 & 3 & 2,25 \end{vmatrix} = -4,25\vec{i} - 60,75\vec{j} + 63\vec{k}$$

- SILA  $F_2$ : 
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 3,75 \end{vmatrix} = -16,5\vec{i} - 0,75\vec{j} + 14\vec{k}$$

- SILA  $F_3$ : 
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & -2,125 \end{vmatrix} = -8,25\vec{i} + 30,375\vec{j} - 9\vec{k}$$

- SILA  $F_4$ : 
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & -5,125 \end{vmatrix} = 21,75\vec{i} + 46,125\vec{j} - 72\vec{k}$$



- SILA  $F_5$ : 
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1,25 \end{vmatrix} = 7,5\vec{i} - 11,25\vec{j} + 0\vec{k}$$

- MOMENT K:  $\vec{K} = 0\vec{i} - 3,75\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\sum \vec{l}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{K}_j = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0} \quad \text{KONTROLA ŠTIMA}$$