1) U RAVNINI XY ZADAN JE VEKTOR $\vec{A}$, SVOJIM KOORDINATAMA: $A_x = -7$; $A_y = +5$.
U RAVNINI SU ZADANA I 2 PRAVCA. PRAVAC e JE ODREĐEN TOČKAMA $T_1(0;9)$ i $T_2(7;0)$ i PRAVAC f ODREĐEN ANALITIČKIM IZRAZOM: $y = 0{,}5x - 4$. NA TIM PRAVCIMA LEŽE VEKTORI $\vec{E}$ i $\vec{F}$; TREBA IH ODREDITI TAKO DA VRIJEDI: $\vec{E} + \vec{F} = \vec{A}$. ZADATAK TREBA RIJEŠITI RAČUNSKI I GRAFIČKI.

a) RJEŠENJE POMOĆU VELIČINE VEKTORA
VEKTORI SE TRAŽE U OBLIKU $\vec{E} = E \cdot \vec{e_0}$; $\vec{F} = F \cdot \vec{f_0}$
PRI ČEMU S E i F VELIČINE VEKTORA; SKALARI ZA KOJE VRIJEDI: $|E| = |\vec{E}|$; $|F| = |\vec{F}|$.
$\vec{e_0}$ i $\vec{f_0}$ SU JEDINIČNI VEKTORI ODABRANI NA PRAVCIMA e i f.

ZA ODREĐIVANJE $\vec{e_0}$ ODABIRE SE POMOĆNI VEKTOR $\vec{p}$ ČIJI SE POČETAK NALAZI U T_1, A VRH U T_2

SLIJEDI: $p_x = x_2 - x_1 = 7$

$p_y = y_2 - y_1 = -9$

$|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = 11{,}4018$

$$e_{0x} = \frac{p_x}{|\vec{p}|} = 0{,}61394; \qquad e_{0y} = \frac{p_y}{|\vec{p}|} = -0{,}78935$$

KONTROLA $\sqrt{e_{0x}^2 + e_{0y}^2} = 0{,}99999$ ✓

ZA ODREĐIVANJE f_0 ODABIRE SE POMOĆNI VEKTOR ČIJA JE X KOORDINATA JEDINIČNA; KOEFICIJENT NAGIBA JE Y- KOORDINATA

$$d_x = 1; \quad d_y = 0{,}5; \quad d = \sqrt{1+0{,}5^2} = 1{,}11803$$

$$f_{0x} = \frac{d_x}{d} = 0{,}89443; \quad f_{0y} = \frac{d_y}{d} = 0{,}44722$$

KONTROLA $\sqrt{f_{0x}^2 + f_{0y}^2} = 1{,}00001 \checkmark$

VEKTORSKA JEDNADŽBA $\vec{e_0}E + \vec{f_0}F = \vec{A}$

ODGOVARA SUSTAVU LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI:

$$0{,}61394 \cdot E + 0{,}89443 \cdot F = -7$$
$$-0{,}78935 \cdot E + 0{,}44722 \cdot F = +5$$

RJEŠENJE GLASI: $E = -7{,}7532$; $F = -2{,}5044$

KONTROLA:

$$0{,}61394 \cdot (-7{,}7532) + 0{,}89443 \cdot (-2{,}5044) = -7{,}00001$$
$$-0{,}78935(-7{,}7532) + 0{,}44722(-2{,}5044) = 4{,}99997$$

$$E_x = 0{,}61394 \cdot (-7{,}7532) = -4{,}7600$$
$$E_y = -0{,}78935 \cdot (-7{,}7532) = +6{,}1200$$
$$F_x = 0{,}89443 \cdot (-2{,}5044) = -2{,}2400$$
$$F_y = 0{,}44722 \cdot (-2{,}5044) = -1{,}1200$$

b) RJEŠENJE POMOĆU OPĆEG FAKTORA

TRAŽENI VEKTORI SE MOGU IZRAZITI DIREKTNO; MNOŽENJEM POMOĆNIH VEKTORA NEPOZNATIM FAKTORIMA.

$\vec{E} = \lambda \cdot \vec{p}$; $\vec{F} = \mu \cdot \vec{d}$

VEKTORSKA JEDNADŽBA $\lambda \cdot \vec{p} + \mu \cdot \vec{d} = \vec{A}$

ODGOVARA SUSTAVU LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI:

$$7 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu = -7$$
$$-9\lambda + 0{,}5 \cdot \mu = +5$$

RJEŠENJA:

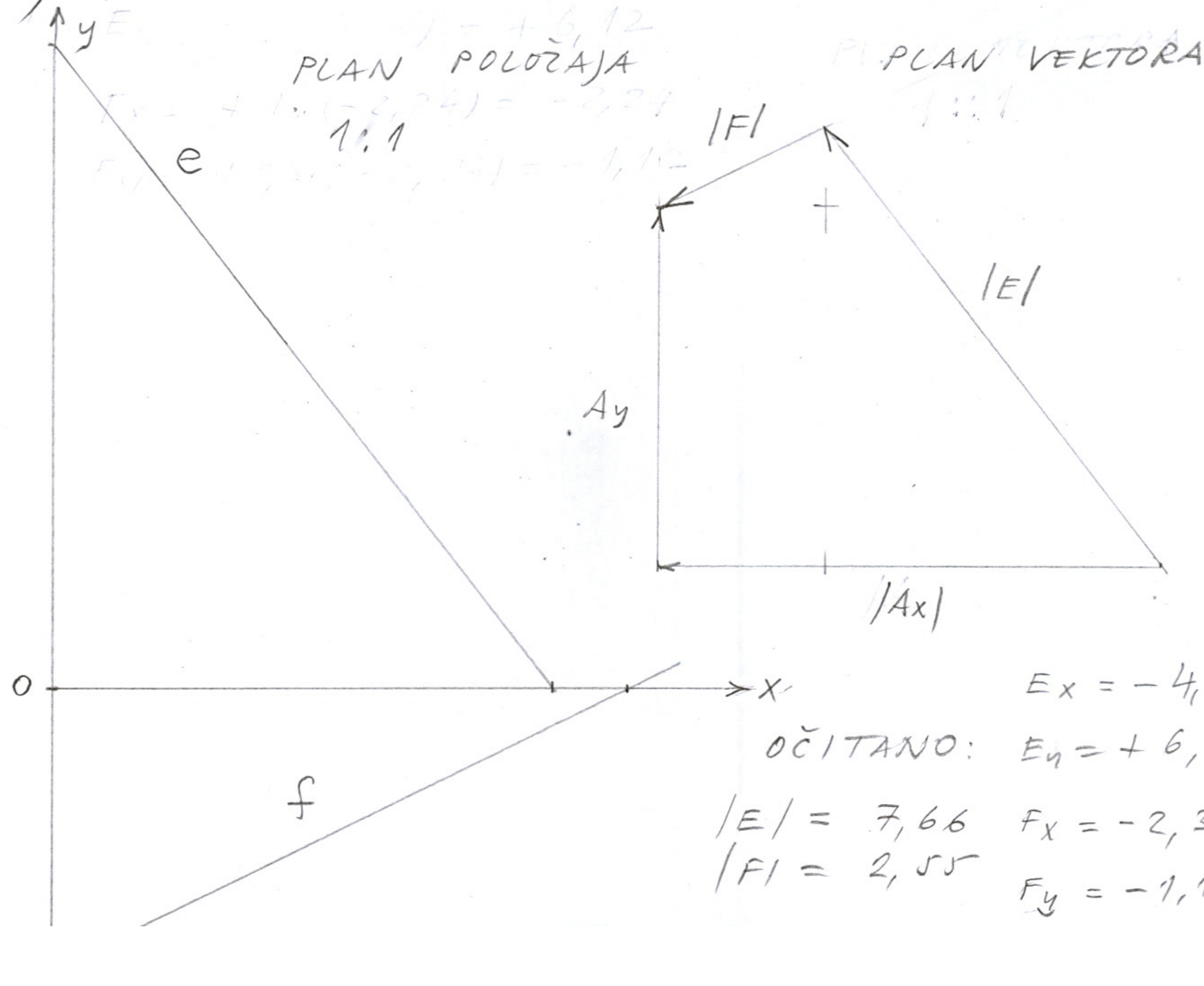
$\lambda = -0{,}68$

$\mu = -2{,}24$

$E_x = +7 \cdot (-0{,}68) = -4{,}76$; $E_y = -9 \cdot (-0{,}68) = +6{,}12$

$F_x = +1 \cdot (-2{,}24) = -2{,}24$; $F_y = 0{,}5(-2{,}24) = -1{,}12$

c) GRAFIČKI POSTUPAK



OČITANO:

$E_x = -4{,}70$

$E_y = +6{,}18$

$|E| = 7{,}66$ $F_x = -2{,}34$

$|F| = 2{,}55$ $F_y = -1{,}12$

2) U PROSTORU JE ZADAN VEKTOR $\vec{B}$, POMOĆU NJEGOVIH KOORDINATA: $B_x = 6$; $B_y = -8$; $B_z = 11$. TRAŽE SE VEKTORI $\vec{S}$ i $\vec{T}$ TAKVI DA VRIJEDI $\vec{B}+\vec{S}+\vec{T}=\vec{0}$. PRI TOME VEKTOR $\vec{S}$ LEŽI NA PRAVCU KROZ ISHODIŠTE KOJI JE ODREĐEN S 2 ORJENTIRANA KUTA: $\varphi = 123°$ i $\psi = 154°$. VEKTOR $\vec{T}$ LEŽI U RAVNINI KOJA JE ODREĐENA ANALITIČKIM IZRAZOM

$2x - 3y + 4z = 5$

PRIKAZATI ĆE SE 2 NAČINA RJEŠAVANJA

a) PROJEKCIJA NA NORMALU RAVNINE

$\vec{S} = S \cdot \vec{s_0}$; $\quad s_{0x} = \cos\varphi \cdot \cos\psi = 0,48952$

$s_{0y} = \sin\varphi \cdot \cos\psi = -0,75379$

$s_{0z} = \sin\psi = 0,43837$

VEKTOR $\vec{d} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ JE OKOMIT NA RAVNINU. AKO SE VEKTORSKA JEDNADŽBA KOJU TREBA ZADOVOLJITI SKALARNO POMNOŽI S TIM VEKTOROM, DOBIVA SE

$\vec{B}\cdot\vec{d} + \vec{S}\cdot\vec{d} + \vec{T}\cdot\vec{d} = \phi$

KAKO $\vec{T}$ LEŽI U RAVNINI, $\vec{T}\cdot\vec{d} = 0$ (SKALAR). NAKON UVRŠTAVANJA $\vec{S} = S\cdot\vec{s_0}$ DOBIVA SE

$$S = -\frac{\vec{B}\cdot\vec{d}}{\vec{s_0}\cdot\vec{d}}$$

12
24
44

$\vec{B}\cdot\vec{d} = 6\cdot 2 + (-8)\cdot(-3) + 11\cdot 4 = 80$

$\vec{s_0}\cdot d = 0,48952\cdot 2 - 0,75379\cdot(-3) + 0,43837\cdot 4 =$

$= 4,99389$

$$S = -\frac{80}{4,99389} = -16,0196$$

$S_x = s_{ox} \cdot S = -7,8410$

$S_y = s_{oy} \cdot S = 12,075$

$S_z = s_{oz} \cdot S = -7,0225$, TIME JE ODREĐEN $\vec{S}$.

IZ ZADANE JEDNADŽBE SLIJEDI

$T = -\vec{B} - \vec{S}$

$T_x = 7,841 - 6 = 1,841$

$T_y = -12,075 + 8 = -4,075$

$T_z = 7,0225 - 11 = -3,9775$, TIME JE ODREĐEN $\vec{T}$

KONTROLA

$\bar{T} \circ \bar{d}$ TREBA BITI $\emptyset$

$1,841 \cdot 2 - 4,075 \cdot (-3) - 3,9775 \cdot 4 = -0,003$

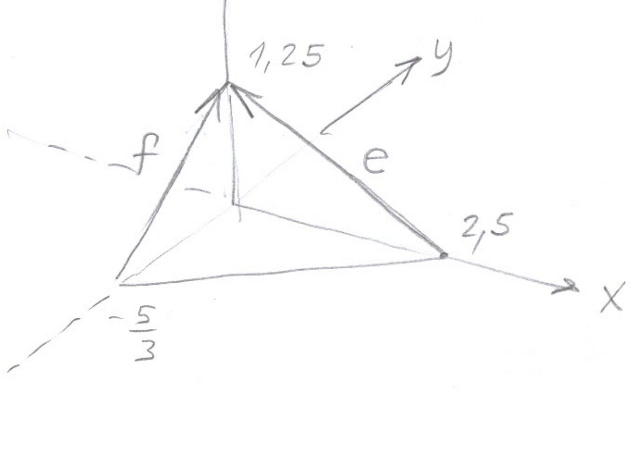
ZA OCJENU TOČNOSTI KORISTI SE RELATIVNO ODSTUPANJE. NAJJEDNOSTAVNIJI KRITERIJ JE: OMJER ODSTUP. I APS. NAJVEĆEG DOPRINOSA U IZRAZU TREBA BITI MALEN

$|-3,9775 \cdot 4| = 15,91$

$\Delta r = \frac{0,003}{15,91} = 0,00002$ ŠTO ZADOVOLJAVA.

b) UVOĐENJE POMOĆNIH VEKTORA U RAVNINU.

U RAVNINI SE ODABIRU 2 NEPARALELNA VEKTORA npr $\vec{e}$ i $\vec{f}$ i RJEŠAVA ZADATAK $\vec{B} + S\vec{s}_0 + \lambda\vec{e} + \mu\vec{f} = \vec{0}$



ODABRANI SU VEKTORI KOJI LEŽE NA PRESJEČNICAMA ZADANE RAVNINE S RAVNINAMA XZ i YZ.

$\vec{e} = -2{,}5\,\vec{i} + 1{,}25\,\vec{k}$; $\vec{f} = +\frac{5}{3}\vec{j} + 1{,}25\,\vec{k}$

DOBIVENA VEKTORSKA JEDNADŽBA ODGOVARA SUSTAVU LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNADŽBI

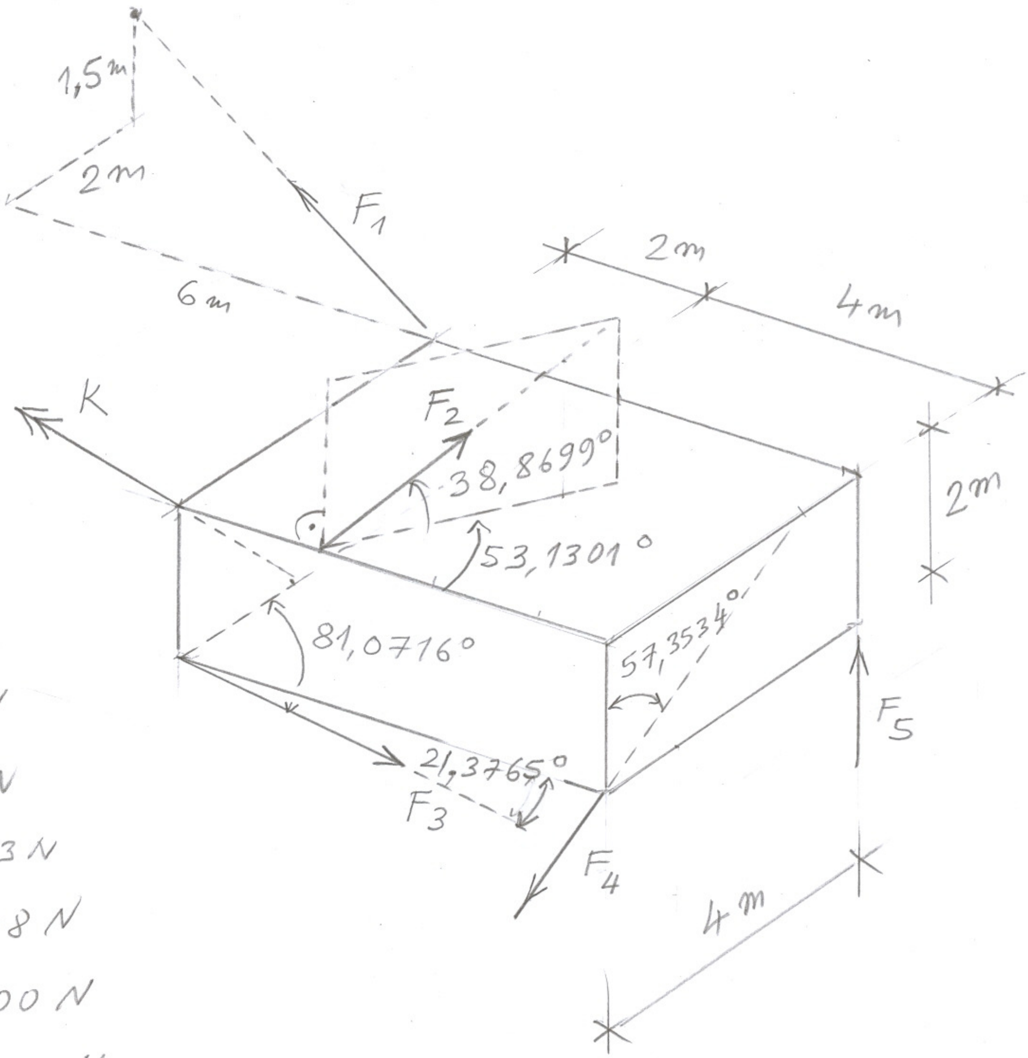
$$+0{,}48952\cdot S - 2{,}5\cdot\lambda = -6$$
$$-0{,}75379\cdot S + \frac{5}{3}\mu = +8$$
$$+0{,}43837\cdot S + 1{,}25\cdot\lambda + 1{,}25\cdot\mu = -11$$

RJEŠENJA SU: $S = -16{,}0149$
$\lambda = -0{,}73586$
$\mu = -2{,}4431$

VEKTOR $\vec{T}$ DOBIVA SE KAO ZBROJ VEKTORA NA ODABRANIM PRAVCIMA

$$T_x = \lambda e_x + \mu f_x = +1{,}8396$$
$$T_y = \lambda e_y + \mu f_y = -4{,}0715$$
$$T_z = \lambda e_z + \mu\cdot f_z = -3{,}9738$$

3) PRIKAZANO TIJELO IMA OBLIK KVADRA I NALAZI SE U STANJU RAVNOTEŽE. TREBA PROVJERITI DA LI SU ZADOVOLJENA OBA VEKTORSKA UVJETA RAVNOTEŽE.



$F_1 = 9,7500\,N$

$F_2 = 6,2500\,N$

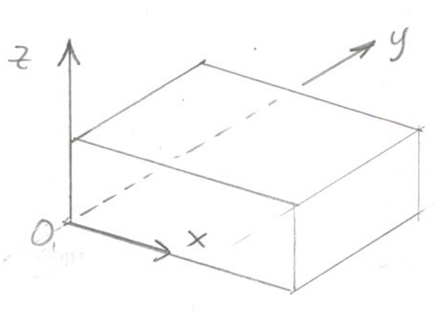
$F_3 = 6,4433\,N$

$F_4 = 9,5008\,N$

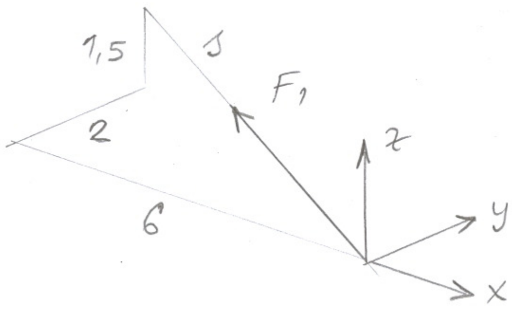
$F_5 = 1,2500\,N$

$K = 5,4829\,Nm$

IZBOR KOORDINATNOG SUSTAVA I TOČKE REDUKCIJE (MOMENTNOG POLA): T=O.



SILA F_1



$$s = \sqrt{6^2 + 2^2 + 1{,}5^2} = 6{,}5$$

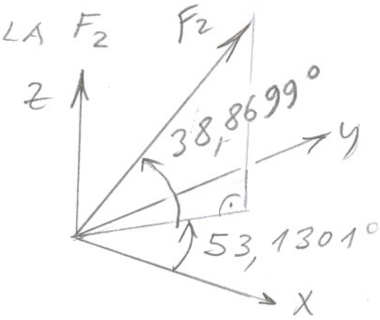
$$F_{1x} = \frac{-6 \cdot F_1}{6{,}5} = -9{,}00\,N$$

$$F_{1y} = \frac{2 \cdot F_1}{6{,}5} = +3{,}00\,N$$

$$F_{1z} = \frac{1{,}5 \cdot F_1}{6{,}5} = 2{,}25\,N$$

KONTROLA $\sqrt{9^2 + 3^2 + 2{,}25^2} = 9{,}75$ ✓

SILA F_2



$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 53{,}1301° \cdot \cos 38{,}8699°$$

$$F_{2x} = 3{,}00\,N$$

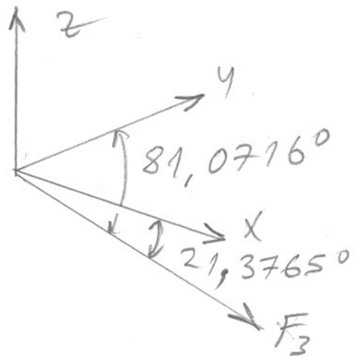
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 53{,}1301° \cdot \cos 38{,}8699°$$

$$F_{2y} = 4{,}00$$

$$F_{2z} = F_2 \cdot \sin 38{,}8699° = 3{,}75\,N$$

KONTROLA $\sqrt{3^2 + 4^2 + 3{,}75^2} = 6{,}25$ ✓

SILA F_3



$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos 21{,}3765° = 6{,}00$$

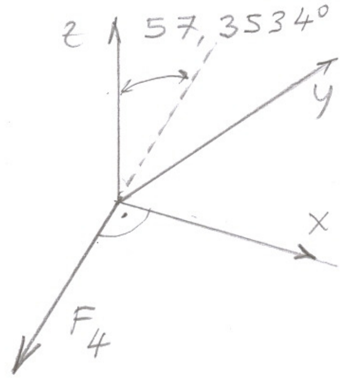
$$F_{3y} = F_3 \cdot \cos 81{,}0716° = 1{,}00$$

$$F_{3z} = -\sqrt{F_3^2 - F_{3x}^2 - F_{3y}^2} = -2{,}125$$

$$\gamma = \arccos \frac{-2{,}125}{6{,}4433} = 109{,}2566°$$

KONTROLA: $\cos^2 21{,}3765° + \cos^2 81{,}0716° + \cos^2 109{,}2566 = 1{,}000$

SILA F_4



$F_{4x} = 0$

$F_{4y} = -F \cdot \sin 57{,}3534° = -8{,}00\,N$

$F_{4z} = -F \cdot \cos 57{,}3534° = -5{,}125\,N$

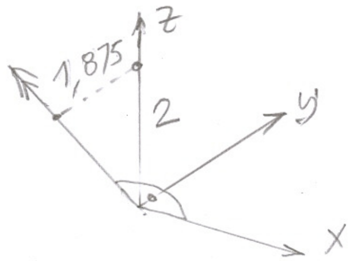
SILA F_5

$F_{5x} = \phi;$

$F_{5y} = \phi$

$F_{5z} = +1{,}25\,N$

KONCENTRIRANI MOMENT K



$s = \sqrt{2^2 + 1{,}875^2} = 2{,}74146$

$K_x = 0$

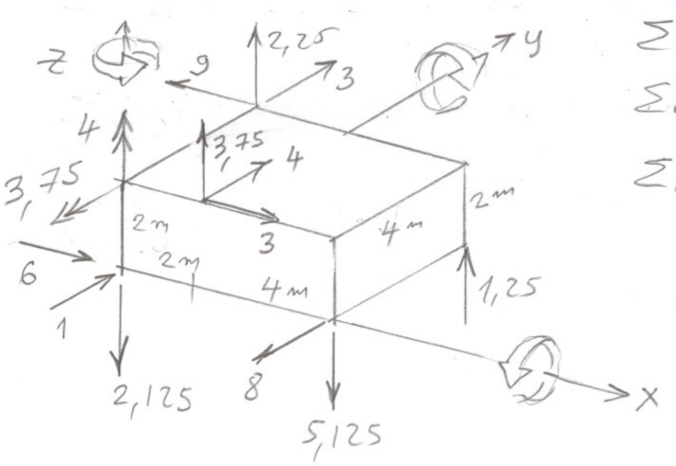
$K_y = \dfrac{-1{,}875 \cdot 5{,}4829}{2{,}74146} = -3{,}75\,Nm$

$K_z = \dfrac{2 \cdot 5{,}4829}{2{,}74146} = +4{,}00\,Nm$

KONTROLE

$\Sigma F_{xi} = -9 + 3 + 6 = \phi; \quad \Sigma F_{yi} = 1 + 3 + 4 - 8 = \phi$

$\Sigma F_{zi} = 2{,}25 - 2{,}125 - 5{,}125 + 3{,}75 + 1{,}25 = \phi$



$\Sigma M_x = 4 \cdot 2{,}25 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1{,}25$

$\Sigma M_x = 0$

$\Sigma M_y = -2 \cdot 9 - 3{,}75 - 2 \cdot 3{,}75 +$
$+ 2 \cdot 3 + 6 \cdot 5{,}125 - 6 \cdot 1{,}25$

$\Sigma M_y = 0$

$\Sigma M_z = 4 \cdot 9 + 4 + 2 \cdot 4 - 6 \cdot 8 = \phi$