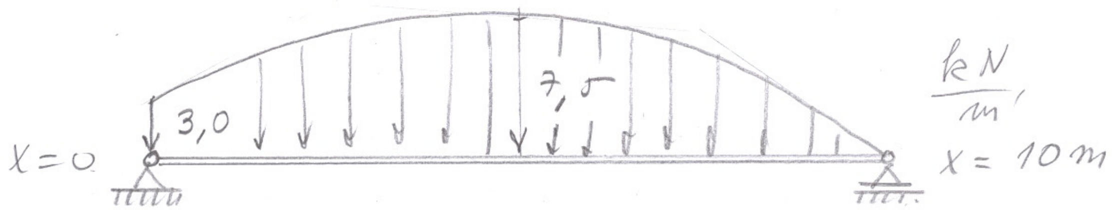
1) ZADANA JE JEDNOSTAVNA GREDA NA KOJU DJELUJE DISTRIBUIRANA SILA OKOMITA NA OS. DISTRIBUIRANA SILA SE DUŽ OSI MIJENJA KAO KVADRATNI POLINOM $q(x)$. ZADANE SU VELIČINE FUNKCIJE $q(x)$ NA RUBOVIMA I U SREDINI RASPONA. NA DESNI KRAJ DJELUJE I KONCENTRIRANI MOMENT K. FUNKCIJE $T(x)$, $M(x)$ I $N(x)$ TREBA ODREDITI: a) POMOĆU DIFERENCIJALNIH ODNOSA I b) POMOĆU INTEGRALNE FORMULACIJE. ODREDITI NUMERIČKI POLOŽAJ $\max(M(x))$.



PRIKAZAT ĆE SE DVA NAČINA ODREĐIVANJA ANALITIČKOG IZRAZA ZA $q(x)$.

$q(x)$ SE NAJJEDNOSTAVNIJE PRIKAZUJE KAO:

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

UVRŠTAVANJEM ZADANIH ORDINATA I PRIPADNIH APSCISA DOBIVA SE:

$$3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$7,5 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c$$
$$0 = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$$

KAKO IZ PRVE JEDNADŽBE SLIJEDI: $c = 3,0$
TREBA JOŠ RIJEŠITI SUSTAV:

$$\begin{aligned} 25a + 5b &= 4,5 \\ 100a + 10b &= -3,0 \end{aligned}$$

SLIJEDI: $a = -0,24$
$b = +2,1$

KAKO JE POZNATA JEDNA NULTOČKA MOŽE SE $q(x)$ PRIKAZATI U OBLIKU $(px+q)(10-x)$ I TREBA JOŠ ZADOVOLJITI UVJETE $q(0)=3$ I $q(5)=7{,}5$.

IZ PRVOG UVJETA SLIJEDI: $(p\cdot 0+q)(10-0)=3$

$$q=0{,}3$$

NAKON UVRŠTAVANJA q U DRUGI UVJET DOBIVA SE:

$$(p\cdot 5+0{,}3)(10-5)=7{,}5;$$
$$(5\cdot p+0{,}3)\cdot 5=7{,}5$$
$$25p+1{,}5=7{,}5$$
$$25p=6; \qquad p=+0{,}24$$

TRAŽENI ANALITIČKI IZRAZ: $q(x)=(0{,}24x+0{,}3)(10-x)$

ODNOSNO: $q(x)=-0{,}24x^2+(2{,}4-0{,}3)\cdot x+3$

a) RJEŠENJE POMOĆU DIFERENCIJALNIH ODNOSA

TREBA RIJEŠITI SUSTAV DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI:

$$\frac{dM(x)}{dx}=T(x)-m(x); \quad \frac{dT(x)}{dx}=-q(x); \quad \frac{dN(x)}{dx}=-f(x)$$

FUNKCIJE $m(x)$ I $f(x)$ IDENTIČNO IŠČEZAVAJU.

$N(x)$ OČITO IDENTIČNO IŠČEZAVA ALI SE TO MOŽE I PRIKAZATI MATEMATIČKI:

$$\frac{dN(x)}{dx}=0 \Rightarrow N(x)=C_3$$

UZ OVAKO ZADAN KLIZNI ZGLOB UZDUŽNA SILA $N(10)=\emptyset$. AKO SE TO UVRSTI U DOBIVENI IZRAZ ZA $N(x)$, SLIJEDI $C_3=\emptyset$ I:

$$\underline{N(x)\equiv\emptyset}$$

IZ POZNATOG $q(x)$ MOŽE SE ODREDITI OPĆE RJEŠENJE ZA $T(x)$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -0,24X^2 + 2,1X + 3$$

$$T(x) = +0,08X^3 - 1,05X^2 - 3X + C_1$$

KAKO NI ZA JEDAN PRESJEK NIJE POZNATA VRIJEDNOST FUNKCIJE $T(x)$; C_1 SE JOŠ NE MOŽE ODREDITI, PA SE TRAŽI RJEŠENJE ZA $M(x)$:

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0,08X^3 - 1,05X^2 - 3 \cdot X + C_1$$

$$M(x) = 0,02 \cdot X^4 - 0,35X^3 - 1,5X^2 + C_1X + C_2$$

VELIČINA FUNKCIJE $M(x)$ POZNATA JE ZA OBA KRAJA. KAKO U $X=0$ NE DJELUJE VANJSKI MOMENT; $M(0)=\phi$, PA U TOM POSEBNOM SLUČAJU VRIJEDI $C_2=\phi$.

ZA $X=10$ VRIJEDI $M(10)=-40$, JER JE ZATEZANJE GORE, PA SLIJEDI:

$$40 = 0,02 \cdot 10^4 - 0,35 \cdot 10^3 - 1,5 \cdot 10^2 + C_1 \cdot 10 + \phi$$

$$4 = 20 - 35 - 15 + C_1$$

$$C_1 = +26$$

TIME SU ODREĐENI TRAŽENI ANALITIČKI IZRAZI:

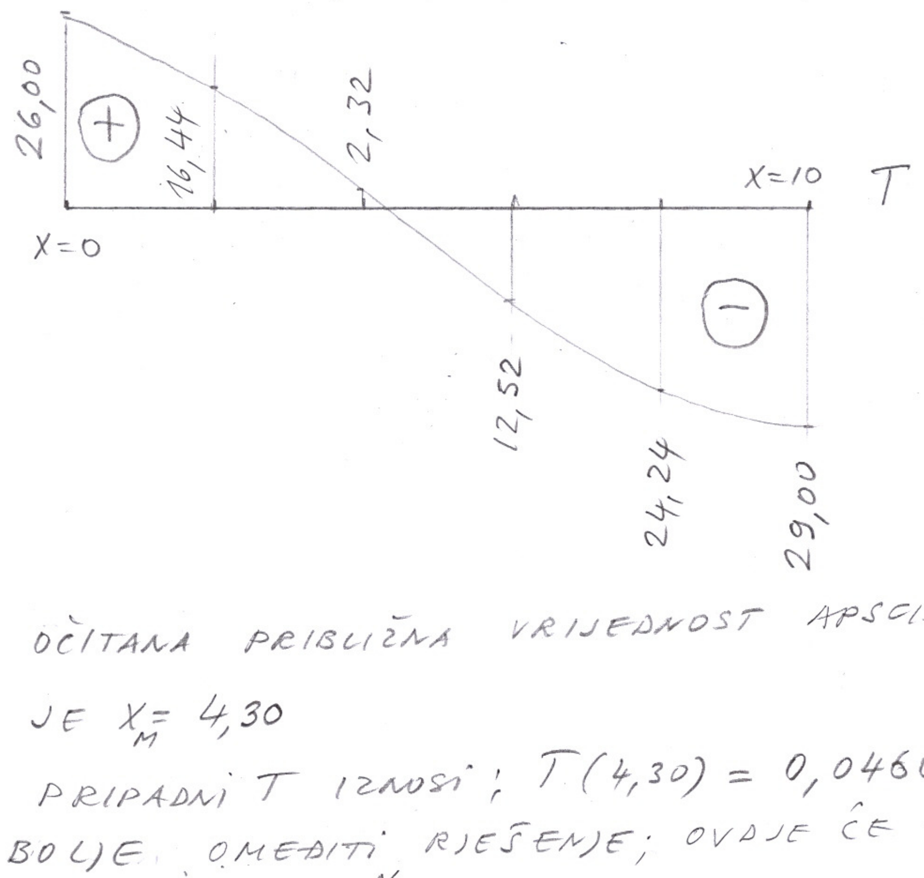
$$T(x) = 0,08 \cdot X^3 - 1,05X^2 - 3 \cdot X + 26$$

$$M(x) = 0,02 \cdot X^4 - 0,35X^3 - 1,5X^2 + 26 \cdot X$$

U OVOM SLUČAJU VRIJEDI: $T(x) = \frac{dM}{dx}$; SLIJEDI DA $M(x)$ IMA ANALITIČKI EKSTREM U X ZA KOJI VRIJEDI $T(x) = \phi$. IAKO POSTOJE IZRAZI ZA ODREĐIVANJE NULTOČAKA KUBNOG POLINOMA, OVDJE ĆE SE TAJ X ODREDITI NUMERIČKI. TIME ĆE SE UKAZATI NA PRISTUP KOJI JE U MNOGIM ZADACIMA JEDINO MOGUĆ. U OVOM SLUČAJU JE q POZITIVAN U CIJELOM PODRUČJU PA T MONOTONO PADA I MOŽE IMATI SAMO JEDNU NULTOČKU. PRVU OCJENU POLOŽAJA NULTOČKE MOŽE SE DOBITI GRAFIČKI.

ZA CRTANJE SU ODABRANE PETINSKE TOČKE

26   16,44   2,32   −12,52   −24,24   −29



MJERILO POLOŽAJA 1:100

MJERILO ORDINATA 1cm :: 10N

OČITANA PRIBLIŽNA VRIJEDNOST APSCISE EKSTREMA JE $X_M = 4{,}30$

PRIPADNI T IZNOSI: $T(4{,}30) = 0{,}04606$. TREBA BOLJE OMEĐITI RJEŠENJE; OVDJE ĆE SE TO POSTIĆI POKUŠAVANJEM:

$T(4{,}31) = -0{,}02987$

OMEĐENJE JE POSTIGNUTO NAKON PRVOG POKUŠAJA.

NAJJEDNOSTAVNIJI RAČUNSKI POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE TRAŽENE TOČNOSTI JE RASPOLAVLJANJE.
NOVI X JE ARITMETIČKA SREDINA PRETHODNIH
ZBOG PREGLEDNOSTI ĆE BITI OZNAČEN SA X_3

$$X_3 = \frac{X_1 + X_2}{2} = 4{,}305 ; \qquad T(4{,}305) = 0{,}008098$$

KAKO JE $T(X_3) > \emptyset$ TOČNO RJEŠENJE JE OMEĐENO S X_3 I X_2, PA ĆE NOVI X BITI JEDNAK PRIPADNOJ ARITMETIČKOJ SREDINI

$$X_4 = \frac{4{,}305 + 4{,}310}{2} = 4{,}3075 ; \quad T(4{,}3075) = -0{,}01088$$

VIDLJIVO JE DA JE RJEŠENJE X_M OMEĐENO S

$$4{,}3050 < X_M < 4{,}3075$$

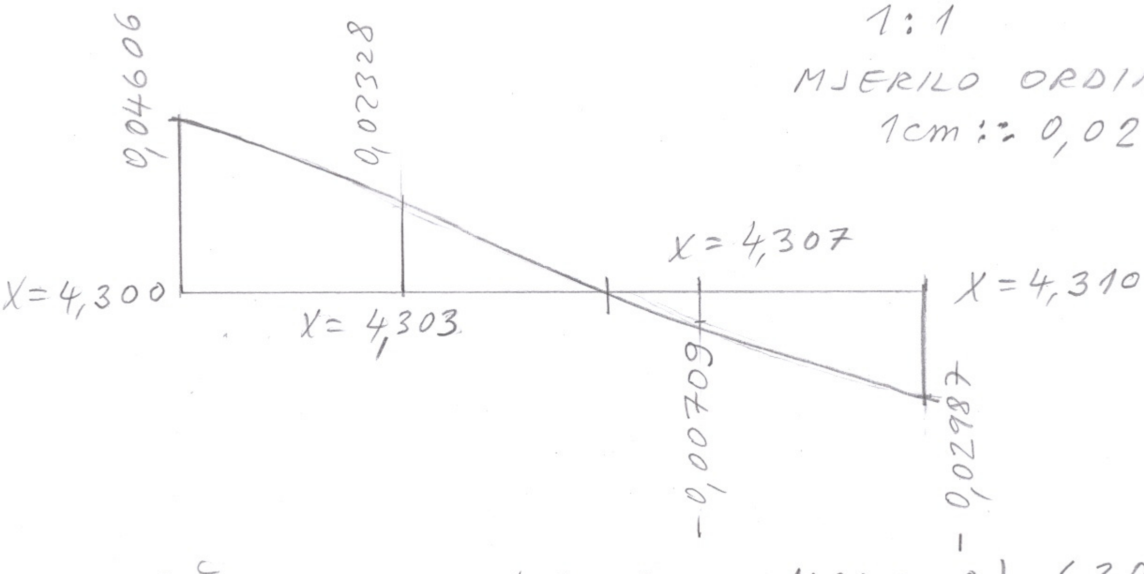
OVDJE ĆE SE KAO DOVOLJNA APROKSIMACIJA UZETI

$$X_M = 4{,}3063 ; \quad T(4{,}3063) = -0{,}00177$$

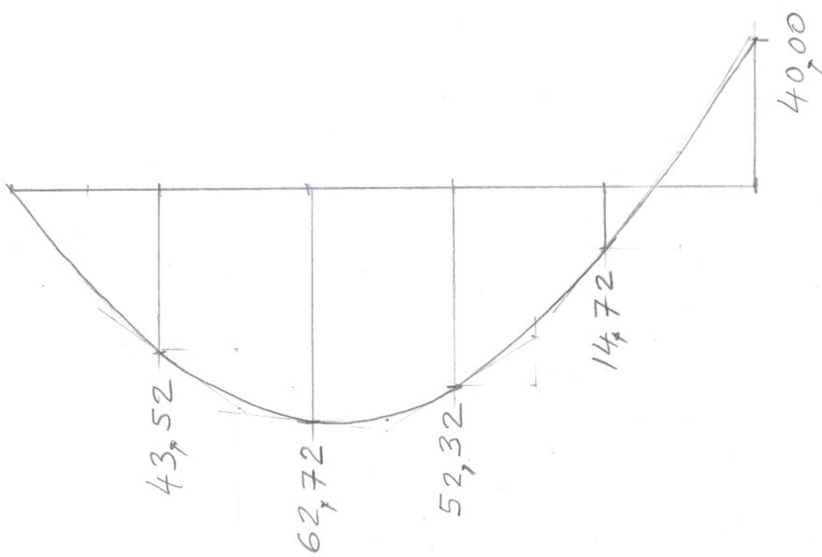
PRIPADNA APROKSIMACIJA MAKSIMALNOG MOMENTA SAVIJANJA JE $M(4{,}3063) = 63{,}0753$

PRIBLIŽNO ODREĐIVANJE SE MOŽE NASTAVITI I GRAFIČKI, ODABIRANJEM VEĆEG MJERILA:

MJERILO POLOŽAJA
1:1
MJERILO ORDINATA
1cm :: 0,02 N



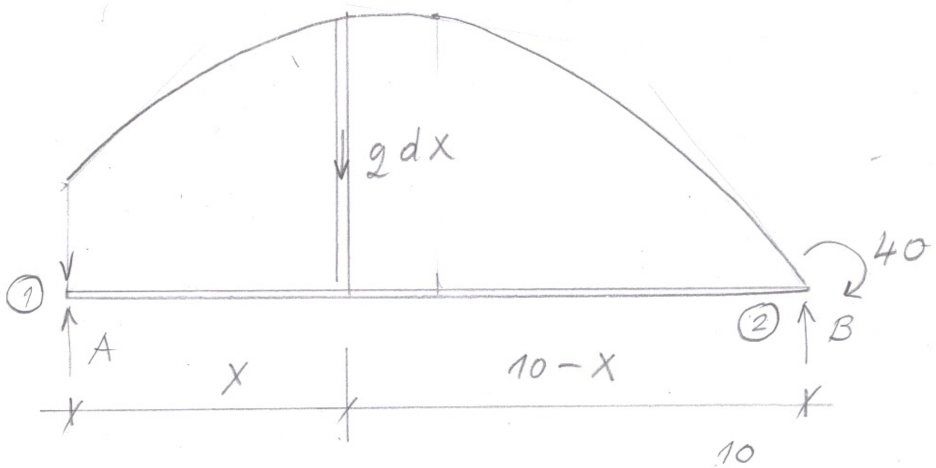
OČITANO $X = 4{,}3058$; $M(4{,}3058) = 63{,}0753$



MJERILO POLOŽAJA 1 : 100

MJERILO ORDINATA 1cm :: 20Nm

b) RJEŠENJE POMOĆU INTEGRALNE FORMULACIJE



$$\sum M_{(2)} = 0; \qquad A = \frac{1}{10}\left(-40 + \int_0^{10} (10-x)\, q(x) \cdot dx\right)$$

$$A = \frac{1}{10}\left(-40 + \int_0^{10} (10-x)(3 + 2{,}1 \cdot x - 0{,}24x^2)\, dx\right.$$

$$A = \frac{1}{10}\left(-40 + \int_0^{10} (30 + 18x - 4{,}5x^2 + 0{,}24x^3)\, dx\right.$$

$$A = \frac{1}{10}\left(-40 + 30 \cdot 10 + 18 \cdot \frac{100}{2} - 4{,}5 \cdot \frac{1000}{3} + 0{,}24 \cdot \frac{10000}{4}\right)$$

$$A = -4 + 30 + 90 - 150 + 60 = 26{,}0\,N$$

$$\Sigma M_{(z)} = \phi \, ! \qquad B = \frac{1}{10}\left(40 + \int_0^{10} x \cdot q(x)\,dx\right)$$

$$B = \frac{1}{10}\left(40 + \int_0^{10} (3x + 2{,}1x^2 - 0{,}24x^3)\,dx\right)$$

$$B = \frac{1}{10}\left(40 + 3 \cdot \frac{100}{2} + 2{,}1 \cdot \frac{1000}{3} - 0{,}24 \cdot \frac{10000}{4}\right)$$

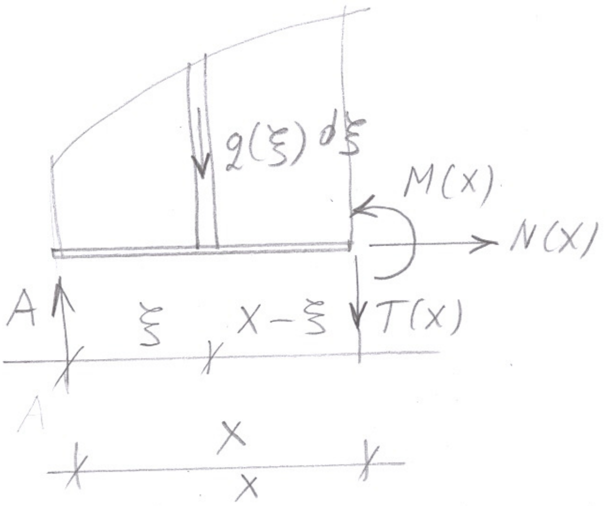
$$B = 4 + 15 + 70 - 60 = 29{,}0\ N$$

KONTROLA: $\Sigma F_{yi} = A + B - \int_0^{10} q(x)\,dx =$

$$= 26 + 29 - \int_0^{10} (3 + 2{,}1x - 0{,}24x^2)\,dx$$

$$= 55 - 3 \cdot 10 - 2{,}1 \cdot \frac{100}{2} + 0{,}24 \cdot \frac{1000}{3}$$

$$= 55 - 30 - 105 + 80 = 0{,}00 \checkmark$$



$$T(x) = A - \int_0^x q(\xi)\,d\xi = 26 - \int_0^x (3 + 2{,}1\xi - 0{,}24\xi^2)\,d\xi$$

$$T(x) = 26 - 3 \cdot x + 2{,}1 \cdot \frac{x^2}{2} - 0{,}24\frac{x^3}{3} \checkmark$$

$$M(x) = A \cdot x - \int_0^x (x - \xi)\,q(\xi)\,d\xi$$

$$M(x) = A \cdot x \int_0^x (x - \xi)(3 + 2{,}1\xi - 0{,}24\xi^2)\,d\xi$$

$$M(x) = 26\cdot x - \int_0^x \left(3x - 3\xi + 2{,}1\cdot x\cdot\xi - 2{,}1\cdot\xi^2 - 0{,}24x\cdot\xi^2 + 0{,}24\,\xi^3\right)d\xi$$

$$M(x) = 26\cdot X - \int_0^X \left(3\cdot X + (2{,}1\cdot X - 3)\cdot\xi - (2{,}1 + 0{,}24\cdot X)\,\xi^2 + 0{,}24\,\xi^3\right)d\xi$$

$$M(x) = 26\cdot X - 3\cdot X\cdot X - (2{,}1\cdot X - 3)\frac{X^2}{2} + (2{,}1 + 0{,}24\cdot X)\frac{X^3}{3} - 0{,}24\cdot\frac{X^4}{4}$$

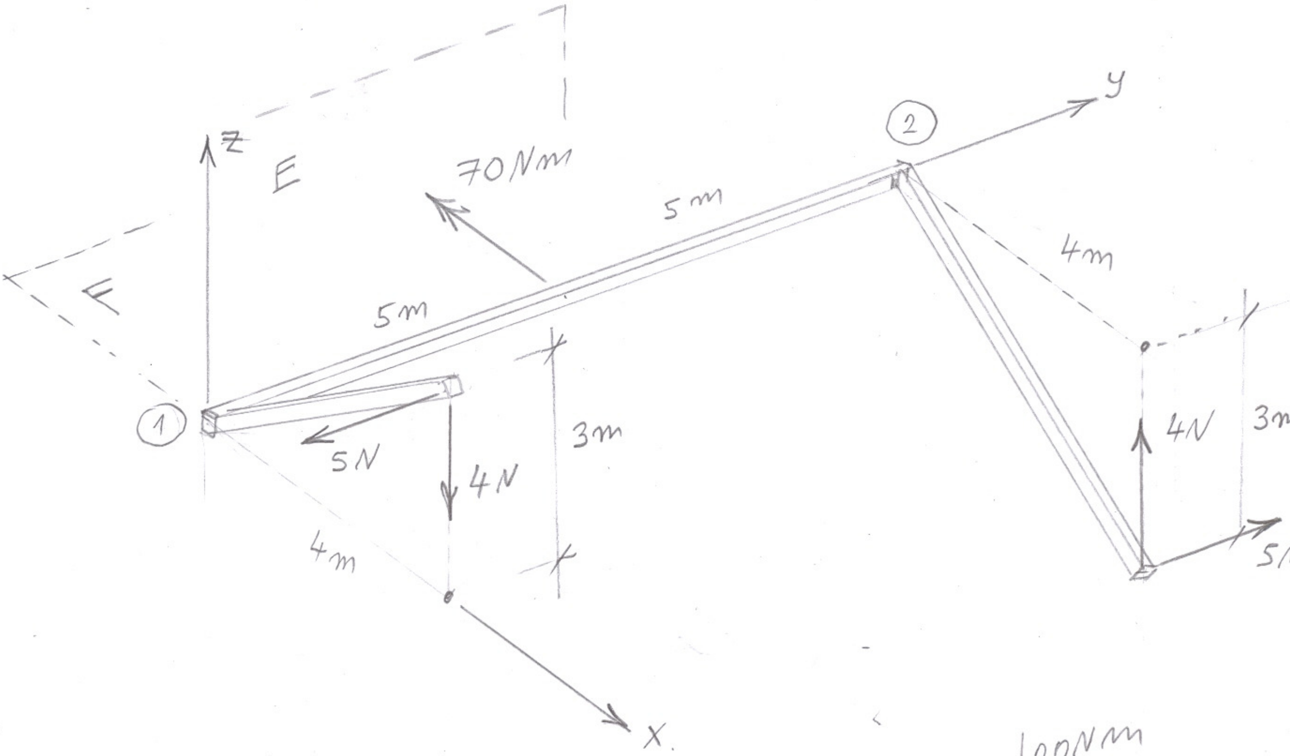
$$M(x) = 26\cdot X - 3\cdot X^2 - 1{,}05\cdot X^3 + 1{,}5\cdot X^2 + 0{,}7\cdot X^3 + \frac{0{,}24\cdot X^4}{3} - \frac{0{,}24\cdot X^4}{4}$$

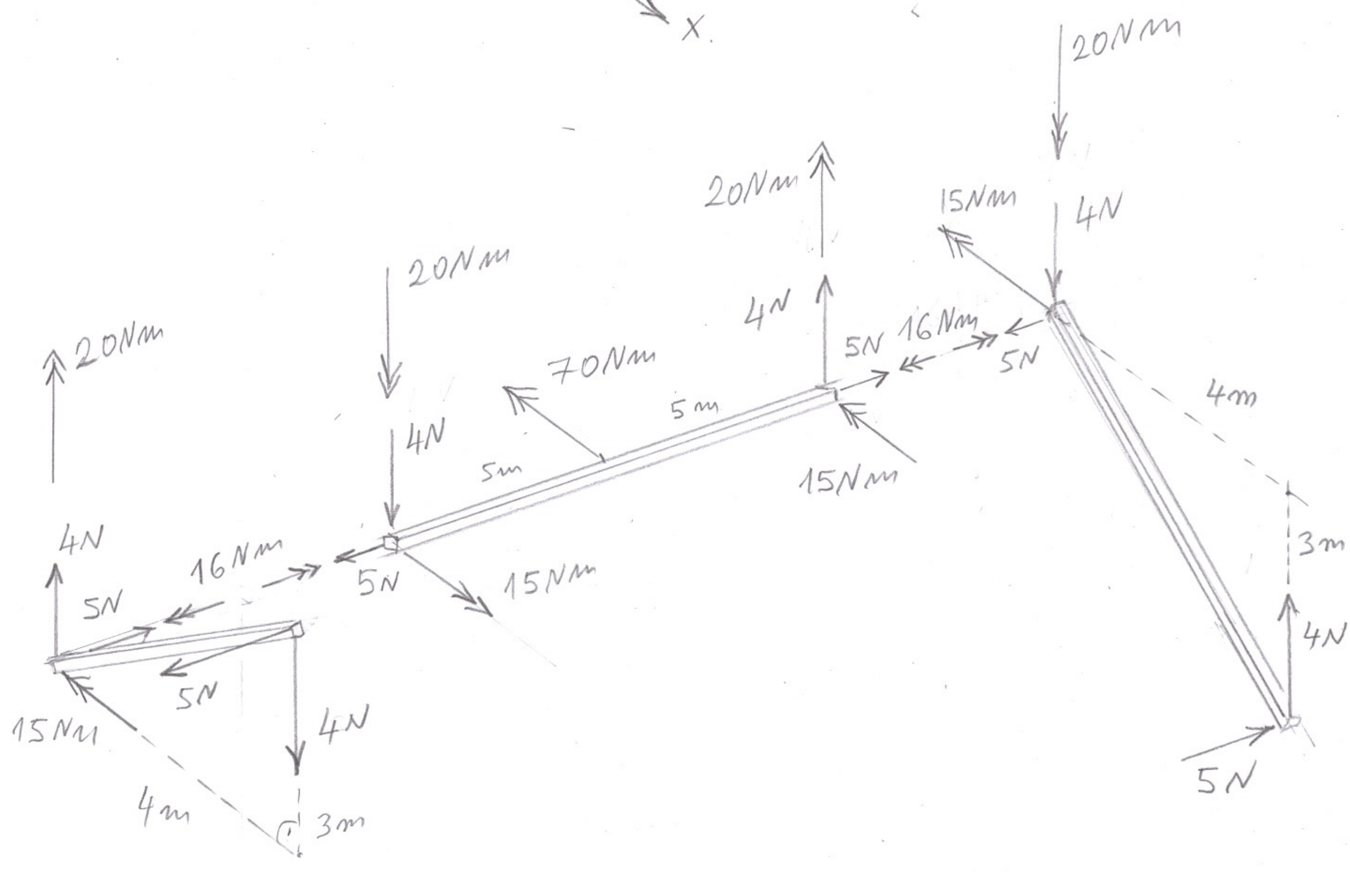
$$M(x) = 26\cdot X - 1{,}5\cdot X^2 - 0{,}35\cdot X^3 + 0{,}02\cdot X^4$$

2) AKSONOMETRIJSKI JE PRIKAZAN PROSTORNI ŠTAP KOJI SE NALAZI U STANJU RAVNOTEŽE.

ZA DIO ŠTAPA IZMEĐU TOČAKA 1 i 2 TREBA SKICIRATI DIJAGRAME MOMENATA SAVIJANJA i POPREČNIH SILA i TO PREMA PRAVILU ZA PRIKAZIVANJE RAVNINSKIH ZADATAKA. PRI TOME ĆE SE KORISTITI RAVNINE E i F. KAKO PREDZNAK T ZA RAVNINSKE ZADATKE OVISI O STRANI KOJU SE PROMATRA; RAVNINU E SE PROMATRA S VRHA OSI X, A RAVNINU F S VRHA OSI Z.

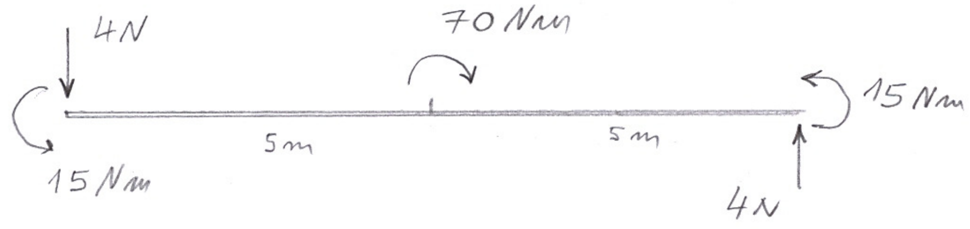
ZA ISTI DIO ŠTAPA TREBA ZASEBNO SKICIRATI M_t i N



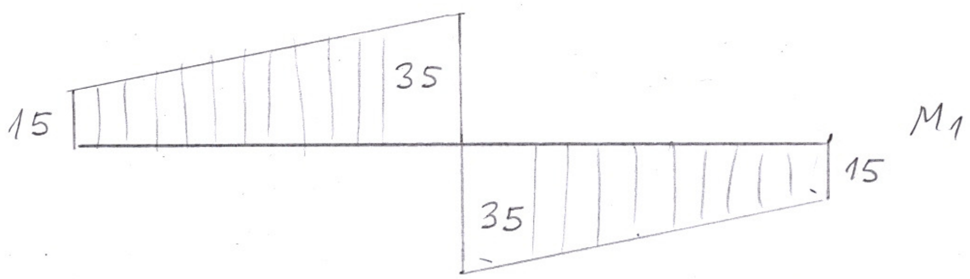


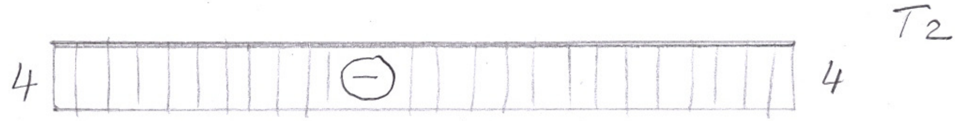
PRIKAZANI SU KRAJNJI POPREČNI PRESJECI ŠTAPA (1, 2). UCRTANE SU STVARNE ORJENTACIJE KOMPONENTI UNUTARNJIH SILA NA PRAVCIMA KOJI LEŽE U ZADANIM RAVNINAMA. ISKORIŠTENI SU UVJETI RAVNOTEŽE KOSIH ŠTAPOVA.

a) RAVNINA E



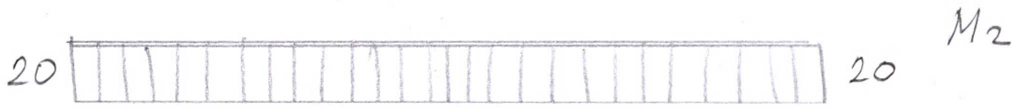
UCRTANE SU SAMO KOMPONENTE KOJE PRIPADAJU POPREČNOM OPTEREĆENJU U TOJ RAVNINI



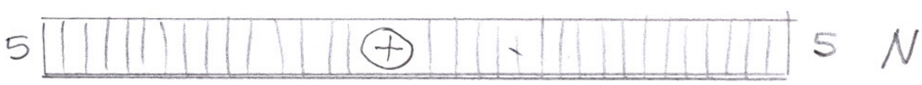


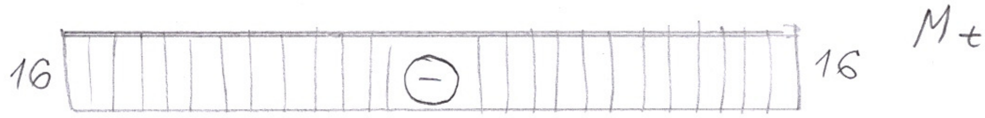
b) RAVNINA F.

UCRTANE SU SAMO KOMPONENTE KOJE PRIP. POPR. OPT.

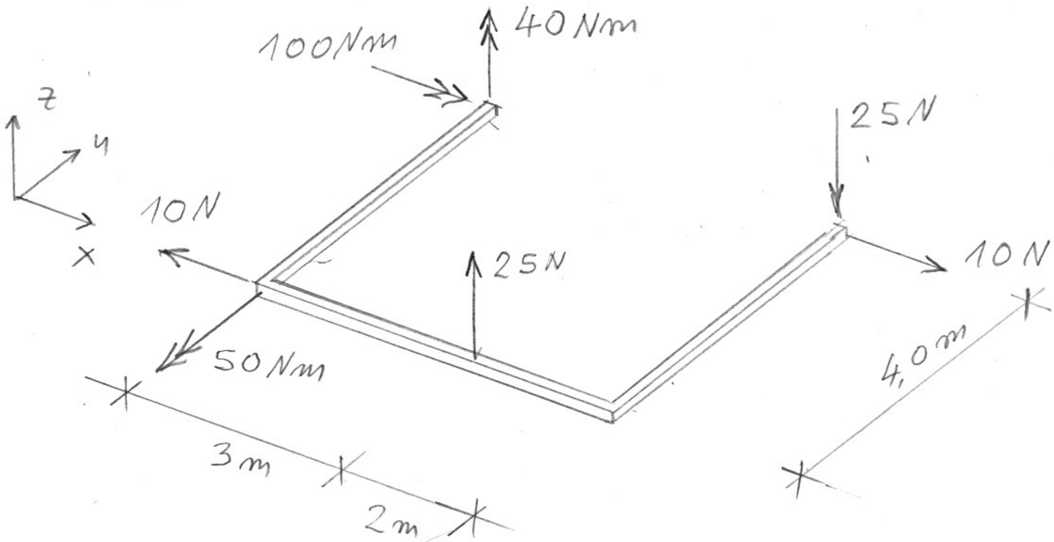


c) UZDUŽNA SILA I TORZIJA



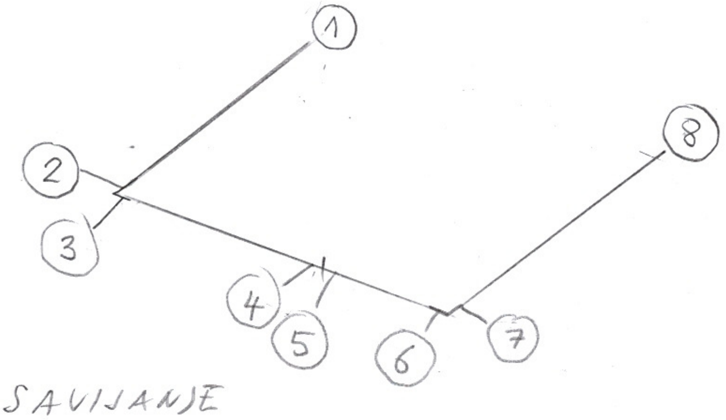


3) PRIKAZAN JE PROSTORNO OPTEREĆEN ŠTAPNI ELEMENT. TREBA NA STANDARDNI NAČIN AKSONOMETRIJSKI PRIKAZATI DIJAGRAME M_1, M_2, M_t i N. PRI TOME VEKTORI UZ M_1 LEŽE U RAVNINI ŠTAPA.



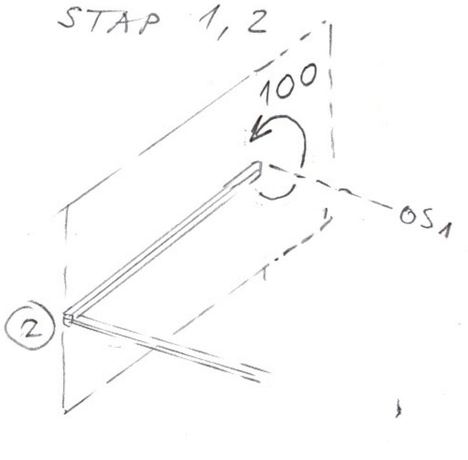
RJEŠENJE SE MOŽE IZVESTI IZ ELEMENTARNIH RAVNINSKIH ZADATAKA.

OZNAKE PRESJEKA

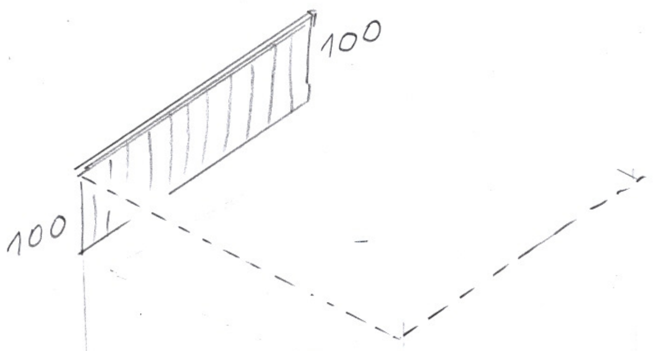


SAVIJANJE

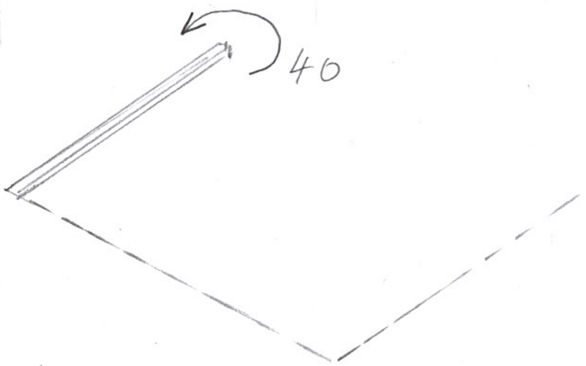
ŠTAP 1, 2



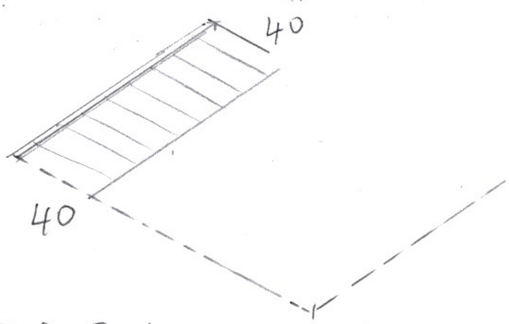
OS 1 LEŽI U RAVNINI ŠTAPA. ORDINATE M_1 ĆE LEŽATI U OKOMITOJ RAVNINI. U TOČKI 1 DJELUJE KONCENTRIRANI MOMENT KOJI SE MOŽE PRIKAZATI I RAVNINSKIM SIMBOLOM.



IZ TOGA NEPOSREDNO SLIJEDI M_1 ZA ŠTAP (1,2)

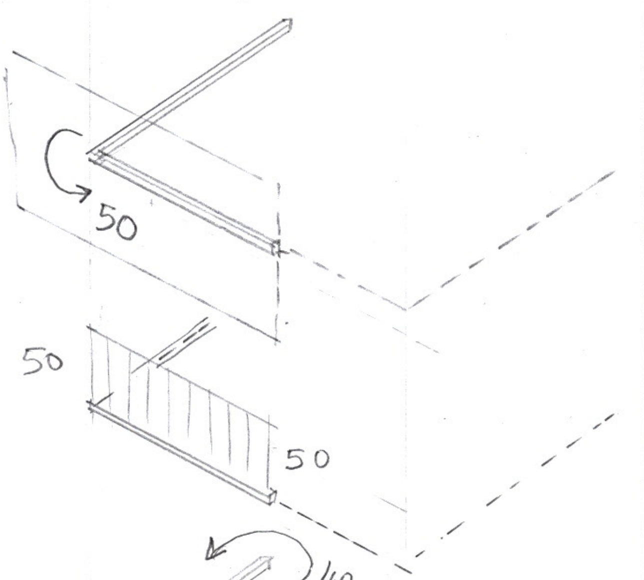


OS 2 JE OKOMITA NA RAVNINU ŠTAPA. TOM SAVIJANJU DOPRINOSI SAMO MOMENT PRIKAZAN RAVNINSKIM SIMBOLOM



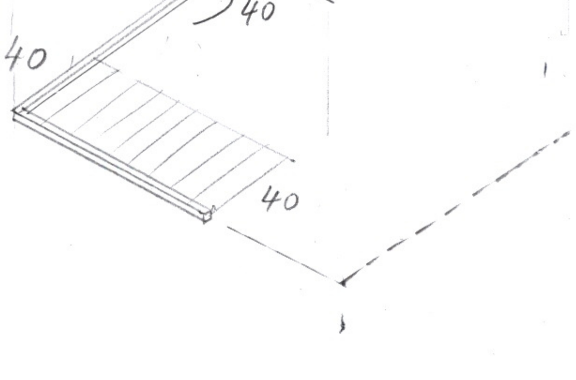
IZ TOGA NEPOSREDNO SLIJEDI M_2 ZA ŠTAP (1,2)

ŠTAP 3, 4



NA SAVIJANJE ŠTAPA OKO OSI KOJE LEŽE U RAVNINI ŠTAPA UTJEČE SAMO PRIKAZANI MOMENT

PRIPADNI DIJAGRAM M_1 JE PRIKAZAN



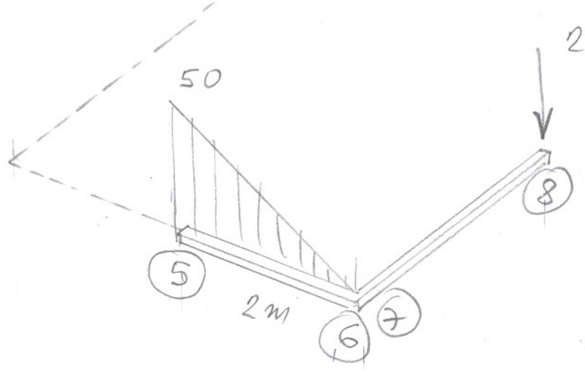
SAVIJANJU OKO OSI 2 DOPRINOSI SAMO PRIKAZANI MOMENT

UCRTAN JE PRIPADNI DIO DIJAGRAMA M_2.

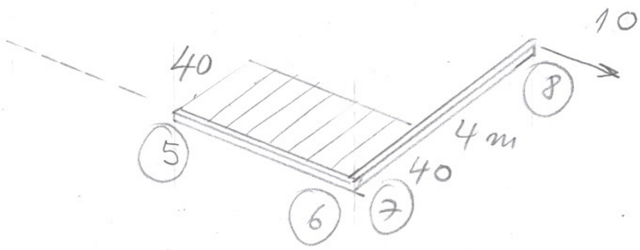
ŠTAP 5,6

AKO SE PROMATRA RAVNOTEŽA DIJELA (5,8) SAVIJANJU OKO OSI 1 DOPRINOSI SAMO PRIKAZANA SILA

VAŽNO JE UOČITI DA DULJINA (7,8) NE UTJEČE NA PROMATRANI M_1

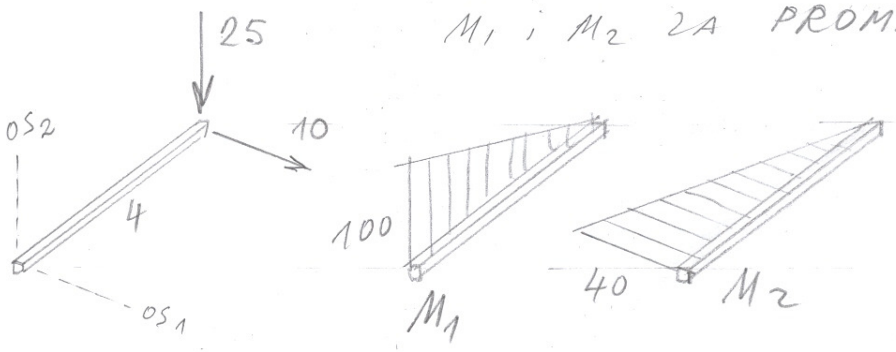


AKO SE PROMATRA RAVNOTEŽA (5,8) NA SAVIJANJE OKO OSI 2 UTJEČE SAMO PRIKAZANA SILA

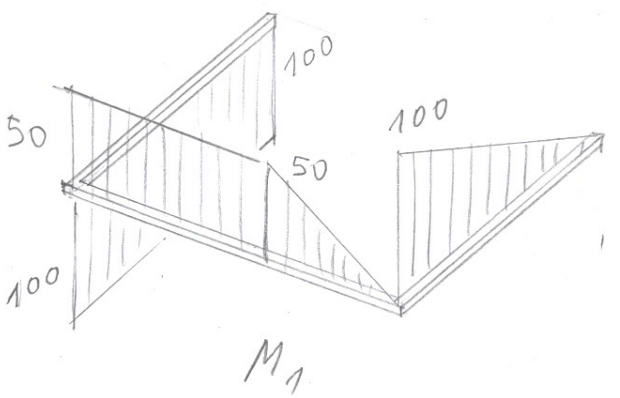


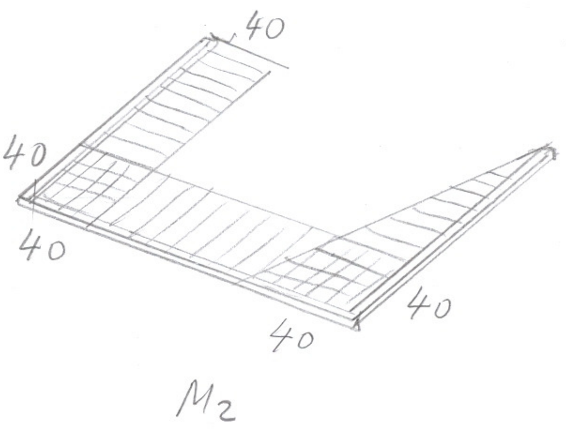
ŠTAP 7,8

ANALOGNO SE MOGU ODREDITI M_1 I M_2 ZA PROMATRANI DIO

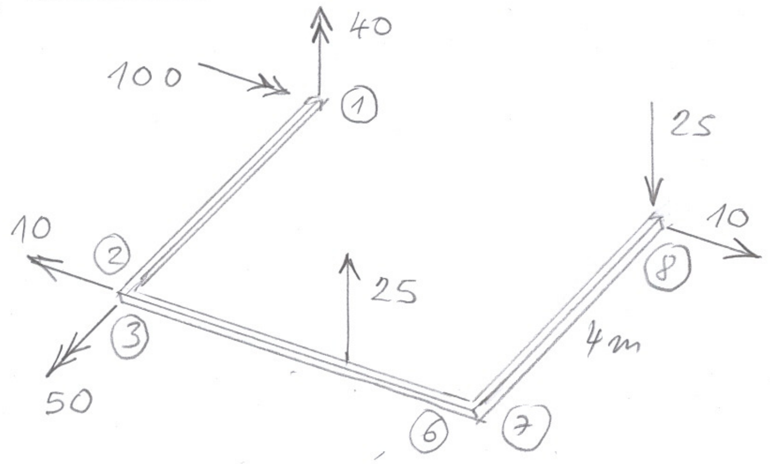


KAO REZULTAT SE OBVEZATNO DIJAGRAMI PRIKAZUJU NA JEDNOJ SKICI



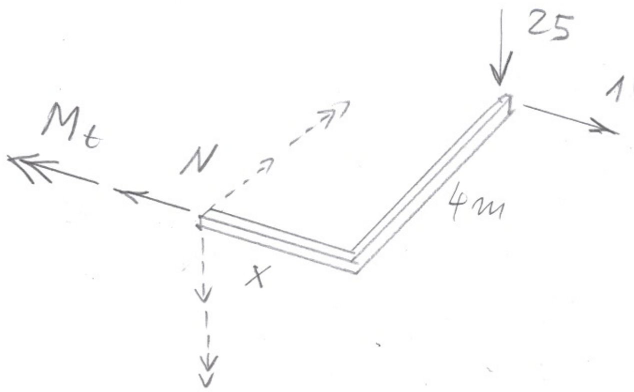


UZDUŽNE SILE I TORZIJA



ŠTAPOVI (1,3) i (7,8) SU OPTEREĆENI SAMO NA SLOBODNIM KRAJEVIMA KAKO NA TE KRAJEVE DJELUJU SAMO SILE OKOMITE NA OSI, ZA OBA ĆE ŠTAPA IŠČEZAVATI N. ANALOGNO TOME KAKO NA TE KRAJEVE DJELUJU SAMO KONCENTRIRANI MOMENTI OKOMITI NA OSI, ZA OBA ĆE ŠTAPA IDENTIČNO IŠČEZAVATI M_t.

NA ŠTAP (3, 6) DJELUJE SAMO SILA OKOMITA NA OS ČIJI PRAVAC SIJEČE OS. TA SILA NE UTJEČE NITI NA TOK N, NITI NA TOK M_t. SLIJEDI DA SU N I M_t KONSTANTNI ZA TAJ ŠTAP I MOGU SE ODREDITI ZA BILO KOJI PRESJEK



$M_t = -4 \cdot 25 = -100$

$N = +10$