SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET
UNIVERSITY OF ZAGREB
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

Predmet: GRAĐEVNA STATIKA 2

SEMINARSKI RAD

METODA SILA, METODA POMAKA, CROSS-OV POSTUPAK

Predmetni nastavnik:
Prof.dr.sc. Krešimir FRESL

Student: Mario Božinović

ZAGREB 2009.

Božhović

GS 2. — 13. srpnja 2006.

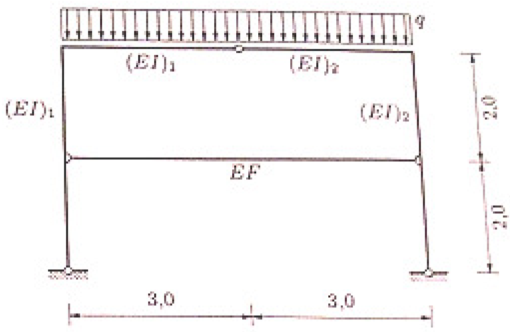
1. **Metoda sila:** nacrtajte M dijagram.

$q = 80\,\text{kN/m}'$

$(EI)_1 = 1{,}62 \cdot 10^5\,\text{kNm}^2$

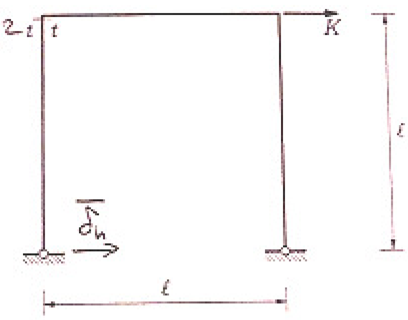
$(EI)_2 = 1{,}944 \cdot 10^5\,\text{kNm}^2$

$EF = 2 \cdot 10^6\,\text{kN}$



2. **Metoda pomaka:** ~~pomoću utjecajne linije izračunajte $M_{t-t}(K)$.~~ nacrtajte M dijagram.

$EI = \cancel{const}$ 100000 kNm²



$L = 5\,m$

$K = 100\,kN$

$\bar{\delta}_h = 2\,mm$

3. **Crossov postupak:** izračunajte vertikalni pomak točke A.

$L = 3\,m$

$q = 25\,kN/m'$

$EJ = 100000\,kNm^2$

ZADATAK 1.

M E T O D A S I L A

OPĆENITO O STATIČKI NEODREĐENIM SISTEMIMA:

Sile u statički neodređenim sustavima (sistemima) ovise o broju i vrsti veza, te o omjeru krutosti njegovih dijelova.

Uslijed prisilnih pomaka ili promjene temperature u sistemu pojavljuju se unutarnje sile i sile reakcije. S obzirom da se pod djelovanjem sila sustav deformira, dolazi do iskrivljavanja osi što znači da se javljaju i momenti na tim sistemima.

Promjena oblika dijela statički neodređenog sistema izazvati će promjenu i u ostalim dijelovima sistema.
Zamjenom zadanog opterećenja statički ekvivalentnim, doći će do promjene sila na cijelom nosaču. Statički neodređene sisteme moramo uvijek proračunavati kao jednu cjelinu tj., ne mogu se izdvojiti pojedini elementi da bi se promatrali izdvojeno.

Statički neodređeni sistemi (sustavi) su oni sustavi kod kojih ne možemo odrediti unutarnje sile samo iz jednadžbi ravnoteže i to iz razloga što imaju veći broj veza, te moramo uspostaviti onoliki broj jednadžbi koliko je i veza na sistemu.

Za statički neodređen sistem kažemo da je to također sustav kod kojeg je broj veza veći od minimalno potrebnog za geometrijsku nepromjenjivost. Takva definicija statički neodređenog sustava naziva se kinematička definicija.

Da bi sistem bio u ravnoteži u ravnini, potrebno je postaviti tri (3) jednadžbe ravnoteže, a najčešće se koriste jednadžbe: $\Sigma M=0$, $\Sigma F_x=0$ i $\Sigma F_y=0$. Prema tome, sistem (tijelo) će biti u ravnoteži u ravnini samo ako je vektorski zbroj svih slia (i momenata) jednak nuli (nul-vektoru).

METODA SILA:

Metodom sila rješavamo statički neodređene sisteme zamišljenim raskidanjem veza pri čemu se zadani sistem pretvara u statički određeni sistem, koji nazivamo ***osnovnim sistemom***, a raskinute se veze nadomještaju silama koje odgovaraju silama koje su te veze prenosile.

Vrijednosti tih sila potom izračunavamo iz uvjeta kompatibilnosti pomaka na mjestima raskinutih veza — sile moraju povratiti narušenu neprekinutost polja pomaka ili osigurati podudaranje pomaka na mjestima uklonjenih ležajeva sa stvarnim ležajnim uvjetima. Prilikom isključivanja sila na sistemu mora se paziti da sistem ne pređe u mehanizam.

Vrijednosti pomaka koji se pojavljuju u uvjetima kompatibilnosti proračunavamo metodom jedinične sile; na temelju principa superpozicije možemo to napraviti za zasebna djelovanja zadanoga opterećenja i pojedinih jediničnih sila u raskinutim vezama.

Završetkom rješavanja osnovnog sustava, nacrta se M_0 dijagram, sustav riješimo i za jediničnu silu te i za njega nacrtamo m_1 dijagram. Sada postoje uvjeri za izračun pomaka δ_{10} i δ_{11} , tj. pomaka u smjeru i na mjestu raskinute veze od zadanog vanjskog opterećenja. Za δ_{10}, indeks 1 označava mjesto i smjer a 0 označava uzrok, tj. vanjsku silu. Za δ_{11} indeks 1 označava mjesto i smjer a 1 označava uzrok tj. jediničnu silu S=1. Kod izračuna pomaka δ_{10} i δ_{11} potrebno je izračunati dijagrame M_0 i m_0 , te vrijedi da je $\delta_{10} = \int \frac{M_0 \cdot m_1}{EI} dx$, i da je $\delta_{11} = \int \frac{m_1 \cdot m_1}{EI} dx = \int \frac{m_1^2}{EI} dx$.

Utjecaj uzdužnih sila najčešće se zanemaruje zbog manjeg utjecaja na rezultat, no to nije uvijek tako, te treba pripaziti kod zanemarivanja uzdužnih sila da se ne zanemare npr. uzdužne sile u zategama jer one imaju značajan utjecaj na rezultat, jer je tu uračunata i površina presjeka F.

Osnovna ideja kod METODE SILA prilikom rješavanja neodređenih sistema je da se statički određen (osnovni) sistem deformira isto kao i zadani statički neodređeni sistem, tj. da je ispunjen uvjet KOMPATIBILNOSTI.

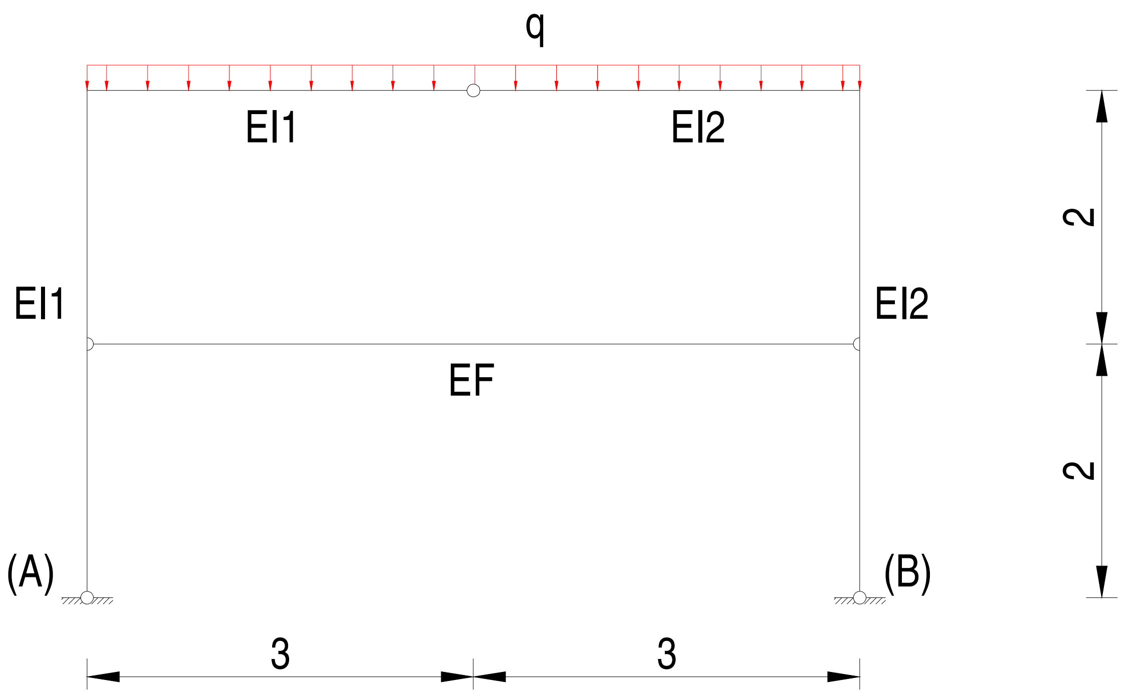
Prema rečenome mora biti zadovoljen uvjet da je: $X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0$, ako se radi o jedanput statički neodređenom sustavu, tj ako se radi o n-puta statički neodređenom sustavu onda mora biti zadovoljena MATRICA FLEKSIBILNOSTI, koja je uvijek simetrična i pozitivno definirana (matematički definirano),

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & .... \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & .... \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & .... \\ .... & .... & .... & \delta nn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .... \\ X_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ .... \\ \delta_{n0} \end{bmatrix}$$

pri čemu su δ_{ij} koeficijenti fleksibilnosti, X_1, X_2, … X_n nepoznate sile, te δ_{10}, δ_{20}, … δ_{nn} pomaci.
Odavde se izračunaju nepoznate sile X te se nacrta konačni M dijagram.

RJEŠENJE 1. ZADATKA - METODA SILA - POTREBNO NACRTATI M DIJAGRAM ZA SISTEM NA SLICI

Zadano: q=80kN/m', EI1=1,62x10^{5}kNm^2, EI2=1,94x10^{5}kNm^2, EI1=2,00x10^{6}kNm^2



Određivanje statičke neodređenosti: zadani sustav u ravnini ima dva zgloba koji sprečavaju horizontalne i vertikalne pomake, tj imaju ukupno 4 veze.

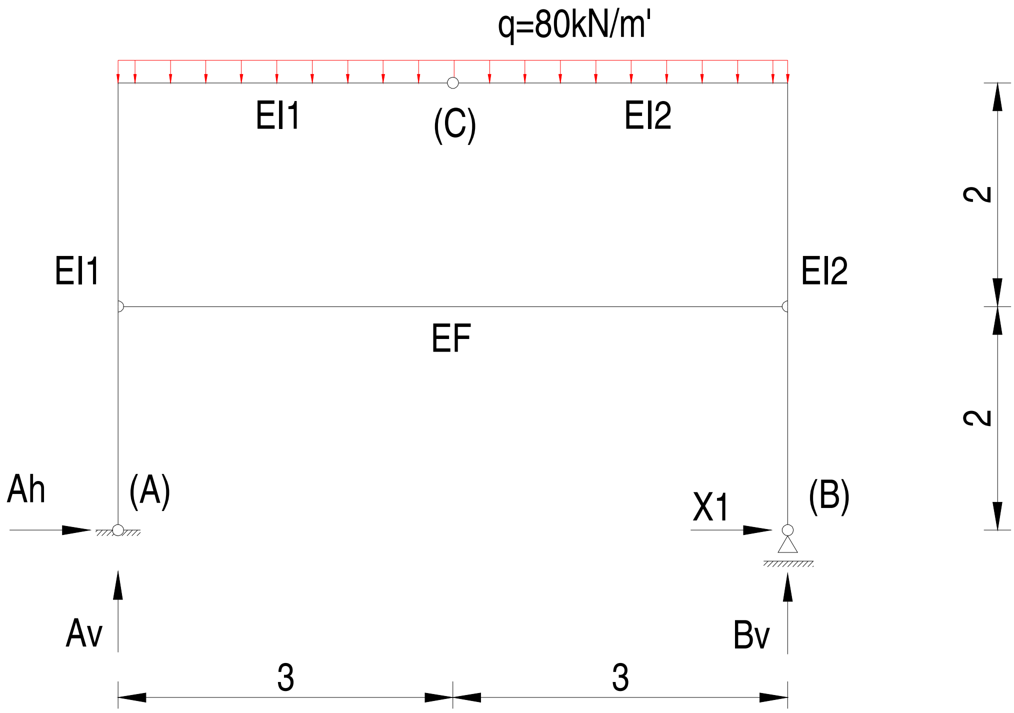
Da bi sustav u ravnini bio u ravnoteži, potrebno je minimalno tri veze, dakle 4-3=1.

Zadani sustav je statički 1 puta neodređen.

OSNOVNI sistem se dobiva zamišljenim isključivanjem jedne veze. Isključio sam vezu u točki **B**, i omogućio horizontalni pomak. Naravno, mogao sam isključiti i vezu u točki **A**.

Sada određujem dijagram M_0 na osnovnom sistemu od zadanog vanjskog opterećenja.

ODREĐIVANJE DIJAGRAMA M_0 na osnovnom sistemu:



Određivanje sila reakcija:

$\Sigma M_{(A)}=0 \Rightarrow$

$$Bv \cdot 6 - 80 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

$$6Bv = 1440$$

$$Bv = \frac{1440}{6} = 240kN$$

$$\underline{Bv = 240kN}$$

$\Sigma M_{(B)}=0 \Rightarrow$

$$-Av \cdot 6 + 80 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$

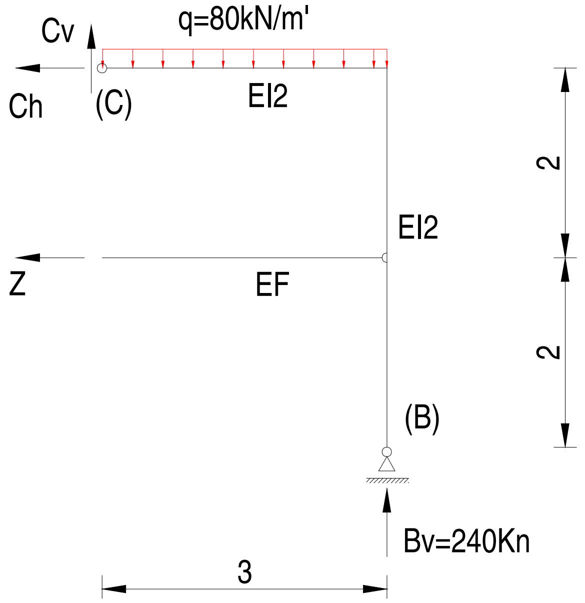
$$-6Av = -1440$$

$$Av = \frac{-1440}{-6} = 240kN$$

$$\underline{Av = 240kN}$$

$\Sigma F_{(x)}=0 \Rightarrow$ $\underline{Ah = 0kN}$

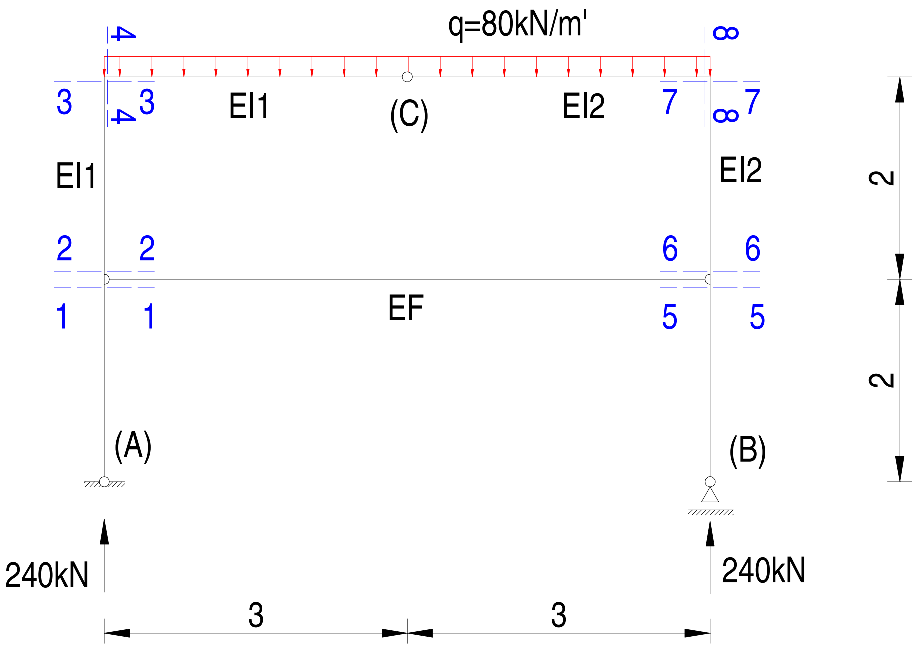
SILA U ZATEZI:



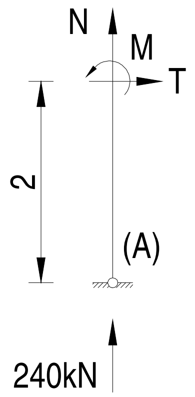
$\Sigma M_{(C)}=0 \Rightarrow$

$$240\cdot 3 - Z\cdot 2 - 80\cdot 3\cdot 1.5 = 0$$
$$-2Z = -720 + 360$$
$$Z = \frac{-360}{-2} = 180kN$$
$$\underline{Z = 180kN}$$

Proračun momenata u karakterističnim presjecima:

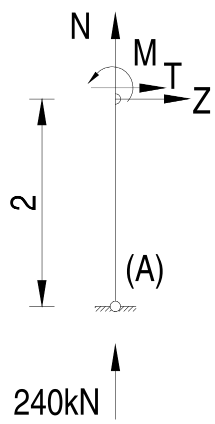


PRESJEK 1-1 i 5-5:



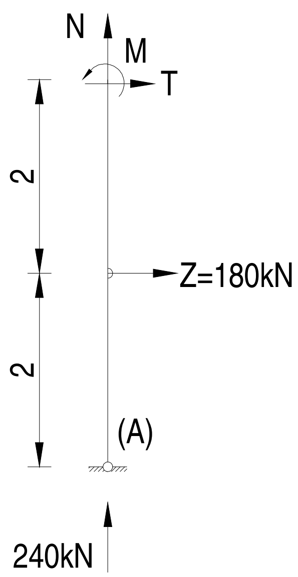
$\Sigma M=0 \Rightarrow \mathbf{M_{1\text{-}1}=M_{5\text{-}5}=0kNm}$

PRESJEK 2-2 i 6-6:



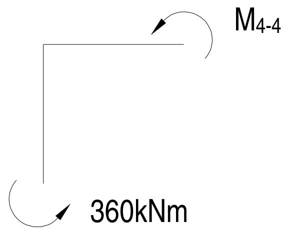
$\Sigma M=0 \Rightarrow \mathbf{M_{2\text{-}2}=M_{6\text{-}6}=0kNm}$

PRESJEK 3-3:



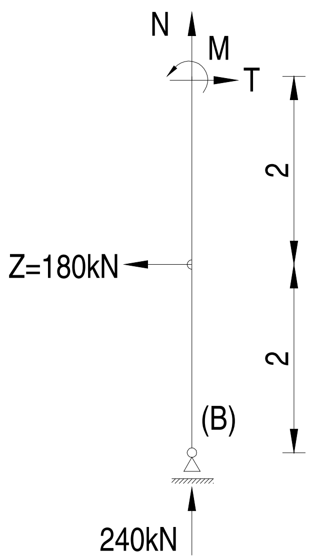
$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{3\text{-}3}+180\cdot 2=0 \Rightarrow \mathbf{M_{3\text{-}3}=-360kNm}$

PRESJEK 4-4: iz ravnoteže čvora



$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{4\text{-}4}+360=0 \Rightarrow \mathbf{M_{4\text{-}4}=-360kNm}$

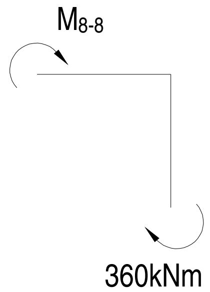
PRESJEK 7-7:



$\Sigma M=0 \Rightarrow M-180\cdot 2=0$

$M-360=0 \Rightarrow \mathbf{M_{7\text{-}7}=360kNm}$

PRESJEK 8-8: iz ravnoteže čvora

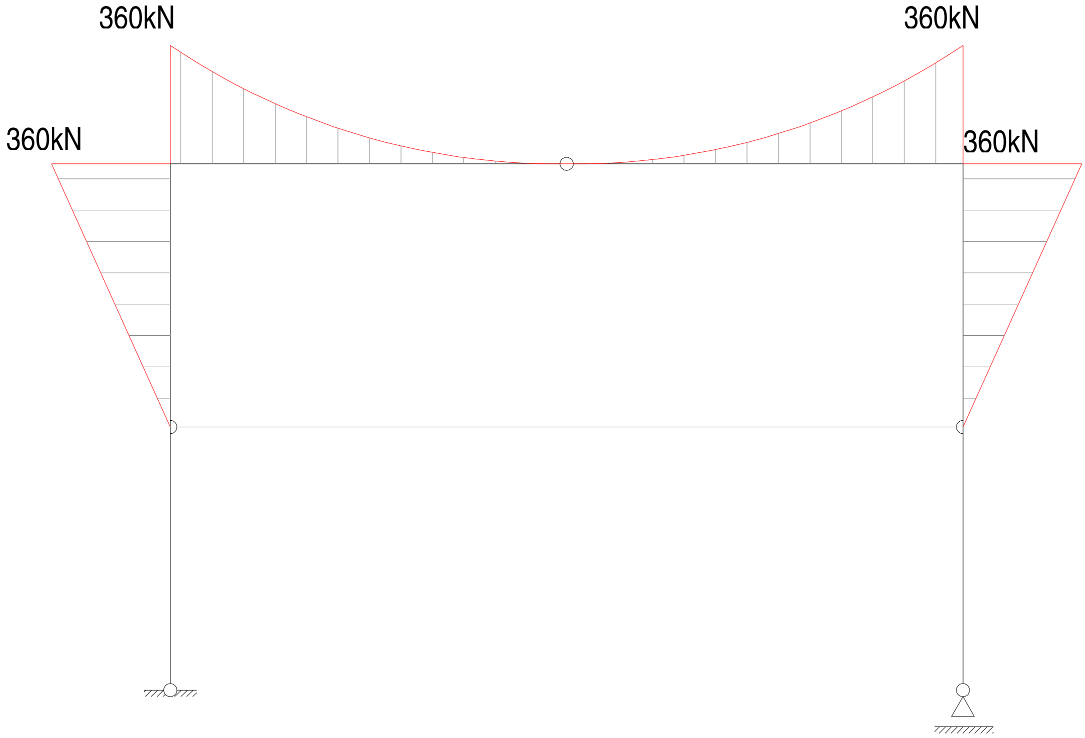


$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{8\text{-}8}+360=0 \Rightarrow \mathbf{M_{8\text{-}8}=-360kNm}$

Kontrola: moment u zglobu jednak je nuli. Prema tome razlika momenata u presjeku 4-4 i provjesa parabole M_{PR}, mora mora biti jednaka nuli. $\Rightarrow M_{ZGLOB}=M_{4-4}-M_{PR}=0$; $M_{PR}=\frac{q\cdot l^2}{8}=\frac{80\cdot 6^2}{8}=360kNm$; $\Rightarrow$

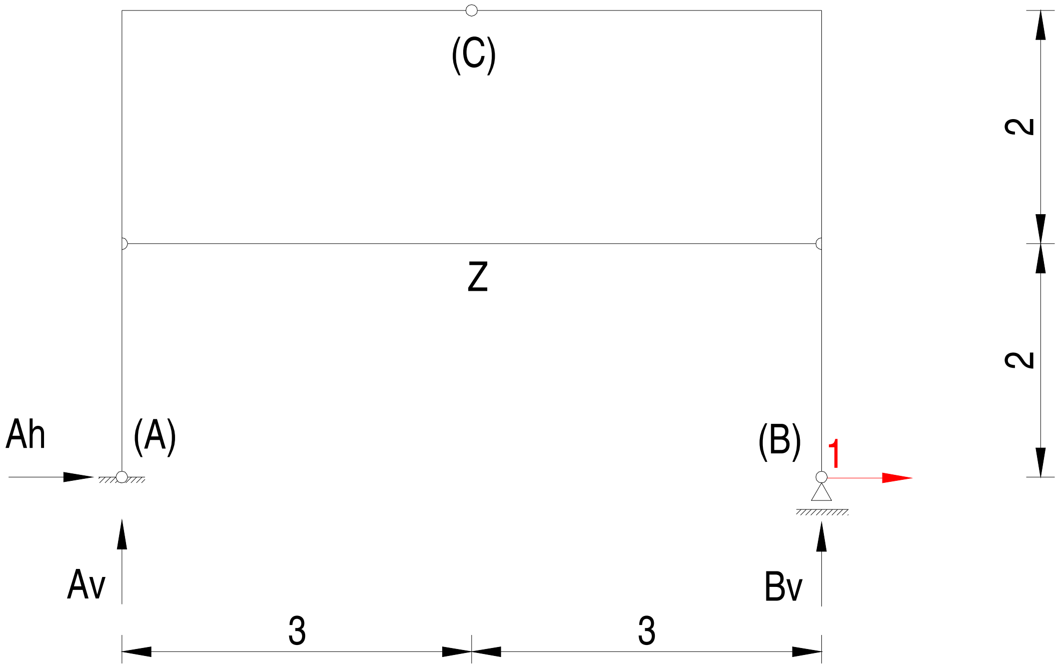
$M_{ZGLOB}=M_{4-4}-M_{PR}=360-360=0 \Rightarrow$ zadovoljava uvjet.

MOMENTNI DIJAGRAM OSNOVNOG SISTEMA M_0:



Uzdužne sile zanemarujemo jer je njihov utjecaj na konačni rezultat vrlo malen. Međutim, uzdužnu silu u zatezi ne smije se zanemariti jer je njezin utjecaj na konačan rezultat značajan. Z=180kN (vlačna sila).

ODREĐIVANJE DIJAGRAMA m_1 (od jedinične sile):



Određivanje sila reakcija (na osnovnom sistemu sa jediničnom silom):

Σ M(A)=0 $\Rightarrow$

$$Bv \cdot 6 = 0$$
$$\underline{Bv = 0kN}$$

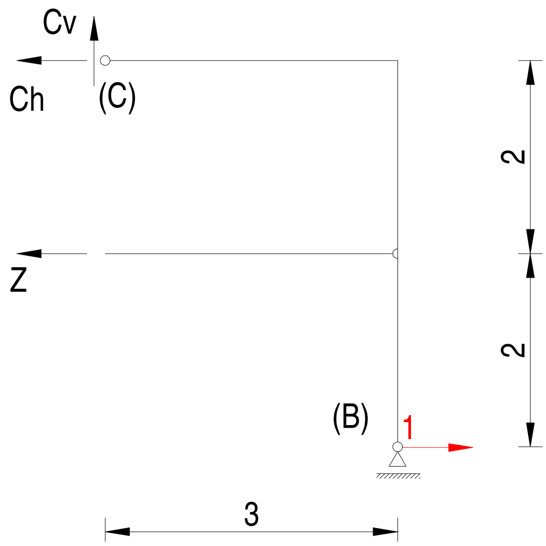
Σ M(B)=0 $\Rightarrow$

$$-Av \cdot 6 = 0$$
$$\underline{Av = 0kN}$$

Σ F(x)=0 $\Rightarrow$

$$Ah + 1 = 0$$
$$\underline{Ah = -1kN}$$

SILA Z U ZATEZI:



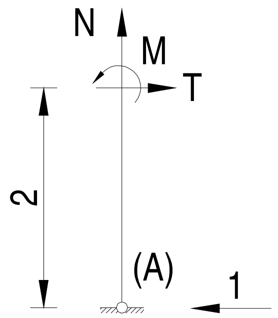
Σ M(C)=0 $\Rightarrow$

$$1 \cdot 4 - Z \cdot 2 = 0$$
$$Z = \frac{4}{2} = 2kN$$
$$\underline{Z = 2kN}$$

- sila u zatezi je vlačna

MOMENTI U KARAKTERISTIČNIM PRESJECIMA:

PRESJEK 1-1 i 2-2:

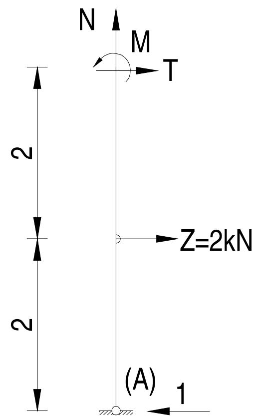


$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{1\text{-}1}= 1\cdot 2=0$

$\underline{M_{1\text{-}1}}$=-·2kNm

$\underline{M_{2\text{-}2}}$=-2kNm

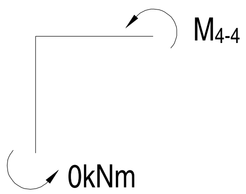
PRESJEK 3-3:



$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{3\text{-}3}+2\cdot 2-4\cdot 1=4-4=0$

$\underline{M_{3\text{-}3}}$=0kNm

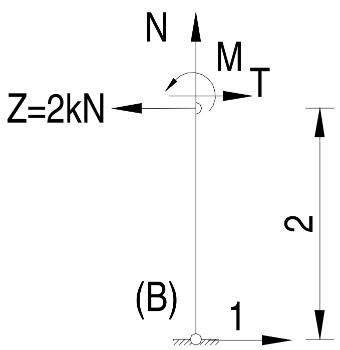
PRESJEK 4-4: (iz ravnoteže čvora)



$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{4\text{-}4}+0=0$

$\underline{M_{4\text{-}4}}$=0kNm

PRESJEK 5-5 i 6-6:

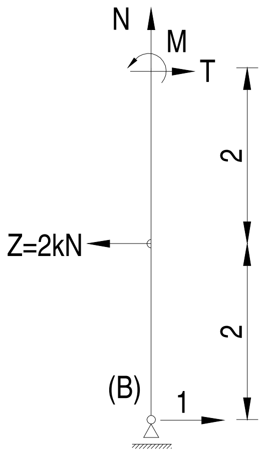


$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{5\text{-}5}+2\cdot 1=0$

$\underline{M_{5\text{-}5}}$=-2kNm

$\underline{M_{6\text{-}6}}$=-2kNm

PRESJEK 7-7:

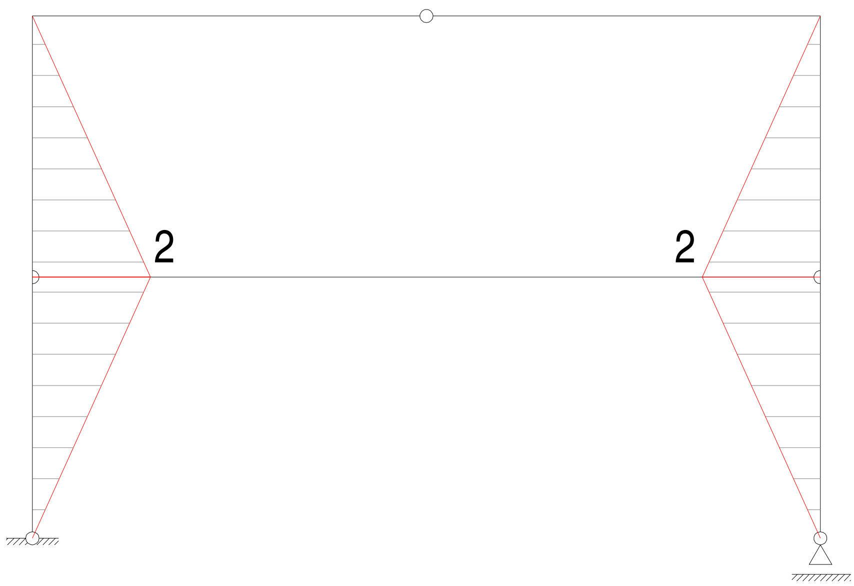


$\Sigma M=0 \Rightarrow M_{7\text{-}7}+4\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2=0$

$\underline{M_{7\text{-}7}=4-4=0kNm}$

Iz ravnoteže čvora $\Rightarrow$ $\underline{M_{8\text{-}8}=0kNm}$

MOMENTNI DIJAGRAM m_1 od jediničnog opterećenja:



KOEFICIJENTI POPUSTLJIVOSTI (pomak na mjestu i u smjeru jedinične sile):

$$\delta_{11}=\int \frac{m_1\cdot m_1}{EI}dx+\int \frac{n_1\cdot n_1}{EF}dx$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI_1}\left(\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\right)+\frac{1}{EI_2}\left(\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\right)+\frac{1}{EF}(2\cdot 2\cdot 6)=\frac{16}{3EI_1}+\frac{16}{3EI_2}+\frac{24}{EF}$$

$$\delta_{11}=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{1.62\cdot 10^5}+\frac{1}{1.94\cdot 10^5}\right)+\frac{24}{2\cdot 10^6}=7.23566\cdot 10^{-5}\,m$$

POMAK (na mjestu i u smjeru od djelovanja vanjskog opterećenja) δ_{10}:

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 \cdot m_1}{EI} dx + \int \frac{N_0 \cdot n_1}{EF} dx$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI_1}\left(\frac{360 \cdot 2}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 2\right) + \frac{1}{EI_2}\left(\frac{360 \cdot 2}{2} \cdot (-\frac{1}{3}) \cdot 2\right) + \frac{1}{EF}(180 \cdot 6 \cdot 2) = 240 \cdot \left(\frac{1}{EI_1} + \frac{1}{EI_2}\right) + \frac{2160}{EF}$$

$$\delta_{10} = -240\left(\frac{1}{1.62 \cdot 10^5} + \frac{1}{1.94 \cdot 10^5}\right) + \frac{2160}{2 \cdot 10^6} = -2.716 \cdot 10^{-3} m + 1.08 \cdot 10^{-3} m$$

$$\underline{\delta_{10} = -1.636 \cdot 10^{-3} m}$$

IZ JEDNADŽBE KONTINUITETA IZRAČUNAMO NEPOZNATU SILU X_1:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$7.23566 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 - 1{,}636 \cdot 10^{-3} = 0$$

$$7.23566 \cdot 10^{-5} \cdot X_1 = 1{,}636 \cdot 10^{-3}$$

$$X_1 = \frac{1{,}636 \cdot 10^{-3}}{7.23566 \cdot 10^{-5}} = 22.61 kN$$

$$\underline{X_1 = 22.61 kN}$$

KONAČNI MOMENTNI DIJAGRAM M (prema principu superpozicije):

$$M = M_0 + X_1 \cdot m_1$$

$$M_{1-1} = 0 + 22.61 \cdot 2 = 45.22 kNm$$

$$M_{2-2} = 0 + 22.61 \cdot 2 = 45.22 kNm$$

$$M_{3-3} = -360 + 22.61 \cdot 0 = -360 kNm$$

$$M_{4-4} = 360 kNm$$

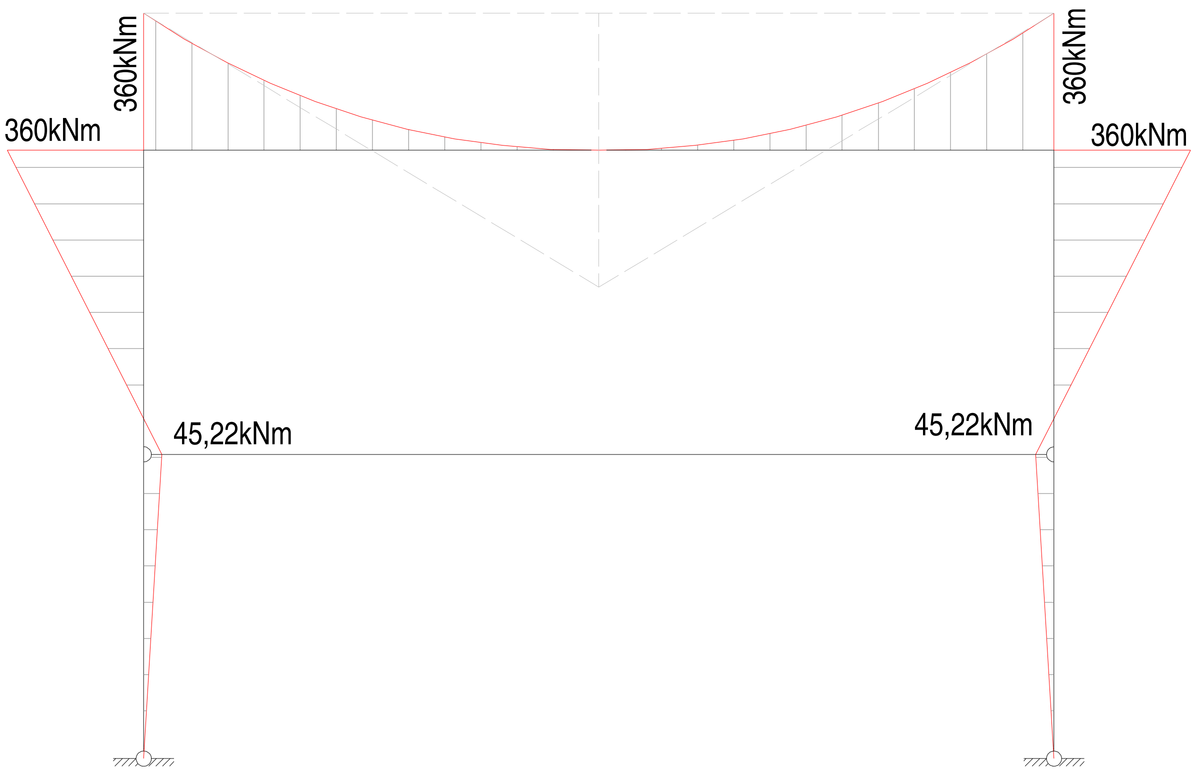
$$M_{5-5} = 0 - 22.61 \cdot 2 = -45.22 kNm$$

$$M_{6-6} = 0 - 22.61 \cdot 2 = -45.22 kNm$$

$$M_{7-7} = 360 + 22.61 \cdot 0 = 360 kNm$$

$$M_{8-8} = -360 kNm$$

MOMENTNI DIJAGRAM M



<u>ZADATAK 2.</u>

I N Ž E NJ E R S K A M E T O D A P O M A K A

INŽENJERSKA METODA POMAKA

Metode pomaka su metode proračuna štapnih sistema u kojima su nepoznanice translacijski pomaci i kutevi zaokreta odabranih točaka sistema koje nazivamo čvorovima.

Čvorovi su, u metodi pomaka, sve karakteristične točke sistema, poput ležajeva u kojima se sastaje više štapova, točaka u kojima se dva štapa sastaju pod nekim kutom, točke u kojoj su dva kolinearna štapa spojena zglobno ili slobodnog kraja prepusta.

Čvorom se može proglasiti bilo koja točka.

Krutim čvorom nazivamo čvor u kojemu su svi stapovi međusobno kruto spojeni a zglobnim čvor u kojem su svi štapovi spojeni zglobno, čvor može biti i mješoviti kruto-zglobni.

Elementom, nazivamo dio štapa između dva susjedna čvora.

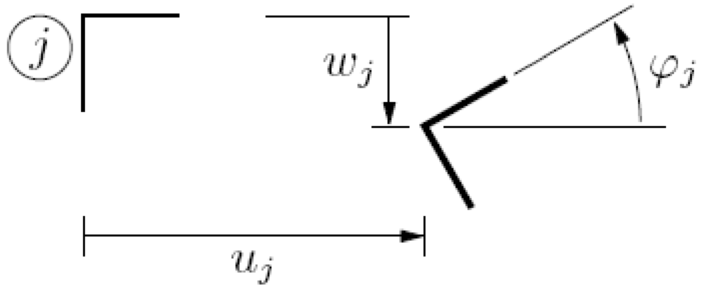
Svaki kruti ravninski čvor j ako nije ležajni, ima dva translacijska stupnja slobode — to su: translacijski pomak po općem pravcu koji možemo uvijek rastaviti na komponente $\vec{u}_j = u_j \cdot \vec{i}$ u smjeru osi x, i $\vec{w}_j = w_j \cdot \vec{j}$ u smjeru osi z — te jedan rotacijski stupanj slobode — zaokret za kut φj oko osi okomite na ravninu sistema.

Zanemarimo li uzdužne deformacije ravnih elemenata, razmak čvorova jednoga elementa se neće mijenjati pa između njihovih translacijskih pomaka postoji kinematičko ograničenje, te se time broj nepoznanica smanjuje, ali treba prepoznati neovisne translacijske pomake sistema.

Takav se način metode naziva inženjerskom metodom pomaka.

Svaki (kruti) čvor u ravnini ima tri stupnja slobode gibanja pa je u općoj metodi pomaka broj nepoznanica približno jednak trostrukom broju čvorova sistema (treba oduzeti broj komponenata pomaka po pravcima ležajnih veza jer one nisu nepoznanice). Zanemarivanjem utjecaja uzdužnih sila, što je temeljna pretpostavka inženjerske metode pomaka, broj nepoznanica možemo bitno smanjiti.

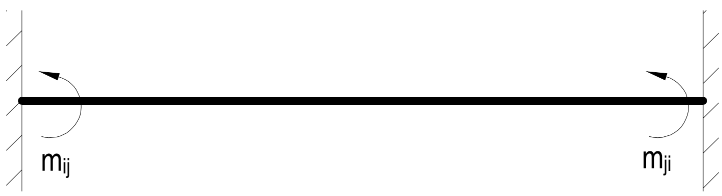
U inženjerskoj metodi pomaka nepoznanice su kutevi zaokreta i vrijednosti neovisnih translacijskih pomaka čvorova.



Broj neovisnih translacijskih pomaka određujemo s pomoću zglobne sheme sistema koju oblikujemo pretvaranjem svih krutih i kruto-zglobnih čvornih veza, uključujući i ležajne, u zglobne pri čemu štapne elemente u shemi smatramo apsolutno krutima. Tu shemu nazivamo i pridruženom rešetkom. *Broj neovisnih translacijskih pomaka u sistemu jednak je broju stupnjeva slobode zglobne sheme.*

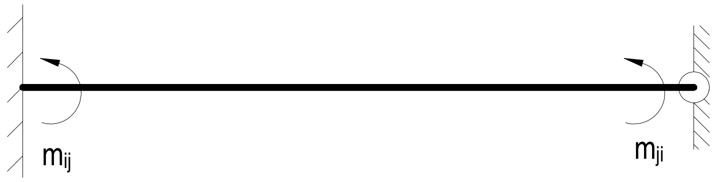
Dok smo u metodi sila isključivali veze, u inženjerskoj metodi pomaka dodajemo veze čime sustav pretvaramo u sustav obostrano upetih greda, ili u npr. sustav upete grede i zglobne veze na krajevima grede. Tražimo neovisne translacijske pomake, međutim ako ih nema onda su nepoznanice samo kutevi zaokreta čvorova, te postavljamo jednadžbe ravnoteže čvorova i jednadžbe virtualnih radova. Za slučaj obostrano upetih greda momenti uslijed zaokreta čvorova određuju se iz jednadžbi:

$$m_{ij} = 4k_{ij} \cdot \varphi_i + 2k_{ij} \cdot \varphi_j - 6k_{ij} \cdot \Psi_{ij}; \qquad \text{i} \qquad m_{ji} = 2k_{ij} \cdot \varphi_i + 4k_{ij} \cdot \varphi_j - 6k_{ij} \cdot \Psi_{ij}$$



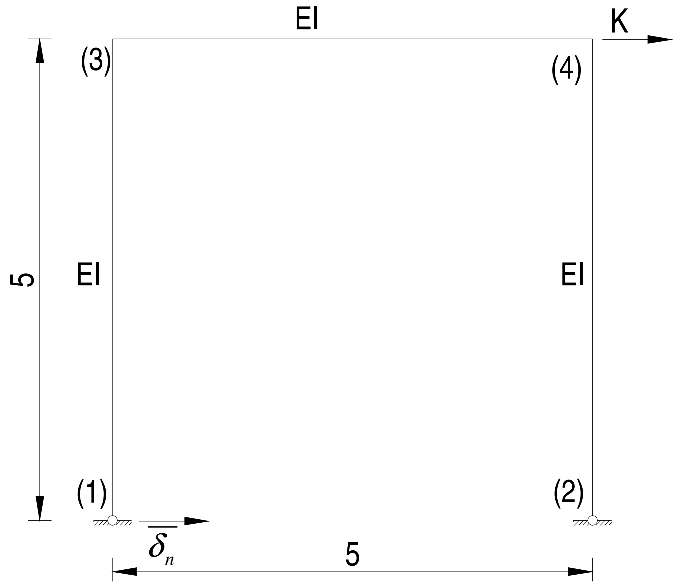
Za slučaj upete i zglobne veze na gredi, momenti se određuju iz uvjeta *STATIČKE KONDENZACIJE* određuju se iz jednadžbi:

$$m_{ij}^C = 3k_{ij} \cdot \varphi_i - 3k_{ij} \cdot \Psi_{ij}; \qquad \text{i} \qquad \overline{M}_{ij}^C = \overline{M}_{ij} - \frac{1}{2}\overline{M}_{ji}$$



Statička kondenzacija predstavlja "uklanjanje" nepoznate vrijednosti (poopćenog) pomaka iz izraza za (poopćene) sile i/ili iz jednadžbi ravnoteže na temelju poznatoga statičkog uvjeta.

RJEŠENJE ZADATKA – INŽENJERSKA METODA POMAKA - POTREBNO NACRTATI M DIJAGRAM ZA SISTEM NA SLICI: Zadano: K=100kN, EI=1x10^{5}kNm^2, δ_n=2mm=2·10^{-3}m.



Određivanje koeficijenata krutosti:

$$k = \frac{EI}{l}$$

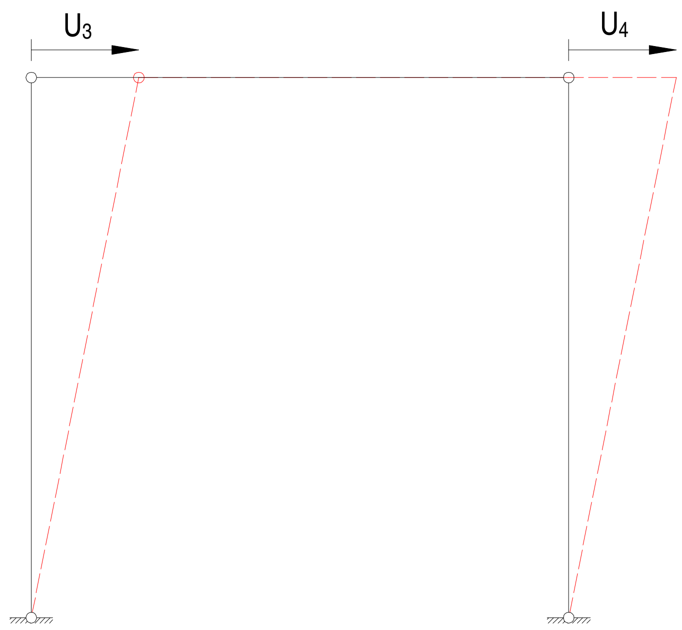
$$k_{13} = \frac{EI}{l} = \frac{100000kNm^2}{5m} = 20000kNm;$$

$$k_{34} = \frac{EI}{l} = \frac{100000kNm^2}{5m} = 20000kNm;$$

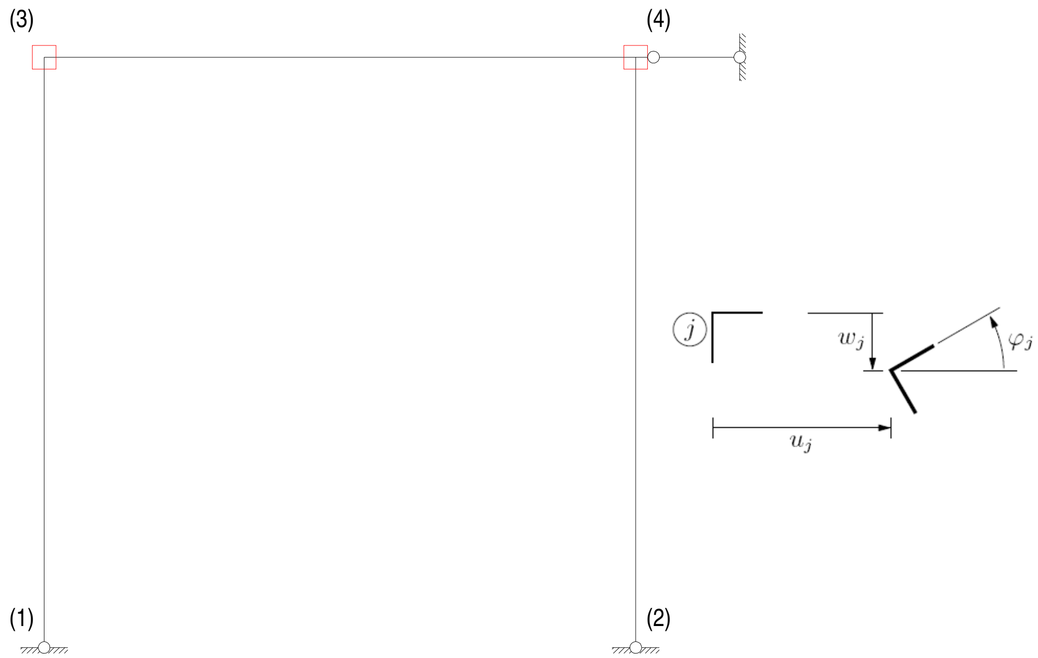
$$k_{24} = \frac{EI}{l} = \frac{100000kNm^2}{5m} = 20000kNm$$

$$\underline{\underline{k_{13} = k_{34} = k_{24} = k = 20000kNm}}$$

Zglobna shema:



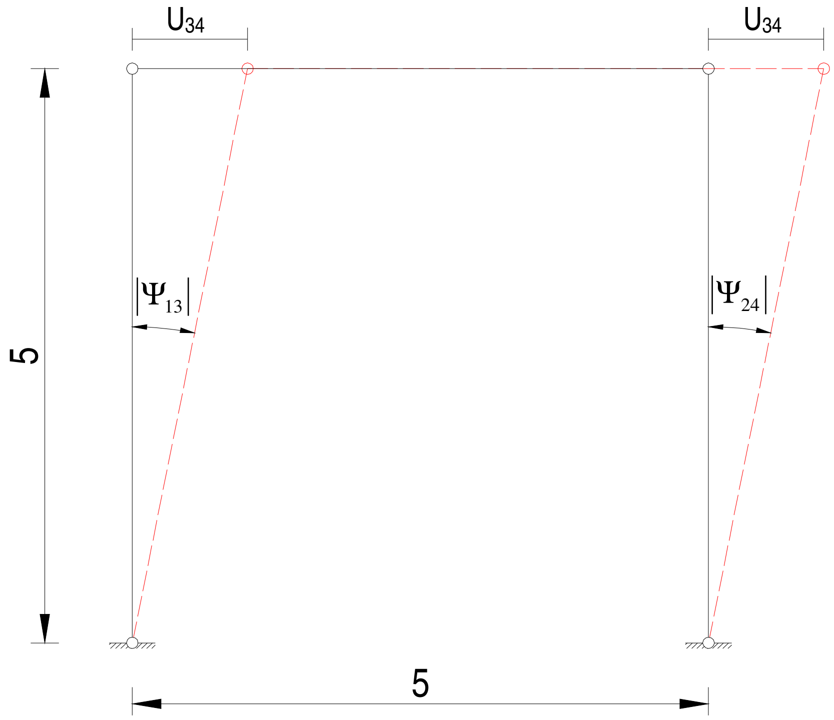
OSNOVNI SISTEM:



Dodajemo jednu vezu u čvoru (4).

NEPOZNANICE su kutevi zaokreta u čvorovima (3) i (4). Prema tome, nepoznanice su kutevi zaokreta φ_3, φ_4 te translacijski pomak U_{34}.

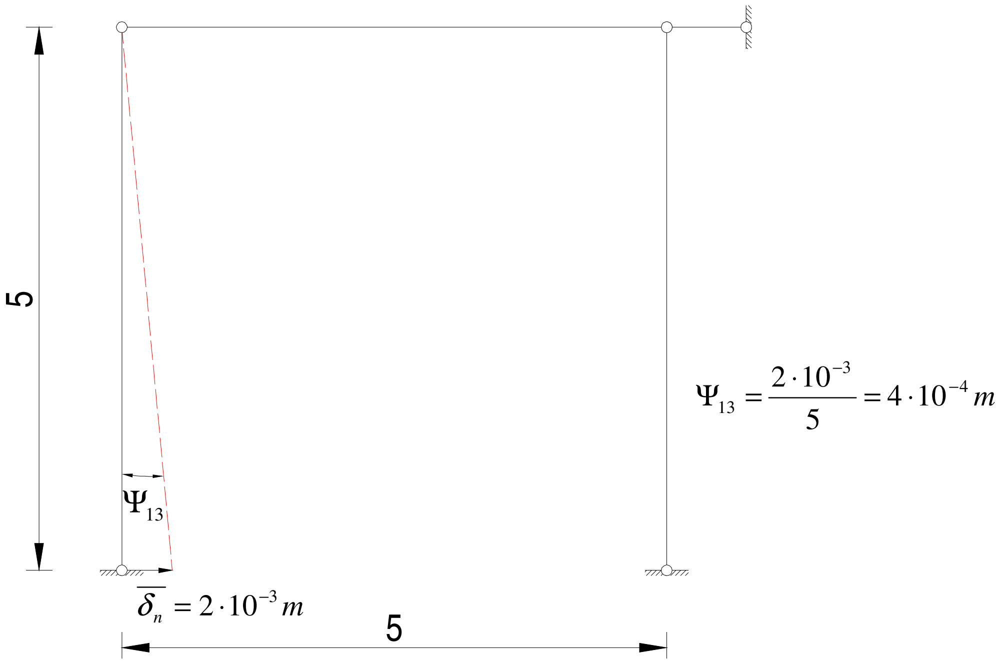
PLAN POMAKA OD NEOVISNOG TRANSLACIJSKOG POMAKA:



$$\Psi_{13} = \frac{-U_{34}}{5}$$

$$\Psi_{24} = \frac{-U_{34}}{5}$$

PLAN POMAKA OD NEOVISNOG PRISILNOG POMAKA:



MOMENTI NA KRAJEVIMA ELEMENATA:

$M_{13} = 0$ kNm (zglob)

$$M_{31}^{C} = -3k\cdot\overline{\Psi_{13}} + 3\cdot k\varphi_3 - 3k\cdot\Psi_{13} = 3k\left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{5} + \varphi_3 + \frac{U_{34}}{5}\right)$$

$$M_{34} = 4k\cdot\varphi_3 + 2\cdot k\varphi_4$$

$$M_{43} = 4k\cdot\varphi_4 + 2\cdot k\varphi_3$$

$M_{24} = 0$ kNm (zglob)

$$M_{42}^{C} = 3k\cdot\varphi_4 - 3\cdot k\Psi_{24} = 3k\left(\varphi_4 + \frac{U_{34}}{5}\right)$$

Jednadžbe ravnoteže:

<u>Za čvor 3:</u>

$$\Sigma M_3 = 0 \Rightarrow$$

$$-M_{31}^{C} - M_{34} = 0$$

$$3k\left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{5} + \varphi_3 + \frac{U_{34}}{5}\right) + (4k\cdot\varphi_3 + 2k\cdot\varphi_4) = 0 / : k$$

$$1{,}2\cdot 10^{-3} + 3\varphi_3 + 0{,}6U_{34} + 4\varphi_3 + 2\varphi_4 = 0$$

$$\underline{7\varphi_3 + 2\varphi_4 + 0{,}6U_{34} = -1{,}2\cdot 10^{-3}}$$

Za čvor 4:

$$\Sigma M_4 = 0 \Rightarrow$$

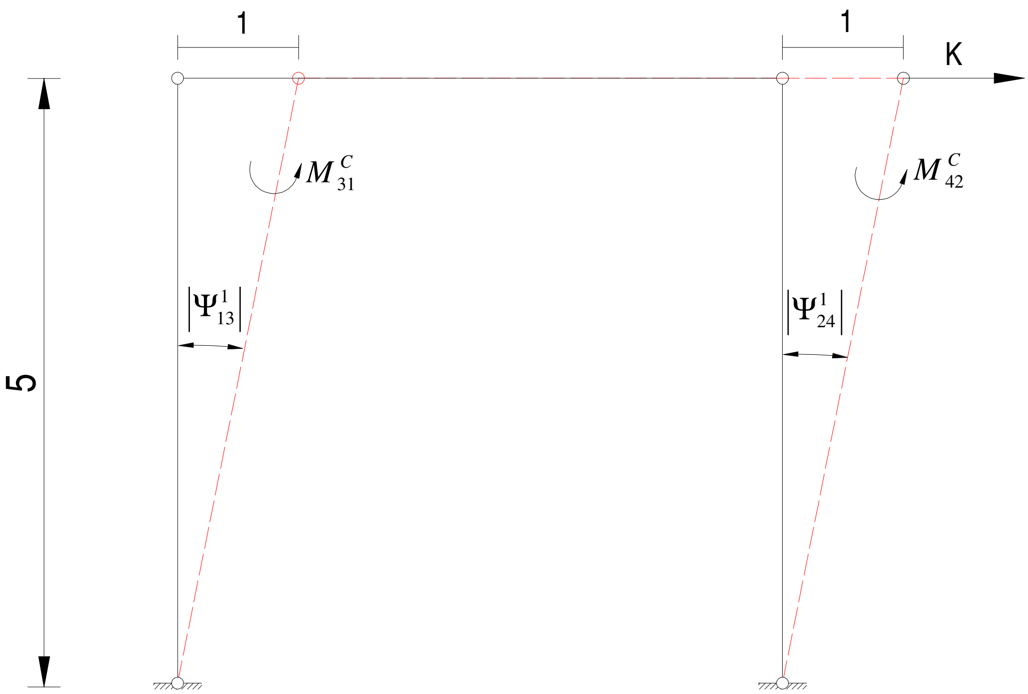
$$-M_{42}^C - M_{43} = 0$$

$$3k\varphi_4 + \frac{3k \cdot U_{34}}{5} + 4k\varphi_4 + 2k\varphi_3 = 0 /: k$$

$$3\varphi_4 + 0{,}6U_{34} + 4\varphi_4 + 2\varphi_3 = 0$$

$$\underline{2\varphi_3 + 7\varphi_4 + 0{,}6U_{34} = 0}$$

Jednadžbe ravnoteže virtualnog rada od sile K na jediničnom pomaku U_{34}=1:



$$\Sigma W = 0 \Rightarrow$$

$$M_{31}^C \cdot \Psi_{13}^1 + M_{42}^C \cdot \Psi_{24}^1 + K \cdot 1 = 0$$

$$\left(\frac{3k \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5} + 3k \cdot \varphi_3 + \frac{3k \cdot U_{34}}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(3k \cdot \varphi_4 + \frac{3k \cdot U_{34}}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 100 \cdot 1 = 0 \quad /: k$$

$$\frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{5} + 3k \cdot \varphi_3 + \frac{0{,}6 \cdot U_{34}}{5} + \frac{3\varphi_4}{5} + \frac{0{,}6 \cdot U_{34}}{5} - \frac{100}{k} = 0$$

$$\underline{0{,}6\varphi_3 + 0{,}6 \cdot \varphi_4 + 0{,}24 \cdot U_{34} = \frac{100}{k} - 0{,}24 \cdot 10^{-3}}$$

Sada imamo 3 jednadžbe sa tri nepoznanice, te riješimo sustav:

$$7\varphi_3 + 2\varphi_4 + 0{,}6U_{34} = -1{,}2 \cdot 10^{-3}$$
$$2\varphi_3 + 7\varphi_4 + 0{,}6U_{34} = 0$$
$$0{,}6\varphi_3 + 0{,}6 \cdot \varphi_4 + 0{,}24 \cdot U_{34} = \frac{100}{k} - 0{,}24 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \varphi_3 = -3{,}5\varphi_4 - 0{,}3 \cdot U_{34}$$

$$7(-3{,}5\varphi_4 - 0{,}3 \cdot U_{34}) + 2\varphi_4 + 0{,}6 \cdot U_{34} = -1{,}2 \cdot 10^{-3}$$
$$-22{,}5\varphi_4 - 1{,}5U_{34} = -1{,}2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$
$$U_{34} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} - 15\varphi_4$$

$$0{,}6(-3{,}5\varphi_4 - 0{,}3 \cdot U_{34}) + 0{,}6\varphi_4 + 0{,}24U_{34} = \frac{100}{k} - 0{,}24 \cdot 10^{-3}$$
$$-1{,}5\varphi_4 + 0{,}06 \cdot U_{34} = \frac{100}{k} - 0{,}24 \cdot 10^{-3}$$
$$-1{,}5\varphi_4 + 0{,}6(0{,}8 \cdot 10^{-3} - 15\varphi_4) = \frac{100}{k} - 0{,}24 \cdot 10^{-3}$$
$$-1{,}5\varphi_4 + 0{,}048 \cdot 10^{-3} - 0{,}9\varphi = \frac{100}{k} - 0{,}24 \cdot 10^{-3}$$
$$-2{,}4\varphi_4 = \frac{100}{20000} - 0{,}24 \cdot 10^{-3} - 0{,}048 \cdot 10^{-3}$$
$$\Rightarrow \varphi_4 = -\frac{4{,}712 \cdot 10^{-3}}{2{,}4} = -1{,}963 \cdot 10^{-3}$$

$$U_{34} = 0{,}8 \cdot 10^{-3} - 15(1{,}963 \cdot 10^{-3}) = 0{,}03025m$$

$$\varphi_3 = -3{,}5(-1{,}963 \cdot 10^{-3}) - 0{,}3 \cdot 0{,}03025 = -2{,}203 \cdot 10^{-3}$$

rješenja su :

$$\varphi_3 = -2{,}203 \cdot 10^{-3} m$$
$$\varphi_4 = -1{,}963 \cdot 10^{-3} m$$
$$U_{34} = 0{,}03025m$$

Proračun momenata na krajevima elemenata:

$$M_{13} = 0\,\text{kNm}$$

$$M_{31}^{C} = 3k\left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{5} + \varphi_3 + \frac{U_{34}}{5}\right) = 3\cdot 20000\left(0{,}4\cdot 10^{-3} - 2{,}203\cdot 10^{-3}\,\frac{0{,}03025}{5}\right) = 254{,}8\,kNm$$

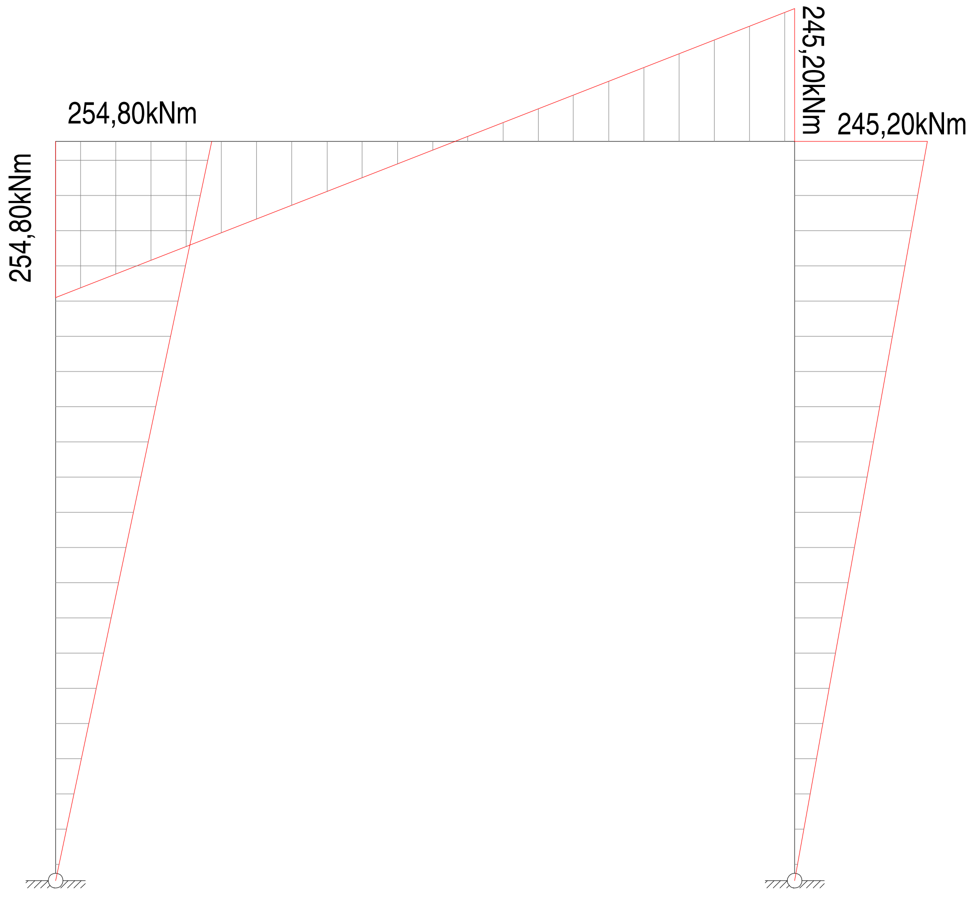
$$M_{34} = 4k\cdot\varphi_3 + 2\cdot k\varphi_4 = 4\cdot 20000\left(-2{,}203\cdot 10^{-3}\right) + 2\cdot 20000\left(-1{,}963\cdot 10^{-3}\right) = -254{,}80\,kNm$$

$$M_{43} = 4k\cdot\varphi_4 + 2\cdot k\varphi_3 = 4\cdot 20000\left(-1{,}963\cdot 10^{-3}\right) + 2\cdot 20000\left(-2{,}203\cdot 10^{-3}\right) = -245{,}20\,kNm$$

$$M_{24} = 0\,\text{kNm}$$

$$M_{42}^{C} = 3k\left(\varphi_4 + \frac{U_{34}}{5}\right) = 3\cdot 20000\left(-1{,}963\cdot 10^{-3}\right) + \frac{3\cdot 20000}{5}\cdot 0{,}03025 = 245{,}20\,kNm$$

KONAČNI MOMENTNI DIJAGRAM:



ZADATAK 3.

C R O S S – ova M E T O D A

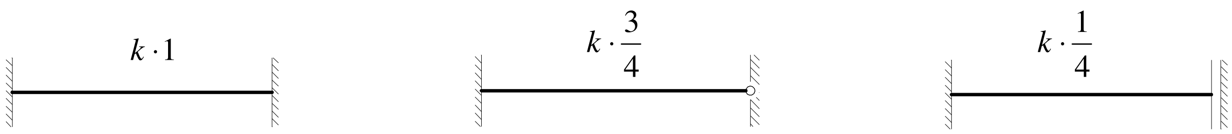
Crossova metoda.

Crossova metoda izračuna pomaka određenog dijela sustava je relaksacijski tj. iteracijski postupak rješavanja sistema. Sama ideja rješavanja iteracijom polazi od činjenice da bi za npr. inženjersku metodu pomaka u slučaju velikog broja nepoznanica bilo potrebno riješiti isto toliki veliki broj jednadžbi što je vrlo težak i mukotrpan zadatak, pogotovo u vremenu kada nisu postojala računala koja danas takove sisteme relativno brzo rješavaju.

Prvi koji se je bavio proučavanjem iteracijske metode proračuna konstukcija je Konstantin Čališev, koji se bavio proučavanjem pomaka u sistemu preko kuteva zaokreta i translacijskih pomaka. Prilikom korištenja iteracijskih postupaka rješavanja sistema svakom iteracijom smo bliži točnom rješenju. Već druga iteracija može dati dovoljno točan rezultat.

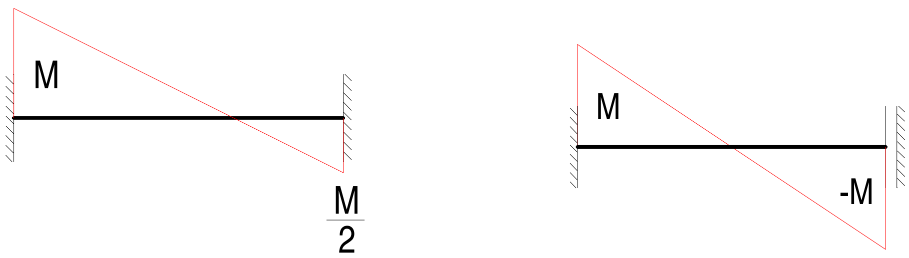
Međutim, Čališevu metodu usavršio je Cross, koji je vidio da se umjesto kuteva zaokreta i translacijskih pomaka može raditi sa momentima na krajevima ležajeva, a to je interesantno zbog toga što nas u biti zanimaju sile i njihova djelovanja.

Crossov postupak se koristi za proračun pomaka kod nepomičnih sistema. Izračunom razdjelnih koeficijenata i momenata upetosti počinjemo sa iteracijom od onog čvora na kojemu očekujemo da će se pojaviti najveći neuravnoteženi moment. Važno je napomenuti da su razdjelni koeficijenti pokazatelj koliki će se dio od ukupnog neuravnoteženog momenta prenijeti na promatrani element.



Nakon određivanja momenta potrebno ga prilikom uravnoteženja raspodijeliti na element u omjeru krutosti, tj. prema razdjelnim koeficijentima, te prema elementu prijenosnim koeficijentima na drugi kraj elementa prenesemo moment.

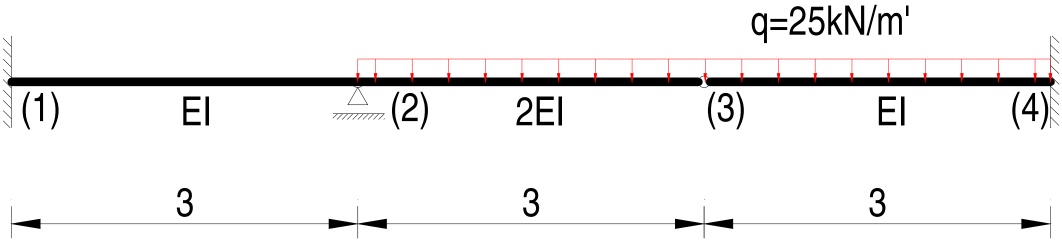
Prijenosni koeficijenti: 1:0,5 i 1:-1.



3. CROSS-ova METODA

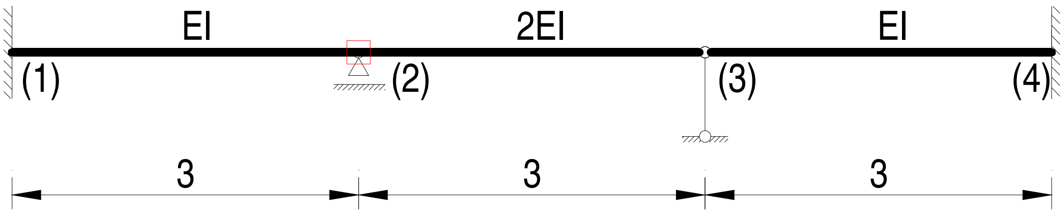
Potrebno je Crossovom metodom izračunati vertikalni pomak točke A.

Zadano je: l=3m, q=25kN/m'; EI=100000kNm²



Dodamo vezu na čvoru 3.

OSNOVNI SISTEM:



KOEFICIJENTI KRUTOSTI ELEMENATA:

$$k_{12} = \frac{EI}{3}$$

$$k_{23} = \frac{2EI}{3}$$

$$k_{34} = \frac{EI}{3}$$

KOEFICIJENT KRUTOSTI ČVORA 2:

$$k_2 = k_{12} + \frac{3}{4}k_{23} = \frac{EI}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2EI}{3} = \frac{EI}{3} + \frac{EI}{2} = \frac{5}{6}\cdot EI$$

RAZDJELNI KOEFICIJENTI:

$$\mu_{21} = \frac{k_{12}}{k_2} = \frac{\frac{EI}{3}}{\frac{5EI}{6}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$\mu_{23} = \frac{\frac{3}{4}k_{23}}{k_2} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{2EI}{3}}{\frac{5EI}{6}} = \frac{6\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Kontrola:

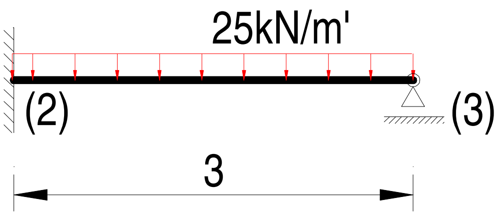
$\mu_{21} + \mu_{23} = 1$

$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

$1 = 1 \quad zadovoljava$

MOMENTI UPETOSTI:

- ***element 2-3***

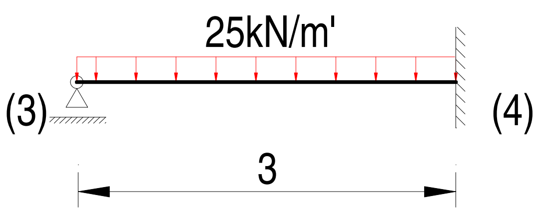


$$\overline{M_{23}^{C}} = \overline{M_{23}} - \frac{1}{2}\cdot\overline{M_{32}}$$

$$\overline{M_{23}^{C}} = \frac{q\cdot l^2}{12} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{q\cdot l^2}{12}\right) = \frac{3\cdot q\cdot l^2}{24} = \frac{3\cdot 25\cdot 3^2}{24} = 28{,}13kNm$$

$$\underline{\overline{M_{23}^{C}} = 28{,}13kNm}$$

- ***element 3-4***



$$\overline{M_{34}^{C}} = \overline{M_{34}} - \frac{1}{2}\cdot\overline{M_{34}}$$

$$\overline{M_{34}^{C}} = -\frac{q\cdot l^2}{12} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{q\cdot l^2}{12}\right) = -\frac{3\cdot q\cdot l^2}{24} = \frac{-3\cdot 25\cdot 3^2}{24} = -28{,}13kNm$$

$$\underline{\overline{M_{34}^{C}} = -28{,}13kNm}$$

ITERACIJA:

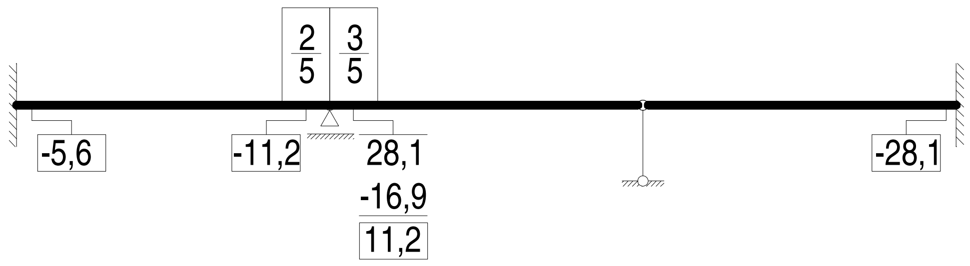
ČVOR 2:

$\Delta M = 28{,}1\, kNm$

$-\frac{2}{5} \cdot 28{,}1 = -11{,}2\, kNm$

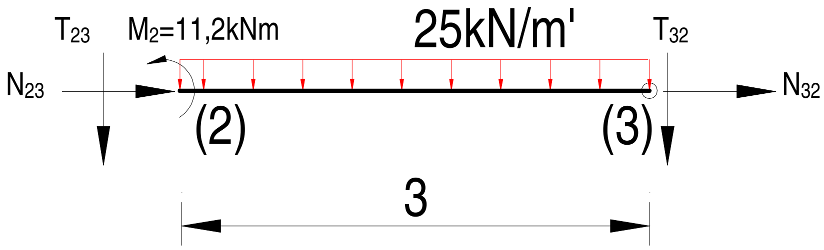
$-\frac{3}{5} \cdot 28{,}1 = -16{,}9\, kNm$

$\underline{\Sigma = -28{,}1\, kNm}$



PRORAČUN SILE V U DODANOM ŠTAPU

- ukupna sila V je zbroj poprečnih sila u čvoru 3 na elementima 2-3 i 3-4.
- ***element 2-3***

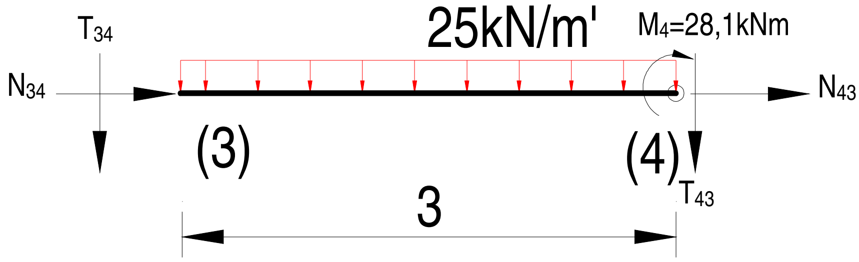


$\Sigma M_2 = 0$

$11{,}2 - 25 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - T_{32} \cdot 3 = 0$

$T_{32} = -33{,}76\, kN$

- ***element 3-4***



$$\Sigma M_4 = 0$$

$$-28{,}1 + 25 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} + T_{34} \cdot 3 = 0$$

$$T_{34} = -28{,}13\,kN$$

Reakcija V:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

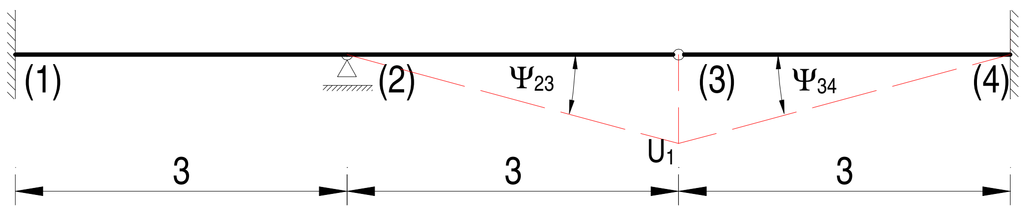
$$V + T_{32} + T_{34} = 0$$

$$V = -T_{32} - T_{34} = -(-33{,}76) - (-28{,}13) = 33{,}76 + 28{,}13 = 61{,}9\,kN$$

$$\underline{V = 61{,}9\,kN}$$

SISTEM ZA PRISILNI POMAK U_1:

PLAN POMAKA:



$$\overline{\Psi_{23}} = -\frac{U_1}{3}$$

$$\overline{\Psi_{34}} = \frac{U_1}{3}$$

ZAMJENJUJUĆI KOEFICIJENTI:

$$k_{ij}^* = \frac{k_{ij}}{EI}$$

$$k_{12}^* = \frac{k_{12}}{EI} = \frac{1}{3}$$

$$k_{23}^* = \frac{k_{23}}{EI} = \frac{2}{3}$$

$$k_{34}^* = \frac{k_{34}}{EI} = \frac{1}{3}$$

Uvedemo jednadžbu: $U_1^* = U_1 \cdot EI \Rightarrow U_1 = \dfrac{U_1^*}{EI}$

Momenti upetosti zbog prisilnog pomaka:

$$\overline{M_{23}^C} = -3k_{23} \cdot \overline{\Psi_{23}} = 3k_{23} \cdot \frac{U_1}{3} = 3 \cdot \frac{k_{23} \cdot U_1^*}{EI \cdot 3} = \frac{3}{3} k_{23}^* \cdot U_1^* = \frac{2}{3} U_1^*$$

Sada odaberemo proizvoljnu veličinu U_1^* ali u takvom iznosu koji je reda veličine izračunatog momenta upetosti na osnovnom sistemu., dakle cca 20 do 30kNm.

Odabrano: $U_1^* = 25\,kNm$

$$\overline{M_{23}^C} = \frac{2}{3} U_1^* = \frac{2}{3} \cdot 25 = 16{,}7\,kNm$$

$$\overline{M_{43}^C} = -3k_{34} \cdot \overline{\Psi_{34}} = -3k_{34} \cdot \frac{U_1}{3} = -3 \cdot \frac{k_{34} \cdot U_1^*}{EI \cdot 3} = -\frac{3}{3} k_{34}^* \cdot U_1^* = -\frac{1}{3} \cdot 25 = -8{,}3\,kNm$$

ITERACIJA:

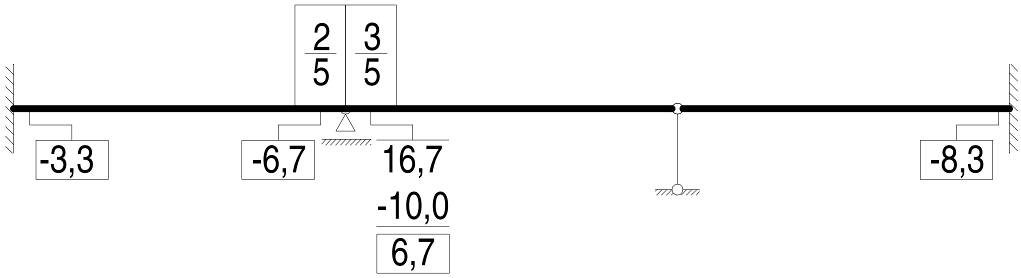
ČVOR 2:

$\Delta M = 16{,}7\,kNm$

$-\dfrac{2}{5}\cdot 16{,}7 = -6{,}7\,kNm$

$-\dfrac{3}{5}\cdot 16{,}7 = -10{,}0\,kNm$

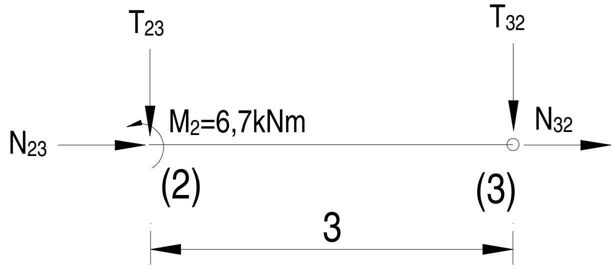
$\underline{\Sigma = -16{,}7\,kNm}$



PRORAČUN SILE V_1 U DODANOM ŠTAPU

- ***ukupna sila V_1 je zbroj poprečnih sila u čvoru 3 na elementima 2-3 i 3-4.***

- ***element 2-3***

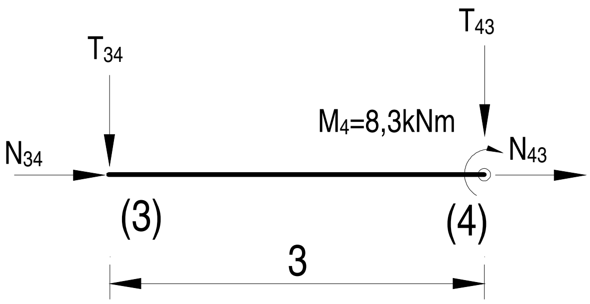


$\Sigma M_2 = 0$

$6{,}7 - 3T_{32} = 0$

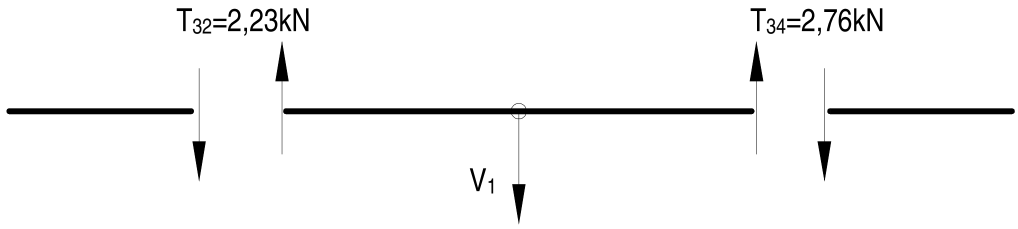
$T_{32} = 2{,}23\,kN$

- element 3-4



$$\Sigma M_4 = 0$$
$$-8{,}3 + 3T_{34} \cdot 3 = 0$$
$$T_{34} = 2{,}76\,kN$$

REAKCIJA V_1:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$-V_1 + T_{32} + T_{34} = 0$$

$$V_1 = T_{32} + T_{34} = 2{,}76 + 2{,}23 = 5{,}0kN$$

$$\underline{V_1 = 5{,}0kN}$$

S OBZIROM NA LINEARNOST SISTEMA VRIJEDI ODNOS:

$$\frac{U}{U_1} = \frac{V}{V_1} \Rightarrow U = \frac{V}{V_1} \cdot U_1$$

$$U_A = \frac{61{,}9}{5{,}0} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} = 3{,}095 \cdot 10^{-3}\,m$$

Vertikalni pomak točke A je 3,1mm prema dolje.

LITERATURA:

[1] K.Fresl, Bilješke s predavanja iz kolegija Statika I i Statika II sa web stranice Građevinskog fakulteta Zagreb, http://www.grad.hr/nastava/gs/

[2] H. Werner: Tehnička mehanika, 1986.

[3] M. Anđelić: Statika neodređenih štapnih konstrukcija, Zagreb 1993.

[4] Bilješke s predavanja i vježbi na razlikovnom studiju građevinarstva, Zagreb 2009.

[5] Bilješke sa predavanja iz kolegija Teorija konstrukcija, Varaždin 1998.