

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

Matej Ivanković

# **Zidovi s otvorima**

(završni rad)

Zagreb, 2012.

Ovaj završni rad izrađen je u Zavodu za tehničku mehaniku na Građevinskom fakultetu pod vodstvom prof. dr. sc. Krešimira Fresla, dipl. ing. građ., u akademskoj godini 2011./2012.

## Sadržaj:

1. Uvod (općenito o zidovima) .....	1
2. Kratak pregled dosadašnjih radova .....	2
2.1. Rješenje A.R. Ržanjčina .....	2
2.2. Rješenje M. Tessiera .....	3
2.3. Rad O. Wenera.....	4
2.4. Ostala rješenja .....	5
2.5. Rješenje V. Simovića .....	6
3. Općenito o metodi sila .....	9
3.1. Elastično težište .....	10
4. Općenito o općoj metodi pomaka .....	17
5. Model zida s otvorima .....	18
6. Sile stanja prisilnih pomaka .....	20
7. Sile upetosti .....	29
7.1. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom paralelno s osi štapa .....	31
7.2. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom okomitom na os štapa.....	34
7.3. Sile upetosti za opterećenje koncentriranim momentom.....	38
7.4. Sile upetosti za opterećenje kontinuiranom jednoliko raspodijeljenom silom .....	42
7.5. Dobivanje sile upetosti pomoću izraza iz priručnika .....	46
7.6. Sile upetosti za opterećenje zadano samo na neizmjerljivo krutim dijelovima štapa .....	47
8. Sustav jednadžbi ravnoteže .....	48
8.1. Prijelaz u globalni koordinatni sustav .....	48
8.2. Jednadžbe ravnoteže čvorova.....	50
8.3. Ukupne sile na krajevima elemenata .....	51
9. Kinematička kondenzacija.....	52
10. Primjer .....	54
Literatura .....	65

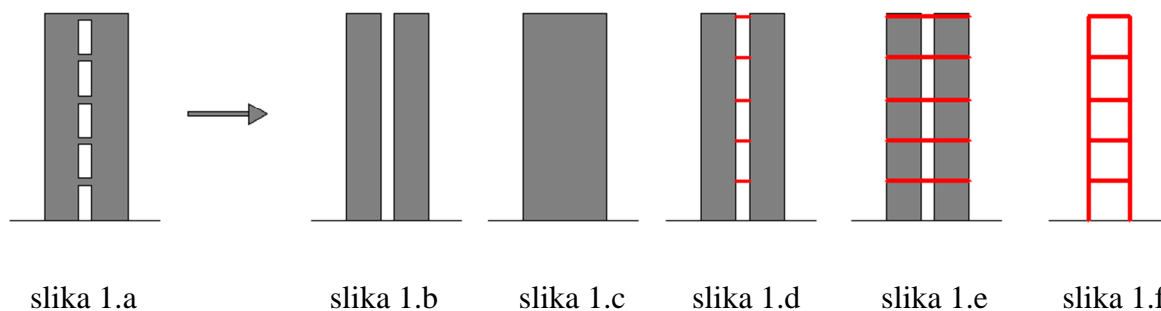
## 1. Uvod (općenito o zidovima)

Zid je plošni nosivi element koji prenosi opterećenje u svojoj ravnini. Obilježje ovog konstrukcijskog elementa jest to da je jedna dimenzija zida, debljina, zanemarivo mala u odnosu na druge dvije. Oni, dakle, na sebe preuzimaju vertikalna i horizontalna djelovanja, te se u njima javlja ravninsko stanje naprezanja. Kao i svi konstrukcijski elementi, moraju zadovoljavati uvjete stabilnosti, te zaštite od utjecaja promjene temperature, vlage, zvuka, vatre, a potom i uvjete trajnosti, ekonomičnosti i estetike.

Uz obilježja zidova poput gradiva od kojih su izvedeni, tehnologije građenja korištene pri izvedbi, vatrootpornosti, izolacijskim svojstvima, zidove prema konstrukcijskoj ulozi možemo podijeliti na nosive i nenosive. Nosivi zidovi vlastitu težinu zajedno sa svim ostalim projektiranim opterećenjima prenose na druge elemente, dok nenosivi nose samo sebe. Također postoje razlike između punih zidova i zidova s otvorima, koje ćemo obraditi u ovome radu.

Kod mnogoetažnih zgrada osnovni elementi za horizontalna djelovanja, pored okvira, su zidovi, najčešće oslabljeni nizovima otvora. Kod objekata ne pretjerano velike visine zidovi se obično izvode konstatne debljine, a ako i dolazi do promjene debljine zida s visinom, ona se obično izvodi skokovito.

Ovisno o debljini greda koje spajaju stupove zidova, izabiremo najpogodniju od nekoliko proračunskih shemi zida. Ako su visine greda jako malene ili su stupovi zidova spojeni samo stropnim pločama, svaki stup je najbolje tretirati kao zasebnu konzolu (*slika 1.b*). Kod jako krutih greda i malih otvora, cijeli zid uzimamo kao jedinstvenu konzolu (*slika 1.c*). Na prijelaznom području, tj. kod greda male krutosti u odnosu na stupove, ali nezanemarivih utjecaja na povećanje nosivosti sustava (što je i najčešći slučaj), statički proračun postaje složeniji te je potrebno problemu pristupiti na pravi način. Nekoliko je modela kojima možemo opisati konstrukciju. Stupove zidova možemo uzeti kao plošne elemente povezane gredama kao štapnim elementima iznad otvora (*slika 1.d*). Sličan je model kod kojeg se grede kao štapni elementi nastavljaju cijelom širinom zida (*slika 1.e*). U okviru ovog rada, zid ćemo modelirati kao štapni sistem (*slika 1.f* - zid i greda su modelirani kao štapni elementi).



## 2. Kratak pregled dosadašnjih radova

U knjizi „Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije“ iznesen je pregled nekoliko radova vezanih uz proračun zidova s otvorima. Statički proračun ovakvih objekata dosta je složen, jer se primjenom metode sila u klasičnom obliku dolazi do velikog broja nepoznatih veličina (statički višestruko neodređeni sistemi), a s obzirom da se radilo o razdoblju prije primjene računala proračun postaje dugotrajan. Zbog toga autori kraj osnovnih pretpostavki teorije konstrukcija za štapne sisteme uvode dodatne pretpostavke pojednostavljajući postupak proračuna. Naravno, nužno je da su rješenja dovoljno točna za praktičnu primjenu.

### 2.1. Rješenje A.R. Ržanjicina

A.R. Ržanjicin nije se bavio problemom proračuna visokoetažnih objekata sa zidovima za ukrućenje protiv horizontalnih djelovanja, no obrađujući teoriju sastavljenih štapova došao je do diferencijalnih jednadžbi koje predstavljaju matematički model problema proračuna zidova s otvorima. Za gredu sastavljenu od dva elementa vrijedi diferencijalna jednadžba

$$\frac{T''}{\varepsilon} = \gamma T + \Delta,$$

gdje su:  $T$  posmična sila,  
 $\varepsilon$  koeficijent ovisan o vezi među elementima,  
 $\gamma$  koeficijent ovisan o geometrijskim veličinama,  
 $\Delta$  član ovisan o opterećenju.

Jednadžba je potpuno ista kao i diferencijalna jednadžba zida s jednim nizom otvora. Ržanjicinovo opće rješenje za gredu sastavljenu iz više elemenata analogno je zidu s više otvora. Dobiva se sistem linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda:

$$\begin{aligned} \frac{T_1''}{\varepsilon_1} &= \Delta_{11} T_1 + \Delta_{12} T_2 + \dots + \Delta_{1n} T_n + \Delta_{10}, \\ \frac{T_2''}{\varepsilon_2} &= \Delta_{21} T_1 + \Delta_{22} T_2 + \dots + \Delta_{2n} T_n + \Delta_{20}, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{T_n''}{\varepsilon_n} &= \Delta_{n1} T_1 + \Delta_{n2} T_2 + \dots + \Delta_{nn} T_n + \Delta_{n0}, \end{aligned}$$

gdje su:  $T_i$  posmična sila u  $i$ -tom šavu,  
 $\varepsilon_i$  koeficijent ovisan o vezi među elementima  $i$ -tog šava,  
 $\Delta_{ik}$  koeficijent ovisan o geometrijskim veličinama,  
 $\Delta_{i0}$  član ovisan o opterećenju.

Ovo je rješenje matematički elegantno, no nepraktično za proračun zidova zbog svoje glomaznosti. Usvojene su pretpostavke znanosti o otpornosti materijala i zakon ravnih presjeka, a naprezanje se smatra određenim ako su za dani presjek poznate unutarnje sile ( $M, N, T$ ), deformacije se u odnosu na duljinu smatraju malenima.

## 2.2. Rješenje M. Tessiera

U radu „*Stabilnost visokih građevina na vjetar*“ M. Tessier promatrao je simetričan sistem zida oslabljenog po sredini jednim nizom otvora, tražeći progibnu liniju polovine zida za opterećenje vjetrom. Osnovne pretpostavke: točke A i B u osima stupova koje se nalaze na istom nivou ostaju na istoj horizontali i nakon deformacije (zanemaruje se deformacija zbog uzdužnih sila), ravni presjeci okomiti na osi stupova ostaju i nakon deformacije ravni i okomiti na osi stupova.

Diferencijalna jednačina progibne linije zida je

$$EIz'' - 6EI_g \frac{(l+b)^2}{ab^2} z = q(h-x),$$

gdje su:  $z = y'$  tangens kuta nagiba progibne linije,  
 $x$  apscisa mjerena od podnožja,  
 $E$  modul elastičnosti materijala zida,  
 $I$  moment inercije stupa,  
 $I_g$  moment inercije grede,  
 $l$  širina stupa,  
 $b$  duljina grede,  
 $a$  udaljenost od osi do osi grede,  
 $h$  visina zida,  
 $q$  intenzitet horizontalnog opterećenja.

Pomoću jednadžbe progibne linije mogu se odrediti unutarnje sile u stupovima i gredama. Zanemarivanje deformacija zbog uzdužnih sila u stupovima i poprečnih u gredama dovodi do pogrešaka zbog kojih ovo rješenje nema vrijednost u smislu praktične primjene. Za razliku od većine drugih radova u kojima je korištena metoda sila, ovdje je za izvod diferencijalne jednadžbe progibne linije korištena metoda pomaka.

### 2.3. Rad O. Wernera

O. Werner predstavlja proširenje i poopćenje navedenog rada M. Tessiera. U radu „Proračunavanje višekatnih zgrada sa krutim pregradnim stijenama“ razrađuje općeniti slučaj elastične upetosti u temeljnu konstrukciju, s mogućnošću nejednolikog slijeganja temelja. Također je promatran simetričan okvir s krutim zidovima, te utjecaj uzdužnih sila na deformaciju stupova nije uzet u obzir.

Diferencijalna jednadžba progibne linije zida je

$$u'' - \gamma Lu = \frac{q}{EJ_0} x + \gamma \Delta,$$

gdje su:

- $u = y'$  tangens kuta nagiba progibne linije stupa
- $x$  apscisa mjerena od vrha stupa prema dolje
- $y$  koeficijent ovisan o geometrijskim karakteristikama konstrukcije
- $L$  razmak između osi stupova
- $E$  modul elastičnosti materijala konstrukcije
- $\Delta$  dvostruka vrijednost pomaka temelja
- $q$  intenzitet horizontalnog, po visini jednoliko rasprostrtog, opterećenja jednog stupa

Također je izvedena diferencijalna jednadžba i za nesimetričan okvir, pri čemu se koristi pretpostavka jednakosti pomaka za razdiobu momenata na stupove.

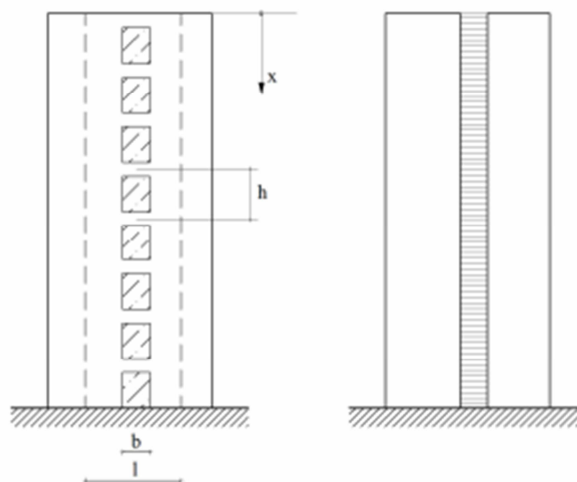
## 2.4. Ostala rješenja

Radovi nekoliko autora svrstani su u istu skupinu pošto se razlikuju samo u oznakama statičkih i geometrijskih veličina. To su radovi Becka („*Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Beispiel de. Vierendeelträgers*“), A. V. Marjina, M. Albigesa i I. Gouleta („*Ukrućenje protiv vjetra u zgradama*“), R. Rosmana („*Zidovi oslabljeni nizovima otvora izloženi utjecajima potresa i vjetra*“) i P. F. Drozdova.

Osnovne pretpostavke su:

- Za materijal vrijedi Hooke-ov zakon, a naprezanja ne prelaze granicu proporcionalnosti.
- Ravni presjeci i nakon deformacije ostaju ravni (Bernoulli- Eulerova hipoteza o ravnim presjecima). Ovo važi za poprečne presjeke stupova i greda, a ne važi za presjek zida kao cjeline.
- U sredini greda su točke infleksije (u tom presjeku nema momenata savijanja). Ovu pretpostavku omogućuju male krutosti greda u odnosu na krutost stupova.
- U uzdužnom smjeru grede se smatraju apsolutno krutim.
- Visine katova su jednake.
- Moduli elastičnosti stupova i greda su isti.
- Površine poprečnih presjeka i momenti inercije stupova i greda su konstantni.

U radu R. Rosmana zid s jednim nizom otvora promatran je kao zid čiji su stupovi kontinuirano spojeni po čitavoj visini. Debljina lamela izražena je infinitezimalno malom veličinom  $dx$ , a njihov moment inercije dobija se redukcijom momenata inercije greda.



slika 2.



Osnovni sistem formira se presijecanjem niza lamela po sredini, te se postavljanjem uvjeta kontinuiteta dolazi do diferencijalne jednačbe drugog reda:

$$T'' + \alpha^2 T = \psi Mr,$$

gdje su  $T$  uzdužna sila u stupu u presjeku s apscisom  $x$ ,

$Mr$  moment savijanja od vanjskog opterećenja,

$\alpha, \psi$  koeficijenti koji ovise o geometrijskim karakteristikama zida :

$$\alpha = \left( \frac{l^2}{\sum I} \cdot \frac{1}{F_1} \cdot \frac{1}{F_2} \right) \cdot \frac{12I_g}{hb^3},$$

$$\psi = \frac{l}{\sum I} \cdot \frac{12I_g}{hb^3}.$$

Osnovni problem kod proračuna po ovoj metodi je postavljanje rubnih uvjeta. Netočnosti rezultata smanjuju se povećanjem broja etaža i smanjenjem razmaka greda, te se metoda ne smije primjenjivati kod objekata s manje od sedam etaža. Proračun je brz zbog Rosmanovih „*Tablica za brz pronalazak unutarnjih sila i progiba*“. Dano je i rješenje za simetričan zid s dva niza otvora, dok kod nesimetričnih zidova s dva i više nizova otvora dolazi do prevelikog odstupanja od stvarnog stanja.

## 2.5. Rješenje V. Simovića

U knjizi „*Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*“ možemo pronaći detaljan opis metode rješavanja proračuna zidova s otvorima primjenom diferencijalnih jednačbi koju je razvio prof.dr.ing. Veselin Simović. Rješenje se može primijeniti kako na zidove s jednim nizom otvora tako i na zidove s više nizova otvora, te za razne tipove opterećenja, geometrijske uvjete i rubne uvjete.

Osnovne pretpostavke pretpostavke su teorije konstrukcija:

- Materijal se ponaša po Hookeovom zakonu elastičnosti, a naprezanja su ispod granice proporcionalnosti.
- Bernoulli- Eulerova hipoteza o ravnim presjecima vrijedi za stupove i grede.

Dodatne su pretpostavke:

- U simetrali greda su točke infleksije (momenti su jednaki nuli).
- U uzdužnom smjeru grede su apsolutno krute.

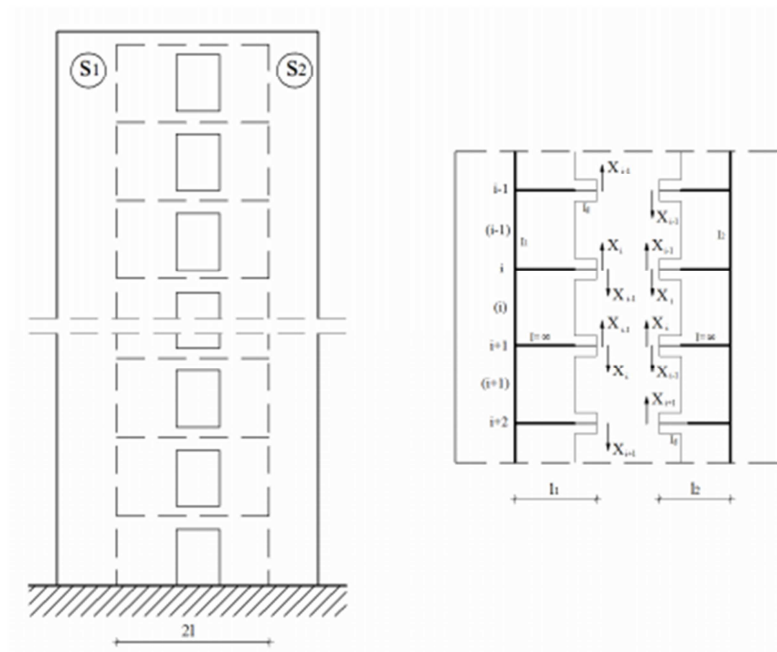
Dodatne su geometrijske pretpostavke:

Na određenim odsječcima visine:

- a) Debljine zidova i moduli elastičnosti su konstantni;
- b) Razmaci greda su jednaki;
- c) Širine otvora su iste;
- d) Grede su istih dimenzija.

U slučaju da u objektu dolazi do promjene veličina poput debljine zida, visine etaža, širine otvora i visine greda (nisu konstantne duž visine objekta) opće rješenje ostaje isto, ali se rubni uvjeti moraju posebno riješiti.

Kod proračuna zida s jednim nizom otvora osnovni sustav formiramo vertikalnim presijecanjem greda. Jednadžbe kontinuiteta tada čine sustav tročlanih linearnih algebarskih jednadžbi, a opću tročlanu jednadžbu takvog sustava svodimo na diferencijsku jednadžbu drugog reda. Rješenjem dobivamo izraz za prekobrojnu veličinu  $X_i$  (uzdužna sila u stupu u  $i$ -tom polju) koja predstavlja opće rješenje sustava.



slika 3.

Opće homogeno rješenje ovisi o geometrijskim karakteristikama konstrukcije:

$$X_i^{(h)} = C_1 r_1^i + C_2 r_2^i,$$

a u općem ukupnom rješenju partikularno rješenje ovisi o vanjskom djelovanju:

$$X_i = C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + X_i^{(p)}.$$

Pritom su:  $r_1, r_2$  korijeni karakteristične jednadžbe (međusobno recipročni)

$C_1, C_2$  konstante integracije

Uzdužna sila u stupu:

$$N_{i1} = -N_{i2} = X_i.$$

Poprečna sila u i-toj gredi:

$$T_i = X_i - X_{i-1}.$$

Ukupni moment savijanja u nekom presjeku i-tog polja:

$$M_i = M_{xi}^0 - 2 l X_i,$$

pri čemu je  $M_{xi}^0$  moment savijanja u nekom presjeku i-tog polja od vanjskog opterećenja.

Momente stupova dobivamo u omjeru krutosti stupa prema ukupnoj krutosti zida.

U knjizi je prikazan način određivanja općeg ukupnog rješenja za razne tipove opterećenja (koncentrirana sila u osi gornje grede i u općem položaju, kontinuirano jednoliko opterećenje, kontinuirano linearno promjenjivo opterećenje), čijom kombinacijom možemo aproksimirati sva horizontalna djelovanja. Obrađeni su i slučajevi zida promjenjive debljine (skokovito po etažama), zidova s elastično popustljivim osloncima, posebnim ležajnim konstrukcijama ili jačom gornjom gredom, te zidova s više nizova otvora ili promjenjivom visinom.

### 3. Općenito o metodi sila

Statički proračun štapnog modela zida s otvorima izvest ćemo metodom pomaka. Izraze za vrijednosti sila kod proračuna stanja prisilnih pomaka izvest ćemo metodom sila, jednako kao i izraze za poopćene sile upetosti.

Metoda sila je jedan od načina rješavanja statički neodređenih sustava. Raskidanjem određenog broja vanjskih ili unutarnjih veza zadanog sistema formiramo osnovni sistem koji ne mora biti određen, ali mora biti geometrijski nepromjenjiv. Umjesto raskinutih veza na osnovni sistem nanosimo poopćene sile koje odgovaraju silama koje su te veze prenosile. Nazivamo ih *statički neodređenim veličinama*, *prekobrajnim veličinama* ili *prekobrajnim silama*. S obzirom da su vrijednosti poopćenih sila osnovne nepoznanice, postupak je nazvan *metodom sila*.

Tražimo vrijednosti prekobrajnih sila kojim bi osnovni sistem doveli u mehaničko stanje izvornog sistema. To radimo prema uvjetima kompatibilnosti pomaka, tj. prema zahtjevu za podudaranjem progibnih linija izvornog sistema i osnovnog sistema opterećenog silama koje djeluju i prekobrajnih sila pravih vrijednosti.

Dobivamo *jednadžbe kompatibilnosti*, *jednadžbe kontinuiteta* ili *jednadžbe neprekinutosti*:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + X_3 \cdot \delta_{1,3} + \delta_{1,0} &= \bar{\delta}_1, \\ X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + X_3 \cdot \delta_{2,3} + \delta_{2,0} &= \bar{\delta}_2, \\ X_1 \cdot \delta_{3,1} + X_2 \cdot \delta_{3,2} + X_3 \cdot \delta_{3,3} + \delta_{3,0} &= \bar{\delta}_3, \end{aligned}$$

ili, u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \delta_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{bmatrix},$$

gdje su:

- $\delta_{i,j}$  koeficijenti matrice popustljivosti (izračunavaju se metodom jediničnih sila)
- $i$  označava mjesto pomaka
  - $i \in [1,n]$  označava poopćeni pomak hvatišta sile  $X_i$  po pravcu  $i$  u smislu njezina djelovanja,
  - $j$  označava uzrok pomaka,
  - $j \in [1,n]$  označava poopćenu jediničnu silu u hvatištu, na pravcu  $i$  u smislu djelovanja sile  $X_j$
- $\delta_{i,0}$   $i \in [1,n]$ ,  $0$  označava sva zadana djelovanja.
- Predznak vrijednosti  $\delta_{i,j}$  daje smisao pomaka u odnosu na smisao djelovanja sile  $X_i$ . Pozitivan predznak znači pomak u smislu djelovanja sile, a negativan pomak u smislu suprotnom djelovanju sile.
- $\bar{\delta}_i$  zadana vrijednost prisilnog pomaka hvatišta sile  $X_i$  po pravcu njezina djelovanja.

Matričnom stenografijom zapisujemo:  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \Delta = \bar{\Delta}$ ,

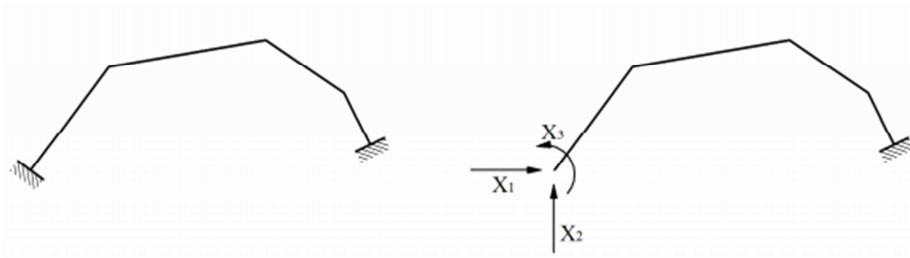
gdje su:

- $\mathbf{D}$  matrica fleksibilnosti (popustljivosti) sistema,
- $\mathbf{X}$  vektor vrijednosti prekobrojnih sila,
- $\Delta$  vektor vrijednosti pomaka hvatišta prekobrojnih sila  $X_i$  po pravcima  $i$  u smislu njihova djelovanja, izazvanih zadanim opterećenjem,
- $\bar{\Delta}$  vektor zadanih vrijednosti prisilnih pomaka hvatišta sila  $X_i$  po pravcima  $i$  u smislu njihova djelovanja.

### 3.1. Elastično težište

Za slučajeve kada je direktnom integracijom složeno izračunati elemente matrice popustljivosti (npr. sistem promjenjivog poprečnog presjeka ili je oblik sistema tlačna linija), možemo ih izračunati numeričkom integracijom ili odabrati pogodniji sistem.

Uzmimo kao primjer tri puta statički neodređen okvir. Pretpostavimo li da nema prisilnih pomaka, vrijedi  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \Delta = \mathbf{0}$ . Tražimo točku u ravnini okvira u kojoj su elementi matrice fleksibilnosti izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. vrijedi  $\delta_{i,j} = 0$  za  $\forall i \neq j$ .



slika 4.

Matrica fleksibilnosti bit će:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33}^* \end{bmatrix},$$

a jednadžbe neprekinutosti

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{1,1}^* + \delta_{1,0}^* &= 0, \\ X_2 \cdot \delta_{2,2}^* + \delta_{2,0}^* &= 0, \\ X_3 \cdot \delta_{3,3}^* + \delta_{3,0}^* &= 0. \end{aligned}$$

Prekobrojne sile možemo izraziti u obliku  $\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \Delta$ ,

tj.

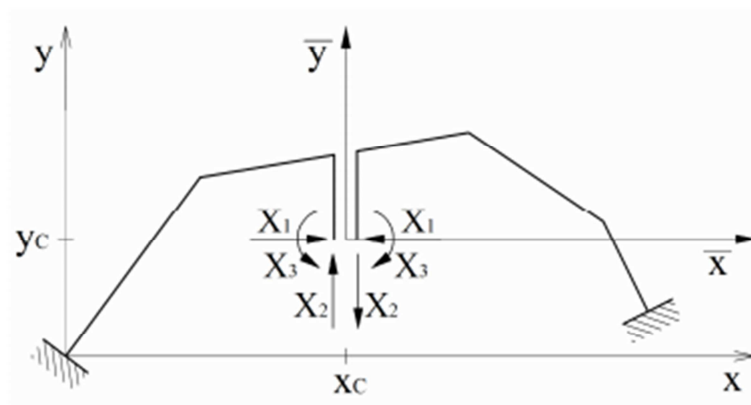
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{1,1}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{2,2}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{3,3}^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix}$$

ili

$$\begin{aligned} X_1 &= - \frac{\delta_{1,0}^*}{\delta_{1,1}^*}, \\ X_2 &= - \frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*}, \\ X_3 &= - \frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*}. \end{aligned}$$

Sustav od 3 jednačbe s 3 nepoznanice postaje 3 neovisne jednačbe s po jednom nepoznanicom. Točka s takvim svojstvom zove se centar elastičnog pomaka ili elastično težište. Sile u elastičnom težištu označuju se s  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$ .

Izvandijagonalni elementi matrice fleksibilnosti u elastičnom su težištu jednaki nuli. Za potpuno određenje elastičnog težišta označenog točkom C potrebno je odrediti njegove koordinate  $(x_c, y_c)$  i kut  $\psi$  što ga sila  $X_1$  zatvara s koordinatnom osi x. Prekobrojne sile se na okvir prenose preko zamišljenih štapova beskonačne krutosti (Navierova konzola).



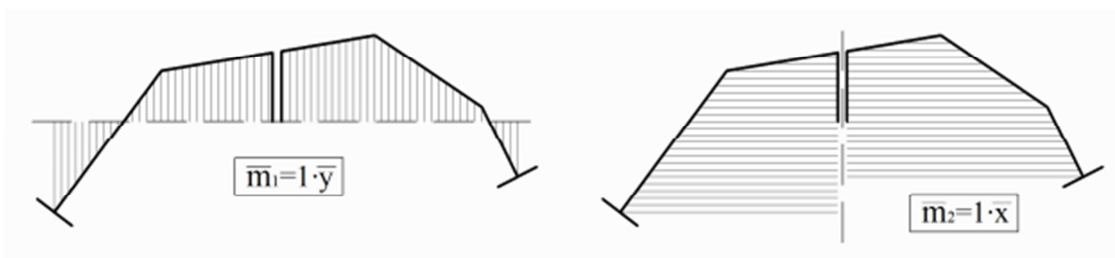
slika 5.

Uvodimo koordinatni sustav s ishodištem u C ( $x_c, y_c$ ), za koji vrijedi:  $\bar{x} = x - x_c$  i  $\bar{y} = y - y_c$ .

Za određivanje C ćemo iskoristiti jednadžbe  $\delta_{1,3}^* = \delta_{3,1}^* = 0$  i  $\delta_{2,3}^* = \delta_{3,2}^* = 0$ .

Potrebni su nam dijagrami  $\bar{m}_1, \bar{m}_2$  i  $\bar{m}_3$  prikazani na slici 6. Iz dijagrama se vidi da izrazi za momente savijanja na okviru glase

$$\begin{aligned}\bar{m}_1 &= 1 \cdot \bar{y} \\ \bar{m}_2 &= 1 \cdot \bar{x} \\ \bar{m}_3 &= 1\end{aligned}$$



slika 6.

Koordinatu  $x_c$  određujemo iz uvjeta  $\delta_{2,3}^* = \delta_{3,2}^* = 0$ :

$$\int_i^j \frac{\bar{m}_2 \bar{m}_3}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{1 \cdot \bar{x} \cdot 1}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\bar{x}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{x - x_c}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds - x_c \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = 0,$$

$$\int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds = x_c \int_i^j \frac{ds}{EI(s)},$$

$$x_c = \frac{\int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{ds}{EI(s)}}.$$

Koordinatu  $y_c$  određujemo iz uvjeta  $\delta_{1,3}^* = \delta_{3,1}^* = 0$  :

$$\int_i^j \frac{\overline{m_1} \overline{m_3}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{1 \cdot \bar{y} \cdot 1}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\bar{y}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y - y_c}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds - y_c \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = 0,$$

$$\int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds = y_c \int_i^j \frac{ds}{EI(s)},$$

$$y_c = \frac{\int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{ds}{EI(s)}}.$$

Definirat ćemo neke karakteristike oznakama:

$$dg = \frac{ds}{EI(s)} \quad \text{element „teške linije“},$$

$$G = \int_i^j dg = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} \quad \text{duljina „teške linije“},$$

$$S_g(y) = \int_i^j x \cdot dg = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds \quad \text{statički moment „teške linije“ oko osi y},$$

$$S_g(x) = \int_i^j y \cdot dg = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds \quad \text{statički moment „teške linije“ oko osi x},$$

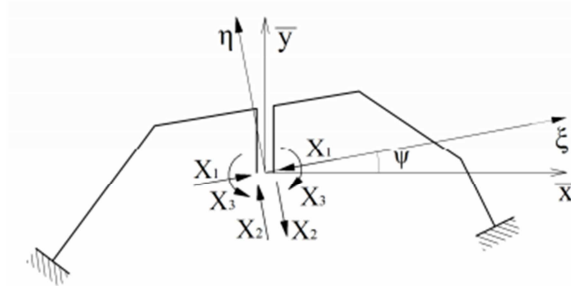
Sada su izrazi za koordinate:

$$x_c = \frac{S_g(y)}{G},$$

$$y_c = \frac{S_g(x)}{G}.$$



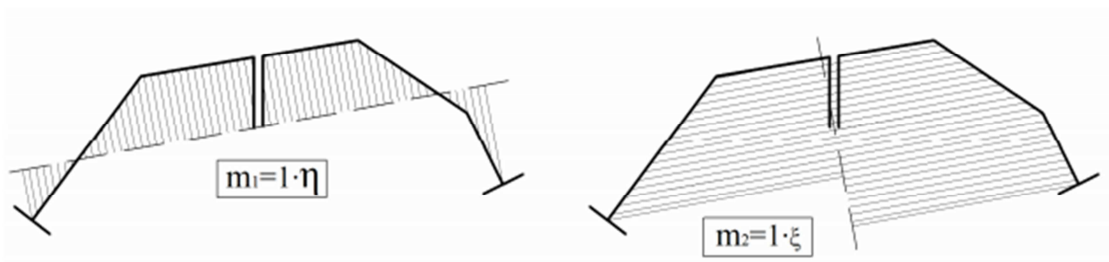
Potrebno je još odrediti kut  $\psi$  koji sila  $X_1$  zatvara sa osi  $x$  (slika 7.).



slika 7.

Za to su nam potrebni dijagrami momenata savijanja  $m_1$ ,  $m_2$  i  $m_3$  (slika 8.).

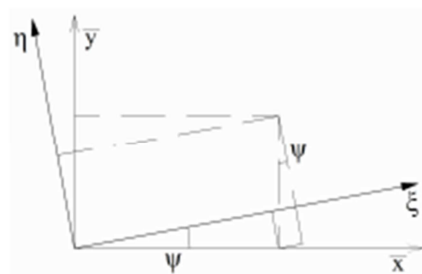
$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \cdot \eta \\ m_2 &= 1 \cdot \xi \\ m_3 &= 1 \end{aligned}$$



slika 8.

Veza koordinatnih sustava dana je izrazima

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{x} \cos \psi + \bar{y} \sin \psi, \\ \eta &= -\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi. \end{aligned}$$



slika 9.

Kut  $\psi$  određujemo pomoću jednadžbe  $\delta_{1,2}^* = \delta_{2,1}^* = 0$  :

$$\int_i^j \frac{m_1 m_2}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\eta \cdot \xi}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{(-\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi) \cdot (\bar{x} \cos \psi + \bar{y} \sin \psi)}{EI(s)} ds =$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\psi \cdot \left[ \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds \right] + \cos 2\psi \int_i^j \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}^2}{EI(s)} ds = 0,$$

te je

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \int_i^j \frac{\bar{x} \bar{y}}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds}.$$

Da bismo pojednostavili izraz, definirajmo neke karakteristike:

$$I_g(\bar{x}) = \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds \quad \text{moment inercije „teške linije“ oko osi } \bar{x},$$

$$I_g(\bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds \quad \text{moment inercije „teške linije“ oko osi } \bar{y},$$

$$I_g(\bar{x}, \bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x} \bar{y}}{EI(s)} ds \quad \text{centrifugalni moment inercije „teške linije“ oko točke C,}$$

Izraz za kut  $\psi$  glasi:

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{I_g(\bar{x}, \bar{y})}{I_g(\bar{y}) - I_g(\bar{x})} \right).$$

Dijagonalni elementi matrice fleksibilnosti određuju se prema ranije izvedenim izrazima u koje uvrštavamo pripadne karakteristike „teške linije“:

$$\delta_{1,1}^* = \int_i^j \frac{m_1^2}{EI(s)} ds = I_g(\bar{x}) \cos^2 \psi + I_g(\bar{y}) \sin^2 \psi - I_g(\bar{x}, \bar{y}) \sin 2\psi ,$$

$$\delta_{2,2}^* = \int_i^j \frac{m_2^2}{EI(s)} ds = I_g(\bar{x}) \sin^2 \psi + I_g(\bar{y}) \cos^2 \psi + I_g(\bar{x}, \bar{y}) \sin 2\psi ,$$

$$\delta_{3,3}^* = \int_i^j \frac{m_3^2}{EI(s)} ds = G .$$

Elementi vektora  $\Delta$  ( $\delta_{1,0}^*$ ,  $\delta_{2,0}^*$  i  $\delta_{3,0}^*$ ) određuju se kao i kod ostalih sistema.

Za simetrične sustave vrijedi  $x_c = L/2$  i  $\psi = 0$ , pa treba odrediti samo koordinatu  $y_c$ .

Kod višestruko neodređenih nosača se korištenjem elastičnog težišta (centra elastičnog pomaka) može postići da matrica popustljivosti nije puna, čime se ubrzava postupak inverzije matrice popustljivosti ili bilo koji iterativni postupak rješavanja jednadžbi kontinuiteta.

#### 4. Općenito o općoj metodi pomaka

Metode pomaka su metode proračuna štapnih sistema u kojima su nepoznanice vrijednosti pomaka (translacijski pomaci i kutovi zaokreta) odabranih točaka sistema. Jednim ih imenom možemo nazvati poopćeni pomaci. Osnovni sistem formiramo dodavanjem zamišljenih veza koje sprječavaju translacijske pomake i zaokrete čvorova.

U prvome se koraku proračuna („stanje spriječeni pomaka“) sva zadana djelovanja nanose na osnovni sistem, zbog čega se u čvorovima pojavljuju reaktivne sile i momenti kojih u izvornome sistemu nema („sile upetosti“). To stanje nije stvarno stanje pomaka izvornoga sistema (maknemo li dodane zamišljene veze, čvorovi istaju neuravnoteženi).

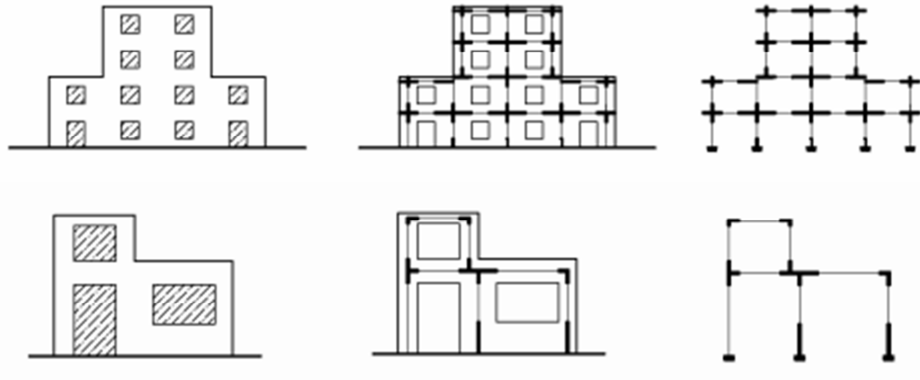
U drugome koraku („stanje prisilnih pomaka“) određujemo koliki moraju biti translacijski pomaci i zaokreti čvorova („poopćeni pomaci“) da ponište reakcije izazvane zadanim djelovanjima. Koristimo se jednadžbama ravnoteže sila i momenata u čvorovima.

Da bismo dobili ukupne sile na krajevima elementa izvornog sistema, potrebno je superponirati vrijednosti sila u stanju spriječeni pomaka i sila u stanju prisilnih pomaka.

Metodama pomaka moguće je proračunavati statički neodređene i statički određene sisteme. Prednost nad metodom sila je znatno jednostavnije postavljanje algoritama po metodi pomaka, pa se većina računalnih programa za proračun štapnih konstrukcija koristi ovom metodom kao algoritamskom osnovom.

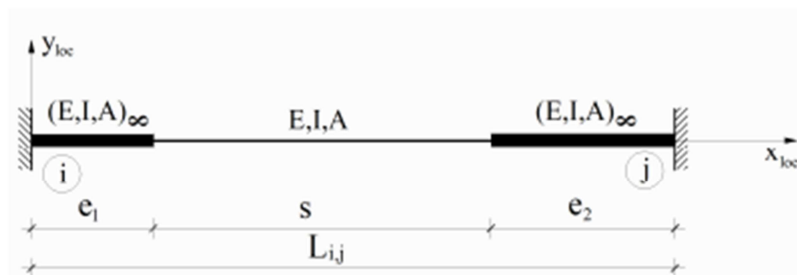
## 5. Model zida s otvorima

Da bismo zid s otvorima mogli proračunati metodom pomaka, proračunski štapni model dobit ćemo kao skup težišnih linija štapova, tj. zidova. Presječne težišnih linija su čvorovi konstrukcije, dok su spojevi susjednih čvorova štapni elementi.



slika 10.

Štapni elementi nemaju konstantnu krutost, već se sastoje od apsolutno krutog dijela koji se ponaša kao dio čvora (dijelovi zida koji se ne nalaze između susjednih otvora) i elastičnog dijela koji se deformira pri djelovanju opterećenja i pomaka susjednih čvorova (dijelovi zida između susjednih otvora).



slika 11.

Oznake elemenata i vektora pomaka jednake su kao i kod štapa jednake krutosti po cijeloj duljini. Štapni element označit ćemo sa  $(i, j)$  pri čemu su  $i$  i  $j$  čvorovi, tj. par čvorova koji jednoznačno određuje element. Krajeve elementa označit ćemo prema pripadnim čvorovima pa ćemo razlikovati kraj  $i$  i kraj  $j$ . Prema tome, sve statičke i kinematičke veličine na  $i$ -tom kraju elementa  $(i, j)$  označavat ćemo parom indeksa  $i, j$ , a veličine na  $j$ -tom kraju parom  $j, i$ . Lokalni koordinatni sustav odabrat ćemo tako da čvor  $i$  leži u njegovu ishodištu i da se uzdužna os štapa poklapa s osi  $x_{loc}$ .

Sile na krajevima štapnog elementa smatraju se pozitivnima ako im se smisao djelovanja poklapa s orijentacijom odgovarajuće osi (slika 12.).



slika 12.

Vrijednosti sila na kraju  $i$  izražene kao zbroj vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka ( $n_{i,j}$ ,  $t_{i,j}$ ,  $m_{i,j}$ ) i vrijednosti sila u stanju spriječenih pomaka ( $\bar{N}_{i,j}$ ,  $\bar{T}_{i,j}$ ,  $\bar{M}_{i,j}$ ) glase:

$$N_{i,j} = n_{i,j} + \bar{N}_{i,j} ,$$

$$T_{i,j} = t_{i,j} + \bar{T}_{i,j} ,$$

$$M_{i,j} = m_{i,j} + \bar{M}_{i,j} .$$

Izrazi za vrijednost sila na kraju  $j$  analogni su :

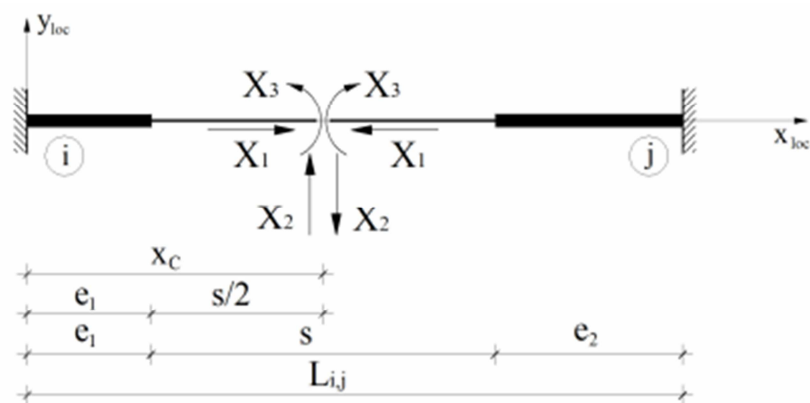
$$N_{j,i} = n_{j,i} + \bar{N}_{j,i} ,$$

$$T_{j,i} = t_{j,i} + \bar{T}_{j,i} ,$$

$$M_{j,i} = m_{j,i} + \bar{M}_{j,i} .$$

## 6. Sile stanja prisilnih pomaka

Izraze za vrijednosti sila kod proračuna stanja prisilnih pomaka izvest ćemo metodom sila. Da bismo pojednostavili postupak, služit ćemo se elastičnim težištem štapa, koje se nalazi na njegovoj osi, na udaljenosti  $x_c = e_1 + s/2$  ( $e_1$  – duljina prvog krutog dijela štapa;  $s$  – duljina elastičnog dijela štapa) od ishodišta lokalnog koordinatnog sustava. Postavljanjem prekobrojnih sila  $X_1$ ,  $X_2$  i  $X_3$  u elastično težište, dobivamo osnovni sustav sastavljen od dva konzolna štapa (slika 13.).



slika 13.

Jednadžbe kompatibilnosti pomaka su

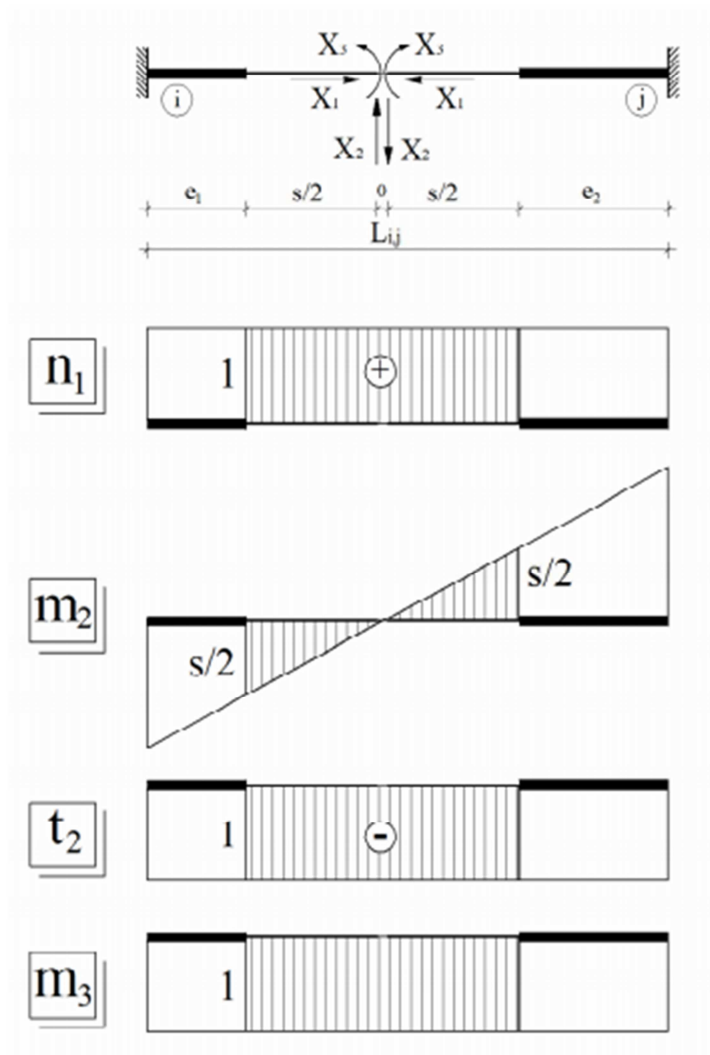
$$\begin{bmatrix} \delta_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{bmatrix}$$

ili  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \Delta = 0$ , jer je vektor  $\bar{\Delta} = [\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3]^T$  jednak nuli.

Elemente matrice fleksibilnosti u elastičnom težištu računamo integracijom u granicama od 0 do  $L$ . Na dijelu štapa od 0 do  $e_1$  i od  $e_1 + s$  do  $L$  vrijednost integrala jednaka nuli radi neizmjerne krutosti štapa.

Unutarnje sile od sila u prekobrojnim vezama određene su izrazima (slika 15.)

$$\begin{aligned} n_1(x) &= 1, \\ t_2(x) &= -1, \\ m_2(x) &= x - x_c, \\ m_3(x) &= 1. \end{aligned}$$



slika 15.

Vrijednosti su dijagonalnih koeficijenata matrice krutosti:

$$\delta_{1,1}^* = \int_0^L \frac{n_1 n_1}{EA} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{n_1^2}{EA} ds = \frac{s}{EA},$$

$$\delta_{2,2}^* = \int_0^L \left( \frac{m_2 m_2}{EI} + k \frac{t_2 t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left( \frac{m_2^2}{EI} + k \frac{t_2^2}{GA} \right) ds =$$

$$= \frac{2}{EI} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} \right) \right] + k \frac{s}{GA} = \frac{s^3}{12EI} + \frac{k \cdot s}{GA}.$$



Kako se kod modeliranja zida može dogoditi da omjer debljine i duljine nekog elementa bude veći od  $h/l = 1/5$ , u obzir uzimamo i utjecaj poprečnih sila.

Kako vrijedi jednakost

$$GA = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{I \cdot 12}{h^2},$$

slijedi

$$\delta_{2,2}^* = s \cdot \frac{s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2}{12EI},$$

gdje su:

- $\nu$  Poissonov koeficijent (konstanta materijala),
- $k$  bezdimenzionalni koeficijent koji ovisi samo o obliku poprečnog presjeka štapa; za pravokutni poprečni presjek  $k = 1,2$ ,
- $E$  modul elastičnosti,
- $G$  modul posmika  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,
- $I$  moment inercije; za pravokutni poprečni presjek  $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$ ,
- $A$  površina poprečnog presjeka

$$A = b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot 12 \cdot \frac{1}{h^2}.$$

Preostaje još

$$\delta_{3,3}^* = \int_0^L \frac{m_3 m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{m_3^2}{EI} ds = \frac{s}{EI}.$$

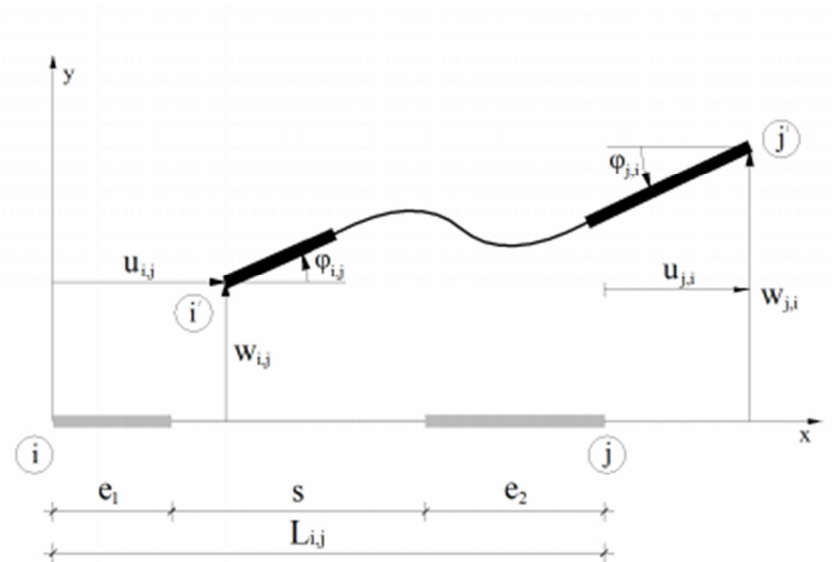
Matrica fleksibilnosti je

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2,2}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3,3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & s \cdot \frac{s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2}{12EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{EI} \end{bmatrix},$$

pa je njezin inverz

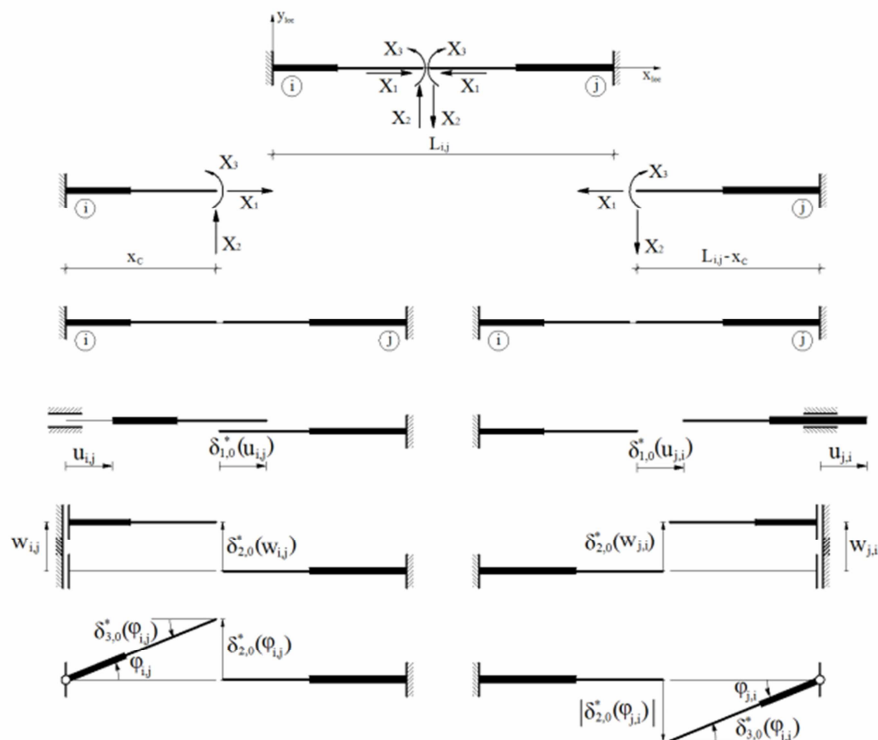
$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{1,1}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{2,2}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{3,3}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix}.$$

Vektor pomaka kraja  $i$  je  $\mathbf{u}_{i,j} = [u_{i,j} \quad w_{i,j} \quad \varphi_{i,j}]^T$ , dok je vektor pomaka kraja  $j$   $\mathbf{u}_{j,i} = [u_{j,i} \quad w_{j,i} \quad \varphi_{j,i}]^T$ , pa je  $\mathbf{u}_{(i,j)} = [u_{i,j} \quad w_{i,j} \quad \varphi_{i,j} \quad u_{j,i} \quad w_{j,i} \quad \varphi_{j,i}]^T$ .



slika 16.

Za određivanje vrijednosti popćenih pomaka  $\delta_{1,0}^*$ ,  $\delta_{2,0}^*$  i  $\delta_{3,0}^*$ , poslužit će nam dijagram pomaka prikazani na slici 17.:



slika 17.

Slijedi:

$$\begin{aligned} \delta_{1,0}^* &= \delta_{1,0}^*(u_{i,j}) + \delta_{1,0}^*(u_{j,i}) = u_{i,j} - u_{j,i} , \\ \delta_{2,0}^* &= \delta_{2,0}^*(w_{i,j}) + \delta_{2,0}^*(\varphi_{i,j}) + \delta_{2,0}^*(w_{j,i}) + \delta_{2,0}^*(\varphi_{j,i}) = w_{i,j} + x_c \cdot \varphi_{i,j} - w_{j,i} + (L - x_c) \cdot \varphi_{j,i} , \\ \delta_{3,0}^* &= \delta_{3,0}^*(\varphi_{i,j}) + \delta_{3,0}^*(\varphi_{j,i}) = \varphi_{i,j} - \varphi_{j,i} . \end{aligned}$$

U matičnom je zapisu

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L - x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix} ,$$

ili, kraće,  $\Delta = T_C \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}$ .

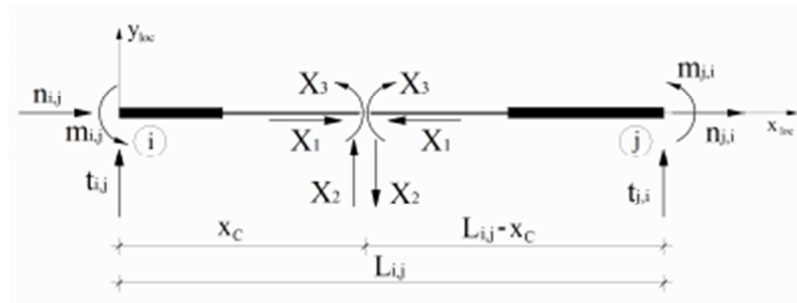
Matricu  $T_c$  nazivamo prijenosnom matricom, te pomoću nje pomake i sile iz elastičnog težišta „prenosimo“ na krajeve štapa, odnosno pomoću nje pomake i sile na krajevima štapa izražavamo kao funkcije pomaka i sile u elastičnom težištu.

Vektor prekobrojnih sila možemo izraziti kao:  $X = -D^{-1} \cdot \Delta$ , tj.

$$X = -D^{-1} \cdot T_C \cdot u_{(i,j)},$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L - x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix}.$$

Sile na krajevima elementa nalazimo iz uvjeta ravnoteže sila.



slika 18.

Sile na kraju  $i$  su

$$\sum_{m=1}^n F_{m,x} = 0, \quad \sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0, \quad \sum_{m=1}^n M_{F_m/l} = 0,$$

$$n_{i,j} + X_1 = 0, \quad t_{i,j} + X_2 = 0, \quad m_{i,j} + X_2 \cdot x_c + X_3 = 0,$$

$$n_{i,j} = -X_1; \quad t_{i,j} = -X_2; \quad m_{i,j} = -(X_2 \cdot x_c + X_3),$$

tj.

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

Sile na kraju  $j$  su

$$\sum_{m=1}^n F_{m,x}=0, \quad \sum_{m=1}^n F_{m,y}=0, \quad \sum_{m=1}^n M_{F_{m/l}}=0,$$

$$n_{j,i} - X_1=0, \quad t_{j,i} - X_2=0, \quad m_{j,i} + X_2 \cdot (L - x_c) - X_3=0,$$

$$n_{j,i}=X_1; \quad t_{j,i}=X_2; \quad m_{j,i}=X_2 \cdot (x_c - L) + X_3,$$

tj.

$$\begin{bmatrix} n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c - L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

Drukčijim zapisom:

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L - x_c & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix},$$

što možemo sažeti u izraz  $f_{(i,j)} = -T_C^T \cdot X$ ,

pa je konačan izraz  $f_{(i,j)} = T_C^T \cdot D^{-1} \cdot T_C \cdot u_{(i,j)}$ .

Izraz možemo raspisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L - x_c & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & \frac{EI}{s} & \frac{EI}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L - x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \phi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \phi_{j,i} \end{bmatrix}$$

ili

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (L - x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot x_c^2}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L - x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ \frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot (L - x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot (L - x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L - x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot (L - x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L - x_c)^2}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \phi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \phi_{j,i} \end{bmatrix}.$$

Umnožak  $T_C^T \cdot D^{-1} \cdot T_C$  predstavlja matricu krutosti izraženu u lokalnom koordinatnom sustavu.

$$k_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI(L-x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot x_c^2}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI(L-x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ \frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI(L-x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI(L-x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI(L-x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI(L-x_c)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI(L-x_c)^2}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \end{bmatrix}$$

Možemo još uvrstiti  $x_c = e_1 + s/2$  i  $L - x_c = e_2 + s/2$ , čime dobivamo konačan izraz za matricu krutosti štapa opisanih karakteristika u lokalnom koordinatnom sustavu:

$$k_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI(e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)^2}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI(e_2 + s/2) \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ \frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI(e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI(e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI(e_2 + s/2) \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI(e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (e_2 + s/2)^2}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \end{bmatrix}$$

Elementi predstavljaju vrijednosti popoćenih sila na krajevima štapnog elementa izazvanih jediničnim popoćenim pomacima po pravcu  $i$  u smislu lokalnih koordinatnih osi. Dakle, vektor vrijednosti sila na krajevima štapnog elementa umnožak je lokalne matrice krutosti i vektora vrijednosti popoćenih pomaka krajeva elementa u smjerovima osi lokalnog koordinatnog sustava. „Prevedeno“  $\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}$ .

Pogodniji je zapis

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(i,j)}_i \\ \mathbf{f}^{(i,j)}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i,j)}_{i,i} & \mathbf{k}^{(i,j)}_{i,j} \\ \mathbf{k}^{(i,j)}_{j,i} & \mathbf{k}^{(i,j)}_{j,j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(i,j)}_i \\ \mathbf{u}^{(i,j)}_j \end{bmatrix},$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(i,j)_i} &= [n_{i,j} \quad t_{i,j} \quad m_{i,j}]^T && \text{vektor vrijednosti sila na kraju } i, \\ \mathbf{f}_{(i,j)_j} &= [n_{j,i} \quad t_{j,i} \quad m_{j,i}]^T && \text{vektor vrijednosti sila na kraju } j, \\ \mathbf{u}_{(i,j)_i} &= [u_{i,j} \quad w_{i,j} \quad \varphi_{i,j}]^T && \text{vektor vrijednosti popučenih pomaka kraja } i, \\ \mathbf{u}_{(i,j)_j} &= [u_{j,i} \quad w_{j,i} \quad \varphi_{j,i}]^T && \text{vektor vrijednosti popučenih pomaka kraja } j, \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(i,j)_i} &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i,j)}_{i,i} & \mathbf{k}^{(i,j)}_{i,j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(i,j)}_i \\ \mathbf{u}^{(i,j)}_j \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_{(i,j)_j} &= \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{(i,j)}_{j,i} & \mathbf{k}^{(i,j)}_{j,j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(i,j)}_i \\ \mathbf{u}^{(i,j)}_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 7. Sile upetosti

Utjecaj opterećenja na štapni element u proračun uzimamo u obliku poopćenih sila upetosti. Formule se razlikuju od onih za određivanje sila kod štapova konstantne krutosti, pa ćemo ih izvesti također koristeći se metodom sila i elastičnim težištem, kao i u prethodnom poglavlju (kod određivanja vrijednosti sila za stanje prisilnih pomaka).

Osnovni su sistem također konzole, te su elementi matrice fleksibilnosti jednaki.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2,2}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3,3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & s \cdot \frac{s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2}{12EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{EI} \end{bmatrix}.$$

Izraz za prekobrojne sile dobiven je iz jednadžbi neprekinutosti:  $\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \Delta$ ,

odnosno,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{1,1}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{2,2}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{3,3}^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix},$$

pa su prekobrojne sile

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}^*}{\delta_{1,1}^*},$$

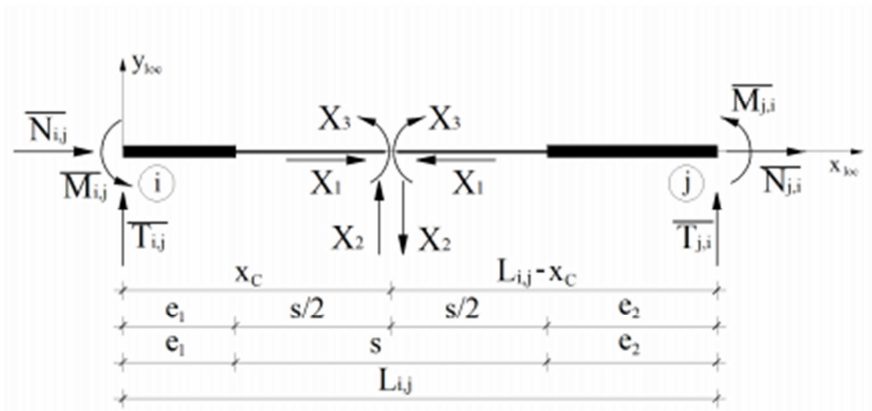
$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*},$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*}.$$

Potrebno je odrediti vektor  $\Delta = [\delta_{1,0}^* \quad \delta_{2,0}^* \quad \delta_{3,0}^*]^T$  nakon čega vrijednosti prekobrojnih sila dobijemo iz gornjih izraza.



Sile upetosti zatim određujemo iz uvjeta ravnoteže štapa prema *slici 19.*:



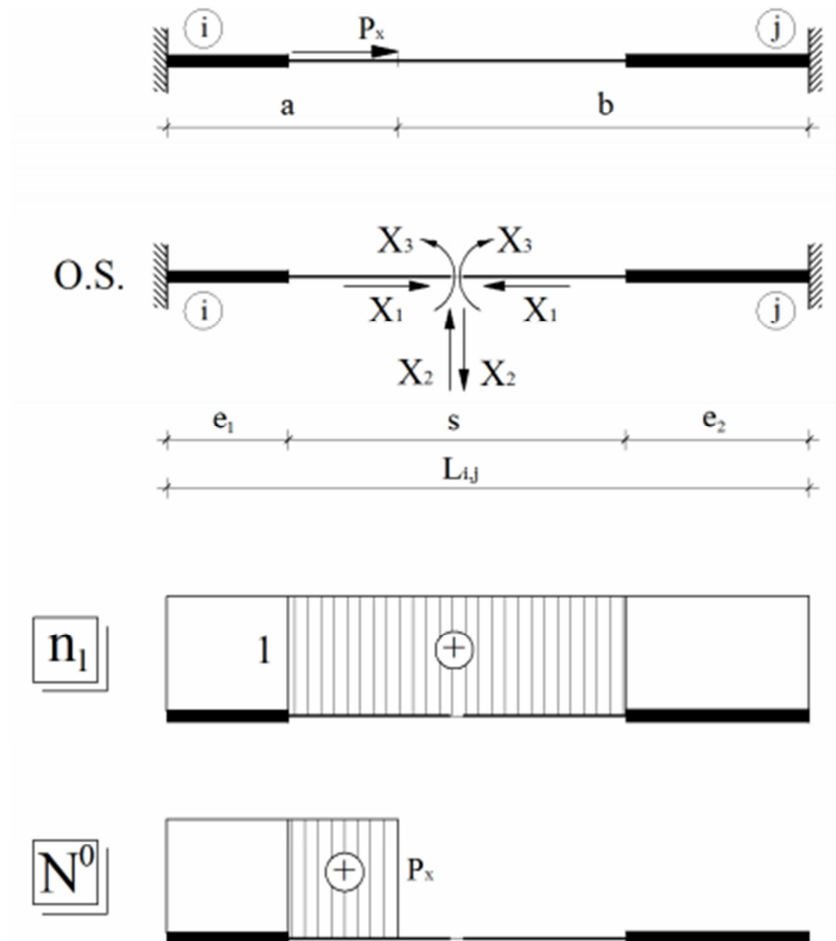
slika 19.

Odredit ćemo izraze za sile upetosti štapa opterećenog koncentriranom silom u općem položaju (rastavljamo na komponentu paralelnu s osi štapa i komponentu okomitu na os štapa), jednoliko raspodijeljenu silu i koncentrirani moment.

Vektor je vrijednosti sila upetosti  $\bar{f}_{(i,j)} = [\bar{N}_{i,j} \quad \bar{T}_{i,j} \quad \bar{M}_{i,j} \quad \bar{N}_{j,i} \quad \bar{T}_{j,i} \quad \bar{M}_{j,i}]^T$ .

### 7.1. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom paralelnom s osi štapa

Hvatište sile nalazi se na udaljenosti  $a$  od čvora  $i$ .



slika 20.

Da bismo odredili vektor  $\Delta$  potrebno je naći vrijednost  $\delta_{1,0}^*$ , jer su članovi  $\delta_{2,0}^*$  i  $\delta_{3,0}^*$  jednaki nuli.

Integracijom u granicama od  $e_1$  do  $e_1 + s$  (slika 20.) dobivamo

$$\delta_{1,0}^* = \int_0^L \frac{N_0 n_1}{EA} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{N_0 n_1}{EA} ds,$$

$$\delta_{1,0}^* = \frac{1}{EA} [P_x(a - e_1)] \cdot 1,$$

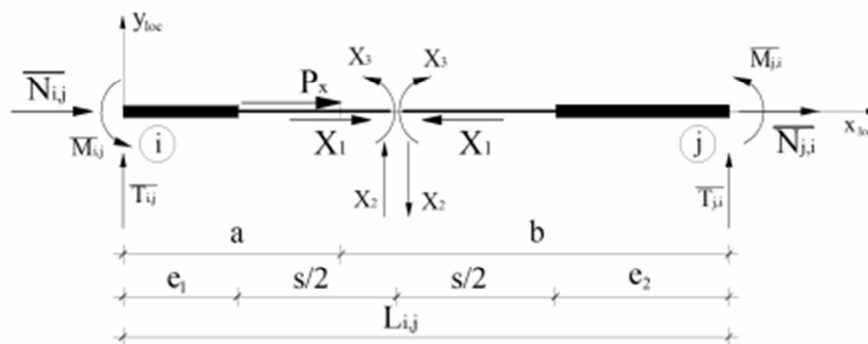
$$\delta_{1,0}^* = \frac{P_x(a - e_1)}{EA}.$$

Iz izraza za vrijednost prekobrojne sile dobivamo

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}^*}{\delta_{1,1}^*} = -\frac{P_x(a - e_1)}{s}.$$

Prekobrojne sile  $X_2$  i  $X_3$  jednake su nuli.

Sile upetosti  $\bar{N}_{i,j}$  i  $\bar{N}_{j,i}$  na krajevima određujemo iz uvjeta ravnoteže (slika 22.). Pritom je  $L = a + b = e_1 + s + e_2$ , tj.  $s = a + b - e_1 - e_2$ .



slika 22.

Sile na kraju  $i$  (iz uvjeta ravnoteže „lijeve“ konzole):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{m,x} &= 0, \\ \bar{N}_{i,j} + X_1 + P_x &= 0, \\ \bar{N}_{i,j} &= -X_1 - P_x, \\ \bar{N}_{i,j} &= -\frac{P_x(b - e_2)}{s}. \end{aligned}$$

Sile na kraju  $j$  (iz uvjeta ravnoteže „desne“ konzole):

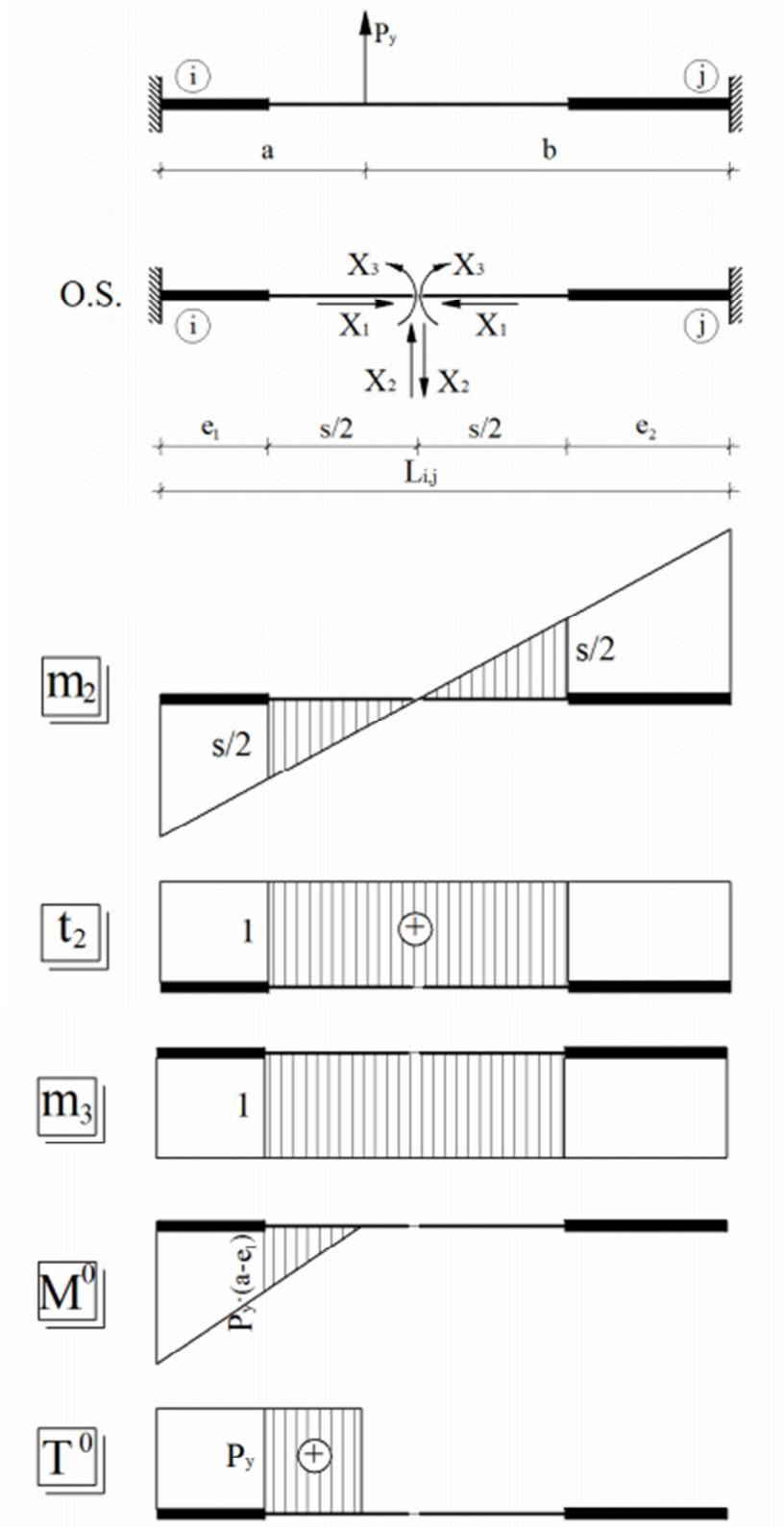
$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{m,x} &= 0, \\ \bar{N}_{j,i} - X_1 &= 0, \\ \bar{N}_{j,i} &= X_1, \\ \bar{N}_{j,i} &= -\frac{P_x(a - e_1)}{s}. \end{aligned}$$

Analognim postupkom dobijamo identične izraze za slučaj da je hvatište sile u „desnoj“ konzoli.

Vektor sila upetosti za opterećenje uzdužnom koncentriranom silom je

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{P_x(b - e_2)}{s} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{P_x(a - e_1)}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## 7.2. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom okomitom na os štapa



slika 23.

Da bismo odredili vektor  $\Delta$  potrebno je naći vrijednosti  $\delta_{2,0}^*$  i  $\delta_{3,0}^*$ , jer je član  $\delta_{1,0}^*$  jednak nuli.

Integracijom u granicama od  $e_1$  do  $e_1 + s$  (slika 23.) dobivamo

$$\delta_{2,0}^* = \int_0^L \left( \frac{M^0 m_2}{EI} + k \frac{T^0 t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left( \frac{M^0 m_2}{EI} + k \frac{T^0 t_2}{GA} \right) ds,$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_y \cdot (a - e_1) \cdot (a - e_1) \cdot \left( \frac{s}{2} - \frac{a - e_1}{3} \right) + \frac{k}{GA} \cdot P_y \cdot (a - e_1) \cdot 1,$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{P_y \cdot (a - e_1)^2}{2EI} \left( \frac{s}{2} - \frac{a - e_1}{3} \right) + \frac{2,4 \cdot P_y \cdot (a - e_1) \cdot (1 + \nu) \cdot h^2}{12EI}$$

i

$$\delta_{3,0}^* = \int_0^L \frac{M^0 m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{M^0 m_3}{EI} ds,$$

$$\delta_{3,0}^* = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_y \cdot (a - e_1) \cdot (a - e_1) \cdot 1,$$

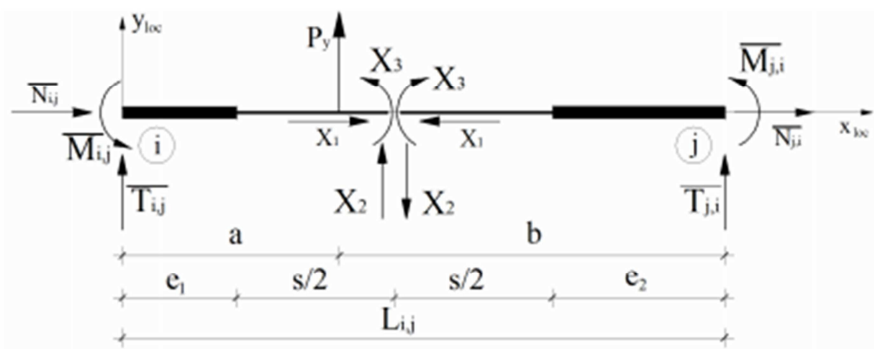
$$\delta_{3,0}^* = \frac{P_y \cdot (a - e_1)^2}{2EI}.$$

Iz izraza za vrijednosti prekobrojnih sila dobivamo

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*} = \frac{P_y \cdot (a - e_1) [(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)},$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*} = \frac{P_y \cdot (a - e_1)^2}{2s}.$$

Sile upetosti  $\bar{T}_{i,j}$ ,  $\bar{M}_{i,j}$ ,  $\bar{T}_{j,i}$  i  $\bar{M}_{j,i}$  na krajevima određujemo iz uvjeta ravnoteže (slika 24.).



slika 24.

Sile na kraju  $i$  (iz uvjeta ravnoteže „lijeve“ konzole):

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y}=0,$$

$$\bar{T}_{i,j} + X_2 + P_y = 0,$$

$$\bar{T}_{i,j} = -X_2 - P_y,$$

$$\bar{T}_{i,j} = -P_y \cdot \left[ 1 + \frac{(a - e_1)[(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} \right];$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/i}=0,$$

$$\bar{M}_{i,j} + X_2 \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) + X_3 + P_y \cdot a = 0,$$

$$\bar{M}_{i,j} = - \left( X_2 \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) + X_3 + P_y \cdot a \right),$$

$$\bar{M}_{i,j} = P_y \cdot \left[ \frac{(a - e_1)^2}{2s} + \frac{(a - e_1) \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) [(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} - a \right].$$

Sile na kraju  $j$  (iz uvjeta ravnoteže „desne“ konzole):

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y}=0,$$

$$\bar{T}_{j,i} - X_2 = 0,$$

$$\bar{T}_{j,i} = X_2,$$

$$\bar{T}_{j,i} = P_y \cdot \frac{(a - e_1)[(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)};$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/j}=0,$$

$$\bar{M}_{j,i} + X_2 \left( e_2 + \frac{s}{2} \right) - X_3 = 0,$$

$$\bar{M}_{j,i} = X_3 - X_2 \left( e_2 + \frac{s}{2} \right),$$

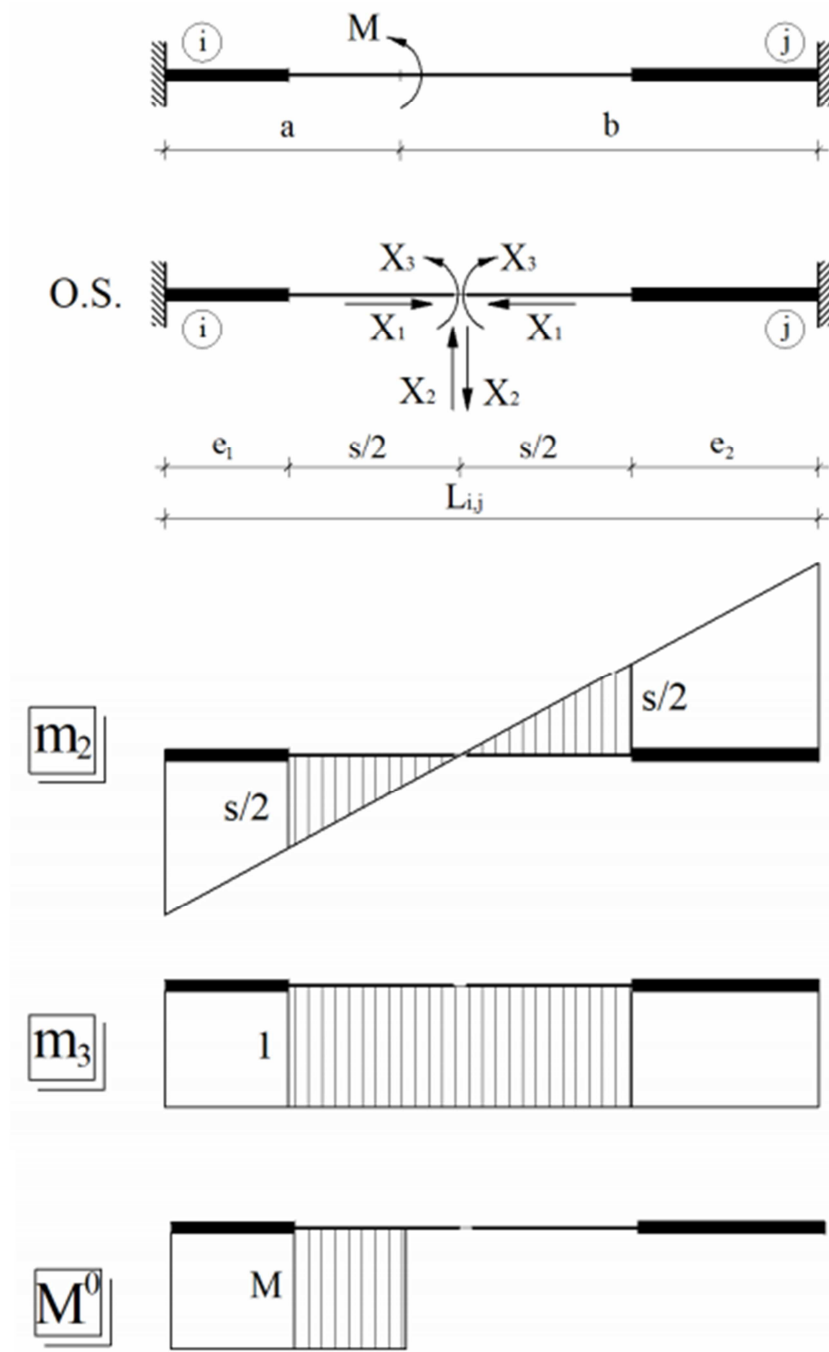
$$\bar{M}_{j,i} = -P_y \cdot \left[ \frac{(a - e_1)^2}{2s} + \frac{(a - e_1) \left( e_2 + \frac{s}{2} \right) [(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} - a \right].$$

Vektor sila upetosti za opterećenje poprečnom koncentriranom silom je

$$\bar{\mathbf{f}}_{(ij)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_y \cdot \left[ 1 + \frac{(a - e_1)[(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} \right] \\ P_y \cdot \left[ \frac{(a - e_1)^2}{2s} + \frac{(a - e_1) \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) [(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} - a \right] \\ 0 \\ P_y \cdot \frac{(a - e_1)[(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} \\ -P_y \cdot \left[ \frac{(a - e_1)^2}{2s} + \frac{(a - e_1) \left( e_2 + \frac{s}{2} \right) [(a - e_1)(2a - 2e_1 - 3s) - 2,4(1 + \nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} - a \right] \end{bmatrix}.$$



### 7.3. Sile upetosti za opterećenje koncentriranim momentom



slika 28.

Da bismo odredili vektor  $\Delta$  potrebno je naći vrijednosti  $\delta_{2,0}^*$  i  $\delta_{3,0}^*$ , jer je član  $\delta_{1,0}^*$  jednak nuli.

Integracijom u granicama od  $e_1$  do  $e_1 + s$  (slika 28.) dobivamo:

$$\delta_{2,0}^* = \int_0^L \left( \frac{M^0 m_2}{EI} + k \frac{T^0 t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left( \frac{M^0 m_2}{EI} + k \frac{T^0 t_2}{GA} \right) ds,$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{1}{EI} (M \cdot (a - e_1)) \cdot \left( \frac{s}{2} - \frac{a - e_1}{2} \right) + 0,$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{(M \cdot (a - e_1)) \cdot (s + e_1 - a)}{2EI}$$

i

$$\delta_{3,0}^* = \int_0^L \frac{M^0 m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{M^0 m_3}{EI} ds,$$

$$\delta_{3,0}^* = \frac{1}{EI} (M \cdot (a - e_1)) \cdot 1,$$

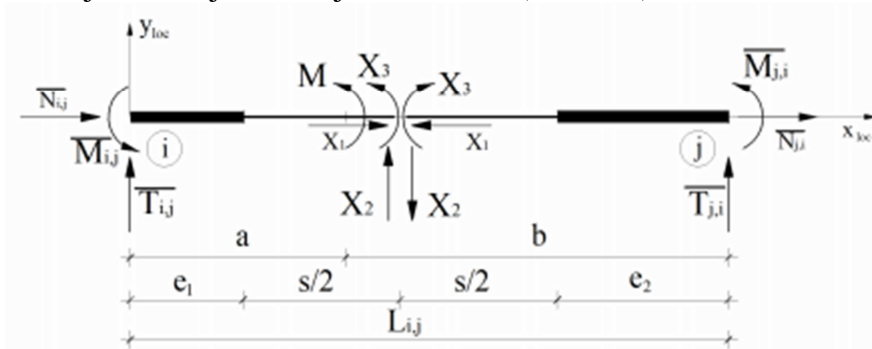
$$\delta_{3,0}^* = \frac{M \cdot (a - e_1)}{EI}.$$

Prekobrojne sile su tada

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*} = -\frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)},$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*} = -\frac{M \cdot (a - e_1)}{s}.$$

Sile upetosti na krajevima slijede iz uvjeta ravnoteže (slika 29.):



slika 29.

Sile na kraju  $i$ :

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y}=0,$$

$$\bar{T}_{i,j} + X_2 = 0,$$

$$\bar{T}_{i,j} = -X_2,$$

$$\bar{T}_{i,j} = \frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)};$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/i} = 0,$$

$$\bar{M}_{i,j} + X_2 \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) + X_3 + M = 0,$$

$$\bar{M}_{i,j} = - \left( X_2 \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) + X_3 + M \right),$$

$$\bar{M}_{i,j} = M \left[ \frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} + \frac{(a - e_1)}{s} - 1 \right].$$

Sile na kraju  $j$ :

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y}=0,$$

$$\bar{T}_{j,i} - X_2 = 0,$$

$$\bar{T}_{j,i} = X_2,$$

$$\bar{T}_{j,i} = \frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)};$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/j} = 0,$$

$$\bar{M}_{j,i} + X_2 \left( e_2 + \frac{s}{2} \right) - X_3 = 0,$$

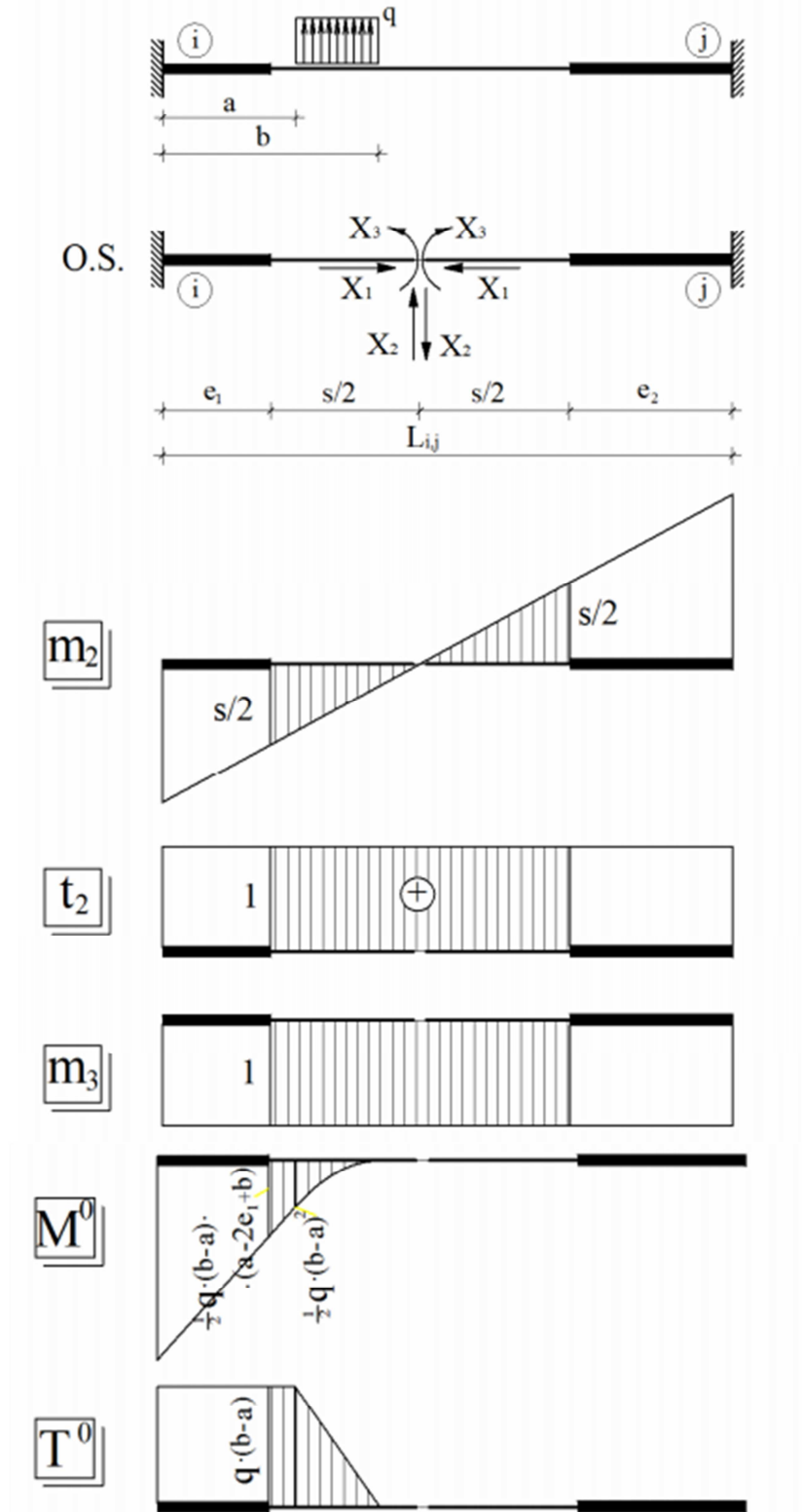
$$\bar{M}_{j,i} = X_3 - X_2 \left( e_2 + \frac{s}{2} \right),$$

$$\bar{M}_{j,i} = M \left[ \frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot \left( e_2 + \frac{s}{2} \right) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1 + \nu) \cdot h^2)} - \frac{(a - e_1)}{s} \right].$$

Sada je vektor sila upetosti za opterećenje koncentriranim momentom

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ M \left[ \frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} + \frac{(a - e_1)}{s} - 1 \right] \\ - \frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \\ M \left[ \frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} - \frac{(a - e_1)}{s} \right] \end{bmatrix}.$$

### 7.4. Sile upetosti za opterećenje kontinuiranom jednoliko raspodijeljenom silom



slika 25.

Da bismo odredili vektor  $\Delta$  potrebno je naći vrijednosti  $\delta_{2,0}^*$  i  $\delta_{3,0}^*$ , jer je član  $\delta_{1,0}^*$  jednak nuli.

Integracijom u granicama od  $e_1$  do  $e_1 + s$  (slika 25.), te pomoću Vereščaginovog teorema dobivamo:

$$\delta_{2,0}^* = \int_0^L \left( \frac{M^0 m_2}{EI} + k \frac{T^0 t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left( \frac{M^0 m_2}{EI} + k \frac{T^0 t_2}{GA} \right) ds,$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot q(b-a)^2(b-a) \right] \cdot \left( \frac{s}{2} - (a-e_1) - \frac{1}{4}(b-a) \right) + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot q(b-a)^2(a-e_1) \right] \cdot \left( \frac{s}{2} - \frac{a-e_1}{2} \right) + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(a-e_1) \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot q \cdot (b-a)(a-2e_1+b) - \frac{1}{2} \cdot q(b-a)^2 \right] \left( \frac{s}{2} - \frac{a-e_1}{3} \right) \right],$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{q \cdot (a-b)}{24EI} \left\{ 2 \cdot (a-e_1)^2(2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2(3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+\nu) \cdot h^2 \right\}$$

i

$$\delta_{3,0}^* = \int_0^L \frac{M^0 m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{M^0 m_3}{EI} ds,$$

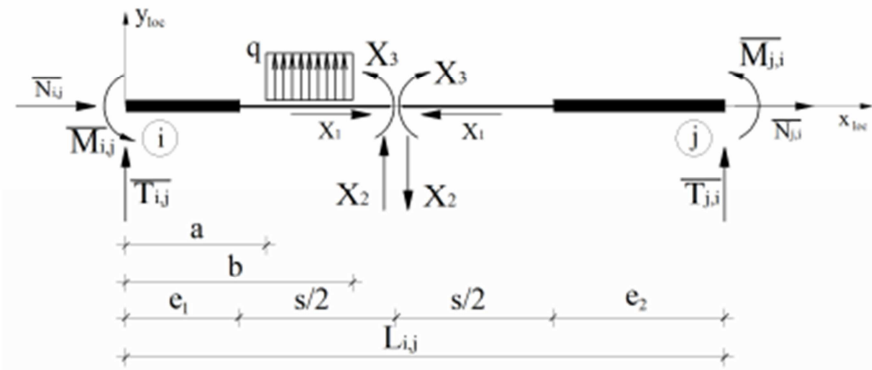
$$\delta_{3,0}^* = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot q(b-a)^2(b-a) \right] \cdot 1 + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot q(b-a)^2(a-e_1) \right] \cdot 1 + \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2}(a-e_1) \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot q \cdot (b-a)(a-2e_1+b) - \frac{1}{2} \cdot q(b-a)^2 \right] \right],$$

$$\delta_{3,0}^* = -q \frac{(a-b)[(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab]}{6EI}.$$

Iz izraza za vrijednosti prekobrojnih sila dobivamo

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*} = -\frac{q \cdot (a-b)}{2s \cdot (s^2 + 2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \left[ 2 \cdot (a-e_1)^2(2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2(3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+\nu) \cdot h^2 \right],$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*} = \frac{q}{6s} (a-b)[(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab].$$



slika 26.

Sile upetosti  $\bar{T}_{i,j}$ ,  $\bar{M}_{i,j}$ ,  $\bar{T}_{j,i}$  i  $\bar{M}_{j,i}$  na krajevima određujemo iz uvjeta ravnoteže.

Sile na kraju  $i$  (iz uvjeta ravnoteže „lijeve“ konzole):

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0,$$

$$\bar{T}_{i,j} + X_2 + q_y (b - a) = 0,$$

$$\bar{T}_{i,j} = - [X_2 + q_y (b - a)],$$

$$\bar{T}_{i,j} = q(a-b) \cdot \left[ \frac{2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+\nu) \cdot h^2}{2s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} + 1 \right];$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/i} = 0,$$

$$\bar{M}_{i,j} + X_2 \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) + X_3 + q(b-a) \cdot \left( a + \frac{b-a}{2} \right) = 0,$$

$$\bar{M}_{i,j} = - \left( X_2 \left( e_1 + \frac{s}{2} \right) + X_3 + q(b-a) \cdot \left( a + \frac{b-a}{2} \right) \right),$$

$$\bar{M}_{i,j} = q \cdot (a-b) \cdot \left[ \frac{1}{2} (a+b) \cdot \frac{(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) \cdot ab}{6s} + \frac{\left( e_1 + \frac{s}{2} \right) [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+\nu) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} \right].$$

Sile na kraju  $j$  (iz uvjeta ravnoteže „desne“ konzole):

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0,$$

$$\bar{T}_{j,i} - X_2 = 0,$$

$$\bar{T}_{j,i} = X_2,$$

$$\bar{T}_{j,i} = \frac{q \cdot (b-a)}{2s \cdot (s^2+2,4(1+\nu) \cdot h^2)} [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+\nu) \cdot h^2];$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/j} = 0,$$

$$\bar{M}_{j,i} + X_2 \left( e_2 + \frac{s}{2} \right) - X_3 = 0,$$

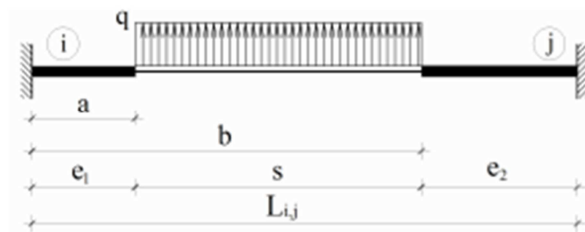
$$\bar{M}_{j,i} = X_3 - X_2 \left( e_2 + \frac{s}{2} \right),$$

$$\bar{M}_{j,i} = q \cdot (a \cdot b) \cdot \left[ \frac{(a+b)^2 \cdot 3e_1(a+b-e_1) \cdot ab}{6s} + \frac{\left( e_2 + \frac{s}{2} \right) [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+v) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4(1+v) \cdot h^2)} \right].$$

Vektor sila upetosti za opterećenje jednoliko raspodijeljenom silom je

$$\bar{f}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(a-b) \cdot \left[ \frac{2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+v) \cdot h^2}{2s \cdot (s^2 + 2,4(1+v) \cdot h^2)} + 1 \right] \\ q(a-b) \cdot \left[ \frac{1}{2} (a+b) \cdot \frac{(a+b)^2 \cdot 3e_1(a+b-e_1) \cdot ab}{6s} + \frac{\left( e_2 + \frac{s}{2} \right) [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+v) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4(1+v) \cdot h^2)} \right] \\ 0 \\ \frac{q \cdot (b-a)}{2s \cdot (s^2 + 2,4(1+v) \cdot h^2)} [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+v) \cdot h^2] \\ \bar{M}_{j,i} = q \cdot (a \cdot b) \cdot \left[ \frac{(a+b)^2 \cdot 3e_1(a+b-e_1) \cdot ab}{6s} + \frac{\left( e_2 + \frac{s}{2} \right) [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6(a-b)(a-e_1)(a-e_1-s) + (a-b)^2 (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4(a+b-2e_1)(1+v) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4(1+v) \cdot h^2)} \right] \end{bmatrix}.$$

Za poseban slučaj, kada je  $a=e_1$  i  $b=e_1+s$ , tj. kada je opterećenje kontinuiranom jednoliko raspodijeljenom silom zadano po cijeloj duljini elastičnog dijela štapa (slika 27.).



slika 27.

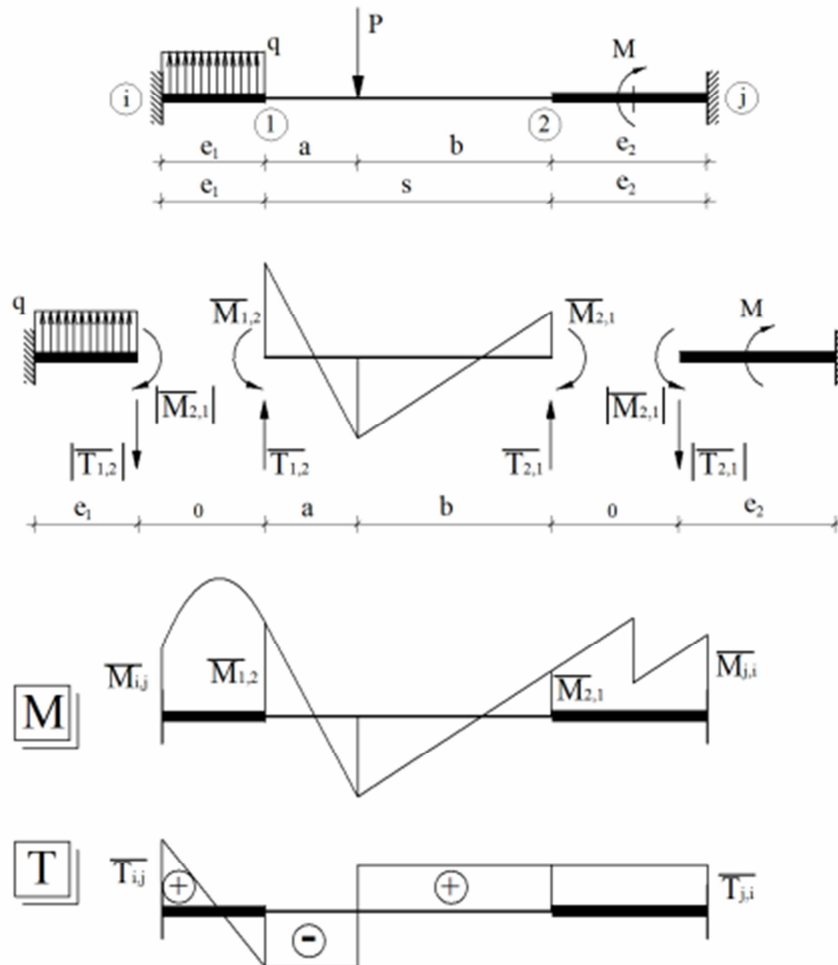
vektor sila upetosti je

$$\bar{f}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} q \cdot s \\ -\frac{1}{12} q \cdot s \cdot (6e_1 + s) \\ 0 \\ -\frac{1}{2} q \cdot s \\ \frac{1}{12} q \cdot s \cdot (6e_2 + s) \end{bmatrix}.$$



### 7.5. Dobivanje sila upetosti pomoću izraza iz priručnika

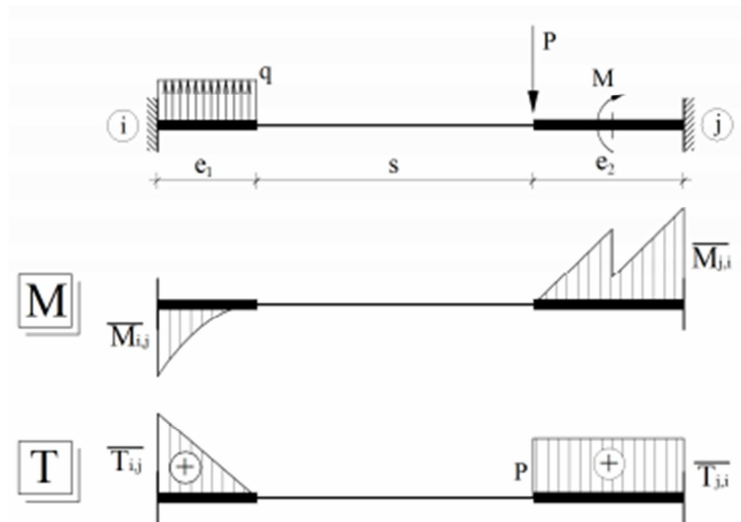
Sile upetosti moguće je dobiti i pomoću gotovih izraza iz priručnika. Tako možemo dobiti sile upetosti za elastični dio štapa, odnosno sile upetosti na spoju s krutim dijelom štapa. Konačne sile na krajevima štapnog elementa dobit ćemo iz uvjeta da opterećenje krutog dijela i dobivene sile upetosti za elastični dio suprotnog predznaka čine uravnotežen sustav (slika 30.).



slika 30.

### 7.6. Sile upetosti za opterećenje zadano samo na neizmjerne krutim dijelovima štapa

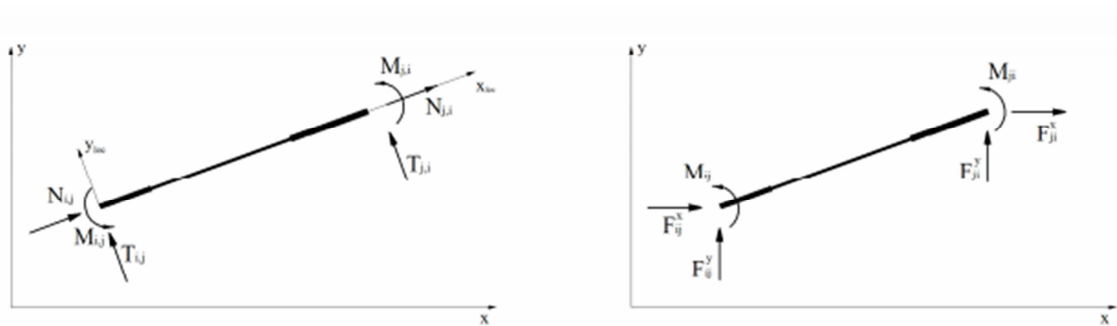
Djeluje li opterećenje samo na krutim dijelovima štapnog elementa, sile upetosti su statički određene i jednake su reakcijama konzole (*slika 31.*).



slika 31.

## 8. Sustav jednadžbi ravnoteže

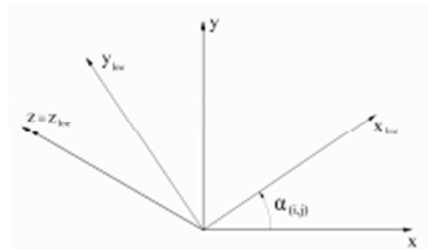
Jednadžbe ravnoteže postavljaju se u smjerovima globalnog koordinatnog sustava, a također se u odnosu na njega mjere apsolutni pomaci točaka sistema. Zato je potrebno matrice krutosti elemenata, vektore sila i vektore pomaka izraziti u globalnom koordinatnom sustavu.



slika 32.

### 8.1. Prijelaz u globalni koordinatni sustav

Kut između globalne osi  $x$  i lokalne osi  $x_{loc}$  kut je  $\alpha_{(i,j)}$  (slika 33.), a transformacija koordinata iz globalnog u lokalni koordinatni sustav rotacija je oko osi  $z \equiv z_{loc}$  za kut  $\alpha_{(i,j)}$ .



slika 33.

Matrica transformacije s poretkom komponenata koji odgovara vektoru  $[N_{i,j} \ T_{i,j} \ M_{i,j}]^T$  je

$$r_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{(i,j)} & \sin\alpha_{(i,j)} & 0 \\ -\sin\alpha_{(i,j)} & \cos\alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica transformacije vektora sila na krajevima štapnog elementa i vektora pomaka krajeva je

$$R_{(i,j)} = \begin{bmatrix} r_{(i,j)} & 0 \\ 0 & r_{(i,j)} \end{bmatrix},$$

$$R_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{(i,j)} & \sin\alpha_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_{(i,j)} & \cos\alpha_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_{(i,j)} & \sin\alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha_{(i,j)} & \cos\alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izrazi u lokalnom koordinatnom sustavu su

vektor vrijednosti sila na krajevima štapa izazvanog pomacima krajeva

$$f_{(i,j)} = R_{(i,j)} \cdot f_{(i,j)}^g,$$

vektor sila upetosti

$$\bar{f}_{(i,j)} = R_{(i,j)} \cdot \bar{f}_{(i,j)}^g,$$

a vektor vrijednosti popučenih pomaka krajeva

$$u_{(i,j)} = R_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)}^g.$$

Komponente vektora  $f_{(i,j)}^g = [f_{i,j}^x \ f_{i,j}^y \ m_{i,j} \ f_{j,i}^x \ f_{j,i}^y \ m_{j,i}]^T$  vrijednosti su sila na krajevima u stanju prisilnih pomaka rastavljenih na komponente usporedne s osima globalnog koordinatnog sustava.

Jednako je s komponentama vektora sila upetosti  $\bar{f}_{(i,j)}^g = [\bar{F}_{i,j}^x \ \bar{F}_{i,j}^y \ \bar{M}_{i,j} \ \bar{F}_{j,i}^x \ \bar{F}_{j,i}^y \ \bar{M}_{j,i}]^T$ .

Vektor  $u_{(i,j)}^g$  sadrži komponente pomaka krajeva po pravcima usporednima s globalnim osima.

Transformacija iz lokalnog u globalni koordinatni sustav dana je izrazima:

$$\begin{aligned} f_{(i,j)}^g &= R_{(i,j)}^{-1} \cdot f_{(i,j)}, \\ \bar{f}_{(i,j)}^g &= R_{(i,j)}^{-1} \cdot \bar{f}_{(i,j)}, \\ u_{(i,j)}^g &= R_{(i,j)}^{-1} \cdot u_{(i,j)}. \end{aligned}$$

Uvrstimo li u izraz  $f_{(i,j)} = k_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)}$  izraze  $f_{(i,j)} = R_{(i,j)} \cdot f_{(i,j)}^g$  i  $u_{(i,j)} = R_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)}^g$  dobivamo

$$R_{(i,j)} \cdot f_{(i,j)}^g = k_{(i,j)} \cdot R_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)}^g.$$

Nakon množenja s lijeva sa  $R_{(i,j)}^{-1}$  bit će

$$f_{(i,j)}^g = R_{(i,j)}^{-1} \cdot k_{(i,j)} \cdot R_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)}^g.$$

Umnožak  $R_{(i,j)}^{-1} \cdot k_{(i,j)} \cdot R_{(i,j)}$  predstavlja matricu krutosti elementa izraženu u globalnom koordinatnom sustavu, a označavamo je sa  $k_{(i,j)}^g$ .

Konačno, možemo napisati (prevedeno u globalni koordinatni sustav)

$$f_{(i,j)}^g = k_{(i,j)}^g \cdot u_{(i,j)}^g$$

ili

$$\begin{bmatrix} f_{(i,j)_i}^g \\ f_{(i,j)_j}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(i,j)_{i,i}}^g & k_{(i,j)_{i,j}}^g \\ k_{(i,j)_{j,i}}^g & k_{(i,j)_{j,j}}^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i^g \\ u_j^g \end{bmatrix}.$$

## 8.2. Jednadžbe ravnoteže čvorova

Kada smo sve potrebne vektore preveli u globalni koordinatni sustav, možemo formirati jednadžbe ravnoteže.

Na neki čvor  $i$  djeluju sile od priključenih elemenata, a mogu djelovati i zadane ili reaktivne koncentrirane sile i momenti izraženi vektorom

$$p_i = [P_i^x \quad P_i^y \quad M_i]^T.$$

Vektor ukupnih vrijednosti sila na  $i$ -tome kraju štapnog elementa  $(i,j)$  je

$$\hat{f}_{(i,j)_i}^g = \begin{bmatrix} k_{(i,j)_{i,i}}^g & k_{(i,j)_{i,j}}^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i^g \\ u_j^g \end{bmatrix} + \bar{f}_{(i,j)_i}^g.$$

Formalni zapis uvjeta ravnoteže čvora  $i$  glasi

$$-\sum_{(i,e_i)} \hat{f}_{(i,j)_i}^g + p_i = 0.$$

Sumacija u zapisu uvjeta ravnoteže obavlja se po svim elementima koji su priključeni u taj čvor.

Matrična jednadžba uvjeta ravnoteže čvora sadrži tri jednadžbe koje izražavaju uvjete iščezavanja zbroja sila koje na čvor  $i$  djeluju u smjeru osi  $x$ , iščezavanje zbroja sila u smjeru  $y$  te iščezavanje zbroja momenata savijanja. Izrazimo li sile na krajevima elemenata kao funkcije pomaka i sve poznate sile prebacimo na desnu stranu, dobivamo

$$\sum_{(i,e_i)} \left( \begin{bmatrix} k_{(i,j)_{i,i}}^g & k_{(i,j)_{i,j}}^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i^g \\ u_j^g \end{bmatrix} \right) = - \sum_{(i,e_i)} \bar{f}_{(i,j)_i}^g + p_i.$$

Matrične jednadžbe potrebno je napisati za sve čvorove sistema. Tako dobivamo sustav

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{q}$$

gdje su:

- K matrica krutosti sa dijagonalnim blokovima  $K_{i,i} = \sum_{(i,e_i)} k_{(i,e_i)_i}^g$  i vandijagonalnim blokovima (ako su čvorovi  $i$  i  $j$  povezani elementom  $(i,j)$ )  $K_{i,j} = k_{(i,j)_{i,j}}^g$  i  $K_{j,i} = k_{(i,j)_{j,i}}^g$ ,
- $u$  vektor koji sadrži nepoznate vrijednosti pomaka „slobodnih“ čvorova, ali i vrijednosti poznatih pomaka, a to su pomaci po pravcima ležajnih veza – spriječeni ili zadani pomaci ležajeva (vektor  $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$  ima  $3n$  komponenti, gdje je  $n$  broj čvorova sistema),
- $q$  vektor koji sadrži sve zadane sile, reakcije i sile upetosti priključenih elemenata, odnosno  $q_i = - \sum_{(i,e_i)} \bar{f}_{(i,j)_i}^g + p_i$  (vektor  $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$  ima  $3n$  komponenti).

### 8.3. Ukupne sile na krajevima elemenata

Zadatak cijelog proračuna metodom pomaka naći je vrijednosti sila na krajevima elemenata, odnosno naći vrijednosti unutarnjih sila. Te se vrijednosti izražavaju u lokalnom koordinatnom sustavu. Zbog toga je rješenje sustava

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{q}$$

odnosno, vrijednosti komponenta pomaka čvorova u smjerovima osi globalnog koordinatnog sustava, potrebno izraziti u lokalnom koordinatnom sustavu kao

$$u_{(i,j)} = R_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)}^g.$$

Vrijednosti konačnih sila na krajevima elementa sadržava vektor

$$\hat{f}_{(i,j)} = k_{(i,j)} \cdot u_{(i,j)} + \bar{f}_{(i,j)}.$$

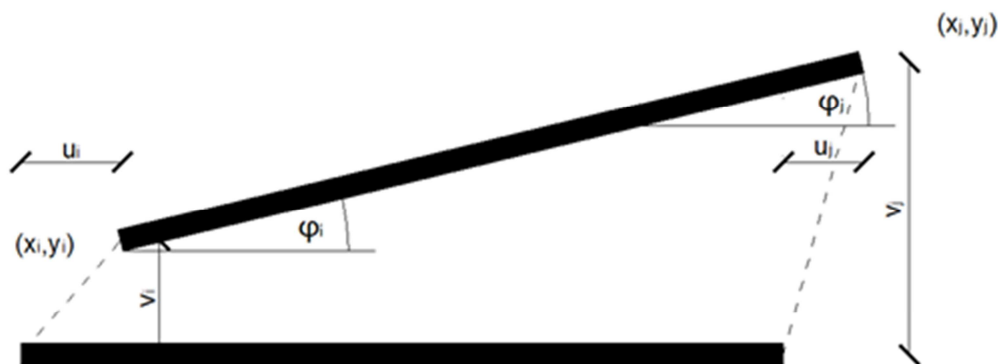
## 9. Kinematička kondenzacija

Pomaci pojedinih čvorova mogu biti ovisni o pomacima drugih čvorova. Ta ovisnost može biti posljedica apsolutno krute veze tih čvorova, simetričnog ili antisimetričnog opterećenja geometrijski simetričnih konstrukcija i sl., a također se može i pretpostaviti iako se ovisnost fizikalno ne realizira preko „neizmjerljivo krutih“ spojeva.

Zbog te činjenice moguće je umanjiti broj nepoznanica, tj. reducira se sustav jednačbi ravnoteže, što se naziva kinematičkom kondenzacijom.

Jedan čvor izabiremo kao vodeći (master), te pomake čvorova ovisnih o njemu (slave) izražavamo preko pomaka vodećeg čvora, množeći ih odgovarajućom prijenosnom matricom.

Uzmimo za primjer dva čvora povezana neizmjerljivo krutim štapom:



slika 34.

Čvor  $i$  elementa uzet ćemo kao vodeći čvor, a čvor  $j$  kao prateći. Izrazimo pomake pratećeg čvora pomoću pomaka vodećeg:

$$u_j = u_i - (y_j - y_i) \cdot \varphi_i,$$

$$w_j = w_i + (x_j - x_i) \cdot \varphi_i,$$

$$\varphi_i = \varphi_j.$$

U matičnom obliku:

$$\mathbf{u}_{j,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(y_j - y_i) \\ 0 & 1 & x_j - x_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{t}_{i,j} \cdot \mathbf{u}_{i,j}$$

gdje je  $\mathbf{t}_{i,j}$  prijenosna matrica.

Matricu sistema potrebno je kondenzirati množenjem stupaca pratećeg pomaka prijenosnom matricom i pribrajanjem stupcima vodećeg čvora. Postavljanjem jednadžbi ravnoteže na vodeći čvor tada zapravo postavljamo uvjete ravnoteže krutog diska ( $i,j$ ).

Nakon izračuna pomaka vodećeg čvora preko prijenosne matrice računamo pomake pratećeg čvora. Unutarnje sile „štapa“ ( $i,j$ ) računaju se iz uvjeta ravnoteže čvorova na koje je priključen.

Ukoliko su međusobno ovisne samo pojedine komponente pomaka čvorova postupak kinematičke kondenzacije je analogan opisanom. Npr. pretpostavimo li da je horizontalan pomak jedne etaže štapnog sistema jednak u svim čvorovima te etaže, horizontalne pomake pratećih čvorova izražavamo preko horizontalnog pomaka vodećeg, te se ukupan broj jednadžbi ravnoteže smanjuje za broj pratećih čvorova.

Prijenosna matrica u ovom posebnom slučaju bit će

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uzdužne sile u štapovima te etaže (horizontalni elementi) bit će jednake nuli (nema relativnih horizontalnih pomaka krajeva štapa), a daljni tijek proračuna jednak je već opisanom proračunu štapnih konstrukcija.



## 10. Primjer

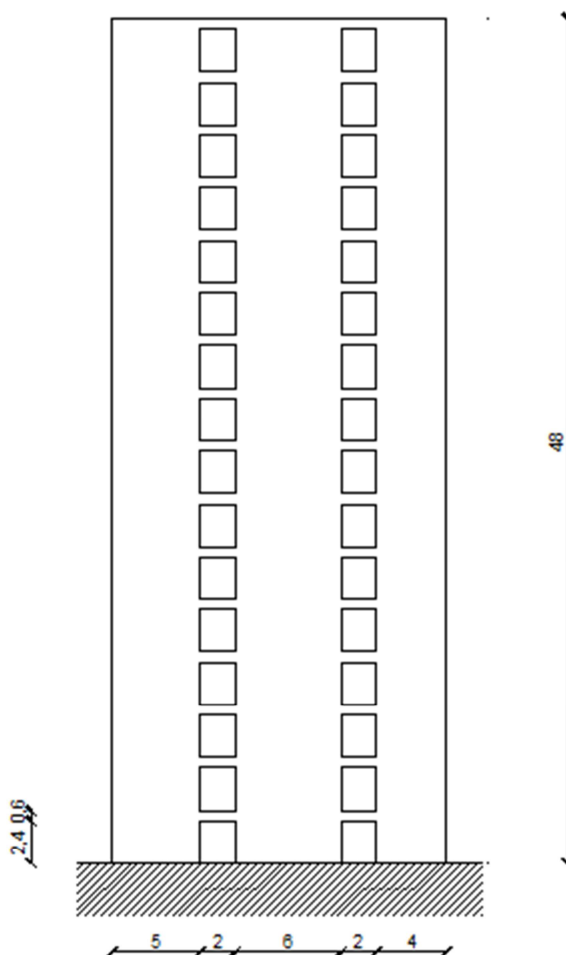
Zadatak je preuzet iz primjera I.6. iz knjige „Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije“.

Zadan je nesimetričan armirano-betonski zid s dva niza otvora prema slici 35. Zid je opterećen koncentriranom silom u nivou prve grede (na vrhu). Ležajni uvjeti su potpuna upetost. Dimenzije prema slici.

Geometrijski i materijalni podaci:

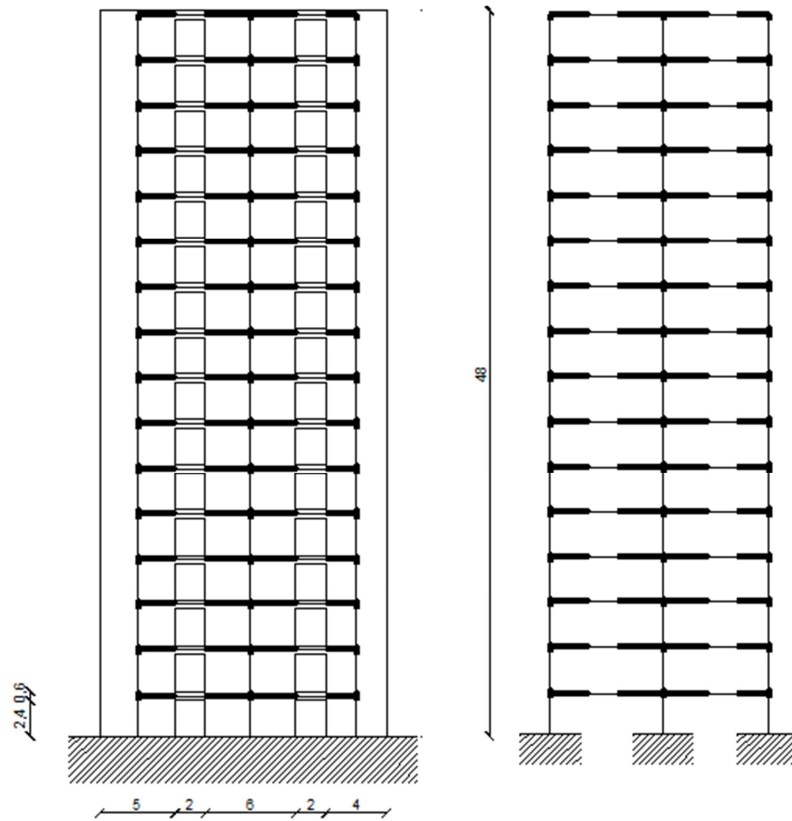
$$n=16 \quad h=3,0 \text{ m}$$

$$E=3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \quad \nu=0,25$$



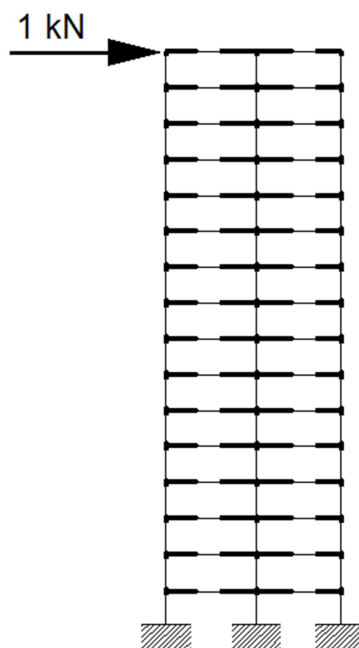
slika 35.

Proračunski model zida s otvorima- skup spojnica težišnih linija zidova:



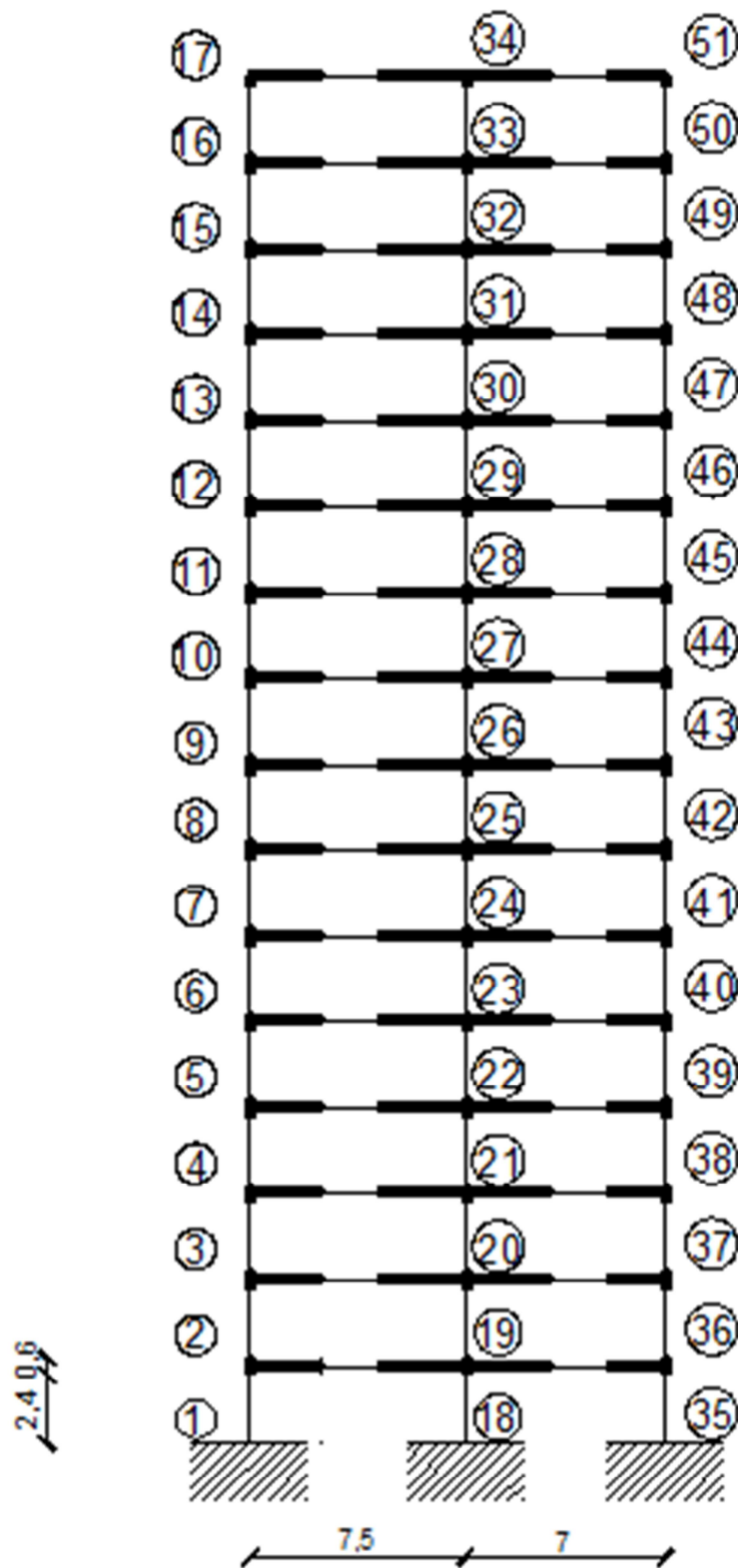
Slika 36.

Na model nanosimo opterećenje:

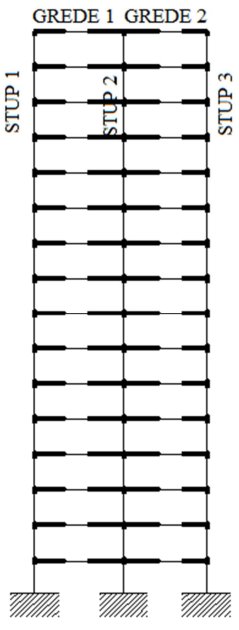


Slika 37.

Oznake čvorova:



Tablica karakteristika:

	$b = 1 \text{ m}$	$h$ [m]	ŠTAPOVI	$e_1$	$s$	$e_2$	$L$
				[m]	[m]	[m]	[m]
	STUP 1	5,0	(1, 2)	0	2,4	0,3	2,7
			(2, 3),(3, 4),(4, 5),(5, 6),(6,7) (7, 8),(8, 9),(9, 10),(10,11), (11, 12),(12, 13),(13, 14), (14, 15),(15, 16),(16, 17)	0,3	2,4	0,3	3,0
	STUP 2	6,0	(18, 19)	0	2,4	0,3	2,7
			(19, 20),(20, 21),(21, 22), (22, 23),(23, 24),(24, 25), (25, 26),(26, 27),(27, 28), (28, 29),(29, 30),(30, 31), (31, 32),(32, 33),(33, 34)	0,3	2,4	0,3	3,0
	STUP 3	4,0	(35, 36)	0	2,4	0,3	2,7
			(36, 37),(37, 38),(38, 39), (39, 40),(40, 41),(41, 42), (42, 43),(43, 44),(44, 45), (45, 46),(46, 47),(47, 48), (48, 49),(49, 50),(50, 51),	0,3	2,4	0,3	3,0
	GREDE 1	0,6	(2, 19),(3, 20),(4, 21), (5, 22),(6, 23),(7, 24), (8, 25),(9, 26),(10, 27), (11, 28),(12, 29),(13, 30), (14, 31),(15, 32),(16, 33), (17, 34)	2,5	2,0	3,0	7,5
			(19, 36),(20, 37),(21, 38), (22, 39),(23, 40),(24, 41), (25, 42),(26, 43),(27, 44), (28, 45),(29, 46),(30, 47), (31, 48),(32, 49),(33, 50), (34, 51)	3,0	2,0	2,0	7,0

Proračun općom metodom pomaka proveden je upotrebom programskog sustava Mathematica. Jezgra programskog koda preuzeta je iz rada [4], te je moguće izvesti proračun sustava opterećenog koncentriranom silom u čvoru. Kod i rezultati proračuna prikazani su na sljedećih nekoliko stranica.

Funkcija koja sastavlja lokalnu matricu krutosti elementa:

```
ElemKLoc [e_Real, ni_Real, b_Real, h_Real, e1_Real, s_Real, e2_Real, l_Real] :=
Module[
  {a,i,k11, k14, k22, k23, k25, k26, k33, k35, k36, k44, k55, k56, k66, k},
  a=b*h;
  i=b*h^3/12;
  k11=e a/s;
  k14=-k11;
  k22 = 12 e i / (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k23 = 12 e i *(e1+s/2)/ (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k25=-k22;
  k26=12 e i *(e2+s/2)/ (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k33=e i/s+12 e i *(e1+s/2)^2/ (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k35=-k23;
  k36=-e i/s+12 e i *(e1+s/2)*(e2+s/2)/ (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k44 = k11;
  k55=k22;
  k56=-12 e i *(e2+s/2)/ (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k66=e i/s+12 e i *(e2+s/2)^2/ (s*(s^2+2.4*(1+ni)*h^2));
  k={k11,0,0,k14,0,0},
    {0,k22,k23,0,k25,k26},
    {0,k23,k33,0,k35,k36},
    {k14,0,0,k44,0,0},
    {0,k25,k35,0,k55,k56},
    {0,k26,k36,0,k56,k66}};
  k
]
]
```

Funkcija koja nalazi početni i krajnji čvor elementa e1:

```
ElemNds[e1_, nds_List]:={nds[[ e1 [[1]][[1]] ]], nds[[ e1 [[1]][[2]] ]]}
```

Funkcija koja iz liste ech izdvaja karakteristike elementa el:

```
ElemChar [el_, ech_List]:=ech[[el[[2]]]]
```

Funkcija koja izračunava duljinu elementa:

```
ElemLength [ {{xi_Real,yi_Real},{xj_Real,yj_Real}}]:= Sqrt[(xj-xi)^2+(yj-yi)^2]
```

Funkcija koja sastavlja listu lokalnih matrica krutosti svih elemenata:

```
ListKLoc [els_List, nds_List, echs_List] :=
Module[
  {lk, el, e, ni,b,h, e1,s,e2, l, j},
  lk=Table[Null,{Length[els]}];
  Do[
    el=els[[j]];
    {e, ni,b,h, e1,s,e2, l}=ElemChar[el,echs];
    lk[[j]]=ElemKLoc[e, ni,b,h, e1,s,e2, l],
    {j,l,Length[els]}
  ];
  lk
]
]
```

Funkcija koja oblikuje matricu transformacije elementa:

```
ElemTG2L[e1nds_List]:=
Module[
  {cij,sij,r},
  cij=ElemCos[e1nds];
  sij=ElemSin[e1nds];
  r={{cij,sij,0,0,0,0},
    {-sij,cij,0,0,0,0},
    {0,0,1,0,0,0},
    {0,0,0,cij,sij,0},
    {0,0,0,-sij,cij,0},
    {0,0,0,0,0,1}};
  r]
]
```

Funkcije koje računaju sinus i kosinus kuta elementa u odnosu na x-os globalnog sustava:

```
ElemCos[{{xi_Real,yi_Real},{xj_Real,yj_Real}}]:=
(xj-xi)/ElemLength[{{xi,yi},{xj,yj}}]
ElemSin[{{xi_Real,yi_Real},{xj_Real,yj_Real}}]:=
(yj-yi)/ElemLength[{{xi,yi},{xj,yj}}]
```

Funkcija koja sastavlja listu matrica transformacija za sve elemente sistema:

```
ListTG2L[els_List,nds_List]:=
Module[
  {r,j},
  r=Table[Null,{Length[els]}];
  Do[
    r[[j]]=ElemTG2L[ElemNds[els[[j]],nds]],
    {j,1,Length[els]}
  ];
  r ]
```

Funkcija koja izračunava globalnu matricu krutosti elementa:

```
ElemKGlob[k_,r_]:=Transpose[r]. k. r
```

Funkcija koja sastavlja listu globalnih matrica krutosti svih elemenata:

```
ListKGlob[kl_List, r_List]:=
Module[
  {lkg,j},
  lkg=Table[Null, {Length[kl]}];
  Do[
    lkg[[j]]=ElemKGlob[kl[[j]],r[[j]] ],
    {j,1,Length[kl]}
  ];
  lkg ]
```

Funkcija koja preslikava indekse lokalnih u indekse globalnih stupnjeva slobode:

```
TblNodeDsOF[n_Integer,cns_List]:=
Module[
  {i,j,nc,nd,di},
  di=Table [1,{n},{3}];
  nc=Length[cns];
  Do[
    di[[ cns [[i]][[1]] ] ] = cns[[i]][[2]],
    {i,1,nc}
  ];
  nd=0;
  Do[
    If [di[[i,j]]==1,
      ++nd; di[[i,j]]=nd
    ],
    {i,1,n},{j,1,3}
  ];
  {nd,di} ]
```

Funkcija koja iz tablice *di* izdvaja indekse globalnih stupnjeva slobode početnog i krajnjeg čvora elementa els:

```
ElemDsOF [els_List,di_List]:=
Module[
  {l1,l2,l},
  l1=di[[els[[1]][[1]]]];
  l2=di[[els[[1]][[2]]]];
  l={l1[[1]],l1[[2]],l1[[3]],l2[[1]],l2[[2]],l2[[3]] } ]
```

Funkcija koja sastavlja matricu krutosti sistema:

```
structK[nd_Integer, di_List, els_List, lkg_List]:=
Module[
  {sk,ix,i,ii,j},
  sk=Table[0.0, {nd}, {nd}];
  Do[
    ix= ElemDsOF [els[[j]],di];
    Do[
      If [ix[[i]] ≠ 0,
        Do[
          If [ix[[ii]] ≠ 0,
            sk[[ix[[i]], ix[[ii]] ] ] += lkg [[j]][[i,ii]]
          ],
          {ii,1,6}
        ],
        l,
        {i,1,6}
      ],
      {j,1,Length[els]}
    ];
  sk ]
```

Funkcija koja sastavlja vektor sila koje djeluju neposredno na čvorove:

```
StructF[nd_Integer, di_List, nlds_List]:=
Module[
{lefg, sf, ix, d, nld, i, j},
sf=Table [0.0, {nd}];
Do[
nld=nlds[[j]];
Do[
d=di[[nld[[1]],i]];
If [d ≠ 0,
sf [[d]] += nld[[2]][[i]]
],
{i,1,3}
],
{j,1,Length[nlds]}
]; sf ]
```

Funkcija koja pomoću tablice *di* izdvaja iz vektora *u* pomake čvorova određenog štapa:

```
ElemDisplsGlob[el_List, di_List, u_List]:=
Module[
{a,b,i,l1,l2,l},
l1=Table[0.0,{3}];
l2=Table[0.0,{3}];
a=el[[1]][[1]];
b=el[[1]][[2]];
Do[
If [di[[a,i]]≠0,
l1[[i]]=u[[ di[[a,i]] ] ] ];
If [di[[b,i]]≠0,
l2[[i]]=u[[ di[[b,i]] ] ] ],
{i,1,3}
];
l=Join[l1,l2];
l]
```

Funkcija koja sastavlja listu vektora pomaka čvorova elemenata u lokalnim sustavima:

```
ListEDisplsLoc [u_List, di_List, els_List, r_List]:=
Module[
{ldl, ug, j},
ldl=Table[Table[0.0, {6}], {Length[els]}];
Do[
ug = ElemDisplsGlob [els[[j]], di, u];
ldl[[j]]=r[[j]] . ug,
{j,1,Length[els]}
];
ldl ]
```

Funkcija koja izračunava listu vektora konačnih sila:

```
ListEndForces [kl_List, ul_List]:=
Module[
{lefs, j},
lefs=Table [Table [0.0, {6}], {Length[ul]}];
Do[
lefs[[j]] = kl [[j]]. ul[[j]],
{j,1,Length[kl]}
];
lefs ]
```

Ulazni podaci:

```

els:={
  {{1,2},1},{{2,3},2},{{3,4},2},{{4,5},2},{{5,6},2},{{6,7},2},{{7,8},2},{{8,9},2},{{9,10},2},{{10,11},2},{{11,12},2},{{12,13},2},{{13,14},2},{{14,15},2},{{15,16},2},{{16,17},2},
  {{18,19},3},{{19,20},4},{{20,21},4},{{21,22},4},{{22,23},4},{{23,24},4},{{24,25},4},{{25,26},4},{{26,27},4},{{27,28},4},{{28,29},4},{{29,30},4},{{30,31},4},{{31,32},4},{{32,33},4},{{33,34},4},
  {{35,36},5},{{36,37},6},{{37,38},6},{{38,39},6},{{39,40},6},{{40,41},6},{{41,42},6},{{42,43},6},{{43,44},6},{{44,45},6},{{45,46},6},{{46,47},6},{{47,48},6},{{48,49},6},{{49,50},6},{{50,51},6},
  {{2,19},7},{{3,20},7},{{4,21},7},{{5,22},7},{{6,23},7},{{7,24},7},{{8,25},7},{{9,26},7},{{10,27},7},{{11,28},7},{{12,29},7},{{13,30},7},{{14,31},7},{{15,32},7},{{16,33},7},{{17,34},7},
  {{19,36},8},{{20,37},8},{{21,38},8},{{22,39},8},{{23,40},8},{{24,41},8},{{25,42},8},{{26,43},8},{{27,44},8},{{28,45},8},{{29,46},8},{{30,47},8},{{31,48},8},{{32,49},8},{{33,50},8},{{34,51},8}
}

nds:={
  {0.0,0.0},{0.0,2.7},{0.0,5.7},{0.0,8.7},{0.0,11.7},{0.0,14.7},{0.0,17.7},{0.0,20.7},{0.0,23.7},
  {0.0,26.7},{0.0,29.7},{0.0,32.7},{0.0,35.7},{0.0,38.7},{0.0,41.7},{0.0,44.7},{0.0,47.7},
  {7.5,0.0},{7.5,2.7},{7.5,5.7},{7.5,8.7},{7.5,11.7},{7.5,14.7},{7.5,17.7},{7.5,20.7},{7.5,23.7},
  {7.5,26.7},{7.5,29.7},{7.5,32.7},{7.5,35.7},{7.5,38.7},{7.5,41.7},{7.5,44.7},{7.5,47.7},
  {14.5,0.0},{14.5,2.7},{14.5,5.7},{14.5,8.7},{14.5,11.7},{14.5,14.7},{14.5,17.7},{14.5,20.7},{14.5,23.7},
  {14.5,26.7},{14.5,29.7},{14.5,32.7},{14.5,35.7},{14.5,38.7},{14.5,41.7},{14.5,44.7},{14.5,47.7}
}

chrs:={
  {3.*10^7,0.25,1.,5., 0.,2.4,0.3,2.7},
  {3.*10^7,0.25,1.,5., 0.3,2.4,0.3,3.0},
  {3.*10^7,0.25,1.,6., 0.,2.4,0.3,2.7},
  {3.*10^7,0.25,1.,6., 0.3,2.4,0.3,3.0},
  {3.*10^7,0.25,1.,4., 0.,2.4,0.3,2.7},
  {3.*10^7,0.25,1.,4., 0.3,2.4,0.3,3.0},
  {3.*10^7,0.25,1.,0.6,2.5,2.0,3.0,7.5},
  {3.*10^7,0.25,1.,0.6,3.0,2.0,2.0,7.0}
}

cnsts={{1,{0,0,0}},{18,{0,0,0}},{35,{0,0,0}}}
lnld={{17,{1.,0.,0.}}}

nd:=TblNodeDsOF[Length[nds],cnsts][[1]]
di:=TblNodeDsOF[Length[nds],cnsts][[2]]
lkl:=ListKLoc[els,nds,chrs]

r:=ListTG2L[els,nds]
lkg:=ListKGlob[lkl,r]

K:=StructK[nd, di, els, lkg]

q:=StructF [nd,di,lnld]

u:=LinearSolve [K,q]

ul:=ListEDisplsLoc[u,di,els,r]

kr:=ListEndForces [lkl,ul]

```



Izlazni podaci:

$N_{1,2}$	$T_{1,2}$	$M_{1,2}$	$N_{2,1}$	$T_{2,1}$	$M_{2,1}$	{-2.74429,	0.309145,	3.13309,	2.74429,	-0.309145,	-2.2984},
$N_{2,3}$	$T_{2,3}$	$M_{2,3}$	$N_{3,2}$	$T_{3,2}$	$M_{3,2}$	{-2.67756,	0.294365,	2.53242,	2.67756,	-0.294365,	-1.64932},
$N_{3,4}$	$T_{3,4}$	$M_{3,4}$	$N_{4,3}$	$T_{4,3}$	$M_{4,3}$	{-2.56587,	0.281008,	2.04093,	2.56587,	-0.281008,	-1.19791},
$N_{4,5}$	$T_{4,5}$	$M_{4,5}$	$N_{5,4}$	$T_{5,4}$	$M_{5,4}$	{-2.42409,	0.27175,	1.69495,	2.42409,	-0.27175,	-0.879698},
$N_{5,6}$	$T_{5,6}$	$M_{5,6}$	$N_{6,5}$	$T_{6,5}$	$M_{6,5}$	{-2.2623,	0.265899,	1.44679,	2.2623,	-0.265899,	-0.649092},
$N_{6,7}$	$T_{6,7}$	$M_{6,7}$	$N_{7,6}$	$T_{7,6}$	$M_{7,6}$	{-2.08731,	0.262389,	1.26243,	2.08731,	-0.262389,	-0.47526},
$N_{7,8}$	$T_{7,8}$	$M_{7,8}$	$N_{8,7}$	$T_{8,7}$	$M_{8,7}$	{-1.90368,	0.260391,	1.11883,	1.90368,	-0.260391,	-0.337662},
$N_{8,9}$	$T_{8,9}$	$M_{8,9}$	$N_{9,8}$	$T_{9,8}$	$M_{9,8}$	{-1.71452,	0.259267,	1.00062,	1.71452,	-0.259267,	-0.222816},
$N_{9,10}$	$T_{9,10}$	$M_{9,10}$	$N_{10,9}$	$T_{10,9}$	$M_{10,9}$	{-1.52198,	0.258296,	0.897583,	1.52198,	-0.258296,	-0.122696},
$N_{10,11}$	$T_{10,11}$	$M_{10,11}$	$N_{11,10}$	$T_{11,10}$	$M_{11,10}$	{-1.32764,	0.256228,	0.803752,	1.32764,	-0.256228,	-0.0350674},
$N_{11,12}$	$T_{11,12}$	$M_{11,12}$	$N_{12,11}$	$T_{12,11}$	$M_{12,11}$	{-1.13272,	0.250819,	0.718121,	1.13272,	-0.250819,	0.0343366},
$N_{12,13}$	$T_{12,13}$	$M_{12,13}$	$N_{13,12}$	$T_{13,12}$	$M_{13,12}$	{-0.938231,	0.239016,	0.647257,	0.938231,	-0.239016,	0.0697913},
$N_{13,14}$	$T_{13,14}$	$M_{13,14}$	$N_{14,13}$	$T_{14,13}$	$M_{14,13}$	{-0.744938,	0.219691,	0.607729,	0.744938,	-0.219691,	0.0513434},
$N_{14,15}$	$T_{14,15}$	$M_{14,15}$	$N_{15,14}$	$T_{15,14}$	$M_{15,14}$	{-0.553344,	0.202895,	0.620584,	0.553344,	-0.202895,	-0.0119004},
$N_{15,16}$	$T_{15,16}$	$M_{15,16}$	$N_{16,15}$	$T_{16,15}$	$M_{16,15}$	{-0.363807,	0.231707,	0.677388,	0.363807,	-0.231707,	0.0177343},
$N_{16,17}$	$T_{16,17}$	$M_{16,17}$	$N_{17,16}$	$T_{17,16}$	$M_{17,16}$	{-0.177559,	0.2420958,	0.63742,	0.177559,	-0.2420958,	0.625454},
$N_{18,19}$	$T_{18,19}$	$M_{18,19}$	$N_{19,18}$	$T_{19,18}$	$M_{19,18}$	{0.274629,	0.479631,	4.96034,	-0.274629,	-0.479631,	-3.66534},
$N_{19,20}$	$T_{19,20}$	$M_{19,20}$	$N_{20,19}$	$T_{20,19}$	$M_{20,19}$	{0.271021,	0.511253,	4.18354,	-0.271021,	-0.511253,	-2.64978},
$N_{20,21}$	$T_{20,21}$	$M_{20,21}$	$N_{21,20}$	$T_{21,20}$	$M_{21,20}$	{0.26337,	0.53251,	3.51102,	-0.26337,	-0.53251,	-1.9135},
$N_{21,22}$	$T_{21,22}$	$M_{21,22}$	$N_{22,21}$	$T_{22,21}$	$M_{22,21}$	{0.252405,	0.542254,	3.00211,	-0.252405,	-0.542254,	-1.37534},
$N_{22,23}$	$T_{22,23}$	$M_{22,23}$	$N_{23,22}$	$T_{23,22}$	$M_{23,22}$	{0.23911,	0.545941,	2.61464,	-0.23911,	-0.545941,	-0.976821},
$N_{23,24}$	$T_{23,24}$	$M_{23,24}$	$N_{24,23}$	$T_{24,23}$	$M_{24,23}$	{0.224311,	0.547233,	2.31577,	-0.224311,	-0.547233,	-0.674069},
$N_{24,25}$	$T_{24,25}$	$M_{24,25}$	$N_{25,24}$	$T_{25,24}$	$M_{25,24}$	{0.208608,	0.547716,	2.0785,	-0.208608,	-0.547716,	-0.435352},
$N_{25,26}$	$T_{25,26}$	$M_{25,26}$	$N_{26,25}$	$T_{26,25}$	$M_{26,25}$	{0.192438,	0.547965,	1.88221,	-0.192438,	-0.547965,	-0.238317},
$N_{26,27}$	$T_{26,27}$	$M_{26,27}$	$N_{27,26}$	$T_{27,26}$	$M_{27,26}$	{0.176164,	0.548335,	1.71177,	-0.176164,	-0.548335,	-0.0667649},
$N_{27,28}$	$T_{27,28}$	$M_{27,28}$	$N_{28,27}$	$T_{28,27}$	$M_{28,27}$	{0.160112,	0.549448,	1.55551,	-0.160112,	-0.549448,	0.0928371},
$N_{28,29}$	$T_{28,29}$	$M_{28,29}$	$N_{29,28}$	$T_{29,28}$	$M_{29,28}$	{0.144543,	0.552538,	1.40242,	-0.144543,	-0.552538,	0.255197},
$N_{29,30}$	$T_{29,30}$	$M_{29,30}$	$N_{30,29}$	$T_{30,29}$	$M_{30,29}$	{0.129456,	0.559516,	1.23857,	-0.129456,	-0.559516,	0.439973},
$N_{30,31}$	$T_{30,31}$	$M_{30,31}$	$N_{31,30}$	$T_{31,30}$	$M_{31,30}$	{0.114145,	0.57177,	1.04322,	-0.114145,	-0.57177,	0.67209},
$N_{31,32}$	$T_{31,32}$	$M_{31,32}$	$N_{32,31}$	$T_{32,31}$	$M_{32,31}$	{0.0965287,	0.584846,	0.788017,	-0.0965287,	-0.584846,	0.966521},
$N_{32,33}$	$T_{32,33}$	$M_{32,33}$	$N_{33,32}$	$T_{33,32}$	$M_{33,32}$	{0.0728057,	0.572476,	0.45213,	-0.0728057,	-0.572476,	1.2653},
$N_{33,34}$	$T_{33,34}$	$M_{33,34}$	$N_{34,33}$	$T_{34,33}$	$M_{34,33}$	{0.0392479,	0.448709,	0.0868218,	-0.0392479,	-0.448709,	1.25931},
$N_{35,36}$	$T_{35,36}$	$M_{35,36}$	$N_{36,35}$	$T_{36,35}$	$M_{36,35}$	{2.46966,	0.211224,	1.7368,	-2.46966,	-0.211224,	-1.1665},
$N_{36,37}$	$T_{36,37}$	$M_{36,37}$	$N_{37,36}$	$T_{37,36}$	$M_{37,36}$	{2.40654,	0.194383,	1.35661,	-2.40654,	-0.194383,	-0.773461},
$N_{37,38}$	$T_{37,38}$	$M_{37,38}$	$N_{38,37}$	$T_{38,37}$	$M_{38,37}$	{2.3025,	0.186482,	1.08653,	-2.3025,	-0.186482,	-0.527085},
$N_{38,39}$	$T_{38,39}$	$M_{38,39}$	$N_{39,38}$	$T_{39,38}$	$M_{39,38}$	{2.17168,	0.185996,	0.920504,	-2.17168,	-0.185996,	-0.362517},
$N_{39,40}$	$T_{39,40}$	$M_{39,40}$	$N_{40,39}$	$T_{40,39}$	$M_{40,39}$	{2.02319,	0.18816,	0.808928,	-2.02319,	-0.18816,	-0.244449},
$N_{40,41}$	$T_{40,41}$	$M_{40,41}$	$N_{41,40}$	$T_{41,40}$	$M_{41,40}$	{1.863,	0.190377,	0.725948,	-1.863,	-0.190377,	-0.154816},
$N_{41,42}$	$T_{41,42}$	$M_{41,42}$	$N_{42,41}$	$T_{42,41}$	$M_{42,41}$	{1.69508,	0.191893,	0.659503,	-1.69508,	-0.191893,	-0.0838249},
$N_{42,43}$	$T_{42,43}$	$M_{42,43}$	$N_{43,42}$	$T_{43,42}$	$M_{43,42}$	{1.52208,	0.192768,	0.603721,	-1.52208,	-0.192768,	-0.0254168},
$N_{43,44}$	$T_{43,44}$	$M_{43,44}$	$N_{44,43}$	$T_{44,43}$	$M_{44,43}$	{1.34581,	0.193369,	0.555128,	-1.34581,	-0.193369,	0.0249782},
$N_{44,45}$	$T_{44,45}$	$M_{44,45}$	$N_{45,44}$	$T_{45,44}$	$M_{45,44}$	{1.16752,	0.194324,	0.510806,	-1.16752,	-0.194324,	0.0721663},
$N_{45,46}$	$T_{45,46}$	$M_{45,46}$	$N_{46,45}$	$T_{46,45}$	$M_{46,45}$	{0.988179,	0.196643,	0.466795,	-0.988179,	-0.196643,	0.123134},
$N_{46,47}$	$T_{46,47}$	$M_{46,47}$	$N_{47,46}$	$T_{47,46}$	$M_{47,46}$	{0.808775,	0.201468,	0.416014,	-0.808775,	-0.201468,	0.18839},
$N_{47,48}$	$T_{47,48}$	$M_{47,48}$	$N_{48,47}$	$T_{48,47}$	$M_{48,47}$	{0.630792,	0.208539,	0.346475,	-0.630792,	-0.208539,	0.279144},
$N_{48,49}$	$T_{48,49}$	$M_{48,49}$	$N_{49,48}$	$T_{49,48}$	$M_{49,48}$	{0.456815,	0.212259,	0.243618,	-0.456815,	-0.212259,	0.39316},
$N_{49,50}$	$T_{49,50}$	$M_{49,50}$	$N_{50,49}$	$T_{50,49}$	$M_{50,49}$	{0.291002,	0.195817,	0.104914,	-0.291002,	-0.195817,	0.482537},
$N_{50,51}$	$T_{50,51}$	$M_{50,51}$	$N_{51,50}$	$T_{51,50}$	$M_{51,50}$	{0.138311,	0.130333,	-0.0241054,	-0.138311,	-0.130333,	0.415104},
$N_{2,19}$	$T_{2,19}$	$M_{2,19}$	$N_{19,2}$	$T_{19,2}$	$M_{19,2}$	{-0.0147803,	-0.0667306,	-0.234023,	0.0147803,	0.0667306,	-0.266457},
$N_{3,20}$	$T_{3,20}$	$M_{3,20}$	$N_{20,3}$	$T_{20,3}$	$M_{20,3}$	{-0.0133564,	-0.111688,	-0.391609,	0.0133564,	0.111688,	-0.446051},
$N_{4,21}$	$T_{4,21}$	$M_{4,21}$	$N_{21,4}$	$T_{21,4}$	$M_{21,4}$	{-0.00925851,	-0.141781,	-0.497038,	0.00925851,	0.141781,	-0.566318},
$N_{5,22}$	$T_{5,22}$	$M_{5,22}$	$N_{22,5}$	$T_{22,5}$	$M_{22,5}$	{-0.00585065,	-0.161784,	-0.567092,	0.00585065,	0.161784,	-0.646288},
$N_{6,23}$	$T_{6,23}$	$M_{6,23}$	$N_{23,6}$	$T_{23,6}$	$M_{23,6}$	{-0.00350978,	-0.174991,	-0.613335,	0.00350978,	0.174991,	-0.6991},
$N_{7,24}$	$T_{7,24}$	$M_{7,24}$	$N_{24,7}$	$T_{24,7}$	$M_{24,7}$	{-0.00199844,	-0.183629,	-0.643575,	0.00199844,	0.183629,	-0.733643},
$N_{8,25}$	$T_{8,25}$	$M_{8,25}$	$N_{25,8}$	$T_{25,8}$	$M_{25,8}$	{-0.00112407,	-0.189165,	-0.662954,	0.00112407,	0.189165,	-0.755786},
$N_{9,26}$	$T_{9,26}$	$M_{9,26}$	$N_{26,9}$	$T_{26,9}$	$M_{26,9}$	{-0.00097091,	-0.192542,	-0.674767,	0.00097091,	0.192542,	-0.769295},
$N_{10,27}$	$T_{10,27}$	$M_{10,27}$	$N_{27,10}$	$T_{27,10}$	$M_{27,10}$	{-0.00206779,	-0.194341,	-0.681056,	0.00206779,	0.194341,	-0.776502},
$N_{11,28}$	$T_{11,28}$	$M_{11,28}$	$N_{28,11}$	$T_{28,11}$	$M_{28,11}$	{-0.00540902,	-0.194914,	-0.683053,	0.00540902,	0.194914,	-0.778802},
$N_{12,29}$	$T_{12,29}$	$M_{12,29}$	$N_{29,12}$	$T_{29,12}$	$M_{29,12}$	{-0.0118386,	-0.194491,	-0.681593,	0.0118386,	0.194491,	-0.777089},
$N_{13,30}$	$T_{13,30}$	$M_{13,30}$	$N_{30,13}$	$T_{30,13}$	$M_{30,13}$	{-0.0193251,	-0.193293,	-0.677521,	0.0193251,	0.193293,	-0.772179},
$N_{14,31}$	$T_{14,31}$	$M_{14,31}$	$N_{31,14}$	$T_{31,14}$	$M_{31,14}$	{-0.0167963,	-0.191594,	-0.671928,	0.0167963,	0.191594,	-0.765028},
$N_{15,32}$	$T_{15,32}$	$M_{15,32}$	$N_{32,15}$	$T_{32,15}$	$M_{32,15}$	{0.0288129,	-0.189536,	-0.665488,	-0.0288129,	0.189536,	-0.756033},
$N_{16,33}$	$T_{16,33}$	$M_{16,33}$	$N_{33,16}$	$T_{33,16}$	$M_{33,16}$	{0.189251,	-0.186249,	-0.655154,	-0.189251,	0.186249,	-0.741712},
$N_{17,34}$	$T_{17,34}$	$M_{17,34}$	$N_{34,17}$	$T_{34,17}$	$M_{34,17}$	{0.579042,	-0.177559,	-0.625454,	-0.579042,	0.177559,	-0.706235},
$N_{19,36}$	$T_{19,36}$	$M_{19,36}$	$N_{36,19}$	$T_{36,19}$	$M_{36,19}$	{0.0168408,	-0.0631227,	-0.251745,	-0.0168408,	0.0631227,	-0.190114},
$N_{20,37}$	$T_{20,37}$	$M_{20,37}$	$N_{37,20}$	$T_{37,20}$	$M_{37,20}$	{0.00790058,	-0.104037,	-0.41519,	-0.00790058,	0.104037,	-0.313071},
$N_{21,38}$	$T_{21,38}$	$M_{21,38}$	$N_{38,21}$	$T_{38,21}$	$M_{38,21}$	{0.000486385,	-0.130816,	-0.522291,	-0.000486385,	0.130816,	-0.393419},
$N_{22,39}$	$T_{22,39}$	$M_{22,39}$	$N_{39,22}$	$T_{39,22}$	$M_{39,22}$	{-0.00216386,	-0.148489,	-0.593014,	0.00216386,	0.148489,	-0.446412},
$N_{23,40}$	$T_{23,40}$	$M_{23,40}$	$N_{40,23}$	$T_{40,23}$	$M_{40,23}$	{-0.00221765,	-0.160192,	-0.639848,	0.00221765,	0.160192,	-0.481499},
$N_{24,41}$	$T_{24,41}$	$M_{24,41}$	$N_{41,24}$	$T_{41,24}$	$M_{41,24}$	{-0.00151542,	-0.167925,	-0.67079,	0.00151542,	0.167925,	-0.504687},
$N_{25,42}$	$T_{25,42}$	$M_{25,42}$	$N_{42,25}$	$T_{42,25}$	$M_{42,25}$	{-0.000875234,	-0.1				

Dobivene vrijednosti uspoređujemo s vrijednostima dobivenim primjenom diferencijskih jednadžbi (knjiga „Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije“).

Relativne pogreške  $\varepsilon$  računaju se prema izrazu:

$$\varepsilon = \frac{|F_{i,j}^{OMP} - F_{i,j}^{DJ}|}{|F_{i,j}^{OMP}|} \cdot 100 \%,$$

gdje su  $F_{i,j}^{OMP}$  Apsolutne vrijednosti poopćenih sila dobivenih općom metodom pomaka, proračunom u programskom sustavu Mathematica,

$F_{i,j}^{DJ}$  Apsolutne vrijednosti poopćenih sila dobivenih primjenom diferencijskih jednadžbi, rezultati iz primjera I.6. knjige „Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije“.

	$N_{i,j}^{OMP}$	$N_{i,j}^{DJ}$	$\varepsilon$
$N_{2,1} =$	2.74429	2.8147	2,57
$N_{36,35} =$	2.46966	2.5122	1,72
$N_{5,4} =$	2.42409	2.4632	1,61
$N_{39,38} =$	2.17168	2.1953	1,09
$N_{9,8} =$	1.71452	1.7217	0,42
$N_{43,42} =$	1.52208	1.5322	0,66
$N_{13,12} =$	0.938231	0.9258	1,32
$N_{47,46} =$	0.808775	0.8231	1,77
$N_{17,16} =$	0.177559	0.1660	6,51
$N_{51,50} =$	0.138311	0.1470	6,28

	$T_{i,j}^{OMP}$	$T_{i,j}^{DJ}$	$\varepsilon$
$T_{2,19} =$	0.0667306	0.0755	13,14
$T_{19,36} =$	0.0631227	0.0684	8,36
$T_{5,22} =$	0.161784	0.1717	6,13
$T_{22,39} =$	0.148489	0.1540	3,71
$T_{9,26} =$	0.192542	0.1980	2,83
$T_{26,43} =$	0.176267	0.1765	0,13
$T_{13,30} =$	0.193293	0.1972	2,02
$T_{30,47} =$	0.177983	0.1756	1,34
$T_{17,34} =$	0.177559	0.1660	6,51
$T_{34,51} =$	0.138311	0.1470	6,28

	$M_{i,j}^{OMP}$	$ \sum M_{i,j}^{OMP} $	$ \sum M_{i,j}^{DJ} $	$\varepsilon$
$M_{1,2} =$ $M_{18,19} =$ $M_{35,36} =$	3.13309 4.96034 1.7368	9.83023	9.303	5,36
$M_{2,1} =$ $M_{19,18} =$ $M_{36,35} =$	-2.2984 -3.66534 -1.1665	7.13024	6.303	11,6
$M_{4,5} =$ $M_{21,22} =$ $M_{38,39} =$	1.69495 3.00211 0.920504	5.617564	5.162	8,11
$M_{5,4} =$ $M_{22,21} =$ $M_{39,38} =$	-0.879698 -1.37534 -0.362517	2.617555	2.162	17,4
$M_{8,9} =$ $M_{25,26} =$ $M_{42,43} =$	1.00062 1.88221 0.603721	3.486551	3.361	3,6
$M_{9,8} =$ $M_{26,25} =$ $M_{43,42} =$	-0.222816 -0.238317 -0.0254168	0.4865498	0.361	25,8
$M_{12,13} =$ $M_{29,30} =$ $M_{46,47} =$	0.647257 1.23857 0.416014	2.301841	2.294	0,34
$M_{13,12} =$ $M_{30,29} =$ $M_{47,46} =$	0.0697913 0.439973 0.18839	0.6981543	0.706	1,12
$M_{16,17} =$ $M_{33,34} =$ $M_{50,51} =$	0.63742 0.0868218 -0.0241054	0.7001364	0.726	3,69
$M_{17,16} =$ $M_{34,33} =$ $M_{51,50} =$	0.625454 1.25931 0.415104	2.299868	2.274	1,12

Razlike u rezultatima opravdavaju se različitim modelima i osnovnim sustavima, te su dijelom i posljedice zaokruživanja brojeva.

## Literatura

- [1] M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [2] K. Fresl: *Građevna statika 1: bilješke i skice s predavanja*, <http://www.grad.hr/nastava/gS/gS1/index.html>
- [3] K. Fresl: *Građevna statika 2: bilješke i skice s predavanja*, <http://www.grad.hr/nastava/gS/gS2/index.html>
- [4] D. Matković i K. Mikulić: *Kinematička kondenzacija (studentski rad)*, Zagreb, 2008.
- [5] V. Simović: *Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [6] V. Šimić: *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [7] A. Šimović: *Zidovi s otvorima (završni rad)*, Zagreb, 2008.