

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

Ana Šimović

ZIDOVI S OTVORIMA

(ZAVRŠNI RAD)

Zagreb, 2008.

Sadržaj

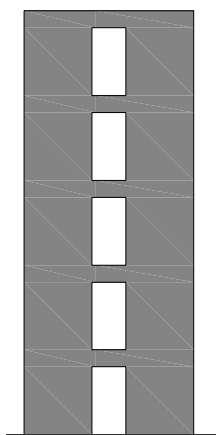
1. Uvod	2
2. Kratki pregled dosadašnjih radova	4
2.1. Rješenje A. R. Ržanjčina	5
2.2. Rješenje M. Tessiera	5
2.3. Rad O. Wenera	6
2.4. Rad R. Rosmana	7
2.5. Rješenje V. Simovića	8
3. Elastično težište	11
3.1. Primjer 1.	19
4. Općenito o općoj metodi pomaka	21
5. Štapni model zidova s otvorima	22
6. Sile stanja prisilnih pomaka - matrica krutosti štapa	24
7. Sile upetosti	33
7.1. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom paralelnom s osi štapa.....	35
7.2. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom okomitom na os štapa	37
7.3. Sile upetosti za opterećenje kontinuiranom jednoliko raspodijeljenom silom.....	40
7.4. Sile upetosti za opterećenje koncentriranim momentom.....	44
7.5. Dobivanje sila upetosti pomoću izraza iz priručnika.....	46
7.6. Sile upetosti za opterećenje zadano samo na neizmjereno krutim dijelovima štapa.....	47
8. Sustav jednadžbi ravnoteže	48
8.1. Prijelaz u globalni koordinatni sustav	48
8.2. Jednadžbe ravnoteže čvorova	50
8.3. Ukupne sile na krajevima elemenata	52
9. Numerički primjer	53
10. Zaključak	61
Literatura	62

1. UVOD

Zidovi su plošni elementi, odnosno, konstrukcijski elementi čija je jedna dimenzija, debljina, zanemarivo mala u odnosu na druge dvije. Oni su vertikalni konstrukcijski dijelovi objekta i raznolikih su funkcija. Moraju zadovoljiti određenu namjenu te konstrukcijske i estetske zahtjeve. Pa tako, da bi zadovoljili potrebe prostora kojih zatvaraju, moraju udovoljiti brojnim zahtjevima. To je prije svega stabilnost, a potom zaštita od promjene temperature, vlage i zvuka, vatrosigurnost, trajnost, ekonomičnost i estetski izgled. Mogu se dijeliti s više polazišta: prema konstrukcijskoj ulozi, prema namjeni ili zadaći koju imaju, tj. prema sposobnosti nošenja, prema obliku (strukтури), tlocrtnom razmještaju, gradivu od kojeg se izvode, visinskom položaju u zgradi, tehnologiji građenja, vatrootpornosti...

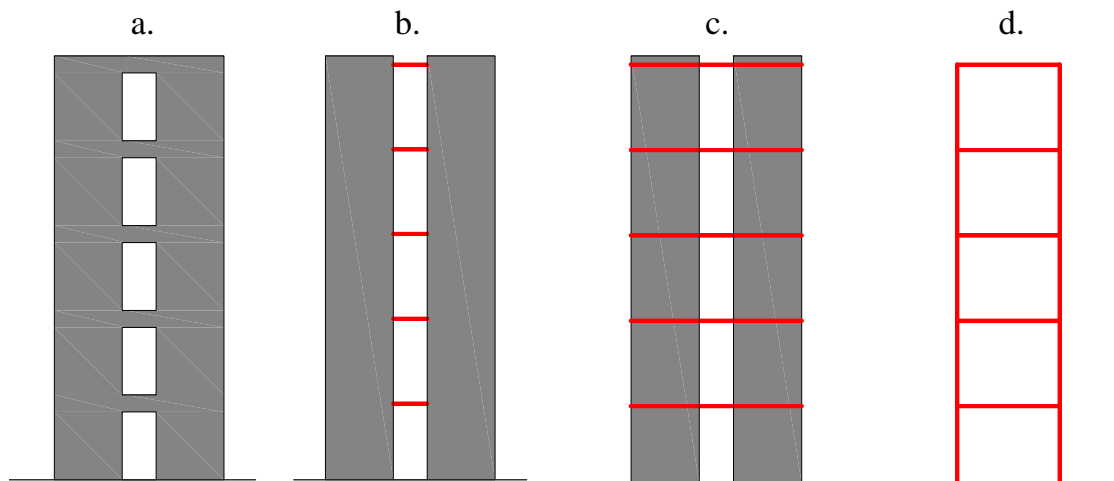
Prema obliku, a time i statičkom tretmanu, razlikuju se niski i visoki zidovi te puni i zidovi s otvorima, a prema sposobnosti nošenja nosivi i nenosivi. Nosivi zidovi nose sebe i prenose sva druga predviđena (stalna i pokretna) opterećenja na temelje ili na druge konstrukcijske sustave, dok nenosivi nose samo sebe. U ovom će se radu govoriti o statičkom tretmanu nosivih zidova s otvorima.

Zid s otvorima moguće je proračunavati na više načina, odnosno modelirajući više različitih numeričkih modela. Primjerice, za zid sa *slika 1.* prikazat ćemo četiri modela (*slika 2.*).



Slika 1.

Na *slici 2.a.* prikazan je zid s otvorima modeliran kao plošni element, tj. zid i greda smatraju se jednim plošnim elementom. Drugi model (*slika 2.b.*) sastoji se od zidova kao plošnih elemenata i greda kao štapnih elementa iznad otvora. Sličan model sastoji se od zidova kao plošnih elemenata, ali su grede štapni elementi iznad otvora koji se nastavljaju cijelom dužinom zida (*slika 2.c.*). Zid s otvorima moguće je modelirati bez plošnih elemenata, tj. kao okvir gdje su zid i greda iznad otvora modelirani kao štapni elementi (*slika 2.d.*). Naravno da ni jedan model kojim pokušamo opisati stvarnu konstrukciju nije sasvim istinit ili točan, jer su parametri uglavnom idealizirani, neki namjerno ispušteni, a neki mogu biti i nepoznati. Zato inženjer u modeliranju nekog problema mora znati u kojim su granicama idealizirani pojedini utjecaji te u skladu s time znati procjeniti odstupanje modela, a time i točnost rezultata.



Slika 2.

U okviru ovog rada zid s otvorima modeliran je kao štapni sistem. Osnovni element zida ravni je štap promijenjive krutosti po duljini, a proračun se provodi općom metodom pomaka. Osnovna je ideja opće metode pomaka ukratko opisana u četvrtom poglavlju. Matrica krutosti i sile upetosti za štap s apsolutno krutim dijelovima razlikuju se od istih za štap konstantne krutosti po duljini pa su zato one izvedene. Kako bi se olakšala integracija pri njihovom izvođenju metodom sila, koristi se elastično težište opisano u drugom poglavlju. Pri proračunu matrice krutosti uzet je u obzir i utjecaj poprečne sile. Postavljene su jednačbe ravnoteže analogne onima za štap konstantne krutosti po duljini. U prvom je poglavlju prikazan izbor radova u kojima se prikazuje klasični približni proračun zidova s otvorima i konstrukcija koji se sastoje od plošnih elemenata metodom sila direktno ili primjenom diferencijskih jednačbi. U devetom je poglavlju riješen proračunski primjer upotrebom programskog sustava **Mathematica**, a dobiveni su rezultati uspoređeni s rezultatima primjera riješenog u knjizi [7].

2. KRATKI PREGLED DOSADAŠNJIH RADOVA

U ovom kratkom izboru radova prema [7] predstaviti će se klasična rješenja problema zidova s otvorima, odnosno rješenja dana u razdoblju prije primjene komputera u građevinskim proračunima. Ona su većinom utemeljena na metodi sila, budući da proračun zidova s otvorima klasičnom metodom sila daje najtočnije rješenje. Međutim, velik broj linearnih algebarskih jednadžbi koje je potrebno riješiti čini taj način proračuna neprimjenjivim u praksi. Zbog toga su autori uvodili dodatne prihvatljive pretpostavke koje pojednostavljuju proračun te omogućavaju da se postigne zadovoljavajuća točnost.

Pregled je djelomičan, budući da postoji mnogo veći broj autora koji su pisali o ovoj temi. Ovdje će se navesti radovi koji su predstavljali bitan doprinos rješavanju ovog problema, iako su neki od njih već toliko zastarjeli da njihova primjena ne dolazi u obzir. Navest će se osnovne karakteristike tih radova, pretpostavke autora i rezultati do kojih su došli.

2.1. Rješenje A. R. Ržanjčina

Obrađujući teoriju sastavljenih štapova A. R. Ržanjčin došao je do diferencijalnih jednadžbi koje ujedno predstavljaju rješenje problema proračuna zidova s otvorima. Za svoju teoriju sastavljenih štapova usvojio je osnovne pretpostavke: vrijede zakoni znanosti o otpornosti materijala: 1) zakon ravnih poprečnih presjeka, 2) naprezanje se smatra određenim ako su za dani poprečni presjek poznate unutarnje sile, 3) uzdužne se deformacije zanemaruju zbog svoje relativno male veličine.

Diferencijalna jednadžba koju je dobio za gredu sastavljenu od dva elementa potpuno je ista kao i jednadžba zida s jednim nizom otvora. Ta jednadžba, objavljena 1939., glasi

$$\frac{T''}{\varepsilon} = \gamma T + \Delta,$$

pri čemu su

- T ... posmična sila,
- ε ... koeficijent ovisan o vezi među elementima,
- γ ... koeficijent ovisan o geometrijskim veličinama,
- Δ ... član ovisan o opterećenju.

Za zid s više nizova otvora vrijedi Ržanjčinovo opće rješenje za gredu sastavljenu od više elemenata pri čemu se dobiva sistem linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Njegovo je rješenje teorijski jednostavno, no za praktičan zidova s otvorima neprikladno zbog svoje glomaznosti. Ono glasi

$$\begin{aligned} \frac{T_1''}{\varepsilon_1} &= \Delta_{11}T_1 + \Delta_{12}T_2 + \dots + \Delta_{1n}T_n + \Delta_{10} \\ \frac{T_2''}{\varepsilon_2} &= \Delta_{21}T_1 + \Delta_{22}T_2 + \dots + \Delta_{2n}T_n + \Delta_{20} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{T_n''}{\varepsilon_n} &= \Delta_{n1}T_1 + \Delta_{n2}T_2 + \dots + \Delta_{nn}T_n + \Delta_{n0} \end{aligned}$$

gdje su

- T_i ... posmična sila u i -tom čvoru,
- ε_i ... koeficijent ovisan o vezi između elemenata i -tog čvora,
- Δ_{ik} ... koeficijenti ovisni o geometrijskim veličinama,
- Δ_{i0} ... članovi ovisni o opterećenju.

2.2. Rješenje M. Tessiera

U radu *Stabilnost visokih građevina na vjetar* M. Tessier promatrao je zid oslabljen po sredini jednim nizom otvora raspoređenih tako da čine simetričan sistem. Osnovne pretpostavke koje je pritom usvojio bile su: 1) Točke A i B u osima stupova koje se nalaze na istom nivou ostaju na istoj horizontali i nakon deformacije. Drugim riječima, zanemarena je (uzdužna) deformacija zbog uzdužnih sila. 2) Ravni presjeci okomiti na osi stupova ostaju ravni i okomiti na osi stupova i nakon deformacije. To jest, primijenjena je pretpostavka Bernoulli-Eulerove teorije. U tom se radu promatraju samo dva posebna slučaja veze stupova s nepopustljivim temeljima i to: potpuna upetost i zglobna veza.

Na temelju navedenih pretpostavki, tražeći progibnu liniju polovine zida za opterećenje vjetrom, Tessier je došao do linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$EIz'' - 6EI_p \frac{(l+b)^2}{ab^2} z = q(h-x),$$

pri čemu su

- $z = y'$... tangens kuta nagiba progibne linije,
- x ... apscisa mjerena od podnožja,
- E ... modul elastičnosti materijala zida,
- I ... moment inercije stupa,
- I_p ... moment inercije grede,
- l ... širina stupa,
- b ... duljina grede,
- a ... udaljenost od osi do osi grede,
- h ... visina zida,
- q ... intenzitet horizontalnog opterećenja.

Rješenjem te diferencijalne jednadžbe dolazi se do jednadžbe progibne linije pomoću koje se određuju unutarnje sile u stupovima i gredama.

Posebnost ovog rada je u tome što je za izvod jednadžbe progibne linije korištena metoda pomaka dok je u većini ostalih radova korištena metoda sila. Ovo rješenje nema praktično značenje za proračun zidova s otvorima, a glavni razlog tome su zanemarene uzdužne sile koje dovode do grešaka u rezultatima. Svejedno, rad je značajan, jer je jedan od prvih koji problem analizira na ovakav način.

2.3. Rad O. Wenera

O. Werner radom *Proračunavanje višespratnih zgrada sa krutim pregradnim stijenama* poopćava i proširuje rad M. Tessiera – analizira realniji i općenitiji slučaj od dva spomenuta posebna slučaja Tessiera. On razrađuje općeniti slučaj elastične upetosti u temeljnu konstrukciju s mogućnošću nejednolikog slijeganja temelja pri čemu utjecaj uzdužnih sila na deformaciju stupova nije uzet u obzir.

Izraz za proračun simetričnog okvira s krutim zidovima je

$$u'' - \gamma Lu = \frac{q}{EJ_o} x + \gamma \Delta,$$

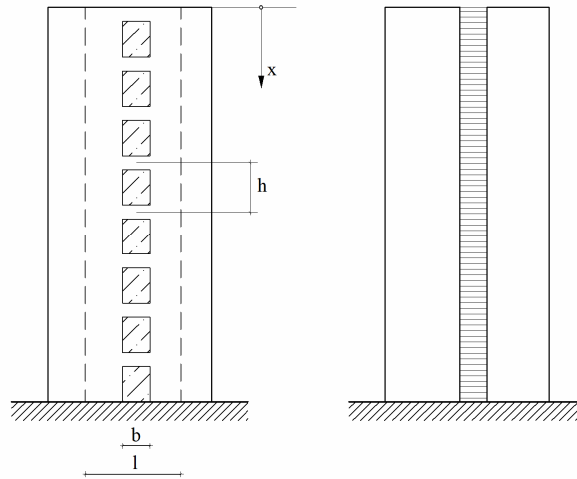
gdje su

- $u = y'$... tangens kuta nagiba progibne linije stupa,
- x ... apcisa mjerena od vrha stupa prema dolje,
- γ ... koeficijent ovisan o geometrijskim karakteristikama konstrukcije,
- L ... razmak između osi stupova,
- E ... modul elastičnosti materijala konstrukcije,
- Δ ... dvostruka vrijednost pomaka temelja,
- q ... intenzitet horizontalnog jednoliko raspoređenog po visini opterećenja stupa.

U radu se daje i rješenje za nesimetričan okvir, s time da se koristi pretpostavka jednakosti pomaka za razdiobu momenata na stupove.

2.4. Rad R. Rosmana

U radu R. Rosmana promatra se zid s jednim nizom otvora. Zid, kojem su stupovi spojeni gredama u diskretnim točno određenim točkama (*slika 3.*), za potrebe proračuna prevodi se u zid kod kojeg su stupovi kontinuirano spojeni po čitavoj visini. Tu zamišljenu vezu sačinjava niz lamela infinitezimalno male debljine upetih u stupove. Moment inercije tih tankih „lamela“ dobiva se redukcijom momenta inercije greda.



Slika 3.

Osnovne pretpostavke ove metode su:

- 1) Vrijedi Hookeov zakon, te naprezanja ne prelaze granicu proporcionalnosti.
- 2) Za poprečne presjeke stupova i greda vrijedi Navierova hipoteza o ravnim presjecima, tj. ravni presjeci i nakon deformacije ostaju ravni. Za presjek zida kao cjeline ova pretpostavka ne vrijedi.
- 3) U sredini greda su točke infleksije. Drugim riječima, u tom presjeku nema momenata savijanja. Male krutosti greda u odnosu na krutost stupova to omogućavaju.
- 4) U uzdužnom smjeru grede se smatraju apsolutno krutim.
- 5) Visine katova su jednake.
- 6) Moduli elastičnosti stupova i greda su jednaki.
- 7) Površine poprečnih presjeka i momenti inercije stupova i greda konstantni su uzduž visine zida.

Osnovni sistem za proračun ovom metodom dobiva se presijecanjem niza lamela po sredini. Nepoznanica je uzdužna sila u stupu u presjeku x mjenom od vrha zida.

Linearna diferencijalna jednadžba drugog reda do koje se dolazi postavljanjem uvjeta kontinuiteta glasi

$$T'' - \alpha^2 T = \psi M_r,$$

pri čemu su

- T ... uzdužna sila u stupu u presjeku s apcison x ,
 M_r ... moment savijanja od vanjskog opterećenja,
 α, ψ ... koeficijenti ovisni o geometrijskim karakteristikama zida.

Problem proračuna po ovoj metodi rješavanje je rubnih uvjeta. Također, netočnosti u rezultatima koje nastaju zbog pretpostavke o kontinuiranoj vezi među stupovima, povećavaju se s povećanjem razmaka greda i smanjenjem broja etaža. Uz to, u gornjoj gredi dobiva se nešto veća sila od stvarne. Zbog tih razloga, ova metoda ne bi se smjela koristiti za zgrade s relativno malim brojem etaža (manje od sedam).

Praktičnu primjenu ove metode omogućavaju *Tablice za brzo pronalaženje unutarnjih sila i progiba* koje daju, za ono vrijeme, dovoljno točne veličine za dimenzioniranje.

U radu je dano i rješenje za simetričan zid s dva niza otvora koje je vrlo slično rješenju za zid s jednim nizom otvora. Opisano rješenje za nesimetrične zidove s dva ili više nizova otvora nije prihvatljivo jer suviše odstupa od stvarnog stanja.

2.5. Rješenje V. Simovića

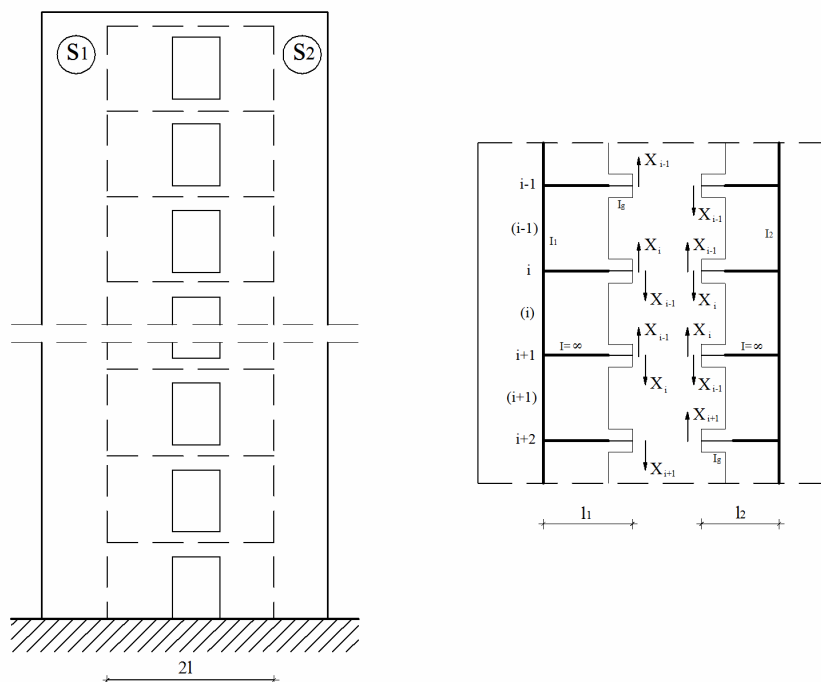
U poglavlju *Proračun zidova s otvorima primjenom diferencijalnih jednačbi* knjige [7] V. Simović opisuje rješenje zida s jednim nizom otvora i rješenje zida s dva ili više nizova otvora. Ta se rješenja mogu primijeniti i na višetažne simetrične okvire s jednim rasponom, a uz uvjet da su kutovi zaokreta svih čvorova na istom nivou međusobno jednaki i na okvire s više raspona.

U svrhu pojednostavljenja ručnih proračuna uvedene su pretpostavke prihvatljive kod proračuna građevinskih konstrukcija:

- Osnovne pretpostavke teorije konstrukcija:
 - Materijal se ponaša po Hookeovom zakonu elastičnosti, a naprezanja su ispod granice proporcionalnosti.
 - Za stupove i grede vrijedi Navierova hipoteza o ravnim poprečnim presjecima. Ovu je hipotezu moguće usvojiti budući da je visina zida višestuko veća od širine pojedinih stupova.
- Dodatne pretpostavke prihvatljive za ovu vrstu konstrukcija:
 - U simetrali greda nalaze se točke infleksije, tj. momenti savijanja u toj točki jednaki su nuli.
 - Grede se smatraju apsolutno krutima u uzdužnom smjeru.
- Geometrijske pretpostavke usvojene za određene odsječke visine:
 - Moduli elastičnosti materijala i debljine zidova su konstantni.
 - Grede su istih dimenzija i nalaze se na istim razmacima.
 - Širine otvora su iste.

V. Simović započinje rad analizom zida s jednim nizom otvora. Pritom pretpostavlja konstantnima po cijeloj visini zida modul elastičnosti, debljine greda i debljinu stupova. Za te pretpostavke dobiveno rješenje služi kao opće rješenje za iste te, samo promjenjive veličine.

Odabrani statički sistem zida (*slika 4.*) statički je neodređen onoliko puta koliko ima greda. Poprečne sile u gredama su nepoznate, a uzdužne sile u stupovima čine grupne prekobrojne sile. Jednačbe kontinuiteta čine tročlane linearne algebarske jednačbe koje se svode na jednačbe konačnih diferencija drugog reda čijim se rješenjem dobiva izraz za prekobrojnu veličinu, tj. opće rješenje sistema.



Slika 4.

Rješenje diferencijalne jednačine sastoji se od homogenoga i partikularnog rješenja

$$X_i = X_i^{(h)} + X_i^{(p)} = C_1 r_1^i + C_2 r_2^i + X_i^{(p)}$$

pri tom su

- $r_1^i, r_2^i \dots$ korijeni karakteristične jednačine,
- $C_1, C_2 \dots$ konstante (zavise o rubnim uvjetima).
- $X_i \dots$ prekobrojna veličina (jednaka uzdužnoj sili u stupu): $N_i = X_i$.

Homogeno rješenje ovisi samo o geometrijskim karakteristikama konstrukcije, a partikularno rješenje ovisi o vanjskim djelovanjima na konstrukciju.

Poprečna sila u i -toj gredi dobiva se kao razlika prekobrojnih veličina koje se preklapaju na toj gredi, tj. kao razlika uzdužnih sila gornjeg i donjeg polja uz gredu:

$$T_i = X_i - X_{i-1}.$$

Poljem se smatra područje između dvije grede. Izraz za ukupni moment savijanja u nekom presjeku polja (i) glasi:

$$M_i = M_{xi} - 2l \cdot X_i,$$

pri čemu su

- $M_{xi} \dots$ moment savijanja u nekom presjeku polja i od vanjskog opterećenja,
- $2l \dots$ razmak između osi stupova

Momenti u stupovima dobiju se dijeljenjem ukupnog momenta u presjeku u omjerima krutosti stupova, tj. prema

$$M_{xi1} = \frac{I_1}{\sum I} M_{xi} = \frac{I_1}{\sum I} M_{xi}^0 - \frac{I_1}{\sum I} 2IX_i ,$$

$$M_{xi2} = \frac{I_2}{\sum I} M_{xi} = \frac{I_2}{\sum I} M_{xi}^0 - \frac{I_2}{\sum I} 2IX_i .$$

U knjizi su dana rješenja za razne tipove opterećenja: koncentrirana sila u osi prve grede, kontinuirano jednoliko distribuirano opterećenje, linearno distribuirano promjenjivo opterećenje te koncentrirana sila u općem položaju. Također, razmatrani su različiti geometrijski i rubni uvjeti: zid istih geometrijskih karakteristika po čitavoj duljini, zid promjenjive debljine po etažama, tj. u skokovima, zid s elastično popustljivim osloncima, zidovi s posebnim ležajnim konstrukcijama i zidovi s jačom gornjom gredom. Slično opisanom proračunu dobivaju se rješenja i za te slučajeve.

Za sva rješenja postignuta je zadovoljavajuća točnost sa stajališta određenja veličina potrebnih za dimenzioniranje, tj. točnost u okviru pretpostavaka teorija konstrukcija, a primjena postupka nije ograničena brojem etaža, visinom zida niti razmakom greda, što ovu metodu čini primjenjivom u praksi. Primjenjivosti u praktičnim proračunima potpomaže i veći broj numeričkih primjera riješenih u radu.

3. ELASTIČNO TEŽIŠTE

U sljedećim poglavljima izvesti ćemo matricu krutosti štapa s apsolutno krutim dijelovima pri čemu ćemo koristiti elastično težište. Zbog toga ćemo ga ovdje opisati.

Metoda sila jedna je od metoda rješavanja statički neodređenih sistema. U prvom koraku proračuna metodom sila zadani se sistem zamišljenim raskidanjem veza pretvara u statički određen, koji nazivamo osnovni sistem. Raskinute veze zamjenjuju se silama (to jest parovima sila i momenata) koje odgovaraju silama koje su te veze prenosile. Sile i momente koje uvodimo umjesto raskinutih veza nazivamo prekobrojnim silama (statički neodređenim veličinama ili prekobrojnim veličinama). Te sile moraju vratiti narušenu neprekinutost polja pomaka ili osigurati podudaranje pomaka na mjestima uklonjenih ležajeva sa stvarnim ležajnim uvjetima. Drugim riječima, one moraju dovesti osnovni sistem u mehaničko stanje izvornog sistema. Vrijednosti prekobrojnih sila izračunavaju se iz uvjeta kompatibilnosti pomaka na mjestima raskinutih veza. U uvjetima kompatibilnosti pojavljuju se vrijednosti pomaka koji se proračunavaju metodom jedinične sile.

Uvjet kompatibilnosti pomaka izražavamo jednadžbama kontinuiteta (jednadžbe neprekinutosti, odnosno jednadžbe kompatibilnosti pomaka). Sustav jednadžbi glasi

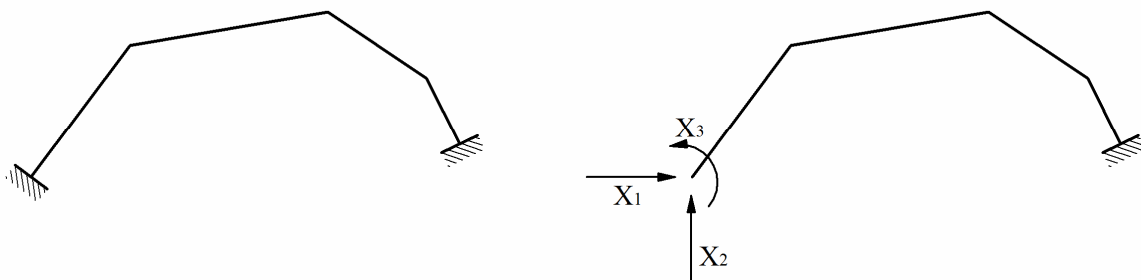
$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{\Delta} = \bar{\mathbf{\Delta}},$$

pri čemu su

- \mathbf{D} ... matrica fleksibilnosti (popustljivosti) sistema,
- \mathbf{X} ... vektor vrijednosti prekobrojnih sila,
- $\mathbf{\Delta}$... vektor vrijednosti pomaka hvatišta prekobrojnih sila X_i po pravcima i u smislu njihova djelovanja, izazvanih zadanim opterećenjem,
- $\bar{\mathbf{\Delta}}$... vektor zadanih vrijednosti prisilnih pomaka hvatišta sila X_i po pravcima i u smislu njihova djelovanja

Izračunavanje elemenata matrice popustljivosti – vrijednosti poopćenih pomaka – relativno je jednostavan ako je sistem konstantnog poprečnog presjeka, a os sistema zadana analitičkim izrazom pogodnim za direktnu integraciju. Za sve ostale slučajeve, kao npr. kada je sistem promjenjivog poprečnog presjeka ili je oblik sistema dobiven kao tlačna linija, proračun koeficijenta matrice fleksibilnosti postaje složeniji.

Koeficijenti fleksibilnosti ovise o izboru osnovnog sistema, iz čega proizlazi da pogodnim odabirom osnovnog sistema možda možemo pojednostavniti taj proračun. To ćemo pokušati utvrditi analizirajući tri puta statički neodređen okvir (*slika 5.*).



Slika 5.

Za odabrani osnovni sistem (slika 5.) postaviti ćemo jednadžbe kontinuiteta

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{1,1} + X_2 \cdot \delta_{1,2} + X_3 \cdot \delta_{1,3} + \delta_{1,0} &= \bar{\delta}_1, \\ X_1 \cdot \delta_{2,1} + X_2 \cdot \delta_{2,2} + X_3 \cdot \delta_{2,3} + \delta_{2,0} &= \bar{\delta}_2, \\ X_1 \cdot \delta_{3,1} + X_2 \cdot \delta_{3,2} + X_3 \cdot \delta_{3,3} + \delta_{3,0} &= \bar{\delta}_3, \end{aligned}$$

ili, u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0} \\ \delta_{2,0} \\ \delta_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{bmatrix}.$$

Pri tom su

- $\delta_{i,j} \dots$ koeficijenti matrice popustljivosti (koeficijenti popustljivost, koeficijenti fleksibilnosti),
 - $i \in [1, n] \dots$ označava poopćeni pomak hvatišta sile X_i po pravcu i u smislu njezina djelovanja,
 - $j \dots$ označava uzrok pomaka,
 - $j \in [1, n] \dots$ označava poopćenu jediničnu silu u hvatištu, na pravcu i u smislu djelovanja sile X_j ,
 - $j = 0 \dots$ označava sva zadana djelovanja.
- Predznak vrijednosti $\delta_{i,j}$ daje smisao pomaka u odnosu na smisao djelovanja sile X_i . Pozitivan predznak znači pomak u smislu djelovanja sile, a negativan pomak u smislu suprotnom djelovanju sile.
- $\bar{\delta}_i \dots$ zadana vrijednost prisilnog pomaka hvatišta sile X_i po pravcu njezina djelovanja.

Radi jednostavnosti izraza pretpostaviti ćemo da nema zadanih prisilnih pomaka, tj.

$$\bar{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{0}.$$

Zamislimo da u ravnini okvira postoji jedna točka u kojoj su elementi matrice fleksibilnosti izvan glavne dijagonale jednaki nuli. Dakle, točka za koju vrijedi

$$\delta_{i,j} = 0 \text{ za } \forall i \neq j.$$

Ako u tu točku postavimo nepoznate prekobrojne sile X_1 , X_2 i X_3 , matrica fleksibilnosti bit će

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33}^* \end{bmatrix}.$$

Sada su jednadžbe neprekinutosti

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \delta_{1,1}^* + \delta_{1,0}^* &= 0, \\ X_2 \cdot \delta_{2,2}^* + \delta_{2,0}^* &= 0, \\ X_3 \cdot \delta_{3,3}^* + \delta_{3,0}^* &= 0, \end{aligned}$$

a iz njih slijede jednostavni izrazi za prekobrojne sile

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{1,0}^*}{\delta_{1,1}^*}, \\ X_2 &= -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*}, \\ X_3 &= -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*}, \end{aligned}$$

ili, u matričnom obliku

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{\Delta},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{1,1}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{2,2}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{3,3}^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix}.$$

Vidimo da se sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice raspada na tri neovisne jednadžbe s po jednom nepoznanicom (ortogonalizacija matrice fleksibilnosti). Točka u kojoj nepoznate sile imaju pretpostavljeno svojstvo zove se **centar elastičnog pomaka** ili **elastično težište**. Iako su različite od jednako označenih na osnovnom sistemu, sile u elastičnom težištu označuju se sa X_1 , X_2 i X_3 .

Dakle, svi izvandijagonalni koeficijenti matrice fleksibilnosti, tj. koeficijenti: $\delta_{1,2}^*$, $\delta_{2,1}^*$, $\delta_{1,3}^*$, $\delta_{3,1}^*$, $\delta_{2,3}^*$ i $\delta_{3,2}^*$ u elastičnom težištu jednaki su nuli. Kinematički (fizikalno) gledano to ima određeno značenje prikazano u *tablici 1*.

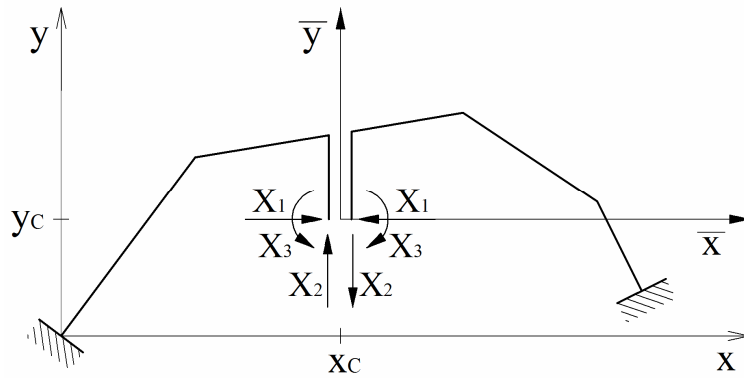
<i>Tablica 1.</i>	Koeficijent popustljivosti	Kinematičko značenje
$\delta_{1,2}^* = \delta_{2,1}^* = 0$	$\delta_{1,2}^*$	pomak hvatišta sile X_1 po pravcu i u smislu njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem sile X_2
	$\delta_{1,2}^* = 0$	sila X_2 ne izaziva pomak po pravcu i u smislu sile X_1
	$\delta_{2,1}^*$	pomak hvatišta sile X_2 po pravcu i u smislu njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem sile X_1
	$\delta_{2,1}^* = 0$	sila X_1 ne izaziva pomak po pravcu i u smislu sile X_2
$\delta_{1,3}^* = \delta_{3,1}^* = 0$	$\delta_{1,3}^*$	pomak hvatišta sile X_1 po pravcu i u smislu njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem momenta X_3
	$\delta_{1,3}^* = 0$	moment X_3 ne izaziva pomak po pravcu i u smislu sile X_1
	$\delta_{3,1}^*$	zaokret osi u hvatištu sile X_3 uzrokovan djelovanjem sile X_1
	$\delta_{3,1}^* = 0$	sila X_1 ne izaziva zaokret u hvatištu sile X_3
$\delta_{2,3}^* = \delta_{3,2}^* = 0$	$\delta_{2,3}^*$	pomak hvatišta sile X_2 po pravcu i u smislu njezina djelovanja uzrokovan djelovanjem momenta X_3
	$\delta_{2,3}^* = 0$	moment X_3 ne izaziva pomak po pravcu i u smjeru sile X_2
	$\delta_{3,2}^*$	zaokret osi u hvatištu X_3 sile uzrokovan djelovanjem sile X_2
	$\delta_{3,2}^* = 0$	sila X_2 ne izaziva zaokret osi u hvatištu sile X_3

Imajući u vidu to kinematičko značenje možemo definirati *elastično težište* kao točku pridruženu elastičnom sistemu (luku, okviru ili linijskom elementu) tako da sila koja u njoj djeluje ne izaziva zaokret pripadnog presjeka, a moment koji u njoj djeluje ne izaziva pomak. Definicija se temelji na kinematičkom značenju izraza $\delta_{2,3}^* = \delta_{3,2}^* = 0$ stoga što je to razlika elastičnog težišta u odnosu na bilo koju drugu točku sistema u koju možemo postaviti prekobrojne sile. Naime, za sistem sastavljen od ravnih štapova vrijedi $\delta_{1,2}^* = \delta_{2,1}^* = 0$ i $\delta_{1,3}^* = \delta_{3,1}^* = 0$ i za bilo koju drugu točku zbog neovisnosti uzdužnih i poprečnih djelovanja, odnosno, zbog toga što se pri djelovanju momenta ne javljaju uzdužne sile i/ili uzdužni pomaci i obrnuto. Za zakrivljene štapove koeficijenti $\delta_{1,2}^*$, $\delta_{2,1}^*$, $\delta_{1,3}^*$ i $\delta_{3,1}^*$ različiti su od nule u svim točkama osim u elastičnom težištu.

Za potpuno određenje elastičnog težišta označenog točkom C potrebno je odrediti njegove koordinate (x_C, y_C) i kut što ga sila X_1 zatvara s koordinatnom osi \bar{x} .

Počet ćemo određivanjem koordinata elastičnog težišta iz kojeg se prekobrojne sile prenose na okvir preko zamišljenih štapova beskonačne krutosti (*slika 6.*). Uvest ćemo novi koordinatni sustav (\bar{x}, \bar{y}) s ishodištem u točki C . Vidimo da vrijedi

$$\bar{x} = x - x_C \quad \text{i} \quad \bar{y} = y - y_C.$$



Slika 6.

Za određenje $C(x_c, y_c)$ iskoristit ćemo jednadžbe

$$\delta_{1,3}^* = \delta_{3,1}^* = \int_i^j \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_3}{EI(s)} ds = 0,$$

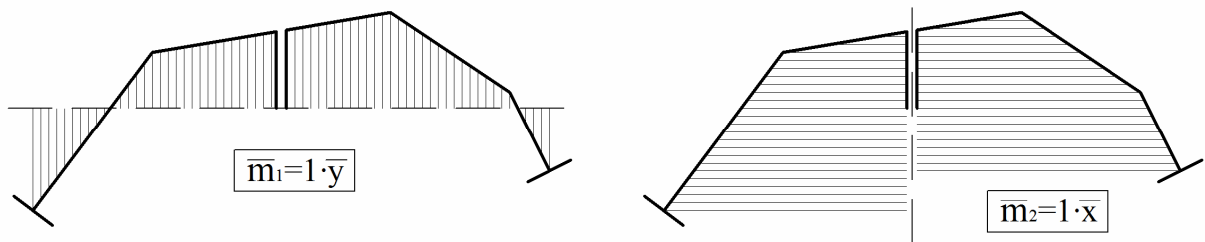
$$\delta_{2,3}^* = \delta_{3,2}^* = \int_i^j \frac{\bar{m}_2 \bar{m}_3}{EI(s)} ds = 0,$$

a za to su nam potrebni momentni dijagrami \bar{m}_1 , \bar{m}_2 i \bar{m}_3 . Dijagrami \bar{m}_1 i \bar{m}_2 prikazani su na slici 7. Pritom vrijednost momenata nisu nanošene okomito na osi elemenata, nego okomito na pravce djelovanja jediničnih sila. Iz dijagrama se vidi da izrazi za momente savijanja na okviru glase

$$\bar{m}_1 = 1 \cdot \bar{y},$$

$$\bar{m}_2 = 1 \cdot \bar{x},$$

$$\bar{m}_3 = 1.$$



Slika 7.

Odredimo x_c koordinatu iz uvjeta $\delta_{2,3}^* = \delta_{3,2}^* = 0$:

$$\int_i^j \frac{\bar{m}_2 \bar{m}_3}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{1 \cdot \bar{x} \cdot 1}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\bar{x}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{x - x_c}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds - x_c \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = 0.$$

Slijedi

$$\int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds = x_c \int_i^j \frac{ds}{EI(s)}$$

te

$$x_C = \frac{\int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{ds}{EI(s)}}.$$

Odredimo y_C koordinatu iz uvjeta $\delta_{1,3}^* = \delta_{3,1}^* = 0$:

$$\int_i^j \frac{\bar{m}_1 \bar{m}_3}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{1 \cdot \bar{y} \cdot 1}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\bar{y}}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y - y_C}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds - y_C \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = 0.$$

Slijedi

$$\int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds = y_C \int_i^j \frac{ds}{EI(s)}$$

te

$$y_C = \frac{\int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{ds}{EI(s)}}.$$

Kako bismo pojednostavnili izraze za koordinate elastičnog težišta definirat ćemo neke karakteristike. Njihove će oznake biti

$$dg = \frac{ds}{EI(s)} \dots \quad \text{element „teške linije“,}$$

$$G = \int_i^j dg = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} \dots \quad \text{duljina „teške linije“,}$$

$$S_G(y) = \int_i^j x \cdot dg = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds \dots \quad \text{statički moment „teške linije“ oko osi y,}$$

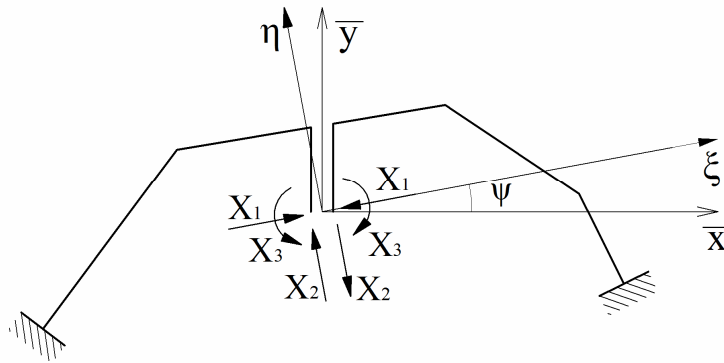
$$S_G(x) = \int_i^j y \cdot dg = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds \dots \quad \text{statički moment „teške linije“ oko osi x.}$$

Prema tim oznakama izrazi za koordinate su

$$x_C = \frac{S_G(y)}{G},$$

$$y_C = \frac{S_G(x)}{G}.$$

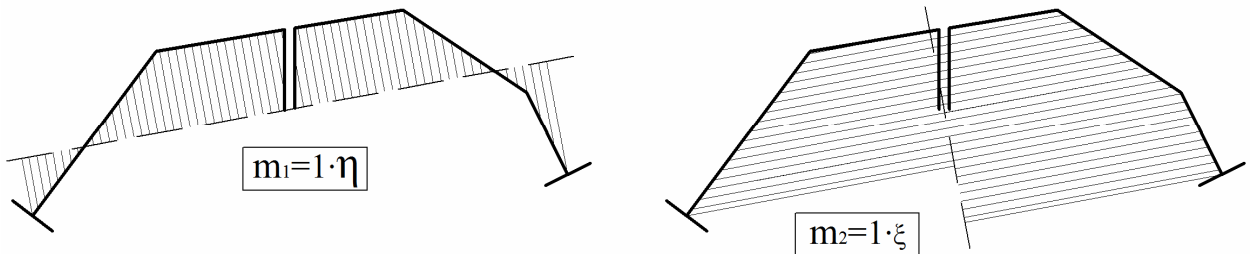
Nadalje, potrebno je odrediti kut ψ – kut što ga sila X_1 zatvara sa osi \bar{x} (slika 8.). Za njegovo određenje potrebni su nam dijagrami momenata savijanja m_1 , m_2 i m_3 (slika 9.).



Slika 8.

Izrazi za momente savijanja glase

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \cdot \eta, \\ m_2 &= 1 \cdot \xi, \\ m_3 &= 1. \end{aligned}$$



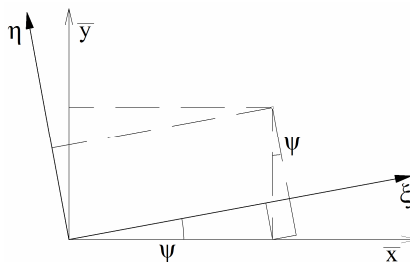
Slika 9.

Također, potrebno je primijetiti da vrijedi (slika 10.)

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{x} \cos \psi + \bar{y} \sin \psi, \\ \eta &= -\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi, \end{aligned}$$

odnosno, u matricnom zapisu

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}.$$



Slika 10.

Konačno, odredimo kut ψ pomoću jednadžbe $\delta_{1,2}^* = \delta_{1,2}^* = 0$.

$$\begin{aligned} \int_i^j \frac{m_1 m_2}{EI(s)} ds &= \int_i^j \frac{\eta \cdot \xi}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{(-\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi) \cdot (\bar{x} \cos \psi + \bar{y} \sin \psi)}{EI(s)} ds \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\psi - \left[\int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds \right] + \cos 2\psi \int_i^j \frac{\bar{x}\bar{y}}{EI(s)} ds = 0. \end{aligned}$$

Proizlazi da je

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \int_i^j \frac{\bar{x}\bar{y}}{EI(s)} ds}{\int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds - \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds}.$$

Definirajmo još karakteristika „teške linije“ da pojednostavnimo izraz:

$$I_G(\bar{x}) = \int_i^j \frac{\bar{y}^2}{EI(s)} ds \dots \quad \text{moment inercije „teške linije“ oko osi } \bar{x},$$

$$I_G(\bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x}^2}{EI(s)} ds \dots \quad \text{moment inercije „teške linije“ oko osi } \bar{y},$$

$$I_G(\bar{x}, \bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x}\bar{y}}{EI(s)} ds \dots \quad \text{centrifugalni moment inercije „teške linije“ oko točke } C.$$

Kut ψ određujemo izrazom

$$\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{I_G(\bar{x}, \bar{y})}{I_G(\bar{y}) - I_G(\bar{x})} \right).$$

Dijagonalni elementi matrice fleksibilnosti određuju se, također, prema ranije izvedenim izrazima u koje uvrstimo pripadne karakteristike „teške linije“:

$$\delta_{11}^* = \int_i^j \frac{m_1^2}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\eta^2}{EI(s)} ds = I_G(\xi) = I_G(\bar{x}) \cos^2 \psi + I_G(\bar{y}) \sin^2 \psi - I_G(\bar{x}, \bar{y}) \sin 2\psi,$$

$$\delta_{22}^* = \int_i^j \frac{m_2^2}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{\xi^2}{EI(s)} ds = I_G(\eta) = I_G(\bar{x}) \sin^2 \psi + I_G(\bar{y}) \cos^2 \psi + I_G(\bar{x}, \bar{y}) \sin 2\psi,$$

$$\delta_{33}^* = \int_i^j \frac{m_3^2}{EI(s)} ds = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = G,$$

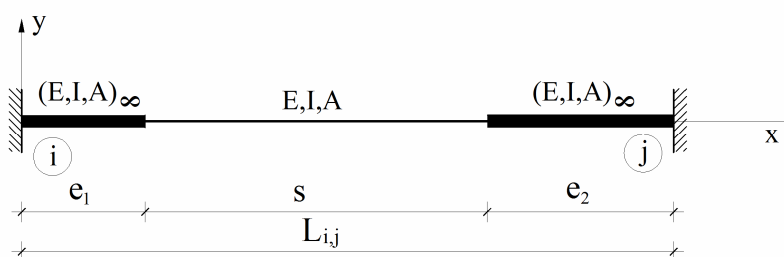
dok se elementi vektora Λ ($\delta_{1,0}^*$, $\delta_{2,0}^*$ i $\delta_{3,0}^*$) određuju kao i kod ostalih sistema.

Za simetrične sisteme potpuno određenje elastičnog težišta pojednostavljuje se budući da treba odrediti samo koordinatu y_C jer su $x_C = L/2$ i $\psi = 0$.

Korištenjem elastičnog težišta (centra elastičnog pomaka) pri proračunu višestruko neodređenih nosača, može se postići da matrica fleksibilnosti nije puna. Time se ubrzava postupak inverzije matrice popustljivosti ili bilo koji iterativni postupak rješavanja jednačbi kontinuiteta.

3.1. Primjer 1.

Potrebno je odrediti elastično težište štapa sa *slike 11*.



Slika 11.

Postupak:

Za početak odredimo duljinu „teške linije“.

$$G = \int_i^j dg = \int_i^j \frac{ds}{EI(s)} = \sum \frac{L_{i,j}}{EI_{i,j}},$$

$$G = \frac{e_1}{EI_\infty} + \frac{s}{EI} + \frac{e_2}{EI_\infty},$$

$$G = 0 + \frac{s}{EI} + 0,$$

$$G = \frac{s}{EI}.$$

Zatim odredimo statičke momente „teške linije“ oko osi x i y .

Statički moment oko osi x je

$$S_G(x) = \int_i^j y \cdot dg = \int_i^j \frac{y}{EI(s)} ds = 0.$$

Statički moment oko osi y je

$$S_G(y) = \int_i^j x \cdot dg = \int_i^j \frac{x}{EI(s)} ds,$$

$$S_G(y) = e_1 \cdot \frac{e_1}{EI_\infty} + (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot \frac{s}{EI} + (e_1 + s + \frac{e_2}{2}) \cdot \frac{e_2}{EI_\infty},$$

$$S_G(y) = e_1 \cdot \frac{e_1}{EI_\infty} + (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot \frac{s}{EI} + (e_1 + s + \frac{e_2}{2}) \cdot \frac{e_2}{EI_\infty},$$

$$S_G(y) = 0 + (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot \frac{s}{EI} + 0,$$

$$S_G(y) = (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot \frac{s}{EI}.$$

Konačno, odredimo koordinate elastičnog težišta (centra elastičnog pomaka):

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{S_G(x)}{G} & x_C &= \frac{S_G(y)}{G} \\ y_C &= \frac{0}{\frac{s}{EI}} & x_C &= \frac{(e_1 + \frac{s}{2}) \cdot \frac{s}{EI}}{\frac{s}{EI}} \\ y_C &= 0 & x_C &= e_1 + \frac{s}{2} \end{aligned}$$

Očito je da je kut $\psi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{I_G(\bar{x}, \bar{y})}{I_G(\bar{y}) - I_G(\bar{x})} \right) = 0$, jer je $I_G(\bar{x}, \bar{y}) = \int_i^j \frac{\bar{x}\bar{y}}{EI(s)} ds = 0$.

Rješenje: $C(x_C, y_C) \equiv C(e_1 + \frac{s}{2}; 0)$.

4. OPĆENITO O OPĆOJ METODI POMAKA

Metoda pomaka je metoda proračuna štapnih sistema u kojoj su nepoznanice vrijednosti pomaka odabranih točaka sistema. Odabrane točke sistema, kao npr. točke u kojima se sastaje više elemenata te točke u kojima se dva gredna elementa sastaju pod nekim kutem nazivamo čvorovima. Oni mogu biti kruti, zglobovi, kruto-zglobni... Ako je potrebno, čvorom se može proglašiti bilo koja točka sistema. Nepoznate vrijednosti pomaka su vrijednosti translacijskih i rotacijskih pomaka čvorova. Translacijske i rotacijske pomake čvorova jednim imenom možemo zvati poopćeni pomaci.

Metodom pomaka mogu se proračunavati statički neodređeni, ali i određeni sistemi. Ona je općenitija metoda od metode sila te kao takva prikladnija za proračun statički neodređenih konstrukcija. Također, relativno laka formalizacija opće metode pomaka razlog je zbog kojeg je ona algoritamska osnova većine kompjutorskih programa za proračun štapnih konstrukcija.

Proračun metodom pomaka provodi se na osnovnom sistemu. Osnovni sistem oblikuje se dodavanjem zamišljenih veza koje spriječavaju poopćene pomake tako da se zadani sistem u prvom koraku „raspada“ na niz međusobno neovisnih obostrano upetih greda. Zbog spriječenosti „slobodnih“ pomaka i zaokreta čvorova u dodanim se zamišljenim vezama, pri zadanim djelovanjima, pojavljuju reaktivne sile i momenti kojih u izvornome sistemu nema. Dio sila koje djeluju na čvorove tako se prenosi na podlogu, pa bez njih čvorovi, „izrežemo“ li ih iz sistema, neće biti u ravnoteži. Tako polje pomaka osnovnog sistema odgovara tek jednom od mogućih stanja pomaka izvornog sistema.

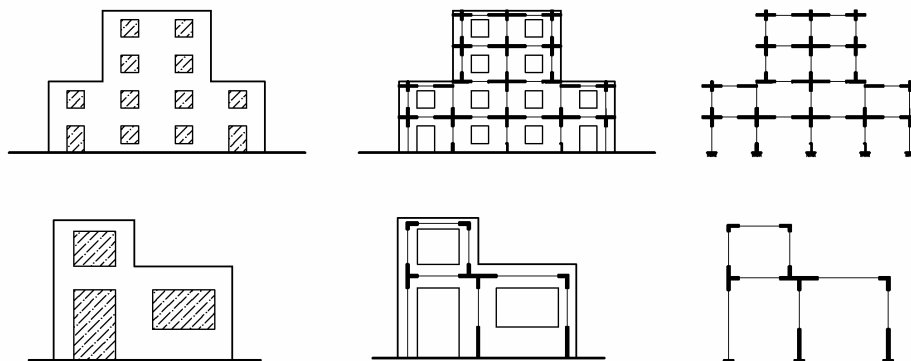
Kako bismo osnovni sistem doveli u mehaničko stanje u kojemu se nalazi izvorni sistem, njegove čvorove prisilno zaokrećemo i pomičemo po pravcima zamišljenih veza. Ti poopćeni pomaci moraju biti takvi da reakcije, koje se zbog njih javljaju u zamišljenim vezama, ponište reakcije izazvane zadanim djelovanjima, jer će tada na čvorove osnovnog sistema djelovati samo one sile koje djeluju na čvorove izvornog sistema. Njihove nepoznate vrijednosti možemo odrediti iz jednadžbi ravnoteže sila i momenata u čvorovima. Drugim riječima, uvjete ischezavanja reakcija u zamišljenim vezama izražavamo kao uvjete ravnoteže sila i momenata u čvorovima, a rješenja sustava jednadžbi ravnoteže su tražene vrijednosti poopćenih pomaka čvorova.

Dakle, proračun metodom pomaka možemo rastaviti na dva koraka. U prvome se koraku na osnovni sistem nanose zadana djelovanja (sile, slijeganja ležaja, temperaturne promjene...). Taj korak nazivamo stanje spriječenih pomaka čvorova, a sile na krajevima svakog elementa koje se javljaju u tom stanju nazivamo silama stanja spriječenih pomaka ili, jednostavnije, silama upetosti. U drugome koraku kojeg nazivamo stanje prisilnih pomaka, javljaju se sile stanja prisilnih pomaka. Superponiranjem sila u stanju spriječenih pomaka i sila u stanju prisilnih pomaka dobivamo ukupne sile na krajevima elementa, tj. ukupne poopćene sile kojima čvorovi djeluju na element.

U sljedećim ćemo poglavljima zamisao metode pomaka matrično formulirati.

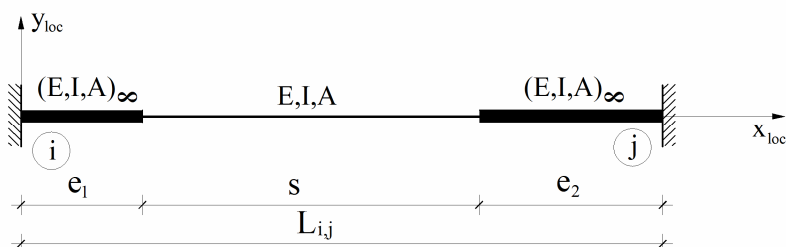
5. ŠTAPNI MODEL ZIDA S OTVORIMA

Kako bismo metodom pomaka proračunali zid s otvorima, zid kao plošni element trebamo „prevesti“ u štapni sistem (*slika 12.*). To ćemo učiniti tako što ćemo naći spojnice težišnih linija zidova koje će činiti proračunski model zida s otvorima. Presječnice težišnih linija proglasit ćemo čvorovima konstrukcije, a spojnice susjednih čvorova štapovima.



Slika 12.

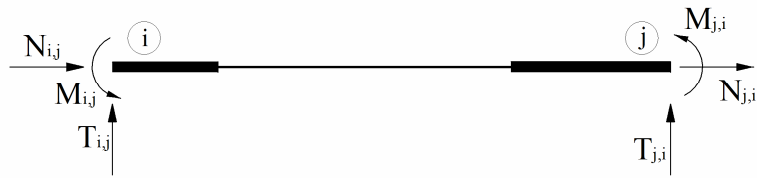
Dakle, osnovni element zida s otvorima je ravni štap. Međutim, krutost štapa nije konstantna po duljini (*slika 13.*), već se on sastoji od apsolutno krutog i elastičnog dijela. Apsolutno kruti dio ponaša se kao dio čvora, dok se elastični dio deformira pri djelovanju opterećenja i pomaka susjednih čvorova.



Slika 13.

Uvest ćemo oznake koje će nam olakšavati daljnju analizu ravninskih ravnih štapnih sistema u ravnini xy . Štapni element označit ćemo sa (i, j) pri čemu su i i j čvorovi, tj. par čvorova koji jednoznačno određuje element. Krajeve elementa označit ćemo prema pripadnim čvorovima pa ćemo razlikovati kraj i i kraj j . Prema tome, sve statičke i kinematičke veličine na i -tom kraju elementa (i, j) označavat ćemo parom indeksa i, j , a veličine na j -tom kraju parom j, i . Lokalni koordinatni sustav odabrat ćemo tako da čvor i leži u njegovu ishodištu i da se uzdužna os štapa poklapa s osi x_{loc} .

Sile na krajevima štapnog elementa smatraju se pozitivnima ako im se smisao djelovanja poklapa s orijentacijom odgovarajuće osi (*slika 14.*).



Slika 14.

Vrijednosti sila na kraju i izražene kao zbroj vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka $(n_{i,j}, t_{i,j}, m_{i,j})$ i vrijednosti sila u stanju spriječenih pomaka $(\bar{N}_{i,j}, \bar{T}_{i,j}, \bar{M}_{i,j})$ glase

$$\begin{aligned} N_{i,j} &= n_{i,j} + \bar{N}_{i,j}, \\ T_{i,j} &= t_{i,j} + \bar{T}_{i,j}, \\ M_{i,j} &= m_{i,j} + \bar{M}_{i,j}. \end{aligned}$$

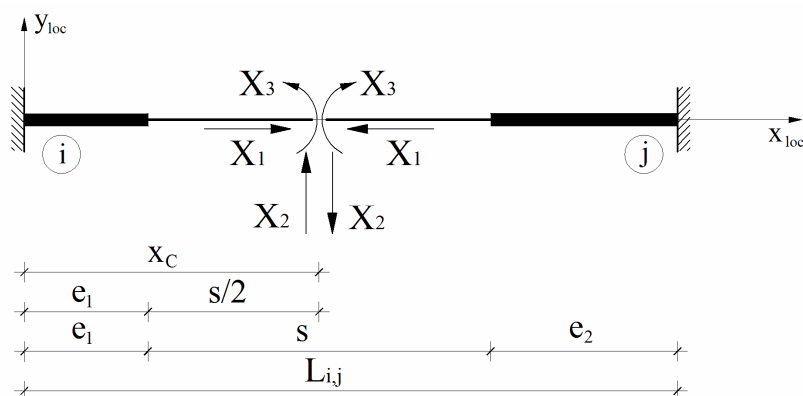
Izrazi za vrijednost sila na kraju j analogni su

$$\begin{aligned} N_{j,i} &= n_{j,i} + \bar{N}_{j,i}, \\ T_{j,i} &= t_{j,i} + \bar{T}_{j,i}, \\ M_{j,i} &= m_{j,i} + \bar{M}_{j,i}. \end{aligned}$$

Prvi indeks uz oznaku sile na kraju štapa znači broj čvora koji na taj štاپ djeluje, a drugi indeks označava čvor na koji je vezan drugi kraj štapa.

6. SILE STANJA PRISILNIH POMAKA – MATRICA KRUTOSTI ŠTAPA

Izraze za sile stanja prisilnih pomaka izvesti ćemo metodom sila. Pritom ćemo koristiti elastično težište. Ono se nalazi na osi štapa, na udaljenosti $x_C = e_1 + \frac{s}{2}$ od ishodišta lokalnog koordinatnog sustava (*primjer 1.*). Postavljanjem (nepoznatih) prekobrojnih sila X_1 , X_2 i X_3 u elastično težište, dobivamo osnovni sustav sastavljen od dva konzolna štapa (*slika 15.*), a i znatno pojednostavljen proračun.



Slika 15.

Za tako odabrani osnovni sustav jednadžbe kompatibilnosti pomaka su

$$\begin{bmatrix} \delta_{1,1}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2,2}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3,3}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \end{bmatrix},$$

ili, u kraćem obliku

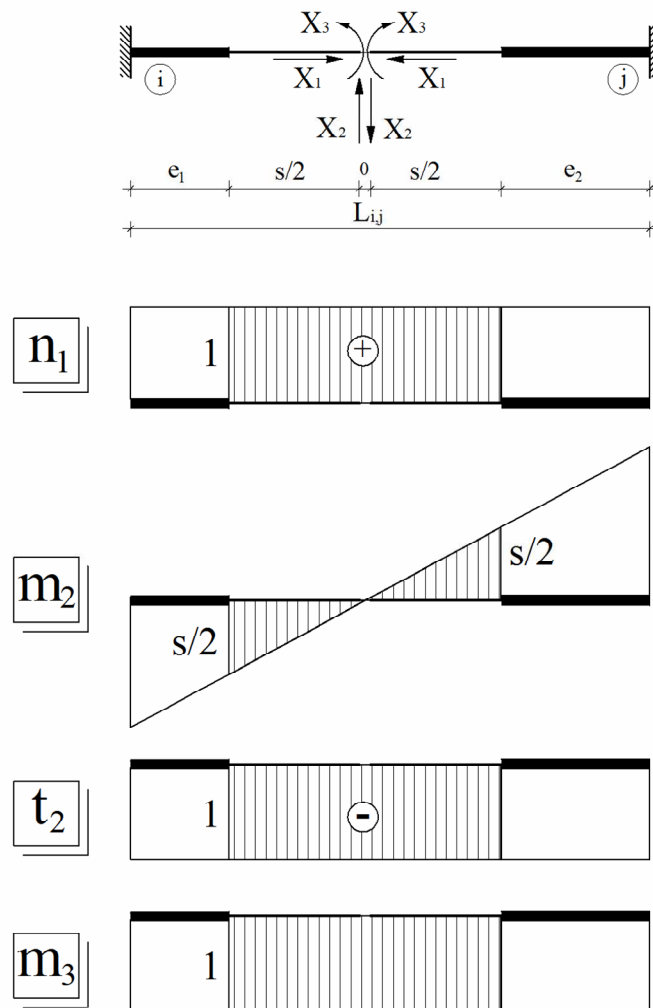
$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{\Lambda} = 0,$$

jer je vektor $\bar{\mathbf{\Lambda}} = [\bar{\delta}_1 \quad \bar{\delta}_2 \quad \bar{\delta}_3]^T$ jednak nuli.

Elemente matrice fleksibilnosti u elastičnom težištu računamo integracijom u granicama od 0 do L . Pritom je na dijelovima štapa od 0 do e_1 i od $e_1 + s$ do L vrijednost integrala jednaka nuli radi neizmjerne krutosti štapa ($I = \infty$ i $A = \infty$), pa integraciju možemo provoditi u granicama od e_1 do $e_1 + s$.

Unutarnje sile od sila u prekobrojnim vezama određene su izrazima (*slika 16.*)

$$\begin{aligned} n_1(x) &= 1, \\ t_2(x) &= -1, \\ m_2(x) &= x - x_c, \\ m_3(x) &= 1. \end{aligned}$$



Slika 16.

Izračunajmo vrijednosti dijagonalnih koeficijenata matrice fleksibilnosti:

$$\delta_{1,1}^* = \int_0^L \frac{n_1 \cdot n_1}{EA} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{n_1^2}{EA} ds = \frac{1 \cdot s}{EA} = \frac{s}{EA},$$

$$\delta_{2,2}^* = \int_0^L \left(\frac{m_2 \cdot m_2}{EI} + k \frac{t_2 \cdot t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left(\frac{m_2^2}{EI} + k \frac{t_2^2}{GA} \right) ds,$$

$$\delta_{2,2}^* = \frac{2}{EI} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} \right) \right] + k \frac{1 \cdot s}{GA} = \frac{s^3}{12EI} + \frac{k \cdot s}{GA},$$

$$\text{uz } G \cdot A = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{I \cdot 12}{h^2}, \text{ pri čemu su}$$

- ν ... Poissonov koeficijent (konstanta materijala),
- k ... bezdimenzionalni koeficijent koji ovisi samo o obliku poprečnog presjeka štapa; za pravokutni poprečni presjek $k = 1, 2$,
- E ... modul elastičnosti (Youngov modul),

G ... modul pomika (Coulombov modul); $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$,

I ... moment inercije; za pravokutni poprečni presjek $I_z = I = \frac{b \cdot h^3}{12}$,

A ... površina poprečnog presjeka; $A = b \cdot h = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot 12}{h^2} = \frac{I \cdot 12}{h^2}$,

slijedi:

$$\delta_{2,2}^* = \frac{s^3}{12EI} + \frac{1,2 \cdot s \cdot 2(1+\nu) \cdot h^2}{12EI} = s \cdot \frac{s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{12EI},$$

$$\delta_{3,3}^* = \int_0^L \frac{m_3 \cdot m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{m_3^2}{EI} ds = \frac{1 \cdot s}{EI} = \frac{s}{EI}.$$

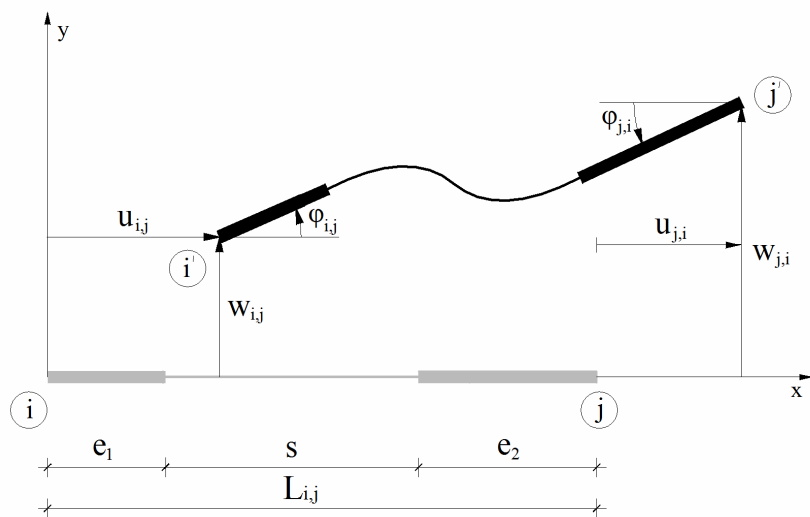
Matrica fleksibilnosti je

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2,2}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3,3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & s \cdot \frac{s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{12EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{EI} \end{bmatrix},$$

pa je inverznu matricu matrici fleksibilnosti jednostavno dobiti

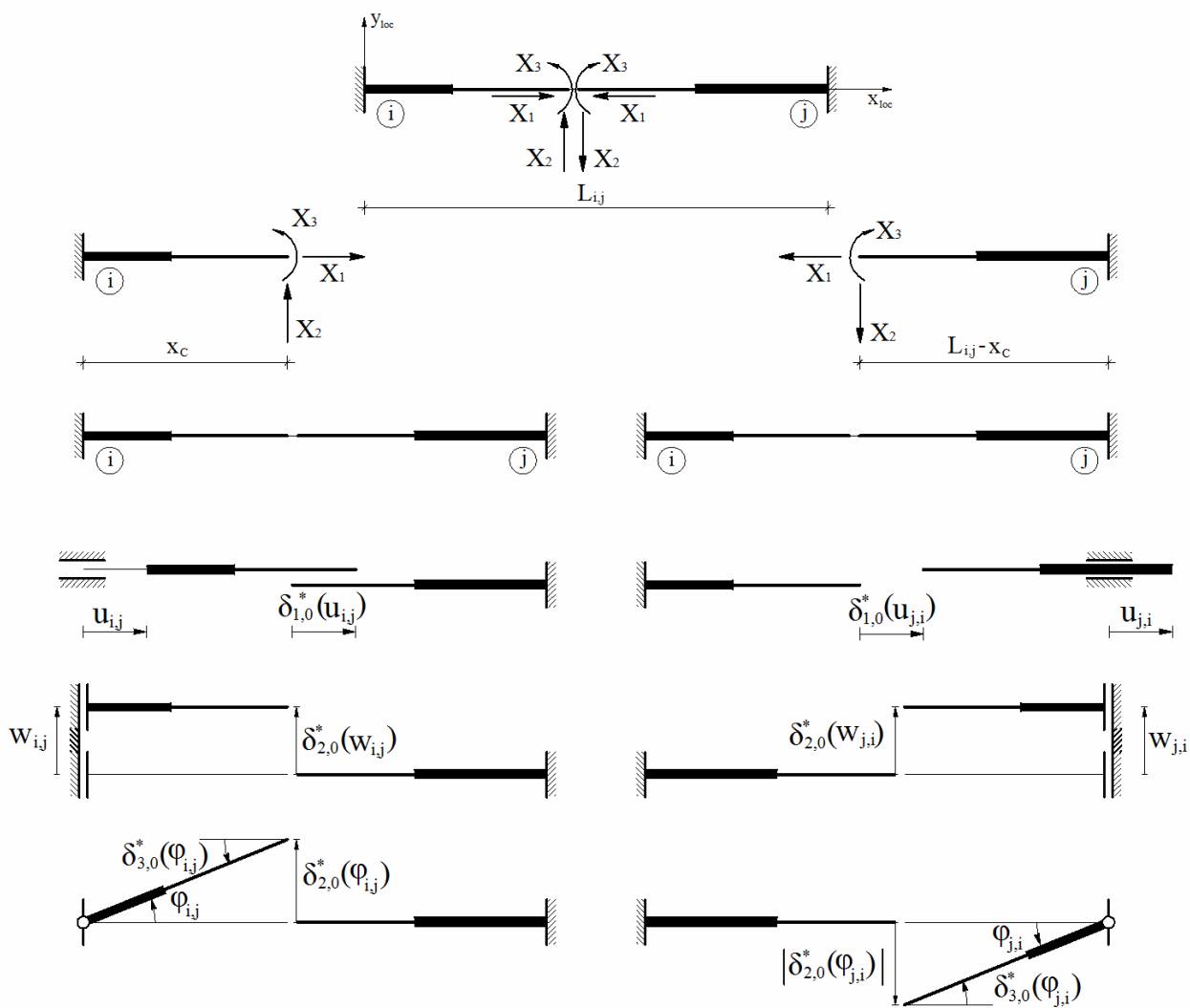
$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{1,1}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{2,2}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{3,3}^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix}.$$

Vektori vrijednosti popučenih pomaka na krajevima štapa isti su kao i kod štapova konstantne krutosti po cijeloj duljini. U skladu s prije uvedenim oznakama te prema slici 17., vektor pomaka kraja i možemo napisati $\mathbf{u}_{i,j} = [u_{i,j} \quad w_{i,j} \quad \varphi_{i,j}]^T$ te vektor pomaka kraja j $\mathbf{u}_{j,i} = [u_{j,i} \quad w_{j,i} \quad \varphi_{j,i}]^T$, odnosno, $\mathbf{u}_{(i,j)} = [u_{i,j} \quad w_{i,j} \quad \varphi_{i,j} \quad u_{j,i} \quad w_{j,i} \quad \varphi_{j,i}]^T$.



Slika 17.

Za određenje vanjskih članova jednadžbi kontinuiteta, tj. vrijednosti poopćenih pomaka $\delta_{1,0}^*$, $\delta_{2,0}^*$ i $\delta_{3,0}^*$, poslužiti će nam dijagram pomaka (slika 18.).



Slika 18.

Prema dijagramu pomaka možemo pisati

$$\begin{aligned}\delta_{1,0}^* &= \delta_{1,0}^*(u_{i,j}) + \delta_{1,0}^*(u_{j,i}) = u_{i,j} - u_{j,i}, \\ \delta_{2,0}^* &= \delta_{2,0}^*(w_{i,j}) + \delta_{2,0}^*(\varphi_{i,j}) + \delta_{2,0}^*(w_{j,i}) + \delta_{2,0}^*(\varphi_{j,i}) = w_{i,j} + x_c \cdot \varphi_{i,j} - w_{j,i} + (L - x_c) \cdot \varphi_{j,i}, \\ \delta_{3,0}^* &= \delta_{3,0}^*(\varphi_{i,j}) + \delta_{3,0}^*(\varphi_{j,i}) = \varphi_{i,j} - \varphi_{j,i}.\end{aligned}$$

Ili, isto u matičnom zapisu

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L - x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{pmatrix}.$$

Definirat ćemo prijenosnu matricu kao

$$\mathbf{T}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{iC} & \mathbf{T}_{jC} \end{bmatrix},$$

to jest

$$\mathbf{T}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L - x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prijenosna matrica je matrica pomoću koje pomake i sile iz elastičnog težišta „prenosimo“ na krajeve štapa, odnosno pomoću koje pomake i sile na krajevima štapa izražavamo kao funkcije pomaka i sile u elastičnom težištu.

Sada možemo vektor vrijednosti popučenih pomaka zapisati u kraćem obliku

$$\Delta = \mathbf{T}_C \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}.$$

Iz jednadžbi neprekinutosti ($\mathbf{D} \cdot \mathbf{X} + \Delta = 0$) možemo izraziti vektor prekobrojnih sila kao

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \Delta,$$

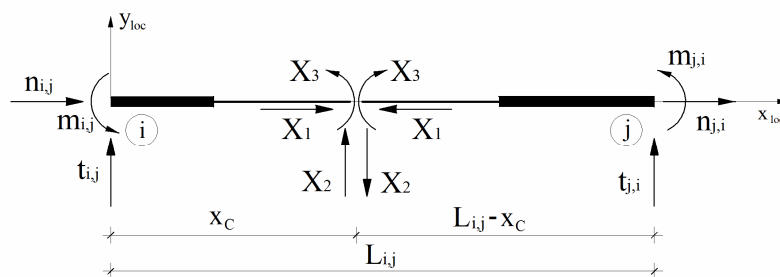
tj.

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{T}_C \cdot \mathbf{u}_{(i,j)},$$

ili

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L - x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{pmatrix}.$$

Kada znamo izraze za vrijednosti prekobrojnih sila X_1 , X_2 i X_3 , vrijednosti sila na krajevima elementa lako je naći iz uvjeta ravnoteže sila (slika 19.).



Slika 19.

Sile na kraju i :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{m,x} &= 0 & \sum_{m=1}^n F_{m,y} &= 0 & \sum_{m=1}^n M_{F_m/i} &= 0 \\ n_{i,j} + X_1 &= 0 & t_{i,j} + X_2 &= 0 & m_{i,j} + X_2 \cdot x_c + X_3 &= 0 \\ n_{i,j} &= -X_1 & t_{i,j} &= -X_2 & m_{i,j} &= -(X_2 \cdot x_c + X_3) \end{aligned}$$

Formirat ćemo matricu

$$\begin{pmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

Sile na kraju j :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{m,x} &= 0 & \sum_{m=1}^n F_{m,y} &= 0 & \sum_{m=1}^n M_{F_m/j} &= 0 \\ n_{j,i} - X_1 &= 0 & t_{j,i} - X_2 &= 0 & m_{j,i} + X_2 \cdot (L - x_c) - X_3 &= 0 \\ n_{j,i} &= X_1 & t_{j,i} &= X_2 & m_{j,i} &= X_2 \cdot (x_c - L) + X_3 \end{aligned}$$

U matičnom zapisu

$$\begin{pmatrix} n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c - L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

Ako sile s oba kraja štapnog elementa „stavimo“ u jedan vektor, dobit ćemo

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L - x_c & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je matrica kojom množimo vektor prekobrojnih sila da bismo dobili sile na krajevima elementa, transponirana prijenosna matrica i označimo vektor sila na krajevima štapa sa

$$\mathbf{f}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} n_{i,j} & t_{i,j} & m_{i,j} & n_{j,i} & t_{j,i} & m_{j,i} \end{bmatrix}^T.$$

Iz toga slijedi jednostavan izraz

$$\mathbf{f}_{(i,j)} = -\mathbf{T}_C^T \cdot \mathbf{X}.$$

Konačan izraz za vektor sila na krajevima štapnog elementa dobit ćemo uvrštavajući u izraz za vektor prekobrojnih sila u prethodan izraz, pa je

$$\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{T}_C^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{T}_C \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}.$$

Kada se to raspiše, dobivamo

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_c & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & L-x_c & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_c & 0 & -1 & L-x_c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{bmatrix} n_{i,j} \\ t_{i,j} \\ m_{i,j} \\ n_{j,i} \\ t_{j,i} \\ m_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 & -\frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot x_c^2}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L-x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ -\frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L-x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L-x_c)^2}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{i,j} \\ w_{i,j} \\ \varphi_{i,j} \\ u_{j,i} \\ w_{j,i} \\ \varphi_{j,i} \end{bmatrix}$$

Vidimo da su unutarnje sile u štapovima funkcije fizikalnih i geometrijskih karakteristika te poopćenih pomaka krajeva štapova, a oni su jednaki poopćenim pomacima čvorova.

Umnožak $\mathbf{T}_C^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{T}_C$ predstavlja matricu krutosti izraženu u lokalnom koordinatnom sustavu

$$\mathbf{k}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 & -\frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot x_c^2}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L-x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ -\frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L-x_c) \cdot x_c}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot (L-x_c)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (L-x_c)^2}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \end{bmatrix} \cdot$$

Uvrstimo li $x_c = e_1 + s/2$ i $L-x_c = e_2 + s/2$, matrica krutosti je

$$\mathbf{k}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 & -\frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{12EI \cdot (e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)^2}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2) \cdot (e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ -\frac{EA}{s} & 0 & 0 & \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot (e_1 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{12EI \cdot (e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ 0 & \frac{12EI \cdot (e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & -\frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (e_1 + s/2) \cdot (e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 & -\frac{12EI \cdot (e_2 + s/2)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & \frac{EI}{s} + \frac{12EI \cdot (e_2 + s/2)^2}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \end{bmatrix} \cdot$$

Elementi lokalne matrice krutosti sadržavaju geometrijske i fizikalne karakteristike štapa i predstavljaju vrijednosti poopćenih sila na krajevima štapnog elementa izazvanih jediničnim poopćenim pomacima po pravcu u i smislu lokalnih koordinatnih osi.

Prema tome, vektor vrijednosti sila na krajevima štapnog elementa umnožak je lokalne matrice krutosti i vektora vrijednosti poopćenih pomaka krajeva elementa u smjerovima osi lokalnog koordinatnog sustava. „Prevedeno“: $\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}$.

Za postavljenje jednadžbi ravnoteže pogodno je zapisati izraz kao:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{f}_{(i,j)_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{i,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{i,j}} \\ \mathbf{k}_{(i,j)_{j,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{j,j}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{u}_{(i,j)_j} \end{bmatrix},$$

gdje su

$$\mathbf{f}_{(i,j)_i} = \begin{bmatrix} n_{i,j} & t_{i,j} & m_{i,j} \end{bmatrix}^T \quad \text{vektor vrijednosti sila na kraju } i,$$

$$\mathbf{f}_{(i,j)_j} = \begin{bmatrix} n_{j,i} & t_{j,i} & m_{j,i} \end{bmatrix}^T \quad \text{vektor vrijednosti sila na kraju } j,$$

$$\mathbf{u}_{(i,j)_i} = \begin{bmatrix} u_{i,j} & w_{i,j} & \varphi_{i,j} \end{bmatrix}^T \quad \text{vektor vrijednosti poopćenih pomaka kraja } i,$$

$$\mathbf{u}_{(i,j)_j} = \begin{bmatrix} u_{j,i} & w_{j,i} & \varphi_{j,i} \end{bmatrix}^T \quad \text{vektor vrijednosti poopćenih pomaka kraja } j.$$

Ovakvim rastavljanjem matrice krutosti na podmatrice dolazi do izražaja utjecaj pomaka krajeva na vrijednost sila na krajevima, pa je tako

$$\mathbf{f}_{(i,j)_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{i,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{i,j}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{u}_{(i,j)_j} \end{bmatrix}$$

i

$$\mathbf{f}_{(i,j)_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{j,i}} & \mathbf{k}_{(i,j)_{j,j}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(i,j)_i} \\ \mathbf{u}_{(i,j)_j} \end{bmatrix}.$$

7. SILE UPETOSTI

Opterećenja na štapnim elementima ulaze u jednadžbe ravnoteže u obliku poopćenih sila upetosti. Određivanje sila upetosti kod štapova koji imaju neizmjenjivo krute dijelove (štapni model zida s otvorima) razlikuje se od određivanja sila za elastični štap konstantne krutosti po duljini.

I sile stanja spriječenih pomaka (sile upetosti) odredit ćemo metodom sila, koristeći elastično težište. Osnovni sistem tako su konzole kao i kod određivanja sila stanja prisilnih pomaka. Prema tome, i elementi matrice fleksibilnosti su isti

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1}^* & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{2,2}^* & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{3,3}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & s \cdot \frac{s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{12EI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{EI} \end{bmatrix}.$$

Već poznati izraz za prekobrojne sile dobiven iz jednadžbi neprekinutosti glasi

$$\mathbf{X} = -\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{\Delta},$$

odnosno,

$$\mathbf{X} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{1,1}^*} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{2,2}^*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\delta_{3,3}^*} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EI}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_{1,0}^* \\ \delta_{2,0}^* \\ \delta_{3,0}^* \end{bmatrix}.$$

Isti izraz zapisan u obliku niza jednadžbi daje jednostavne izraze za prekobrojne sile:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}^*}{\delta_{1,1}^*},$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*},$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*}.$$

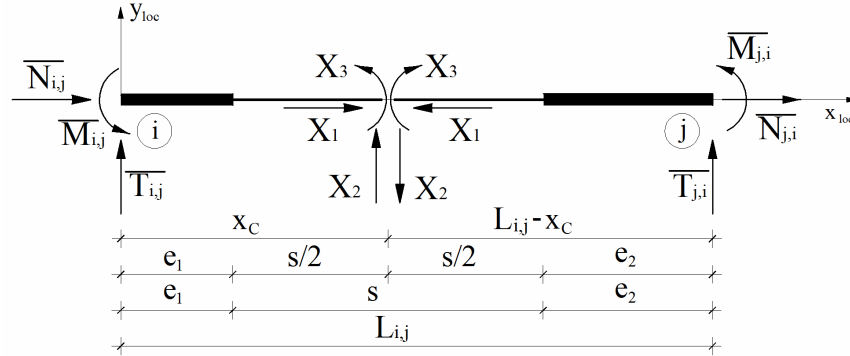
Budući da nam je matrica inverzna matrici fleksibilnosti već poznata, potrebno je odrediti još samo vektor

$$\mathbf{\Delta} = \left[\delta_{1,0}^* \quad \delta_{2,0}^* \quad \delta_{3,0}^* \right]^T,$$

pa je vrijednost prekobrojnih sila jednostavno dobiti iz općeg izraza

$$X_i = -\frac{\delta_{i,0}^*}{\delta_{i,i}^*}.$$

Nakon što se odrede izrazi za prekobrojne sile, sile upetosti nalazimo iz uvjeta ravnoteže štapa (slika 20.).

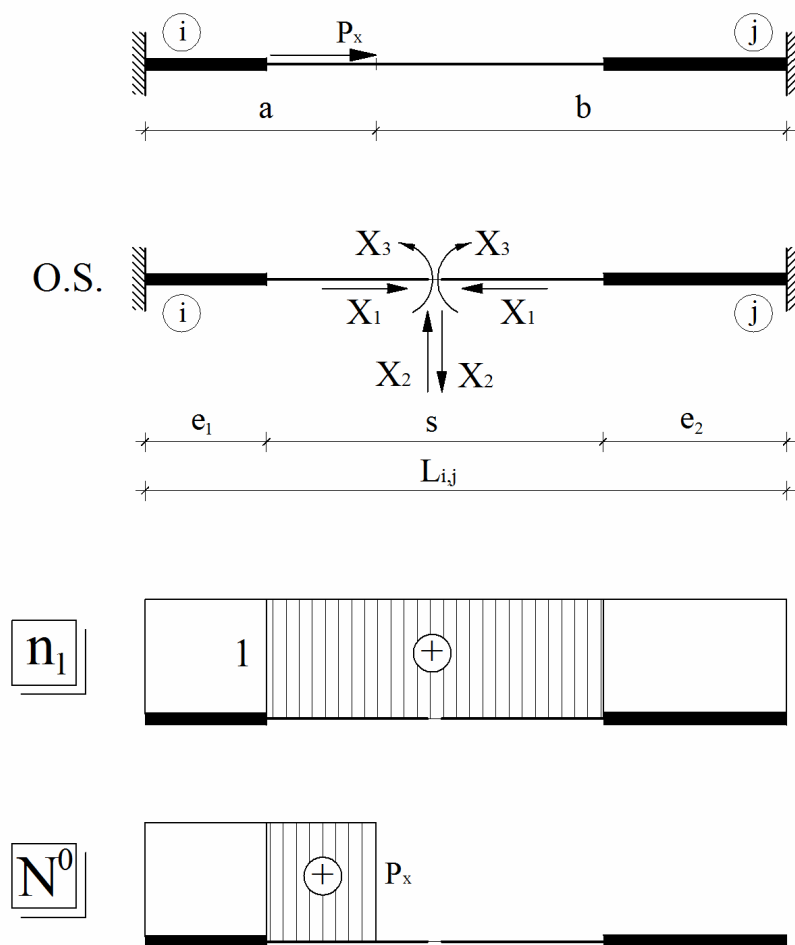


Slika 20.

Opterećenja za koja ćemo određivati sile upetosti su: koncentrirana sila u općem položaju, jednoliko raspodijeljena sila i koncentrirani moment. Pritom ćemo koncentriranu silu u općem položaju rastaviti na dvije komponente – komponentu paralelnu s osi štapa i komponentu okomitu na os štapa, te za svaku komponentu posebno, preglednosti radi, tražiti sile upetosti. Određene sile upetosti zapisat ćemo kao vektor vrijednosti sile upetosti

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \left[\bar{N}_{i,j} \quad \bar{T}_{i,j} \quad \bar{M}_{i,j} \quad \bar{N}_{j,i} \quad \bar{T}_{j,i} \quad \bar{M}_{j,i} \right]^T.$$

7.1. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom paralelnom s osi štapa



Slika 21.

Vektor Δ u potpunosti ćemo odrediti nalaženjem samo „slobodnog“ člana $\delta_{1,0}^*$, jer su članovi $\delta_{2,0}^*$ i $\delta_{3,0}^*$ jednaki nuli.

Jednostavnom integracijom u granicama od e_1 od $e_1 + s$ (slika 21.) dobivamo

$$\delta_{1,0}^* = \int_0^L \frac{N^0 \cdot n_1}{EA} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{N^0 \cdot n_1}{EA} ds,$$

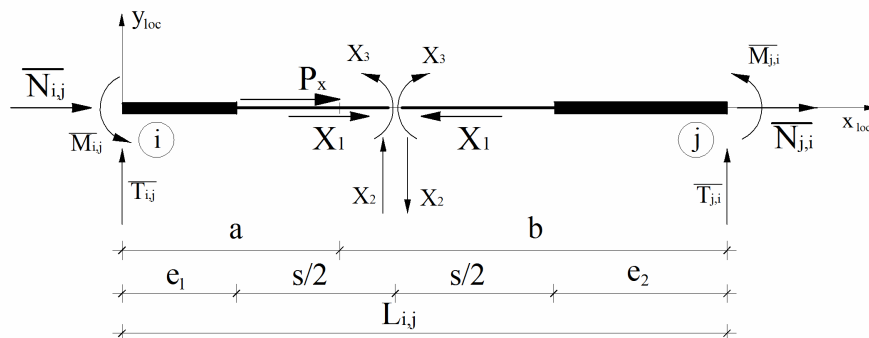
$$\delta_{1,0}^* = \frac{1}{EA} \cdot [P_x \cdot (a - e_1)] \cdot 1,$$

$$\delta_{1,0}^* = \frac{P_x \cdot (a - e_1)}{EA}.$$

Uvrštavajući koeficijent $\delta_{1,0}^*$ u izraz za prekobrojni silu dobivamo

$$X_1 = -\frac{\delta_{1,0}^*}{\delta_{1,1}^*} = -\frac{P_x \cdot (a - e_1)}{s}.$$

Očito je da su prekobrojne sile X_2 i X_3 jednake nuli. Sile upetosti $\bar{N}_{i,j}$ i $\bar{N}_{j,i}$ na krajevima određujemo uvjeta ravnoteže (slika 22.). Pritom je $L = a + b = e_1 + s + e_2$, to jest $s = a + b - e_1 - e_2$.



Slika 22.

Dakle,

sile na kraju i (iz uvjeta ravnoteže „lijeve“ konzole):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{m,x} &= 0 \\ \bar{N}_{i,j} + X_1 + P_x &= 0 \\ \bar{N}_{i,j} &= -X_1 - P_x \\ \bar{N}_{i,j} &= -\frac{P_x \cdot (b - e_2)}{s}, \end{aligned}$$

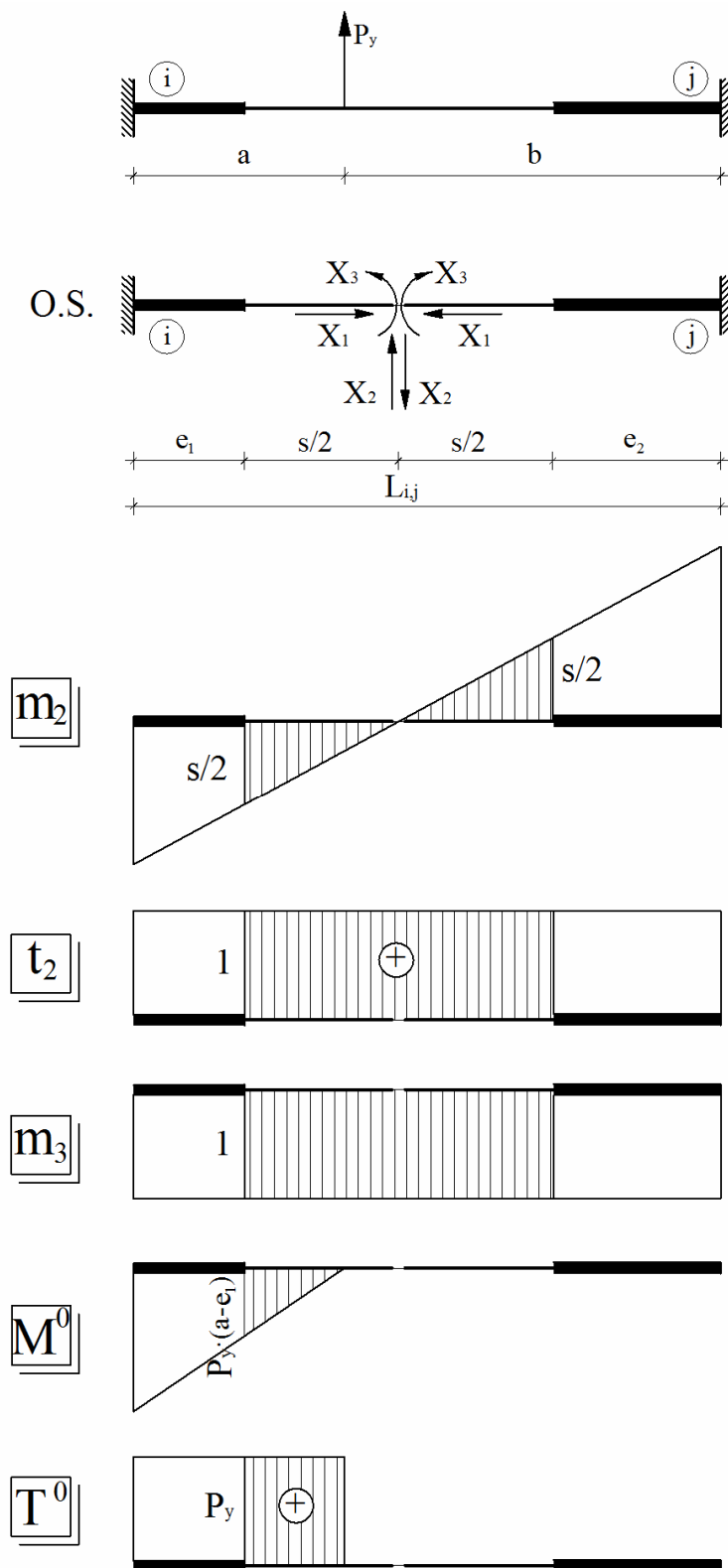
sile na kraju j (iz uvjeta ravnoteže „desne“ konzole):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n F_{m,x} &= 0 \\ \bar{N}_{j,i} - X_1 &= 0 \\ \bar{N}_{j,i} &= X_1 \\ \bar{N}_{j,i} &= -\frac{P_x \cdot (a - e_1)}{s}. \end{aligned}$$

Sada je vektor sile upetosti za opterećenje uzdužnom koncentriranom silom

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P_x \cdot \frac{b - e_2}{s} \\ 0 \\ 0 \\ -P_x \cdot \frac{a - e_1}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.2. Sile upetosti za opterećenje koncentriranom silom okomitom na os štapa



Slika 23.

Odredimo „slobodne“ članove integracijom (slika 23.):

$$\delta_{2,0}^* = \int_0^L \left(\frac{M^0 \cdot m_2}{EI} + k \frac{T^0 \cdot t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left(\frac{M^0 \cdot m_2}{EI} + k \frac{T^0 \cdot t_2}{GA} \right) ds$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot P_y \cdot (a - e_1) \cdot (a - e_1) \right] \cdot \left(\frac{s}{2} - \frac{a - e_1}{3} \right) + \frac{k}{GA} \cdot [P_y \cdot (a - e_1)] \cdot 1$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{P_y \cdot (a - e_1)^2}{2EI} \cdot \left(\frac{s}{2} - \frac{a - e_1}{3} \right) + \frac{2,4 \cdot [P_y \cdot (a - e_1)] \cdot (1 + \nu) \cdot h^2}{12EI}$$

i

$$\delta_{3,0}^* = \int_0^L \frac{M^0 \cdot m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{M^0 \cdot m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{3,0}^* = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot P_y \cdot (a - e_1) \cdot (a - e_1) \right] \cdot 1$$

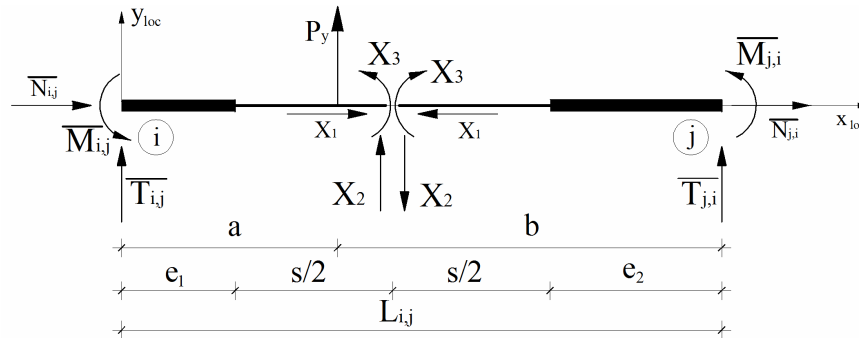
$$\delta_{3,0}^* = \frac{P_y \cdot (a - e_1)^2}{2EI}$$

Prekobrojne sile su sada

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*} = \frac{P_y \cdot (a - e_1) \cdot \left[(a - e_1) \cdot (2a - 2e_1 - 3s) - 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2 \right]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)}$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*} = -\frac{P_y \cdot (a - e_1)^2}{2s}$$

Sile upetosti na krajevima slijede iz uvjeta ravnoteže (slika 24.).



Slika 24.

Sile na kraju i dobivamo iz uvjeta ravnoteže „lijeve“ konzole:

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0$$

$$\bar{T}_{i,j} + X_2 + P_y = 0$$

$$\bar{T}_{i,j} = -X_2 - P_y$$

$$\bar{T}_{i,j} = -P_y \cdot \left[1 + \frac{(a - e_1) \cdot \left[(a - e_1) \cdot (2a - 2e_1 - 3s) - 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2 \right]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} \right]$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/i} = 0$$

$$\overline{M}_{i,j} + X_2 \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) + X_3 + P_y \cdot a = 0$$

$$\overline{M}_{i,j} = -(X_2 \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) + X_3 + P_y \cdot a)$$

$$\overline{M}_{i,j} = P_y \cdot \left[\frac{(a-e_1)^2}{2s} - \frac{(a-e_1) \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} - a \right],$$

a sile na kraju j iz uvjeta ravnoteže „desne“ konzole:

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0$$

$$\overline{T}_{j,i} - X_2 = 0$$

$$\overline{T}_{j,i} = X_2$$

$$\overline{T}_{j,i} = P_y \cdot \frac{(a-e_1) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)}$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/j} = 0$$

$$\overline{M}_{j,i} + X_2 \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) - X_3 = 0$$

$$\overline{M}_{j,i} = X_3 - X_2 \cdot (e_2 + \frac{s}{2})$$

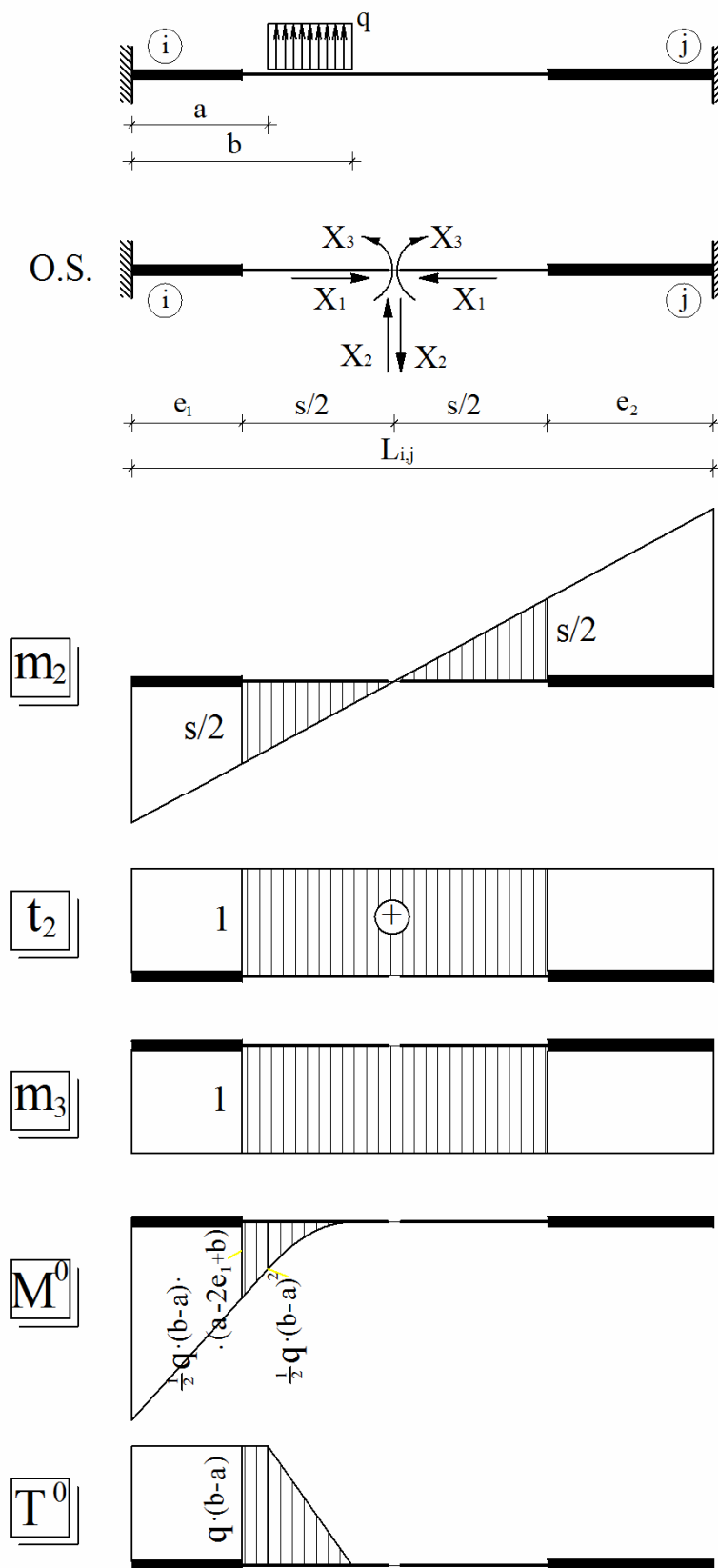
$$\overline{M}_{j,i} = -P_y \cdot \left[\frac{(a-e_1)^2}{2s} + \frac{(a-e_1) \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right].$$

Vektor sila upetosti za opterećenje poprečnom koncentriranom silom je

$$\overline{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \overline{N}_{i,j} \\ \overline{T}_{i,j} \\ \overline{M}_{i,j} \\ \overline{N}_{j,i} \\ \overline{T}_{j,i} \\ \overline{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_y \cdot \left[1 + \frac{(a-e_1) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right] \\ P_y \cdot \left[\frac{(a-e_1)^2}{2s} - \frac{(a-e_1) \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} - a \right] \\ 0 \\ P_y \cdot \frac{(a-e_1) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ -P_y \cdot \left[\frac{(a-e_1)^2}{2s} + \frac{(a-e_1) \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) \cdot [(a-e_1) \cdot (2a-2e_1-3s) - 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right] \end{bmatrix}.$$

7.3. Sile upetosti za opterećenje kontinuiranom jednoliko raspodijeljenom silom

Odredimo vektor Δ integracijom (slika 25.) pomoću teorema Vereščagina:



Slika 25.

$$\delta_{2,0}^* = \int_0^L \left(\frac{M^0 \cdot m_2}{EI} + k \frac{T^0 \cdot t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left(\frac{M^0 \cdot m_2}{EI} + k \frac{T^0 \cdot t_2}{GA} \right) ds$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} q(b-a)^2 \cdot (b-a) \right] \cdot \left[\frac{s}{2} - (a-e_1) - \frac{1}{4} \cdot (b-a) \right] + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} q(b-a)^2 \cdot (a-e_1) \right] \cdot \left[\frac{s}{2} - \frac{a-e_1}{2} \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (a-e_1) \cdot \left[\frac{1}{2} q(b-a)(a-2e_1+b) - \frac{1}{2} q(b-a)^2 \right] \cdot \left[\frac{s}{2} - \frac{a-e_1}{3} \right]$$

$$\delta_{2,0}^* = \frac{q \cdot (a-b)}{24EI} \left\{ 2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - \right.$$

$$\left. - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2 \right\}$$

i

$$\delta_{3,0}^* = \int_0^L \frac{M^0 \cdot m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{M^0 \cdot m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{3,0}^* = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} q(b-a)^2 \cdot (b-a) \right] \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} q(b-a)^2 \cdot (a-e_1) \right] \cdot 1 +$$

$$+ \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (a-e_1) \cdot \left[\frac{1}{2} q(b-a)(a-2e_1+b) - \frac{1}{2} q(b-a)^2 \right] \right] \cdot 1$$

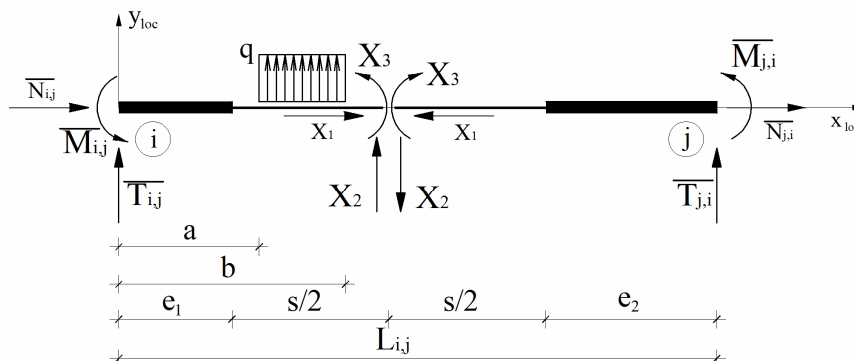
$$\delta_{3,0}^* = -q \cdot \frac{(a-b) \cdot \left[(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab \right]}{6EI}$$

Prekobrojne sile su sada

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*} = -\frac{q \cdot (a-b)}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \cdot \left\{ 2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + \right.$$

$$\left. + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2 \cdot (2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2 \right\} ,$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*} = \frac{q}{6s} \cdot (a-b) \cdot \left[(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab \right].$$



Slika 26.

Sile na krajevima dobivamo iz uvjeta ravnoteže (slika 26.).

Sile na kraju i (iz uvjeta ravnoteže „lijeve“ konzole):

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0$$

$$\bar{T}_{i,j} + X_2 + q_y \cdot (b-a) = 0$$

$$\bar{T}_{i,j} = -[X_2 + q \cdot (b-a)]$$

$$\bar{T}_{i,j} = q \cdot (a-b) \cdot \left[\frac{2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} + 1 \right]$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/i} = 0$$

$$\bar{M}_{i,j} + X_2 \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) + X_3 + P_y \cdot a = 0$$

$$\bar{M}_{i,j} = - \left[X_2 \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) + X_3 + q \cdot (b-a) \cdot (a + \frac{b-a}{2}) \right]$$

$$\bar{M}_{i,j} = q \cdot (a-b) \cdot \left[\frac{1}{2} (a+b) - \frac{(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab}{6s} + \frac{(e_1 + \frac{s}{2}) \cdot [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right]$$

Sile na kraju j (iz uvjeta ravnoteže „desne“ konzole):

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0$$

$$\bar{T}_{j,i} - X_2 = 0$$

$$\bar{T}_{j,i} = X_2$$

$$\bar{T}_{j,i} = q \cdot (b-a) \cdot \frac{2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)}$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/j} = 0$$

$$\bar{M}_{j,i} + X_2 \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) - X_3 = 0$$

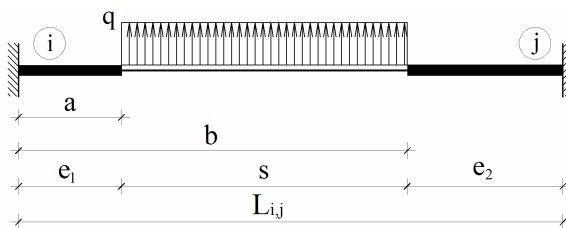
$$\bar{M}_{j,i} = X_3 - X_2 \cdot (e_2 + \frac{s}{2})$$

$$\bar{M}_{j,i} = q \cdot (a-b) \cdot \left[\frac{(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab}{6s} + \frac{(e_2 + \frac{s}{2}) \cdot [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right]$$

Vektor sila upetosti za opterećenje jednoliko raspodijeljenom silom je

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q \cdot (a-b) \cdot \left[\frac{2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} + 1 \right] \\ q \cdot (a-b) \cdot \left[\frac{1}{2} (a+b) - \frac{(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab}{6s} + \frac{(e_1 + \frac{s}{2}) \cdot [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right] \\ 0 \\ q \cdot (b-a) \cdot \frac{2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \\ q \cdot (a-b) \cdot \left[\frac{(a+b)^2 - 3e_1(a+b-e_1) - ab}{6s} + \frac{(e_2 + \frac{s}{2}) \cdot [2 \cdot (a-e_1)^2 (2a-2e_1-3s) - 6 \cdot (a-b) \cdot (a-e_1) \cdot (a-e_1-s) + (a-b)^2 \cdot (3a+b-2(2e_1+s)) - 2,4 \cdot (a+b-2e_1) \cdot (1+\nu) \cdot h^2]}{2s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1+\nu) \cdot h^2)} \right] \end{bmatrix}$$

Za poseban slučaj, kada je $a = e_1$ i $b = e_1 + s$, tj. kada je opterećenje kontinuiranom jednoliko raspodijeljenom silom zadano po cijeloj duljini elastičnog dijela štapa (slika 27.),

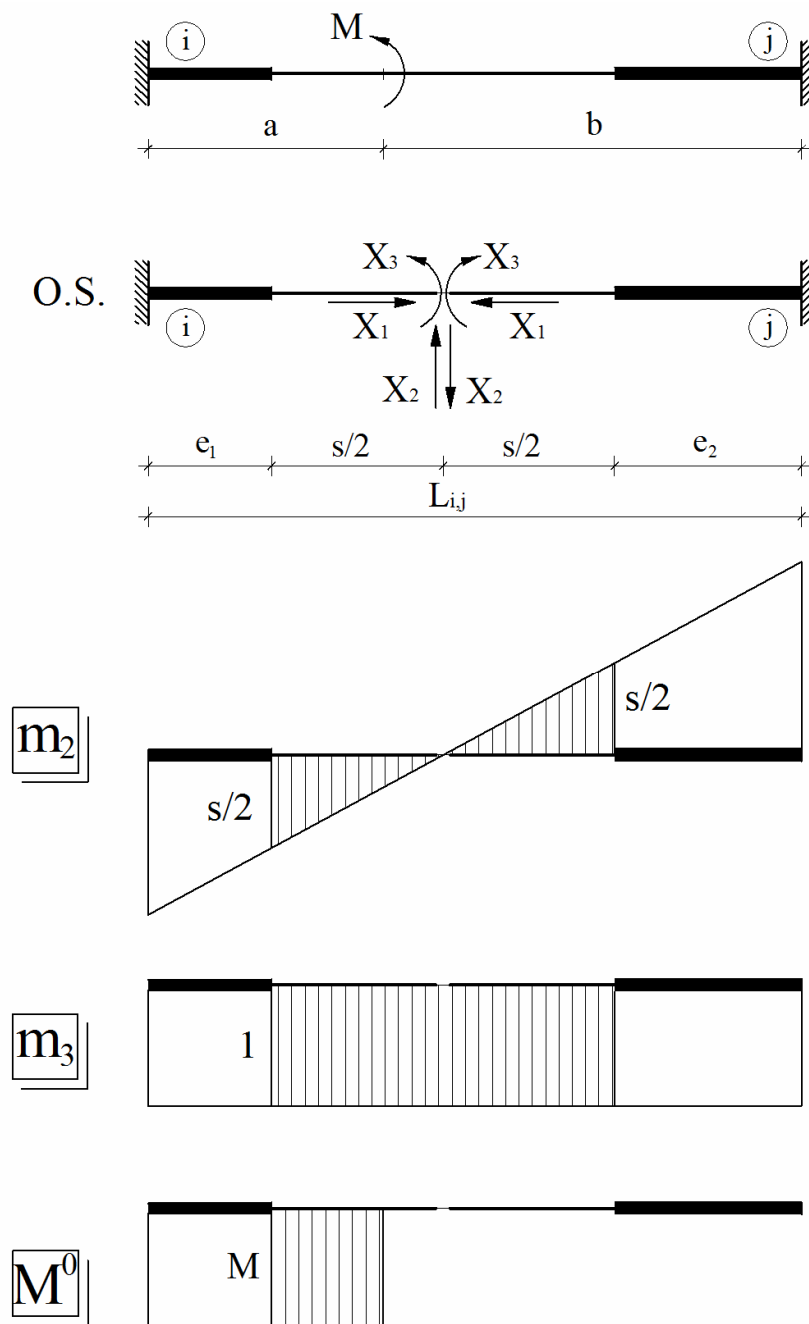


Slika 27.

vektor sila upetosti je

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}q \cdot s \\ -\frac{1}{12}q \cdot s \cdot (6e_1 + s) \\ 0 \\ -\frac{1}{2}q \cdot s \\ \frac{1}{12}q \cdot s \cdot (6e_2 + s) \end{bmatrix} \cdot$$

7.4. Sile upetosti za opterećenje koncentriranim momentom



Slika 28.

Odredimo „slobodne“ članove integracijom (slika 28.):

$$\delta_{20}^* = \int_0^L \left(\frac{M^0 \cdot m_2}{EI} + k \frac{T^0 \cdot t_2}{GA} \right) dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \left(\frac{M^0 \cdot m_2}{EI} + k \frac{T^0 \cdot t_2}{GA} \right) ds$$

$$\delta_{20}^* = \frac{1}{EI} \cdot (M \cdot (a - e_1)) \cdot \left(\frac{s}{2} - \frac{a - e_1}{2} \right) + 0$$

$$\delta_{20}^* = \frac{M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{2EI}$$

i

$$\delta_{30}^* = \int_0^L \frac{M^0 \cdot m_3}{EI} dx = \int_{e_1}^{e_1+s} \frac{M^0 \cdot m_3}{EI} ds$$

$$\delta_{30}^* = \frac{1}{EI} \cdot [M \cdot (a - e_1)] \cdot 1$$

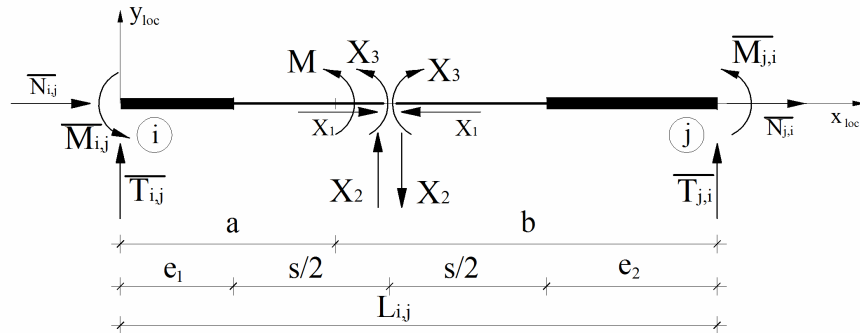
$$\delta_{30}^* = \frac{M \cdot (a - e_1)}{EI}$$

Prekobrojne sile su sada

$$X_2 = -\frac{\delta_{2,0}^*}{\delta_{2,2}^*} = -\frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)}$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{3,0}^*}{\delta_{3,3}^*} = -\frac{M \cdot (a - e_1)}{s}$$

Sile upetosti na krajevima slijede iz uvjeta ravnoteže (slika 29.).



Slika 29.

Sile na kraju i:

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0$$

$$\bar{T}_{i,j} + X_2 = 0$$

$$\bar{T}_{i,j} = -X_2$$

$$\bar{T}_{i,j} = \frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)}$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/i} = 0$$

$$\bar{M}_{i,j} + X_2 \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) + X_3 + M = 0$$

$$\bar{M}_{i,j} = -(X_2 \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) + X_3 + M)$$

$$\bar{M}_{i,j} = M \left[\frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} + \frac{(a - e_1)}{s} - 1 \right]$$

Sile na kraju j :

$$\sum_{m=1}^n F_{m,y} = 0$$

$$\bar{T}_{j,i} - X_2 = 0$$

$$\bar{T}_{j,i} = X_2$$

$$\bar{T}_{j,i} = -\frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)}$$

$$\sum_{m=1}^n M_{F_m/j} = 0$$

$$\bar{M}_{j,i} + X_2 \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) - X_3 = 0$$

$$\bar{M}_{j,i} = X_3 - X_2 \cdot (e_2 + \frac{s}{2})$$

$$\bar{M}_{j,i} = M \left[\frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} - \frac{(a - e_1)}{s} \right]$$

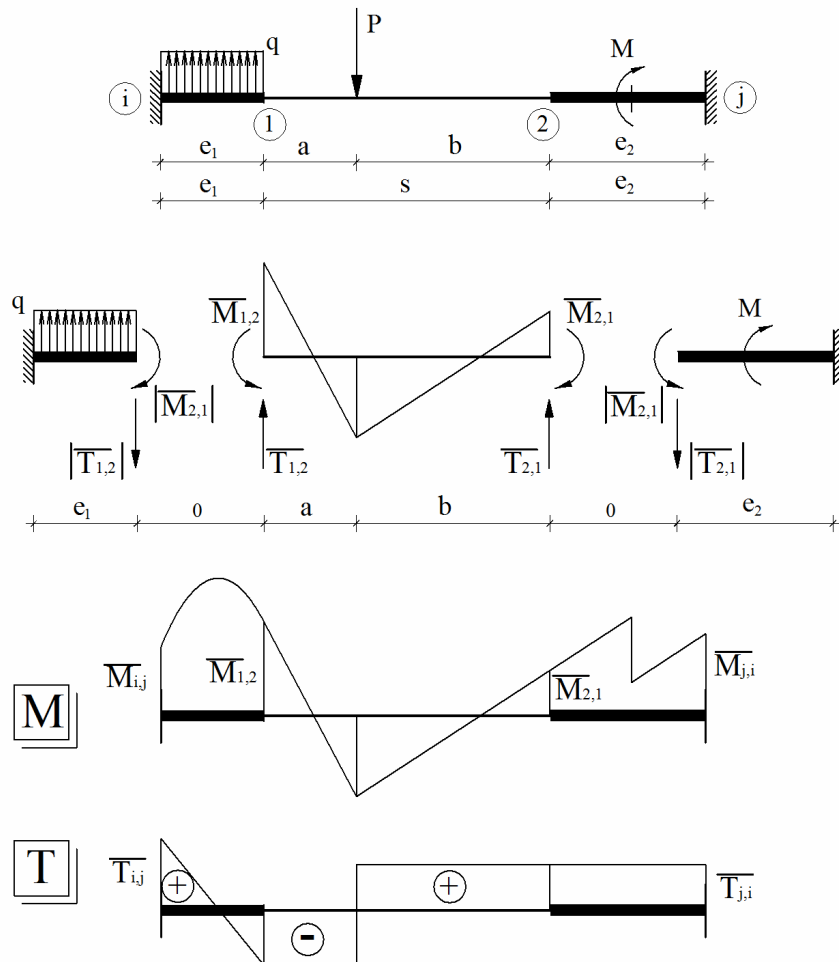
Sada je vektor sila upetosti za opterećenje koncentriranim momentom

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{i,j} \\ \bar{T}_{i,j} \\ \bar{M}_{i,j} \\ \bar{N}_{j,i} \\ \bar{T}_{j,i} \\ \bar{M}_{j,i} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} \\ \left[\frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot (e_1 + \frac{s}{2}) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} + \frac{(a - e_1)}{s} - 1 \right] \\ 0 \\ -\frac{6M \cdot (a - e_1) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} \\ \left[\frac{6 \cdot (a - e_1) \cdot (e_2 + \frac{s}{2}) \cdot (s + e_1 - a)}{s \cdot (s^2 + 2,4 \cdot (1 + \nu) \cdot h^2)} - \frac{(a - e_1)}{s} \right] \end{bmatrix}.$$

7.5. Dobivanje sila upetosti pomoću izraza iz priručnika

Sile upetosti moguće je dobiti i pomoću gotovih izraza iz priručnika¹. Tako možemo dobiti sile upetosti za elastični dio štapa, odnosno sile upetosti na spoju s krutim dijelom štapa. Konačne sile na krajevima štapnog elementa dobiti ćemo iz uvjeta da opterećenje krutog dijela i dobivene sile upetosti za elastični dio suprotnog predznaka čine uravnotežen sustav (*slika 30.*).

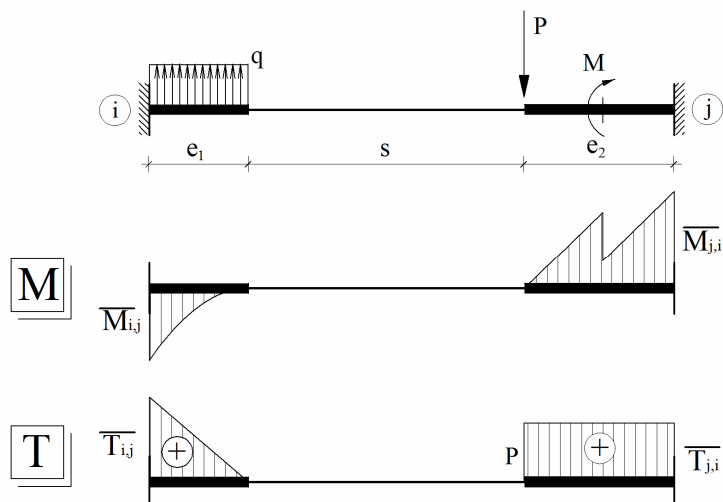
¹ U većini priručnika u izrazima za sile upetosti nije uzet u obzir utjecaj poprečne sile pa je moguća mala razlika u rezultatima u odnosu na rezultate dobivene prikazanim izrazima.



Slika 30.

7.6. Sile upetosti za opterećenje zadano samo na neizmjerne krutim dijelovima štapa

Djeluje li opterećenje samo na krutim dijelovima štapnog elementa, sile upetosti su statički određene i jednake su reakcijama konzole (slika 31.).



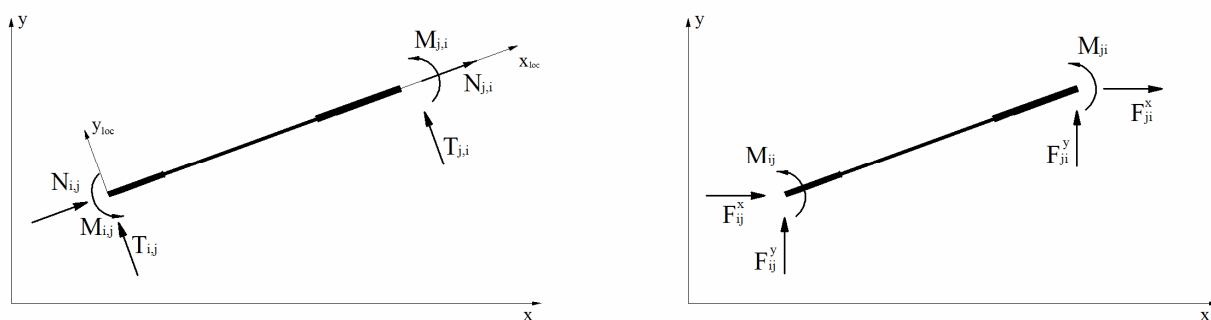
Slika 31.

8. SUSTAV JEDNADŽBI RAVNOTEŽE

Jednadžbe ravnoteže čvorova formalno se izvode na isti način kao i kod standardnih štapnih sistema u kojima su štapovi konstantne krutosti po cijeloj duljini. Za to je potrebno sile na krajevima elementa izraziti u globalnom koordinatnom sustavu, budući da se jednadžbe ravnoteže postavljaju u smjerovima globalnog koordinatnog sustava, a i globalni koordinatni sustav služi nam za definiranje geometrije, te se u odnosu na njega mjere apsolutni pomaci točaka sistema.

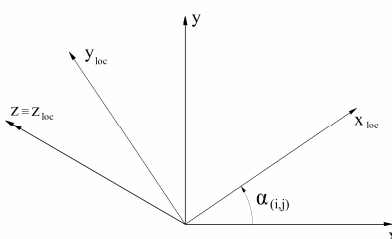
8.1. Prijelaz u globalni koordinatni sustav

Dakle, vektor sila, vektor pomaka i matricu krutosti potrebno je transformirati iz lokalnog u globalni koordinatni sustav (*slika 32.*).



Slika 32.

Kut između globalne osi x i lokalne osi x_{loc} kut je $\alpha_{(i,j)}$ (*slika 33.*), a transformacija koordinata iz globalnog u lokalni koordinatni sustav rotacija je oko osi $z \equiv z_{loc}$ za kut $\alpha_{(i,j)}$.



Slika 33.

Matrica transformacije sa poretkom komponenata koji odgovara vektoru $[N_{i,j} \quad T_{i,j} \quad M_{i,j}]^T$ glasi

$$\mathbf{r}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica za transformaciju vektora sila na krajevima štapnog elementa i vektora pomaka krajeva je

$$\mathbf{R}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} r_{(i,j)} & 0 \\ 0 & r_{(i,j)} \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$\mathbf{R}_{(i,j)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_{(i,j)} & \sin \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{(i,j)} & \cos \alpha_{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izraženi u lokalnom koordinatnom sustavu pomoću matrice za transformaciju sada su:

vektor vrijednosti sila na krajevima štapa izazvanog pomacima krajeva

$$\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{f}_{(i,j)}^g,$$

vektor sila upetosti

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g,$$

i vektor vrijednosti popćenih pomaka krajeva

$$\mathbf{u}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}^g.$$

Pri tom su komponente vektora

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \left[f_{i,j}^x \quad f_{i,j}^y \quad m_{i,j} \quad f_{j,i}^x \quad f_{j,i}^y \quad m_{j,i} \right]^T$$

vrijednosti sila na krajevima u stanju prisilnih pomaka rastavljenih na komponente usporedne s osima globalnog koordinatnog sustava. Također, tako su rastavljene i sile upetosti:

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g = \left[\bar{F}_{i,j}^x \quad \bar{F}_{i,j}^y \quad \bar{M}_{i,j} \quad \bar{F}_{j,i}^x \quad \bar{F}_{j,i}^y \quad \bar{M}_{j,i} \right]^T.$$

Vektor $\mathbf{u}_{(i,j)}^g$ sadrži komponente pomaka krajeva po pravcima usporednima s globalnim osima.

Naravno, pomaci krajeva štapnog elementa jednaki su pomacima čvorova, pa ako je

$$\mathbf{u}_i = \left[u_i \quad w_i \quad \varphi_i \right]^T$$

(pod)vektor vrijednosti komponenata pomaka čvora i , a

$$\mathbf{u}_j = [u_j \quad w_j \quad \varphi_j]^T$$

(pod)vektor vrijednosti komponenta pomaka čvora j , vektor vrijednosti pomaka čvorova možemo napisati

$$\mathbf{u}_{i,j} = [\mathbf{u}_i \quad \mathbf{u}_j]^T,$$

te je

$$\mathbf{u}_{(i,j)}^g = \mathbf{u}_{i,j}.$$

Transformacija iz lokalnog u globalni koordinatni sustav dana je izrazima:

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{(i,j)},$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)},$$

$$\mathbf{u}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{-1} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}.$$

Uvrstimo li u izraz $\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}$ izraze $\mathbf{f}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{f}_{(i,j)}^g$ i $\mathbf{u}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{i,j}$ dobivamo

$$\mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{f}_{(i,j)}^g = \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{i,j},$$

odnosno, nakon množenja s lijeva sa $\mathbf{R}_{(i,j)}^{-1}$,

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \mathbf{R}_{(i,j)}^{-1} \cdot \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{i,j}.$$

Umnožak $\mathbf{R}_{(i,j)}^{-1} \cdot \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{R}_{(i,j)}$ predstavlja matricu krutosti elementa izraženu u globalnom koordinatnom sustavu, a označavamo je sa $\mathbf{k}_{(i,j)}^g$.

Konačno možemo napisati (prevedeno u globalni koordinatni sustav)

$$\mathbf{f}_{(i,j)}^g = \mathbf{k}_{(i,j)}^g \cdot \mathbf{u}_{i,j},$$

ili,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{(i,j)_i}^g \\ \mathbf{f}_{(i,j)_j}^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{ii}}^g & \mathbf{k}_{(i,j)_{ij}}^g \\ \mathbf{k}_{(i,j)_{ji}}^g & \mathbf{k}_{(i,j)_{jj}}^g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix}.$$

8.2. Jednadžbe ravnoteže čvorova

Kada smo sve potrebne vektore preveli u globalni koordinatni sustav, možemo formirati jednadžbe ravnoteže.

Promatramo neki čvor i . Na njega djeluju sile od priključenih elemenata, a mogu djelovati i zadane ili reaktivne koncentrirane sile i momenti izraženi vektorom

$$\mathbf{p}_i = [P_i^x \quad P_i^y \quad M_i]^T.$$

Vektor ukupnih vrijednosti sila na i -tome kraju štapnog elementa (i, j) je

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{ii}}^g & \mathbf{k}_{(i,j)_{ij}}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g.$$

Formalni zapis uvjeta ravnoteže čvora i glasi

$$-\sum_{(i,e_i)} \hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g + \mathbf{p}_i = 0.$$

Budući da kraj i elementa (i, j) djeluje na čvor i suprotno orijentiranim silama, njihove su vrijednosti komponente vektora $-\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g$. Sumacija u zapisu uvjeta ravnoteže obavlja se, naravno, po svim elementima koji su priključeni u taj čvor.

Matrična jednačba uvjeta ravnoteže čvora sadrži tri jednačbe koje izražavaju uvjete iščezavanja zbroja sila koje na čvor i djeluju u smjeru osi x , iščezavanje zbroja sila u smjeru osi y te iščezavanje zbroja momenata savijanja.

Dakle, vrijedi

$$\sum_{(i,e_i)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{(i,j)_{ii}}^g & \mathbf{k}_{(i,j)_{ij}}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \right) = -\sum_{(i,e_i)} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g + \mathbf{p}_i.$$

Matrične jednačbe potrebno je napisati redom za sve čvorove sistema. Tako dobivamo sustav

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{q},$$

pri čemu su

\mathbf{K} ... matrica krutosti sa dijagonalnim blokovima $\mathbf{K}_{i,i} = \sum_{(i,e_i)} \mathbf{k}_{(i,e_i)_{ii}}^g$ i vandijagonalnim blokovima (ako su čvorovi i i j povezani elementom (i, j)) $\mathbf{K}_{i,j} = \mathbf{k}_{(i,j)_{ij}}^g$ i $\mathbf{K}_{j,i} = \mathbf{k}_{(i,j)_{ji}}^g$.

\mathbf{u} ... vektor koji sadrži nepoznate vrijednosti pomaka „slobodnih“ čvorova, ali i vrijednosti poznatih pomaka, a to su pomaci po pravcima ležajnih veza – spriječeni ili zadani pomaci ležajeva.

Vektor $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n]^T$ ima $3n$ komponenti, gdje je n broj čvorova sistema.

\mathbf{q} ... vektor koji sadrži sve zadane sile, reakcije i sile upetosti priključenih elemenata, odnosno, $\mathbf{q}_i = -\sum_{(i,e_i)} \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)_i}^g + \mathbf{p}_i$.

Vektor $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n]^T$ ima $3n$ komponenti.

8.3. Ukupne sile na krajevima elemenata

Zadatak cijelog proračuna metodom pomaka naći je vrijednosti sila na krajevima elemenata, odnosno naći vrijednosti unutarnjih sila. Te se vrijednosti izražavaju u lokalnom koordinatnom sustavu. Zbog toga je rješenje sustava

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{q},$$

odnosno, vrijednosti komponenata pomaka čvorova u smjerovima osi globalnog koordinatnog sustava, potrebno izraziti u lokalnom koordinatnom sustavu kao

$$\mathbf{u}_{(i,j)} = \mathbf{R}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{i,j}.$$

Vrijednosti konačnih sila na krajevima elementa sadržava vektor

$$\hat{\mathbf{f}}_{(i,j)} = \mathbf{k}_{(i,j)} \cdot \mathbf{u}_{(i,j)} + \bar{\mathbf{f}}_{(i,j)}.$$

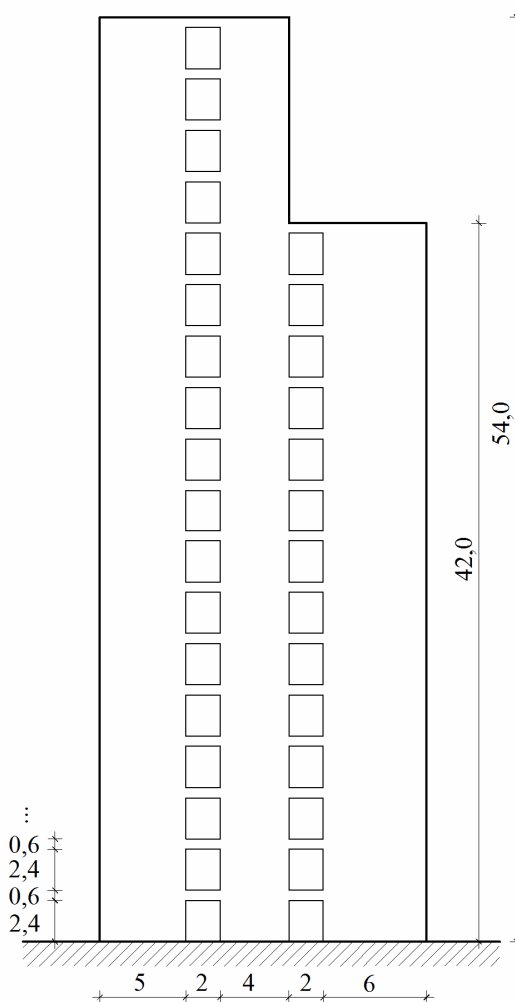
9. NUMERIČKI PRIMJER

Zadatak za numerički primjer preuzet je iz primjera I.10 iz knjige [7].

Zadan je zid promjenjive visine sa dva niza otvora. Prvi niz sastoji se od 18, a drugi od 14 otvora jednakih dimenzija. Pretpostavljena je debljina zida 1,0 m. Zid je opterećen jediničnom koncentriranom silom na vrhu. Sve potrebne dimenzije dane su na *slici 34*. Potrebno je odrediti vrijednosti unutrašnjih sila (M, T, N).

Karakteristike materijala:

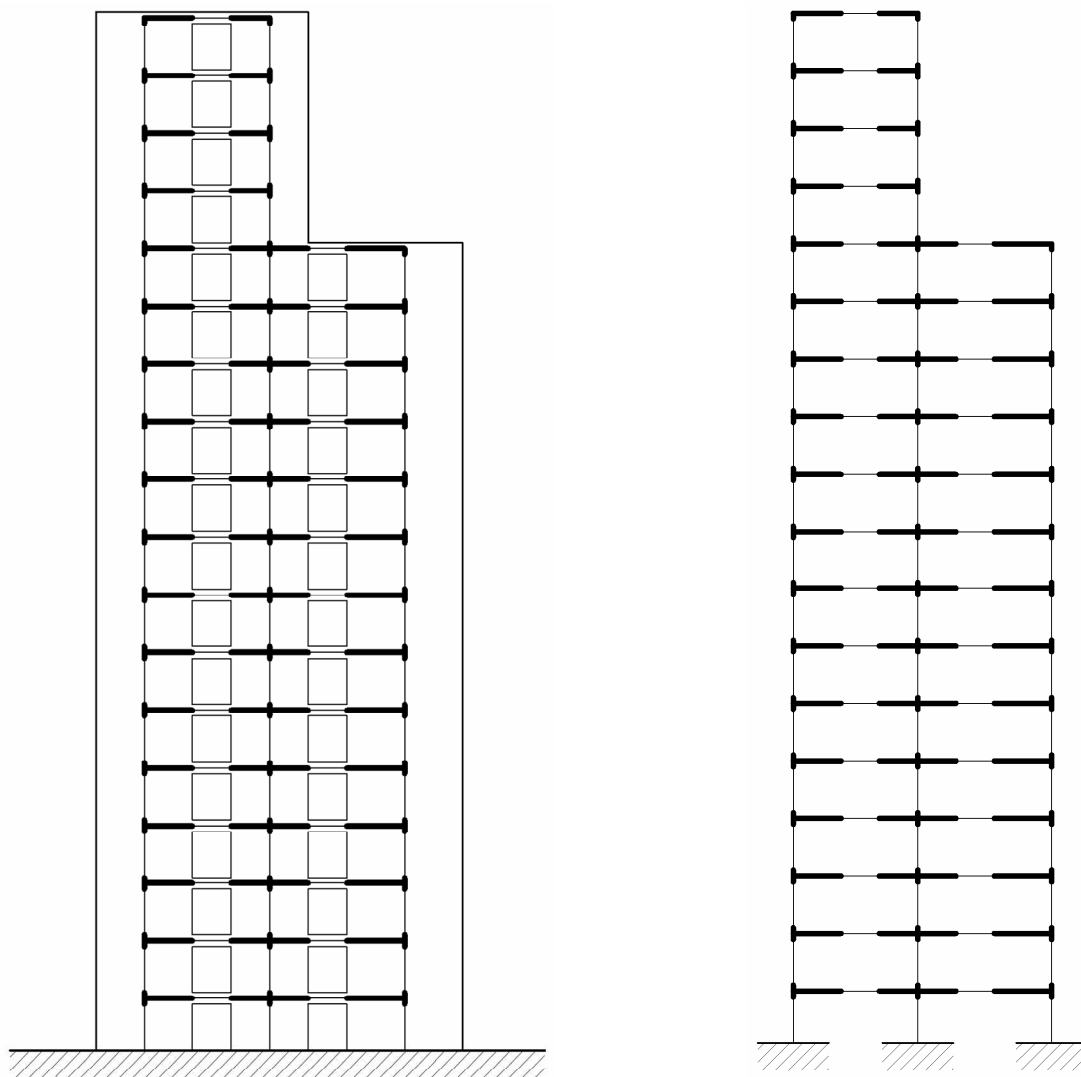
modul elastičnosti: $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$,
Poissonov koeficijent: $\nu = 0,25$.



Slika 34.

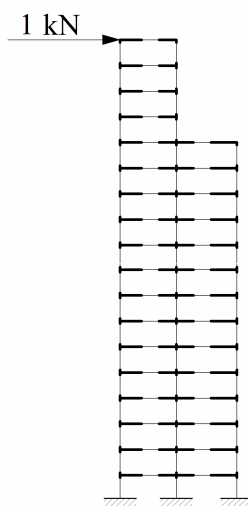
Postupak:

Za početak je potrebno odrediti proračunski model zida s otvorima. On se dobiva kao skup spojnica težišnih linija zidova (*slika 35.*).



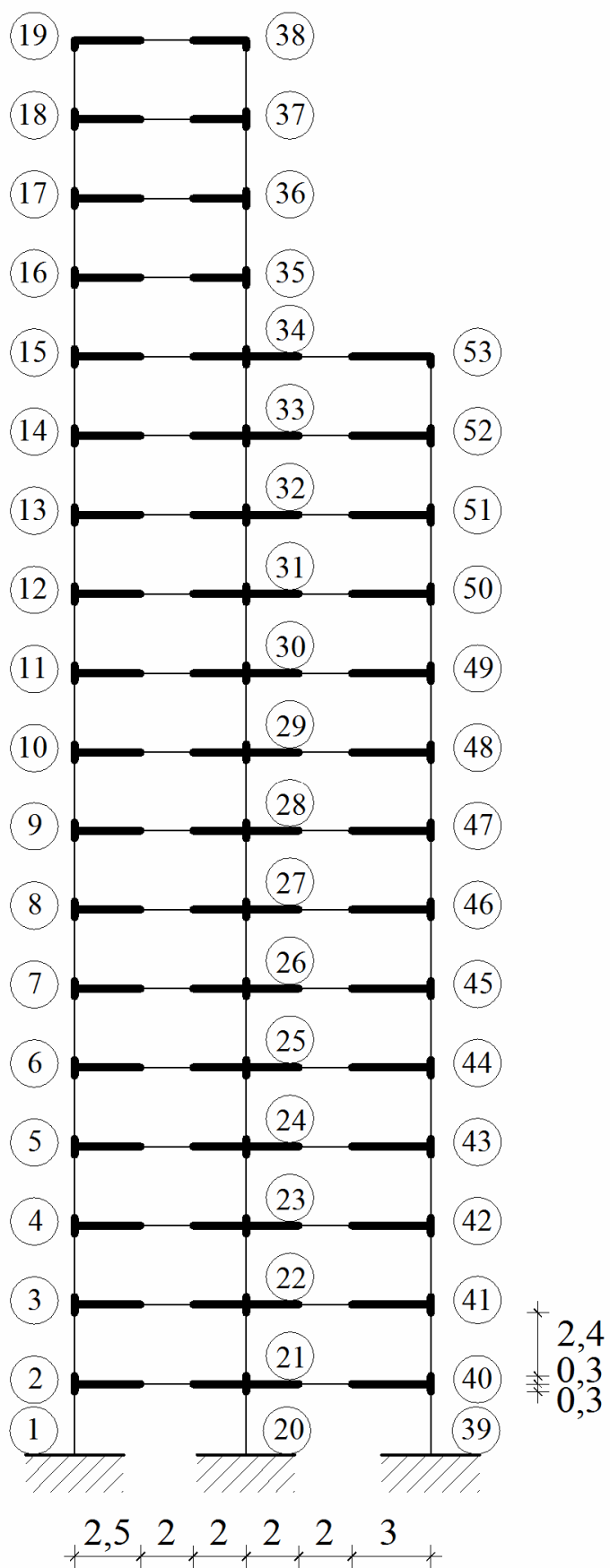
Slika 35.

Na takav model možemo nanijeti opterećenje (*slika 36.*).



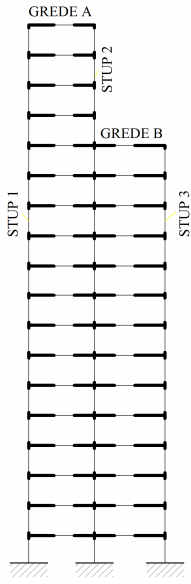
Slika 36.

Presječnice težišnih linija čvorovi su konstrukcije, a spojnice susjednih čvorova štapovi. Njihove su oznake i dimenzije prikazane na slici 37. i u tablici 2.



Slika 37.

Tablica 2.

	$b = 1$ [m]	h [m]	ŠTAPOVI	e_1 [m]	s [m]	e_2 [m]	L [m]
	STUP 1	5	(1,2)	0	2,4	0,3	2,7
			(2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (8,9), (9,10), (10,11), (11,12), (12,13), (13,14), (14,15), (15,16), (16,17), (17,18), (18,19)	0,3	2,4	0,3	3,0
	STUP 2	4	(20,21)	0	2,4	0,3	2,7
			(21,22), (22,23), (23,24), (24,25), (25,26), (26,27), (27,28), (28,29), (29,30), (30,31), (31,32), (32,33), (33,34), (34,35), (35,36), (36,37), (37,38)	0,3	2,4	0,3	3,0
	STUP 3	6	(39,40)	0	2,4	0,3	2,7
(40,41), (41,42), (42,43), (43,44), (44,45), (45,46), (46,47), (47,48), (48,49), (49,50), (50,51), (51,52), (52,53)			0,3	2,4	0,3	3,0	
GREDE A	0,6	(21,40), (22,41), (23,42), (24,43), (25,44), (26,45), (27,46), (28,47), (29,48), (30,49), (12,31), (13,32), (14,33), (15,34)	2,5	2,0	2,0	6,5	
GREDE B	0,6	(2,21), (3,22), (4,23), (5,24), (6,25), (7,26), (8,27), (9,28), (10,29), (11,30), (12,31), (13,32), (14,33), (15,34), (16,35), (17,36), (18,37), (19,38)	2,0	2,0	3,0	7,0	

Sve potrebno za proračun sada je navedeno. Proračun općom metodom pomaka izvršen je upotrebom programskog sustava **Mathematica**. U odnosu na proračun okvira sastavljenih od štapova konstantne krutosti po duljini, za ovaj je primjer bilo potrebno promijeniti samo matricu krutosti jer je opterećenje zadano u čvoru.

Dobiveni su rezultati prikazani u matričnom obliku na sljedećoj stranici.

Vrijednosti tako dobivenih poopćenih sila na krajevima elemenata uspoređene su u *tablicama 3., 4. i 5.* s vrijednostima dobivenim primjenom diferencijskih jednadžbi.

Relativne pogreške ε računane su prema izrazu

$$\varepsilon = \frac{|F_{i,j}^{OMP} - F_{i,j}^{MS}|}{|F_{i,j}^{OMP}|} \cdot 100 [\%],$$

pri čemu su

$F_{i,j}^{OMP}$... apsolutne vrijednosti poopćenih sila dobivenih općom metodom pomaka, proračunom u programskom sustavu **Mathematica**,

$F_{i,j}^{MS}$... apsolutne vrijednosti poopćenih sila dobivenih primjenom diferencijskih jednadžbi, odnosno rezultati dobiveni u primjeru I.10 knjige [7].

Tablica 3.

$N_{i,j}^{OMP}$	$N_{i,j}^{MS}$	ε
$N_{2,1} = 3,21374$	3,14583	2,11
$N_{40,39} = 3,24131$	3,36524	3,82
$N_{6,5} = 2,75251$	2,64889	3,76
$N_{44,43} = 2,68227$	2,82387	5,28
$N_{11,10} = 1,95274$	1,72802	11,51
$N_{49,48} = 1,53271$	1,73472	13,18
$N_{15,14} = 1,31904$	1,20898	8,34
$N_{53,52} = 0,358723$	0,42996	19,86
$N_{19,18} = 0,272878$	0,25113	7,97

Tablica 4.

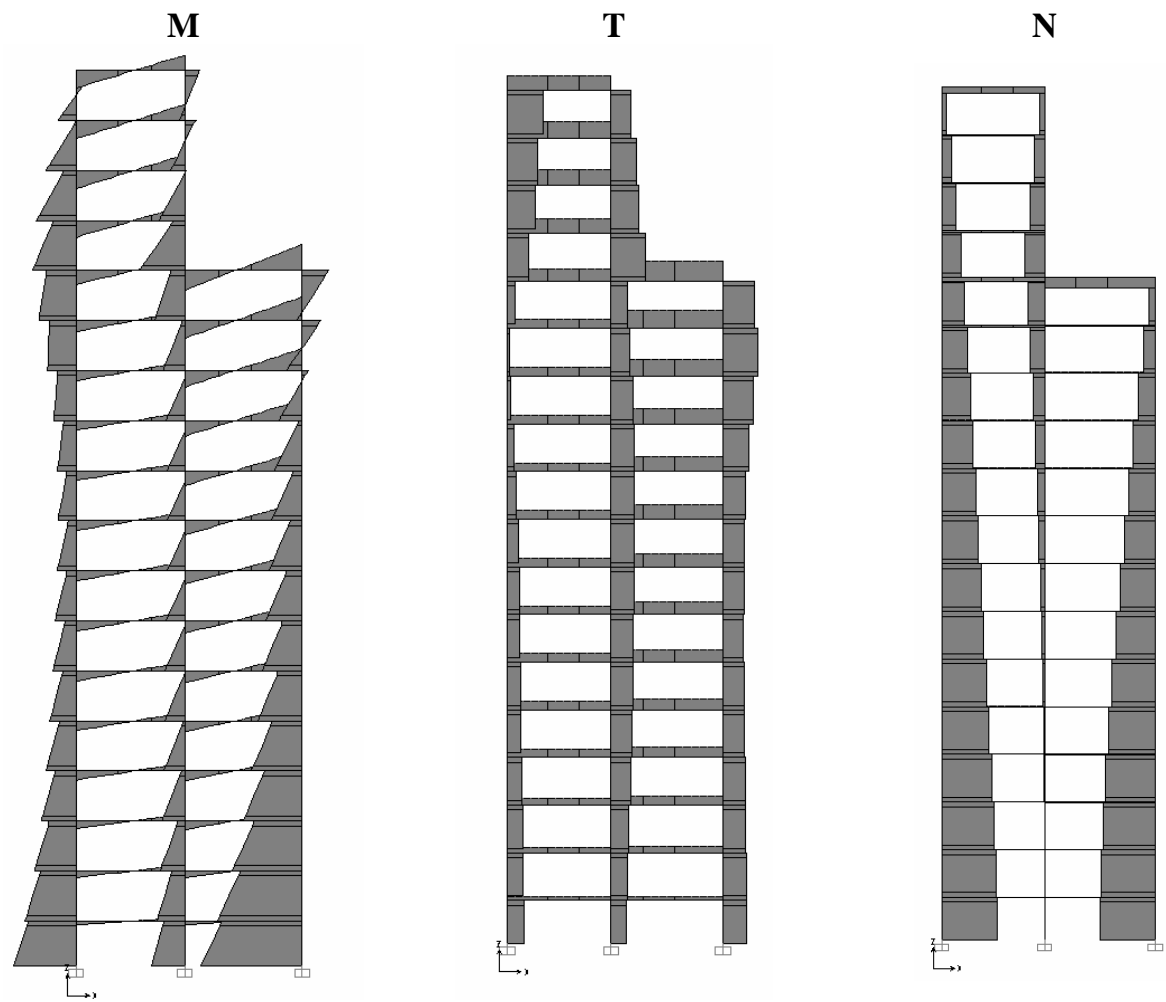
$T_{i,j}^{OMP}$	$T_{i,j}^{MS}$	ε
$T_{2,21} = 0,0631858$	0,071	12,37
$T_{21,40} = 0,0817383$	0,076	7,02
$T_{6,25} = 0,158337$	0,176	11,16
$T_{25,44} = 0,20288$	0,196	3,39
$T_{11,30} = 0,153141$	0,182	18,84
$T_{30,49} = 0,268817$	0,259	3,65
$T_{15,34} = 0,173731$	0,142	18,26
$T_{34,53} = 0,358723$	0,386	7,60
$T_{19,38} = 0,272878$	0,251	8,02

Tablica 5.

$\sum M_{i,j}$	$\sum M_{i,j}^{OMP}$	$\sum M_{i,j}^{MS}$	ε
$M_{1,2} = 3,41354$ $M_{20,21} = 3,21897$ $M_{39,40} = 3,78902$	10,42153	9,994	4,10
$M_{2,1} = -2,57937$ $M_{21,20} = -1,59948$ $M_{40,39} = -3,24267$	7,42152	6,994	5,76
$M_{5,6} = 1,56966$ $M_{24,25} = 1,13253$ $M_{43,44} = 2,63058$	5,33277	5,015	5,96
$M_{6,5} = -0,809227$ $M_{25,24} = -0,000247229$ $M_{44,43} = -1,52329$	2,332764229	2,015	13,62
$M_{10,11} = 0,967265$ $M_{29,30} = 0,953598$ $M_{48,49} = 1,65739$	3,578253	3,625	1,31
$M_{11,10} = -0,465036$ $M_{30,29} = 0,314433$ $M_{49,48} = -0,427642$	0,578245	0,625	8,09
$M_{14,15} = 2,00832$ $M_{33,34} = 1,62491$ $M_{52,53} = 0,28195$	3,91518	4,080	4,21
$M_{15,14} = -1,60235$ $M_{34,33} = -0,739365$ $M_{53,52} = 1,42654$	0,915175	1,080	18,01
$M_{18,19} = 0,967835$ $M_{37,38} = 0,25846$	1,226295	1,368	11,56
$M_{19,18} = 0,957495$ $M_{38,37} = 0,816209$	1,773704	1,632	7,99

Razlike u rezultatima mogu se opravdati različitim modelima i različitim osnovnim sustavima. Također, budući da se radi o relativno malim veličinama, posljedice zaokruživanja brojeva, posebice kod ručnog proračuna (knjiga [7]), mogu imati utjecaja.

Kvalitativni dijagrami prikazani su na slici 38.



Slika 38.

10. ZAKLJUČAK

U ovom je radu dana, ponajprije, teorijska osnova za proračun zidova s otvorima, „prevedenih“ u štapni model, općom metodom pomaka. Na način prikazan u radu mogu se riješiti svi štapni modeli zidova s otvorima koji nemaju međusobno spojene čvorove apsolutno krutim štapovima, jer u tom slučaju nije moguće formirati regularnu matricu krutosti takvog štapa.

Razmjerno laka kompjutorska formalizacija metode pomaka omogućava primjenu ove metode i ovakvog modeliranja u praksi, iako se danas za proračun građevinskih konstrukcija najčešće upotrebljava metoda konačnih elemenata.

Literatura

- [1] M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [2] K. Fresl: *Građevna statika 1.: bilješke i skice s predavanja*, <http://www.grad.hr/nastava/gb/bilj1/indeks.html>, pristupljeno: 5. srpnja 2008.
- [3] K. Fresl: *Građevna statika 2.: bilješke i skice s predavanja*, <http://www.grad.hr/nastava/gb/bilj2/indeks.html>, pristupljeno: 5. srpnja 2008.
- [4] V. Kazić: *Zidovi s otvorima*: prezentacija za seminare, “Studio-K” d.o.o.
- [5] V. Kazić: *Neke pogreške u modeliranju konstrukcija*: prezentacija za seminare, “Studio-K” d.o.o.
- [6] V. Simović: *Leksikon građevinarstva*, Masmedia d.o.o., Zagreb, 2002.
- [7] V. Simović: *Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [8] V. Šimić: *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [9] V. Šimić: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [10] I. Tomičić: *Prilog dimenzioniranju i armiranju nosivih i duktilnih zidova*, Naše građevinarstvo br. 1-1986, Beograd