

Sveučilište u Zagrebu
Građevinski fakultet

ZAVRŠNI RAD

VAINBERGOV TEOREM

Matea Vrljičak

Zagreb, 2009.

SADRŽAJ

1. Uvod.....	4
2. Stanje ravnoteže štapa	5
2.1. Izvod diferencijalnih jednačbi ravnoteže.....	6
2.2. Diferencijalne jednačbe ravnoteže izražene preko komponenata pomaka za Bernoulli-Eulerovu teoriju.....	9
2.3. Diferencijalne jednačbe ravnoteže izražene preko komponenata pomaka za Timošenkovu teoriju.....	11
3. Rubni uvjeti.....	13
4. Metoda virtualnog rada.....	15
4.1. Teorem o virtualnim pomacima za Bernoulli-Eulerovu teoriju	16
4.2. Teorem o virtualnim pomacima za Timošenkovu teoriju	17
4.3. Teorem o virtualnim pomacima za Bernoulli-Eulerovu teoriju izražen preko pomaka.....	18
4.4. Teorem o virtualnim pomacima za Timošenkovu teoriju izražen preko pomaka.....	19
4.5. Iskaz teorema.....	20
5. Potencijalna energija	
5.1. Iskaz potencijalne energije za Bernoulli-Eulerovu teoriju.....	22
5.2. Iskaz potencijalne energije za Timošenkovu teoriju.....	23
5.3. Iskaz teorema.....	23
6. Vainbergov teorem.....	24
6.1. Uvodno o funkcionalima.....	26
6.2. Iskaz teorema.....	30
6.3. Dokaz teorema.....	31

6.4.	Primjena teorema na Bernoulli-Eulerovu teoriju.....	33
6.5.	Primjena teorema na Timoškovu teoriju.....	36
7.	Zaključak.....	38
8.	Literatura.....	39

1. UVOD

Vainbergovim teoremom, kao temom ovog rada, na jednostavnom štapnom modelu iskazat ćemo, dokazati i primijeniti vezu potencijalne energije i virtualnog rada sustava zadržavajući se u okvirima linearnih odnosa sila i pomaka (tj. gdje vrijedi Hooke-ov zakon).

Samu primjenu pokazat ćemo za dvije važne teorije: Bernoulli-Eulerovu i Timošenkovu, a da bi proces od iskaza do primjene bio razumljiviji prethodno ćemo, za obje teorije, izvesti jednadžbe ravnoteže u diferencijalnom obliku te preko komponenata pomaka, iz čega ćemo dalje doći do iskaza teorema o virtualnim pomacima te iskaza teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije uz prikaz njihove primjene, naravno za obje teorije.

2. STANJE RAVNOTEŽE ŠTAPA

Ravnoteža je stanje mirovanja tijela kad su sve sile koje na nj djeluju međusobno neutralizirane.

Za promatranje uvjeta ravnoteže odabran je element kojem je dimenzija duljine značajno veća od dimenzija duljine i širine - štap.

Spomenuti štap je dalje definiran:

- poprečnim presjekom,
- osi štapa,
- duljinom štapa.

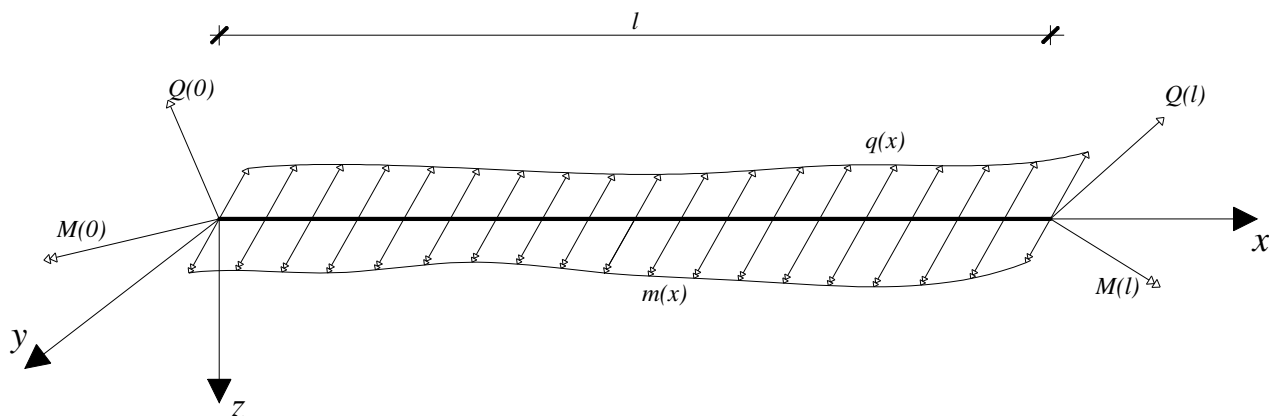
Poprečni presjek je određen kao geometrijski lik dobiven presijecanjem štapa ravninom koja je okomita na njegovu os, dok je os štapa linija koja spaja težišta poprečnih presjeka.

Promatranje ograničavamo na:

- ravne štapove,
- štapove čiji se poprečni presjeci ne mijenjaju po duljini (takozvane prizmatične ili cilindrične štapove),
- simetrične poprečne presjeke.

Duljina štapa je definirana konačnim brojem pomoću odsječka $[0,1]$ koji se nalazi na osi x .

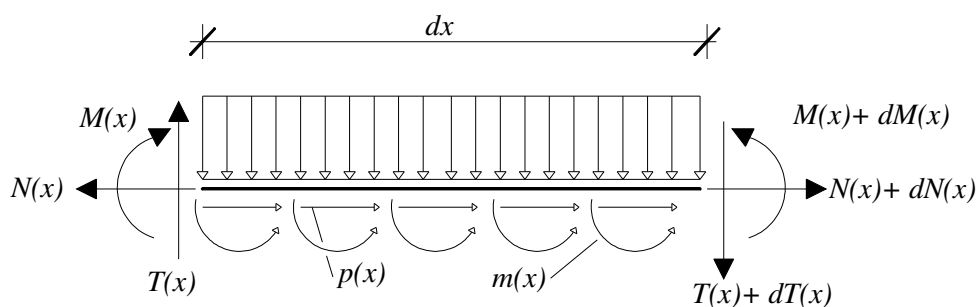
Tako definiran štap u prostoru opteretimo koncentriranim silama i momentima na početku i/ili kraju elementa te distribuiranim momentom i linijskom silom po cijeloj duljini (slika 1.).



Slika 1.

2.1. Izvod diferencijalne jednačbe ravnoteže

Iz opterećenog štapa izdvojimo beskonačno mali odsječak duljine dx kojeg dalje promatramo u xz ravnini (slika 2.).



Slika 2.

Diferencijalne jednačbe ravnoteže štapa dobivamo primjenom osnovnoga pravila ravnoteže elementa koje kaže da sve sile odnosno momenti koji djeluju na tijelo moraju (u stanju ravnoteže) iščezavati :

- projekcija na os x :

$$-N(x) + p(x) \cdot dx + N(x) + dN(x) = 0,$$

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0,$$

$$N'(x) + p(x) = 0;$$

- projekcija na os z :

$$-T(x) + q(x) \cdot dx + T(x) + dT(x) = 0,$$

$$\frac{dT(x)}{dx} + q(x) = 0,$$

$$T'(x) + q(x) = 0;$$

- ravnoteža momenta (oko desnog kraja):

$$-M(x) + m(x) \cdot dx + [q(x) \cdot dx] \cdot \frac{dx}{2} - T(x) \cdot dx + M(x) + dM(x) = 0,$$

$$\frac{dM(x)}{dx} + m(x) - T(x) = 0,$$

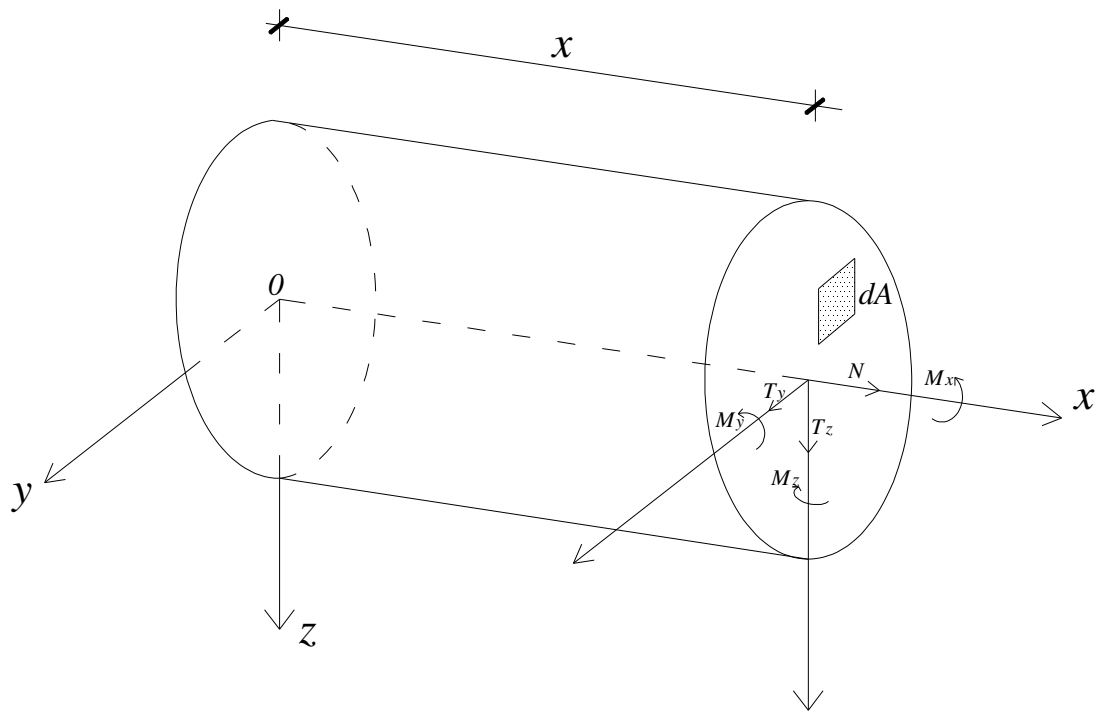
$$M'(x) - T(x) = 0.$$

(realna pretpostavka nepostojanja distribuiranih momenata)

Za izražavanje veze između komponenata unutarnjih sila i komponenata naprezanja štap presiječemo ravninom okomitom na njegovu os na proizvoljnoj udaljenosti x od ishodišta te promatramo raspodjelu naprezanja po poprečnom presjeku $A(x)$, (slika 3.).

Ograničenjem problema na naš ravninski zadatak (xz ravnina) dolazimo do zaključka da na infinitezimalno mali odsječak površine dA djeluje elementarna sila s komponentama

$$\sigma_x dA, \tau_{xy} dA \text{ i } \tau_{xz} dA.$$



Slika 3.

Sumiranjem tih elementarnih sila po poprečnom presjeku dobivamo izraze za unutarnje sile:

- uzdužnu silu N:
$$N = \int_A \sigma_x dA,$$
- poprečne sile T:
$$T_z = \int_A \tau_{xz} dA,$$
- moment savijanja M:
$$M_y = \int_A z \sigma_x dA.$$

Pod djelovanjem sila štap se deformira (mijenja oblik i dimenzije), a pojedine točke mijenjaju položaj u prostoru.

Ograničavamo se na opterećenja koja uzrokuju male pomake tj. dovoljno dobro se aproksimiraju linearnim izrazima, pa vrijedi (uz ograničenje na ravninski problem):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

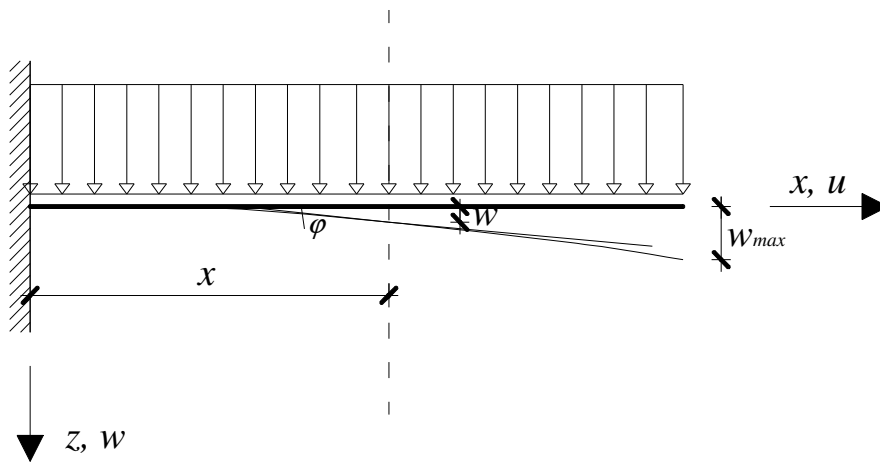
Male pomake označavamo u smjeru osi :

- u smjeru x - u : $u(x, z) = u(x) + z\vartheta(x),$
- u smjeru z - w : $w(x, z) = w(x).$

2.2. Diferencijalne jednačbe ravnoteže izražene preko komponenta pomaka za Bernoulli-Eulerovu teoriju

Ako pretpostavimo da za zadani štap vrijedi Bernoulli-Eulerova teorija, a za zadana opterećenja na elementu (prema slici 4.) da uzrokuju male deformacije (time i male pomake) onda možemo koristiti sljedeće pretpostavke te teorije:

- poprečni presjeci ostaju ravni pri pomaku- ne deformiraju se,
- poprečni presjeci i dalje ostaju okomiti na os štapa,
- pri deformiranju nema torzije.



Slika 4.

Kutovi zaokreta ravnina poprečnih presjeka su jednaki onima koje tangenta na zakrivljenu os štapa zatvara s osi x tj. $\vartheta = \varphi = -w'$.

Vrijedi

$$u(x, z) = u(x) + z\vartheta(x) = u(x) + z\varphi(x) = u(x) - zw'(x)$$

pa je:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) - zw''(x).$$

U Bernoulli-Eulerovoj teoriji posmična deformacija ne postoji što dokazujemo na sljedeći način:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} [u(x) - zw'(x)] + \frac{\partial}{\partial x} w(x) = -w'(x) + w'(x) = 0.$$

Vrijedi $\kappa = \varphi' = -w''$, pa pišemo

$$\varepsilon(x, z) = u'(x) + z\kappa(x).$$

U okvirima linearne teorije vrijedi Hooke-ov zakon linearnog odnosa naprezanja i deformacija tj. $\sigma_x = E\varepsilon(x)$ što uvrštavamo u izraze za unutarnje sile:

$$- N = \int_A \sigma_x dA = \int_A E\varepsilon(x) dA = \int_{A(x)} E[u'(x) + z\kappa(x)] dA;$$

kako je $\int_{A(x)} Ez\kappa(x) dA = 0$, dobivamo

$$N = Eu'(x) \int_A dA = EAu'(x);$$

$$- M_y = \int_A z\sigma_x dA = \int_A Ez\varepsilon(x) dA = \int_{A(x)} E[zu'(x) + z^2\kappa(x)] dA;$$

kako su $\int_{A(x)} Ezu'(x) dA = 0$, $\int_{A(x)} z^2 dA = I(x)$ dobivamo

$$M_y = EI(x)\kappa(x).$$

Uvrstimo li izraze za unutarnje sile u diferencijalne jednadžbe ravnine iz odjeljka 2.1., dobit ćemo diferencijalne jednadžbe ravnoteže izražene preko komponenata pomaka za Bernoulli-Eulerovu teoriju:

- uvrštavanje $N(x) = EAu'(x)$ u $N(x) = -p(x)$ daje

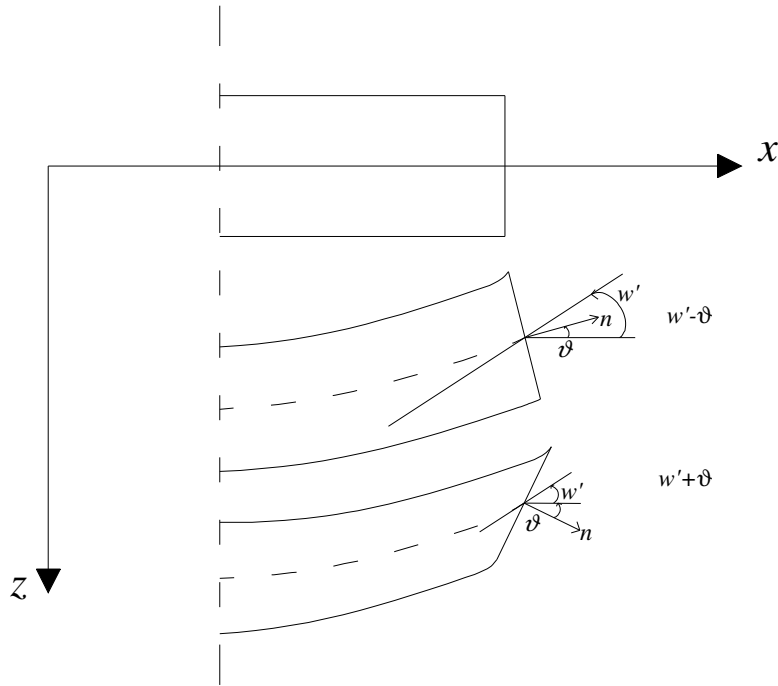
$$EAu''(x) = -p(x);$$

- uvrštavanje $M_y = -EI_y w''(x)$ u $M_y'' = -q(x)$ daje

$$EI_y w^{IV}(x) = q(x);$$

- diferencijalne jednadžbe ravnoteže sila u poprečnom smjeru ne možemo napisati u ovom obliku.

2.3. Diferencijalne jednadžbe ravnoteže izražene preko komponenta pomaka za Timošenkovu teoriju



Slika 5.

U Timošenkovoj teoriji polazimo od pretpostavke da ne vrijedi $\vartheta = \varphi = -w'$, nego je kut zaokreta normale na ravninu poprečnog presjeka (tj. kut zaokreta same ravnine poprečnog presjeka) sastavljen od kuta zaokreta osi te kuta od klizanja ravnine, $\vartheta = \varphi + \gamma$ (slika 5.), jer postoji posmična deformacija za koju pišemo:

$$\gamma = \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} [u(x) + z\vartheta(x)] + \frac{\partial}{\partial x} w(x) = \vartheta(x) + w'(x).$$

Za uzdužnu deformaciju vrijedi $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'(x) + z\vartheta'(x)$.

Primjenom Hooke-ova zakona u obliku $\tau = \tau_{xz} = G\gamma$ na jednadžbe ravnoteže dobivamo:

$$T(x) = T_z(x) = \int_A \tau_{xz} dA = \int_A G\gamma_{xz} dA = \int_A G[\vartheta(x) + w'(x)] dA = GA[\vartheta(x) + w'(x)] \frac{1}{k},$$

$$M(x) = M_y(x) = \int_A z\sigma_x dA = \int_A Ez\varepsilon(x) dA = \int_{A(x)} E[zu'(x) + z^2\vartheta'] dA = EI(x)\vartheta'(x);$$

za N je izvod analogan Bernoulli-Eulerovu.

Uvrštavanje dobivenih izraza za unutarnje sile u diferencijalne jednačbe ravnoteže iz odjeljka 2.1. daje diferencijalne jednačbe izražene preko komponenti pomaka za Timošenkovu teoriju.

Uvrštavanje $N(x) = EAu'(x)$ u $N(x) = -p(x)$ daje

$$EAu''(x) = -p(x).$$

Izraz $T(x) = \frac{GA}{k} [\vartheta(x) + w'(x)]$ uvrštavamo u $T(x) = -q(x)$ te je

$$\frac{GA}{k} [\vartheta(x) + w'(x)] = -q(x).$$

Uvrštavanjem izraza za $T(x)$ i $M_y(x) = EI(x)\vartheta'(x)$ u $M_y'(x) - T(x) = 0$ dobivamo

$$EI(x)\vartheta''(x) - \frac{GA}{k} [\vartheta(x) + w'(x)] = 0.$$

3. RUBNI UVJETI

Štap u prostoru pričvršćujemo ležajevima koje modeliramo rubnim uvjetima, čime je osigurana jedinstvenost rješenja.

Razlikujemo prirodne i geometrijske rubne uvjete:

- prirodni (Neumannovi) su uvjeti ravnoteže (zadani sila ili moment),
- geometrijski (Dirichletovi) su uvjeti kompatibilnosti (zadani progib ili rotacija).

U našem se slučaju radi o problemu savijanja koji može izazvati progib ili rotaciju, tako da na oba kraja zadajemo barem toliko geometrijskih uvjeta koliko je potrebno da spriječimo pomake štapa kao krutog tijela.

U svakoj točki rubni uvjet mora biti jednoznačno definiran.

Ako su zadani rubni uvjeti jednaki nuli, onda se radi o homogenim rubnim uvjetima.

Kraj štapa može biti : slobodan,

zglobno oslonjen,

upet.

Ako je rub štapa slobodan, onda mu je omogućena i rotacija i progib pa vrijedi:

$$T(0) = 0,$$

$$M(0) = 0;$$

isto vrijedi i za drugi rub:

$$T(l) = 0,$$

$$M(l) = 0.$$

Ako je rub štapa zglob onda ima omogućenu rotaciju a onemogućen progib pa vrijedi:

$$w(0) = 0,$$

$$M(0) = 0;$$

ili za drugi rub:

$$w(l) = 0,$$

$$M(l) = 0.$$

Ako je rub štapa upet onemogućeni su mu i progib i rotacija pa vrijedi:

$$w(0) = 0,$$

$$\varphi(0) = w'(0) = 0;$$

ili za drugi rub:

$$w(l) = 0,$$

$$\varphi(l) = w'(l) = 0.$$

4. METODA VIRTUALNOG RADA

Rad je definiran kao produkt sile i puta na kojem ta sila djeluje. Pri tom vanjske sile obavljaju rad na pomacima točaka u kojima djeluju, a unutarne na infinitezimalnim prirastima polja pomaka.

Za rad definiran na takav način potrebno je uočiti važnost obje stavke-ni beskonačno velika sila, ako je nepomična, ne može vršiti rad, a sam radi vrši samo ona komponenta sile koja zaista tijelo pomiče ili koja se tom pomicanju odupire tj. djeluje u smjeru puta pomicanja.

Dalje, uvažavamo bitnu činjenicu da rad je skalarna veličina a ne vektor, dakle neovisan je o promjeni koordinatnog sistema.

Kad je riječ o virtualnom pomaku, iz samog naziva je vidljivo da se radi o nečemu što nije stvarno (nego imaginarno/virtualno), što pruža mogućnost odabira uvjeta u kojima se rad odvija - odabira pomaka i sile da bismo zadovoljili matematičke izraze, ali istovremeno treba voditi računa da ti zamišljeni pomaci u određenoj mjeri odgovaraju mogućim realnim pomacima i zadovoljavaju jednadžbe kompatibilnosti.

Na temelju toga pretpostavljamo:

- sila koja vrši rad konstantna je uzduž cijelog virtualnog pomaka i jednaka je punom ili stvarnom iznosu na početku njena djelovanja,
- virtualni pomak se odvija po ravnoj putanji konstantnom brzinom,
- rad vanjske sile ne ovisi o putu, nego o početnoj i završnoj točki pomaka (takvu silu nazivamo konzervativnom),
- poznata je početna točka pomaka.

Glavna odlika ove metode je to što je gotovo jednako prikladna za rješavanje kako jednostavnih tako i složenih sistema, a u slučaju idealnih veza daje jednadžbu koja na sadrži reakcije veza nego samo efektivne sile. To je posebno važno za statičku analizu sistema gdje nije bitno odrediti sve reakcije tj. sile koje djeluju.

Na principu virtualnog rada temeljimo teorem o virtualnim pomacima.

Naše promatranje ograničavamo na ravninu xz u kojoj se nalazi štap u stanju ravnoteže opterećen na savijanje.

Općenito, ako je štap u ravnoteži, onda je i bilo koji infinitezimalni dio štapa u ravnoteži pa za njega vrijede diferencijalne jednačbe ravnoteže:

$$N'(x) + p(x) = 0,$$

$$T'(x) + q(x) = 0,$$

$$M'(x) - T(x) = 0. \text{ (uz uobičajenu pretpostavku da distribuirani moment iščezava)}$$

4.1. Teorem o virtualnim pomacima za Bernoulli-Eulerovu teoriju

Uz pretpostavku Bernoulli-Eulerove teorije za promatrani štap opterećen na savijanje dokaz možemo provesti na sljedeći način, ako pretpostavimo ravnotežno stanje i sustavu damo mali virtualni pomak.

Jednadžbu ravnoteže

$$M''(x) + q(x) = 0$$

množimo s $\delta w(x)dx$ te integriramo po duljini elementa:

$$\int_0^l M''(x)\delta w(x)dx + \int_0^l q(x)\delta w(x)dx = 0.$$

Ako prvi član na lijevoj strani transformiramo pomoću dvije parcijalne integracije i uvažimo jednakosti

$$M'(x) = T(x),$$

$$\delta w'(x) = -\delta\varphi(x),$$

$$\delta w''(x) = -\delta\kappa(x),$$

za štap u xz ravnini opterećen na savijanje za kojeg vrijedi Bernoulli-Eulerova teorija možemo pisati

$$T(l)\delta w(l) - T(0)\delta w(0) + M(l)\delta\varphi(l) - M(0)\delta\varphi(0) + \int_0^l q(x)\delta w(x)dx = \int_0^l M(x)\delta\kappa(x)dx.$$

4.2. Teorem o virtualnim pomacima za Timošenkovu teoriju

Međutim, ako pretpostavimo da vrijedi Timošenkova teorija, gdje je kut zaokreta normale na ravninu poprečnog presjeka sastavljen od kuta zaokreta štapa te kuta zbog klizanja te ravnine (što u Bernoulli- Eulerovoj teoriji ne postoji) onda postoji (osim virtualnog rada momenta savijanja) virtualni rad poprečnih sila, pa promatramo

$$M'(x) - T(x) = 0,$$

$$T'(x) + q(x) = 0.$$

Prvu jednakost množimo s $\delta\vartheta(x)dx$, a drugu s $\delta w(x)dx$, te obje integriramo po duljini elementa (jer se element progiba za δw , a zaokreće za $\delta\vartheta$):

$$\int_0^l M'(x)\delta\vartheta(x)dx - \int_0^l T(x)\delta\vartheta(x)dx = 0,$$

$$\int_0^l T'(x)\delta w(x)dx + \int_0^l q(x)\delta w(x)dx = 0.$$

Dobivene izraze zbrojimo, provedemo potrebne parcijalne integracije i presložimo, a kako za Timošenkovu teoriju vrijedi $\delta\vartheta = \delta\varphi + \delta\gamma = -\delta w' + \delta\gamma$ tj. $\delta\gamma = \delta\vartheta + \delta w$ možemo napisati jednadžbu virtualnog rada za štap u xz ravnini opterećen na savijanje, za koji vrijedi Timošenkova teorija

$$T(l)\delta w(l) - T(0)\delta w(0) + M(l)\delta\vartheta(l) - M(0)\delta\vartheta(0) + \int_0^l q(x)\delta w(x)dx = \int_0^l [M(x)\delta\vartheta'(x) + T(x)\delta\gamma(x)]dx.$$

4.3. Teorem o virtualnim pomacima za Bernoulli-Eulerovu teoriju izražen preko pomaka

Pomnožimo li jednačbu ravnoteže zapisanu preko pomaka :

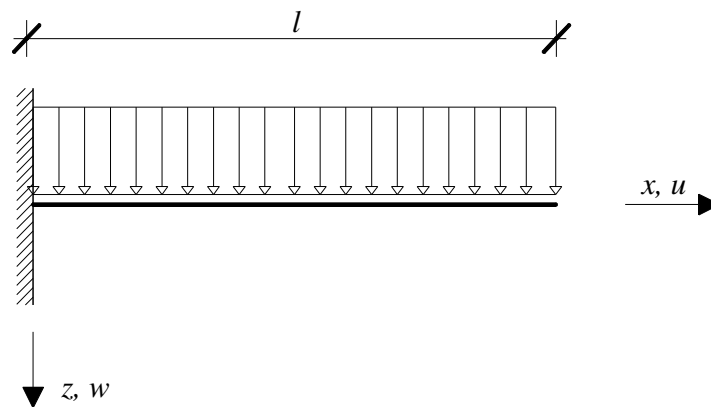
$$(EI_y w'')'' - q = 0$$

s δw te integriramo po duljini $[0, l]$,

$$\int_0^l [(EI_y w'')'' - q] \delta w dx = 0,$$

$$\int_0^l (EI_y w'')'' \delta w dx - \int_0^l q \delta w dx = 0,$$

nakon dvaju parcijalnih integracija prvog člana i uvrštavanja rubnih uvjeta za konzolu sa slike 6.:



Slika 6.

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \\ \varphi(0) = w'(0) &= 0, \end{aligned} \quad \text{(upeti rub)}$$

$$\begin{aligned} T(l) &= 0, \\ M(l) &= 0, \end{aligned} \quad \text{(slobodni rub)}$$

dobivamo

$$\int_0^l EI_y w'' \delta w'' dx - \int_0^l q \delta w dx = 0,$$

odnosno

$$\int_0^l EI_y w'' \delta w'' dx = \int_0^l q \delta w dx .$$

Uvođenjem funkcionala $G(w; \delta w) = W_U - W_V$, pri čemu su

$$W_U = \int_0^l EI_y w'' \delta w'' dx \quad \text{virtualni rad unutarnjih sila,}$$

$$W_V = \int_0^l q \delta w dx \quad \text{virtualni rad vanjskih sila,}$$

prethodnu jednakost možemo napisati i u obliku $G(w; \delta w) = 0$.

4.4. Teorem o virtualnim pomacima za Timošenkovu teoriju izražen preko pomaka

Odgovarajući iskaz teorema mogli bismo i sada izvesti polazeći od diferencijalnih jednadžbi ravnoteže iz odjeljka 2.3. Drugi je način neposredno uvrštavanje izraza za T i M_y ,

$$\frac{GA}{k} [v' + w'] = T,$$

$$M_y = EI v'',$$

te virtualnih pomaka δw , δv i $\delta \gamma = \delta w' + \delta v$ u izraz za virtualni rad izveden u odjeljku 4.2.

Za naš primjer (konzola sa slike 6.) dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_0^l EI v'' \delta v'' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + v) (\delta w' + \delta v) dx \\ = \int_0^l q \delta w dx. \end{aligned}$$

Uvođenjem funkcionala $G(w, v; \delta w, \delta v) = W_U - W_V$, gdje je W_U virtualni rad unutarnjih sila (podizraz s lijeve strane znaka jednakosti) i W_V virtualni rad vanjskih sila (podizraz s desne strane), prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$G(w, v; \delta w, \delta v) = 0.$$

Potrebno je napomenuti da polje virtualnih pomaka i za Timošenkovu i Bernoulli-Eulerovu teoriju moraju zadovoljavati homogene geometrijske uvjete rubnog problema.

4.5. Iskaz teorema

Ako u jednakostima

$$\int_0^l EI_y w'' \delta w'' dx = \int_0^l q \delta w dx$$

$$\int_0^l EI \vartheta' \delta \vartheta' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \vartheta) (\delta w' + \delta \vartheta) dx = \int_0^l q \delta w dx$$

izraze na lijevoj strani protumačimo kao rad unutarnjih sila, a izraze na desnoj strani kao rad vanjskih sila, onda ga možemo nazvati principom virtualnog rada :

Ako je tijelo pod zadanim opterećenjem u stanju ravnoteže, onda zbroj rada stvarnih vanjskih sila na virtualnim pomacima i rada stvarnih unutarnjih sila na virtualnim deformacijama mora biti jednak nuli.

Vrijedi i obrat:

Ako je zbroj rada stvarnih vanjskih sila na virtualnim pomacima jednak radu stvarnih unutarnjih sila na virtualnim deformacijama, onda se tijelo pod zadanim opterećenjem nalazi u stanju ravnoteže.

5. POTENCIJALNA ENERGIJA

Potencijalna energija štapa je jednaka zbroju potencijalne energije deformacije i potencijalne energije vanjskih sila.

Potencijalna energija vanjskih sila izražava se kao rad vanjskih sila, ne ovisi o redoslijedu nanošenja sila, nego je određena konačnom vrijednosti sila i pomaka.

Ako imamo više sila pri njihovom zajedničkom djelovanju svaka sila obavlja rad i na pomaku izazvanom nekom drugom silom, pa se princip superpozicije može primijeniti samo kad je rad jedne sile na pomaku izazvanom drugom silom jednak nuli.

Za potencijalnu energiju vanjskih sila vrijedi

$$W_v = \int_0^l q(x)w(x)dx + \sum_i P_i s_i$$

pri čemu je $\sum_i P_i s_i$ rad koncentriranih sila P na pomacima označenima sa s što mi u našem slučaju nemamo pa taj dio zanemarujemo.

Potencijalna energija deformacije, tj. energija potrebna za uklanjanje deformacija izražava se kao rad unutarnjih sila. Zamislimo li da smo s dva beskonačno bliska presjeka iz ravnog štapa izrezali element duljine dx , na njegovim se krajevima javljaju komponente unutarnjih sila, koje smatramo vanjskim silama u odnosu na element.

Za naš ravninski problem se javljaju samo komponente N , T_z te M_y i njihov rad iznosi:

N :

$$dU_{(N)} = \frac{N\Delta dx}{2},$$

$$\Delta dx = \frac{Ndx}{EA},$$

$$U_{(N)} = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA};$$

M_y :

$$dU_{(M_y)} = \frac{M_y d\vartheta}{2},$$

$$\Delta\vartheta = \frac{M_y dx}{EI_y},$$

$$U_{(M_y)} = \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y};$$

T_z :

$$U_{(T_z)} = \int_0^l k \frac{T_z^2 dx}{2GA}.$$

5.1. Iskaz potencijalne energije za Bernoulli-Eulerovu teoriju

Ako pretpostavimo Bernoulli- Eulerovu teoriju od vanjskih sila imamo samo linijsko opterećenje, a od unutarnjih samo moment vrši rad, a taj izraz transformiramo na sljedeći način:

$$W_U = \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y},$$

$$M_y = -EI_y \kappa(x),$$

$$w'' = \kappa(x),$$

$$\Rightarrow W_U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y (w'')^2 dx.$$

Konačno, potencijalnu energiju štapa za Bernoulli- Eulerovu teoriju izražavamo preko pomaka kao:

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y (w'')^2 dx - \int_0^l q w dx + C,$$

pri čemu C označava neodređenu skalarnu vrijednost iznosa energije od koje smo počeli mjeriti potencijalnu energiju, jer energija nije definirana u nuli.

5.2. Iskaz potencijalne energije za Timošenkovu teoriju

Ali ako pretpostavimo Timošenkovu teoriju za koju vrijedi da poprečni presjeci pri djelovanju opterećenja ostaju ravni, ali više nisu okomiti na os štapa, onda rad vrše vanjska linijska sila a od unutarnjih osim momenta rad vrši i poprečna sila, pa izraz za potencijalnu energiju štapa za kojeg vrijedi Timošenkova teorija glasi:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \int_0^l k \frac{T_z^2 dx}{2GA} - \int_0^l qwdx + C,$$

odnosno, izraženo preko pomaka

$$\Pi(w, \vartheta) = \frac{1}{2} \int_0^l EI_y \vartheta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \vartheta)^2 dx - \int_0^l qwdx + C.$$

Potencijalna energija zapisana na ovakav način ima oblik funkcionala koji se može objasniti kao " funkcija funkcije " koja kao rezultat daje broj tj. daje vrijednost funkcije za neku funkciju.

5.3. Iskaz teorema

Teorem o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije sustava glasi:

Od svih mogućih stanja pomaka ravnotežnu konfiguraciju čini ono polje pomaka za koje potencijalna energija sistema, kao funkcija vrijednosti pomaka i odgovarajućih deformacija, poprima stacionarnu vrijednost.

Pri linearnom odnosu sila i pomaka ta je vrijednost minimalna.

6. VAINBERGOV TEOREM

Vainbergov teorem je teorem koji pruža vezu između energetske funkcionala te funkcionala virtualnog rada. On daje uvjet uz koji energetski funkcional postoji i izraz pomoću kojeg ga možemo izvesti iz funkcionala virtualnog rada.

Drugim riječima, alternativna forma načela virtualnog rada je načelo stacionarne vrijednosti potencijalne energije. Ta povezanost je fizikalno opravdana činjenicom da je energija potrebna za obavljanje rada.

Međutim, ova tvrdnja nije univerzalno primjenjiva jer energetski principi ne postoje za sve probleme, čak ni ako ti problemi posjeduju fizikalno razumljivo objašnjenje ponašanja, dok s druge strane virtualni rad uvijek postoji.

Iako ne postoje za sve probleme, energetski principi su jako bitni, jer nam njihovo proučavanje pomaže u određivanju i razumijevanju ponašanja naših sistema.

Jednostavan primjer je štap izložen uzdužnoj tlačnoj sili prema slici 7.:



Slika 7.

Za bilo koji iznos sile P sistem je u ravnoteži; međutim, on ne može izdržati proizvoljno veliku tlačnu silu, a da pritom ostane ravan.

Iznos tlačne sile do koje taj štap još uvijek ostaje ravan je kritična Eulerova sila nazvana po Euleru koji se posvetio istraživanju stabilnosti sistema opterećenih tlačnih silama, i iznosi

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}.$$

Svaka druga, veća sila izaziva njegovo izvijanje, a tu dolazi do razilaženja od razmatranja analize linearnih sistema, gdje pretpostavljamo da jednadžbe ravnoteže možemo pisati u nedeformiranom obliku, dok u nelinearnoj teoriji moramo prvo ustanoviti uvjete ravnoteže na deformiranom sistemu, a tek onda provesti kontrolu stabilnosti sistema.

Iz ovoga primjera je vidljivo da za opis ponašanja mehaničkih sistema nije dovoljno samo ravnotežu zadovoljiti, nego je potrebno kontrolirati i stabilnost sistema što daje motivaciju za proučavanje energetske principa.

Naša promatranja ograničavamo na statičku stabilnost i konzervativne sustave. Pod sustavom smatramo tijelo sa silama, a izraz konzervativni označava postojanje energetskog funkcionala (za koji smo već istakli da može, a i ne mora postojati).

Ta klasa sustava obuhvaća hiperelastične sustave koji su izloženi djelovanju konzervativnih sila (primjer konzervativne sile je sila gravitacije-nije bitna putanja, nego početna i završna točka djelovanja).

6.1. Uvodno o funkcionalima

Prije iskaza i dokaza teorema potrebno je objasniti matematičke operacije koje se provode na funkcionalima.

Jedna takva operacija je veličina promjene funkcionala.

Kako je funkcional funkcija čiji argumenti su funkcije, veličinu promjene ne možemo poistovjetiti s derivacijom u obične funkcije koja je limes omjera razlike vrijednosti funkcije u dvije točke i udaljenosti tih točaka.

Drugачije rečeno, ne možemo za funkcionale računati promjene kao *div* ili *grad* jer argumenti funkcionala nemaju istu prostornu organizaciju kao argumenti obične funkcije.

Promatramo funkcional $J(u)$ i funkciju $u(x)$, te još jednu funkciju, $v(x)$, koja je definirana na istom području kao i $u(x)$.

Osim što možemo izračunati skalarnu vrijednost funkcionala $J(u)$ u u , također možemo odrediti i njegovu vrijednost u $J(u + \varepsilon v)$ za bilo koju vrijednost skalara ε , tako da J možemo smatrati i funkcijom s argumentom ε za unaprijed određene funkcije u i v :

$$J(\varepsilon) = J[w(\varepsilon)] = J(u + \varepsilon v).$$

Za funkciju w vrijedi:

$$w(0) = u \text{ i}$$

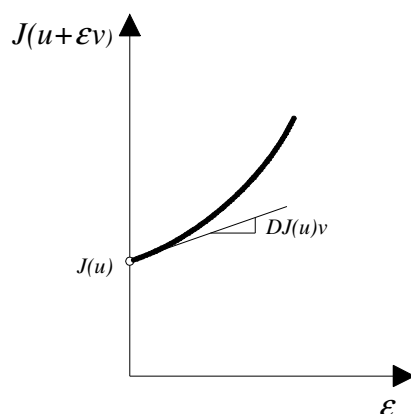
$$w'(0) = v.$$

Dodavanjem εv početnom obliku u stvaramo novu funkciju koja se sve više približava u ako $\varepsilon \rightarrow 0$ a sve više εv ako se ε povećava.

Zaključujemo da je ε parametar koji kontrolira naše pomicanje u smjeru v .

Nas zanima iznos promjene funkcionala u trenutku kad se počinjemo udaljavati od u , tj. kad vrijedi da je $\varepsilon = 0$.

Ta promjena se može izračunati kao nagib krivulje $J(u + \varepsilon v)$ u $\varepsilon = 0$, što je prikazano na slici 8.



Slika 8.

Tu promjenu nazivamo veličinom promjene funkcionala i označavamo ju kao $DJ(u) \cdot v$ što se čita: promjena funkcionala J u u prema v .

Promjenu funkcionala određujemo preko formule

$$DJ(u) \cdot v = \frac{d}{d\varepsilon} [J(u(x) + \varepsilon v(x))]_{\varepsilon=0}.$$

Ovaj izraz računa promjenu funkcionala J krenuvši od funkcije $u(x)$ u smjeru $v(x)$. Deriviramo u odnosu na skalarni parametar ε , a nakon deriviranja u izraz uvrštavamo $\varepsilon = 0$, tako da u konačnosti dobivamo funkcional koji za argumente ima dvije funkcije u i v , i ne ovisi o vrijednosti ε .

Vidljivo je da je formula za deriviranje funkcionala samo poopćeni zapis formule za deriviranje običnih funkcija kao npr. $f(\theta)$ koja glasi:

$$Df(\theta) \cdot \bar{\theta} = \frac{d}{d\varepsilon} [f(\theta + \varepsilon \bar{\theta})]_{\varepsilon=0} = \frac{df}{d\theta} \bar{\theta}$$

tj. derivacija pomnožena skalarom-konstantom.

Za skalar $\bar{\theta}$ nije pogrešno uzeti $\bar{\theta} = 1$.

Kao i svaka druga funkcija, i funkcional $J(u)$ posjeduje neke maksimalne ili minimalne vrijednosti-ekstrem, koje tražimo na isti način kao i kod običnih funkcija primjenom Fermatove leme koja kaže da je nužan uvjet ekstrema u nekoj točki taj da je u njoj vrijednost prve derivacije jednaka nuli, a karakter ekstrema (minimum / maksimum) je vidljiv iz druge derivacije.

Osim objašnjenja veličine promjene funkcionala, za provođenje dokaza nam je potrebna i sljedeća tvrdnja:

Veličina promjene funkcionala $G(u, w)$ zadovoljava jednakost:

$$\int_a^b DG(u + sv, w) \cdot v ds = G(u + bv, w) - G(u + av, w).$$

Dokaz tvrdnje:

Veličinu promjene funkcionala $G(u, w)$ možemo zapisati i kao

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} G(u + sv, w) &= \left[\frac{d}{d\varepsilon} G(u + sv + \varepsilon v, w) \right]_{\varepsilon=0} \\ &= DG(u + sv, w) \cdot v \end{aligned}$$

za skalarne vrijednosti s i ε . Uvodeći varijablu $z(\varepsilon) = s + \varepsilon$, i uvažavajući

$$\frac{dz}{d\varepsilon} = 1 \text{ i } z(0) = s \text{ pišemo:}$$

$$\frac{d}{ds} G(u + sv, w) = \left[\frac{d}{dz} G(u + zv, w) \frac{dz}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}.$$

Sad možemo provesti integraciju:

$$\int_a^b DG(u + sv, w) \cdot v ds = G(u + bv, w) - G(u + av, w),$$

čime dokazujemo tvrdnju.

Ove spoznaje možemo primijeniti za objašnjenje tj. dokaz Vainbergova teorema, jer je veza energije i ravnoteže takva da ravnoteža postoji za one vrijednosti pomaka u koje energiju čine ekstremnom (prva je derivacija jednaka nuli).

Energetski funkcional ne ovisi o virtualnim, nego naravno samo o stvarnim pomacima. Kao što je već rečeno, on ne postoji za sve probleme, a Vainbergov teorem nam daje uvjet uz koji energetski funkcional postoji.

Vrijede sljedeće oznake:

$G(u, w)$ - funkcional virtualnog rada,

$\Pi(u)$ - energetski funkcional,

u - realni pomak,

w, \bar{w} - virtualni pomaci,

t - skalarna veličina; broj.

6.2. Iskaz teorema

Neka je $G(u, w)$ funkcional koji je linearan za w . Funkcional $\Pi(u)$ za koji je

$$D\Pi(u) \cdot w = G(u, w),$$

odnosno

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\Pi(u + \varepsilon v)]_{\varepsilon=0} = G(u, w)$$

postoji ako i samo ako vrijedi

$$DG(u, w) \cdot \bar{w} = DG(u, \bar{w}) \cdot w$$

tj.

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(u + \varepsilon \bar{w}, w)_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} G(u + \varepsilon w, \bar{w})_{\varepsilon=0},$$

drugim riječima, ako i samo ako vrijedi načelo simetrije.

U tom je slučaju

$$\Pi(u) = \int_0^1 G(tu, u) dt + C,$$

pri čemu treba uočiti da je u izraz uvedena pomoćna varijabla t (radi integracije) i da je podintegralni oblik virtualnog rada za drugi argument izgubio virtualni član w .

Kao nužna i lako uočljiva posljedica iz Vainbergova teorema slijedi:

Ako energetski funkcional $\Pi(u)$ postoji, polje pomaka u za koje $\Pi(u)$ poprima ekstremnu vrijednost je ravnotežna konfiguracija.

Naime, prema Fermatovoj lemi, ekstrem je u u ako je

$$D\Pi(u) \cdot \bar{u} = 0 \text{ za svaki (dopustivi) } \bar{u},$$

a kako je $D\Pi(u) \cdot \bar{u} = G(u, \bar{u})$, uvjet ekstrema je zapravo iskaz teorema o virtualnom radu.

6.3. Dokaz Vainbergova teorema

Dokaz ovisi o:

- tvrdnji iz odjeljka 6.1.,
- linearnosti funkcionala $G(u, w)$ u odnosu na w ,
- promjeni redoslijeda integracije.

Polazeći od jednakosti iz odjeljka 6.2.:

$$\Pi(u) = \int_0^1 G(tu, u) dt + C$$

možemo napisati:

$$\begin{aligned} \Pi(u+h) - \Pi(u) &= \int_0^1 G(tu+th, u+h) dt - \int_0^1 G(tu, u) dt \\ &= \int_0^1 [G(tu+th, u) - G(tu, u)] dt - \int_0^1 G(tu+th, h) dt, \end{aligned}$$

i takvim zapisom postizemo linearnost drugog argumenta funkcionala $G(u, w)$.

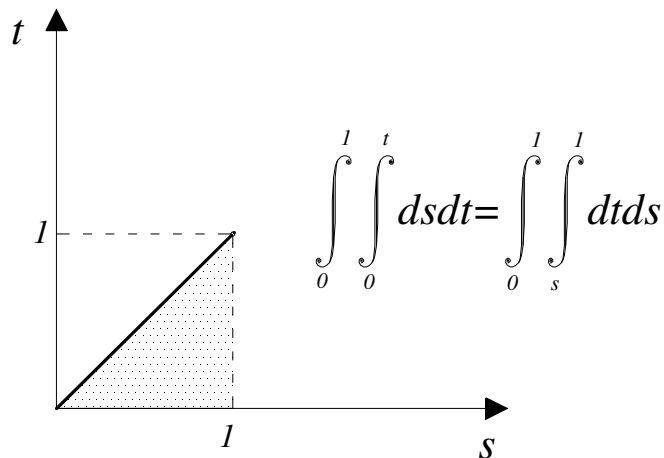
Ako prvi član desne strane jednakosti označimo s I :

$$I = \int_0^1 [G(tu+th, u) - G(tu, u)] dt,$$

uvažavajući tvrdnju iz odjeljka 6.1. možemo zapisati:

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^t DG(tu+sh, u) h \cdot ds \right] dt.$$

Promjenu poretka u procesu integracije objašnjavamo slikom 9.:



Slika 9.

i pišemo

$$\int_0^1 \left[\int_s^1 DG(tu + sh, u) h \cdot dt \right] ds,$$

što je dalje, opet uvažavajući tvrdnju iz odjeljka 6.1., jednako:

$$I = \int_0^1 [G(u + sh, h) - G(su + sh, h)] ds.$$

U sljedećem koraku se opet vraćamo na tvrdnju iz odjeljka 6.1. i pišemo:

$$\Pi(u + h) - \Pi(u) = \int_0^1 G(u + sh, h) ds,$$

ako h zamijenimo s εw :

$$\Pi(u + \varepsilon w) - \Pi(u) = \int_0^1 G(u + s\varepsilon w, \varepsilon w) ds,$$

a zbog linearnosti argumenta w :

$$\Pi(u + \varepsilon w) - \Pi(u) = \varepsilon \int_0^1 G(u + s\varepsilon w, w) ds.$$

U zadnjem koraku deriviramo prethodnu jednakost po ε :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Pi(u + \varepsilon w) = \int_0^1 G(u + s\varepsilon w, w) ds + \varepsilon \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon} G(u + s\varepsilon w, w) ds,$$

ako je $\varepsilon = 0$ pišemo:

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} \Pi(u + \varepsilon w) \right]_{\varepsilon=0} = \int_0^1 G(u, w) ds = G(u, w)$$

a zadnja jednakost je ujedno i cilj našeg dokaza-veličina promjene funkcionala energije

$\Pi(u)$ prema w je jednaka funkcionalu virtualnog rada $G(u, w)$.

6.4. Primjena Vainbergova teorema za teoriju savijanja Bernoulli-Eulerove grede

Bernoulli-Eulerova greda je greda za koju vrijede pretpostavke Bernoulli-Eulerove teorije. Njena duljina je l , na nju djeluje linijska sila $q(x)$, te je uz određene rubne uvjete učvršćena u ravnini čime je osigurana jedinstvenost rješenja.

Funkcional virtualnog rada takvog elementa glasi:

$$\int_0^l EI_y w'' \bar{w}'' dx = \int_0^l q \bar{w} dx,$$

$$\int_0^l EI_y w'' \bar{w}'' dx - \int_0^l q \bar{w}'' dx = 0,$$

$$G(w, \bar{w}) = \int_0^l EI_y w'' \bar{w}'' dx - \int_0^l q \bar{w} dx.$$

Da bi vrijedio Vainbergov teorem funkcional $G(w, \bar{w})$ mora zadovoljavati uvjet simetrije za virtualne pomake \hat{w} , \bar{w} :

$$DG(w, \bar{w}) \cdot \hat{w} = DG(w, \hat{w}) \cdot \bar{w}.$$

Simetriju ćemo provjeriti neposrednim izračunavanjem:

$$\begin{aligned} DG(w, \bar{w}) \cdot \hat{w} &= \frac{d}{d\varepsilon} G(w + \varepsilon \hat{w}, \bar{w})_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^l EI (w'' + \varepsilon \hat{w}'') \bar{w}'' dx - \int_0^l q \bar{w} dx \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^l EI w'' \bar{w}'' dx + \int_0^l EI \varepsilon \hat{w}'' \bar{w}'' dx - \int_0^l q \bar{w} dx \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^l EI \hat{w}'' \bar{w}'' dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
DG(w, \hat{w}) \cdot \bar{w} &= \frac{d}{d\varepsilon} G(w + \varepsilon \bar{w}, \hat{w})_{\varepsilon=0} = \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^l EI(w'' + \varepsilon \bar{w}'') \hat{w}'' dx - \int_0^l q \hat{w} dx \right]_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^l EI w'' \hat{w}'' dx + \int_0^l EI \varepsilon \bar{w}'' \hat{w}'' dx - \int_0^l q \hat{w} dx \right]_{\varepsilon=0} \\
&= \int_0^l EI \bar{w}'' \hat{w}'' dx.
\end{aligned}$$

Budući da je

$$\int_0^l EI \hat{w}'' \bar{w}'' dx = \int_0^l EI \bar{w}'' \hat{w}'' dx,$$

očito je

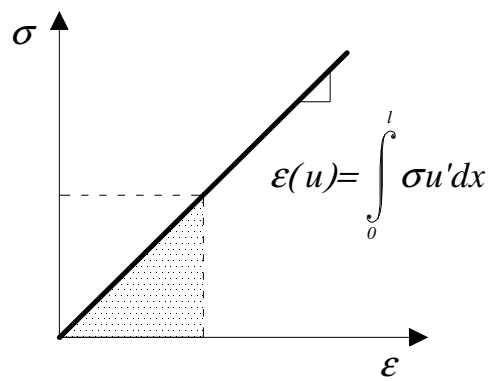
$$DG(w, \bar{w}) \cdot \hat{w} = DG(u, \hat{w}) \cdot \bar{w}.$$

Slijedi da funkcional energije možemo izračunati prema izrazu :

$$\Pi(u) = \int_0^1 G(tu, u) dt + C.$$

Uvrštavanjem izraza za funkcional virtualnog rada dobivamo izraz za potencijalnu energiju Bernoulli-Eulerove grede:

$$\begin{aligned}
\Pi(w) &= \int_0^1 G(tw, w) dt + C = \\
&= \int_0^1 \int_0^l (EI t w'' w'' - qw) dx dt + C \\
&= \int_0^1 \int_0^l (EI t w''^2 - qw) dx dt + C \\
&= \int_0^l \int_0^1 (EI t w''^2 - qw) dt dx + C \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx - \int_0^l qw dx + C.
\end{aligned}$$



Slika 10. Unutarnja energija kao područje ispod $\sigma - \varepsilon$ dijagrama.

6.5. Primjena Vainbergova teorema na Timoškovu gredu

Timoškova greda je greda za koju vrijede pretpostavke prethodno spomenute Timoškove teorije.

Njena duljina je l , na nju djeluje linijska sila $q(x)$ te je uz određene rubne uvjete učvršćena u prostoru čime je osigurana jedinstvenost rješenja.

Funkcional virtualnog rada takvog elementa glasi:

$$\int_0^l EI \vartheta' \bar{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \vartheta)(\bar{w}' + \bar{\vartheta}) dx = \int_0^l q \bar{w} dx,$$

$$\int_0^l EI \vartheta' \bar{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \vartheta)(\bar{w}' + \bar{\vartheta}) dx - \int_0^l q \bar{w} dx = 0,$$

$$G(w, \vartheta; \bar{w}, \bar{\vartheta}) = \int_0^l EI \vartheta' \bar{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \vartheta)(\bar{w}' + \bar{\vartheta}) dx - \int_0^l q \bar{w} dx = 0.$$

Da bi vrijedio Vainbergov teorem funkcional $G(w, \vartheta; \bar{w}, \bar{\vartheta})$ mora zadovoljavati uvjet simetrije za virtualne pomake \hat{w} , \bar{w} , $\hat{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}$:

$$DG(w, \vartheta; \bar{w}, \bar{\vartheta}) \cdot (\hat{w} \hat{\vartheta}) = DG(w, \vartheta; \hat{w}, \hat{\vartheta}) \cdot (\bar{w} \bar{\vartheta}).$$

Simetriju ćemo provjeriti neposrednim izračunavanjem:

$$\begin{aligned} DG(w, \vartheta; \bar{w}, \bar{\vartheta}) \cdot (\hat{w} \hat{\vartheta}) &= \frac{d}{d\varepsilon} G(w + \varepsilon \hat{w}, \vartheta + \varepsilon \hat{\vartheta}; \bar{w}, \bar{\vartheta})_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^l EI (\vartheta' + \varepsilon \hat{\vartheta}') \bar{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \varepsilon \hat{w}' + \vartheta + \varepsilon \hat{\vartheta})(\bar{w}' + \bar{\vartheta}) dx - \int_0^l q \bar{w} dx \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^l EI \hat{\vartheta}' \bar{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (\hat{w}' \bar{w}' + \hat{w}' \bar{\vartheta} + \hat{\vartheta} \bar{w}' + \hat{\vartheta} \bar{\vartheta}) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DG(w, \vartheta; \hat{w}, \hat{\vartheta}) \cdot (\bar{w} \bar{\vartheta}) &= \frac{d}{d\varepsilon} G(w + \varepsilon \bar{w}, \vartheta + \varepsilon \bar{\vartheta}; \hat{w}, \hat{\vartheta})_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_0^l EI (\vartheta' + \varepsilon \bar{\vartheta}') \hat{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \varepsilon \bar{w}' + \vartheta + \varepsilon \bar{\vartheta})(\hat{w}' + \hat{\vartheta}) dx - \int_0^l q \hat{w} dx \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^l EI \bar{\vartheta}' \hat{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (\bar{w}' \hat{w}' + \bar{w}' \hat{\vartheta} + \bar{\vartheta} \hat{w}' + \bar{\vartheta} \hat{\vartheta}) dx. \end{aligned}$$

Budući da je

$$\int_0^l EI \hat{\vartheta}' \bar{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (\hat{w}' \bar{w}' + \hat{w}' \bar{\vartheta} + \hat{\vartheta} \bar{w}' + \hat{\vartheta} \bar{\vartheta}) dx = \int_0^l EI \bar{\vartheta}' \hat{\vartheta}' dx + \int_0^l \frac{GA}{k} (\bar{w}' \hat{w}' + \bar{w}' \hat{\vartheta} + \bar{\vartheta} \hat{w}' + \bar{\vartheta} \hat{\vartheta}) dx,$$

očito je

$$DG(w, \vartheta; \bar{w}, \bar{\vartheta}) \cdot (\hat{w} \hat{\vartheta}) = DG(w, \vartheta; \hat{w}, \hat{\vartheta}) \cdot (\bar{w} \bar{\vartheta}).$$

Uvrštavanjem izraza za funkcional virtualnog rada dobivamo izraz za potencijalnu energiju

Timošenkove grede:

$$\begin{aligned} \Pi(w, \vartheta) &= \int_0^1 G(tw, t\vartheta; w, \vartheta) dt + C = \\ &= \int_0^1 \int_0^l \left[EI t \vartheta' \vartheta' + \frac{GA}{k} t (w' + \vartheta)(w' + \vartheta) - qw \right] dx dt + C \\ &= \int_0^1 \int_0^l \left[EI t \vartheta'^2 + \frac{GA}{k} t (w' + \vartheta)^2 - qw \right] dx dt + C \\ &= \int_0^1 \int_0^l \left[EI t \vartheta'^2 + \frac{GA}{k} t (w' + \vartheta)^2 - qw \right] dt dx + C \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l EI \vartheta'^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{GA}{k} (w' + \vartheta)^2 dx - \int_0^l qw dx + C. \end{aligned}$$

7. ZAKLJUČAK

Izveli smo jednadžbe u diferencijalnom obliku, pa smo ih, preko komponenata pomaka, zapisali za Bernoulli-Eulerovu i Timošenkovu teoriju uvažavajući zadane rubne uvjete. Potom smo, također za obje teorije, izrazili teorem o virtualnim pomacima, a nakon toga i za potencijalnu energiju. Zatim smo proveli iskaz i dokaz Vainbergova teorema, za koji smo ustanovili da daje uvjet postojanja energetske funkcionala, koji smo izrazili preko virtualnog rada. Na kraju smo Vainbergov teorem primijenili na Bernoulli-Eulerovu i Timošenkovu teoriju.

8. LITERATURA

- [1] Keith D. Hjelmstad: *Fundamentals of Structural Mechanics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [2] V. Simović, K. Fresl: *Građevna statika I*, bilješke s predavanja, Građevinski fakultet, Zagreb <http://www.grad.hr/nastava/ga>
- [3] M. Meštrović: *Numeričko modeliranje konstrukcija*, bilješke s predavanja, Građevinski fakultet, Zagreb <http://www.grad.hr/nastava/nmk/>
- [4] Milutin Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [5] Davorin Bazjanac: *Tehnička mehanika, I. dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
- [6] Vice Šimić: *Otpornost materijala II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, Školska knjiga 2002.
- [7] S. Timošenko, J.N. Guder : *Teorija elastičnosti*, prijevod s engleskog dr. ing. Vlatko Brčić, Beograd 1962.
- [8] K.B. Nakshatrala; J. Valocchi: *Variational structure of the optimal artificial diffusion method for the advection- diffusion equation*, Cornell University Library, <http://www.arxiv.org/> 2009.