



Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet

**Zoran Matijević**

**TEOREM O STACIONARNOJ VRIJEDNOSTI  
POTENCIJALNE ENERGIJE**

(ZAVRŠNI RAD)

Zagreb, 2008.

## Sadržaj

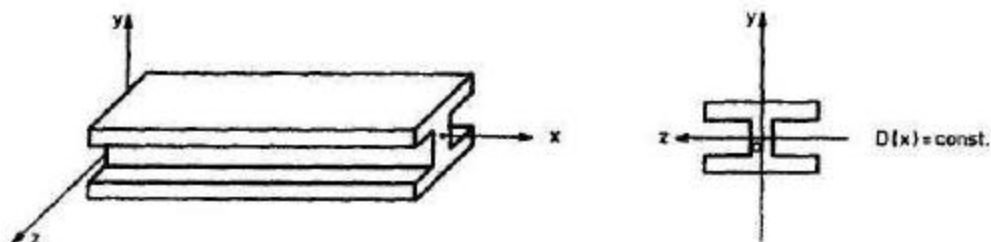
1. Uvod .....	2
2. Ravnoteža štap .....	3
3. Rubni problemi za štap .....	10
4. Princip virtualnog rada .....	11
4.1. Teorem o virtualnim pomacima .....	12
5. Funkcional energije .....	13
5.1. Teorem o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije .....	17
6. Izvod matrice krutosti za štap primjenom teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije .....	19
6.1. Pretpostavljeno polje pomaka .....	19
6.2. Izvod matrice krutosti .....	22
7. Zaključak .....	26
8. Literatura .....	27

## 1. Uvod

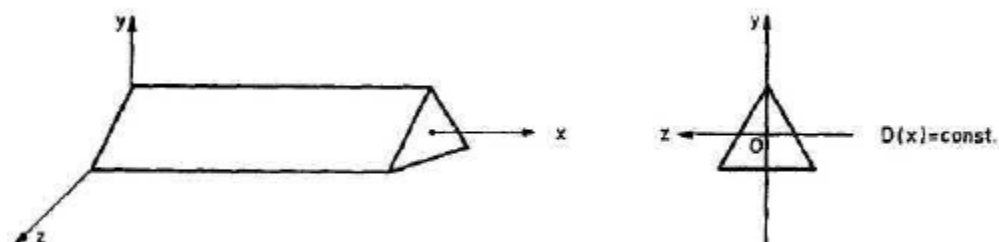
U ovom radu ćemo se posvetiti proučavanju ravnoteže štapa u prostoru na kojega djeluju koncentrirane kontaktne sile  $\vec{Q}$  i momenti  $\vec{M}$  na početku i/ili na kraju štapa, distribuirana linijska sila  $\vec{q}$  te distribuirani moment  $\vec{m}$ . Prvo ćemo odrediti opći integralni oblik i opći diferencijalni oblik ravnoteže štapa, a zatim pretpostaviti da distribuirani moment iščezava (to je česti slučaj u stvarnosti). Također ćemo izvesti i zakone ponašanja štapa kao elastičnog tijela. U nastavku promatramo još dvije formulacije ravnotežnog stanja, a to su princip virtualnog rada i energetska formulacija. Bit toga je pronaći funkciju koja zadovoljava jednadžbu virtualnog rada te minimizira funkcional energije. Nakon toga ćemo se pozabaviti energetske teoremima i izvesti izraz za ukupnu potencijalnu energiju sistema. I na kraju ćemo pokazati primjenu teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije pri izvođenju matrice krutosti.

## 2. Ravnoteža štapa

Štap je tijelo kojemu je jedna dimenzija (duljina) znatno veća od druge dvije. U *nedeformiranom* stanju štap opisujemo segmentom  $[0, l]$  na osi  $x$ , koji se ovdje zove *centralna linija*, te *poprečnim presjekom*  $D(x)$  kojeg dobijemo tako da štap presiječemo ravninom okomitom na centralnu liniju na mjestu  $x \in [0, l]$ . Ako je poprečni presjek svuda isti, štap je *cilindričan* (sl. 1, 2).

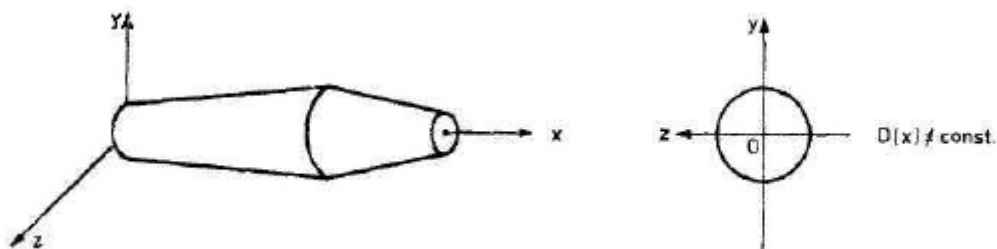


Slika 1.



Slika 2.

Pretpostavit ćemo da u *nedeformiranom* stanju štapa *centralna linija* prolazi kroz *težište poprečnih presjeka*. Tada centralnu liniju nazivamo *os štapa*. Dva važna oblika štapa za koja je takav izbor centralne linije moguć jesu cilindrični štap i štap rotacijskog oblika (sl. 3).



Slika 3.

Promatrat ćemo samo *male deformacije* štapa, do kojih dolazi pri tzv. *slabom* vanjskom djelovanju.

Usporedbe s *teorijom elastičnosti* i eksperimentalna opažanja pokazuju da se pri proučavanju male deformacije štapa može krenuti od Bernoulli-Euler-Navierovih pretpostavki:

### 2.1. Pretpostavka

*Svaki poprečni presjek ostaje nedeformiran pri pomaku, tj. kruto se pomiče.*

### 2.2. Pretpostavka

*Svaki poprečni presjek poslije pomaka ostaje okomit na (pomaknutu) centralnu liniju.*

### 2.3. Pretpostavka

*Pri deformaciji ne dolazi do torzije.*

Označimo sa  $\vec{u}(x) = u_x(x)\vec{i} + u_y(x)\vec{j} + u_z(x)\vec{k}$  pomak točke  $x$  centralne linije. *Pretpostavka da je deformacija mala izražava se ovim uvjetima:*

$$\|\vec{u}'(x)\| \ll 1, \quad (1)$$

$$\|\vec{u}''(x)\| \ll \frac{1}{l} \quad (2)$$

za svako  $x \in [0, l]$ . Iz jednakosti

$$\vec{u}(x) = \vec{u}(0) + \int_0^x \vec{u}'(\xi) d\xi \quad (3)$$

dobivamo

$$\|\vec{u}(x) - \vec{u}(0)\| = \left\| \int_0^x \vec{u}'(\xi) d\xi \right\| \leq \int_0^x \|\vec{u}'(\xi)\| d\xi \ll \int_0^x d\xi = x \leq l, \quad (4)$$

odnosno,

$$\|\vec{u}(x) - \vec{u}(0)\| \ll l, \quad (5)$$

što znači da su i pomaci mali (u odnosu na duljinu štapa).

Po pretpostavci 2.1. pomak točke  $(x, y, z) \in D(x)$  jednak je

$$\vec{u}(x) + \vec{\varphi}(x) \times (\vec{j}y + \vec{k}z). \quad (6)$$

Vektor  $\vec{\varphi}(x)$  zovemo *vektor rotacije* presjeka  $D(x)$ . Pretpostavka 2.2. znači

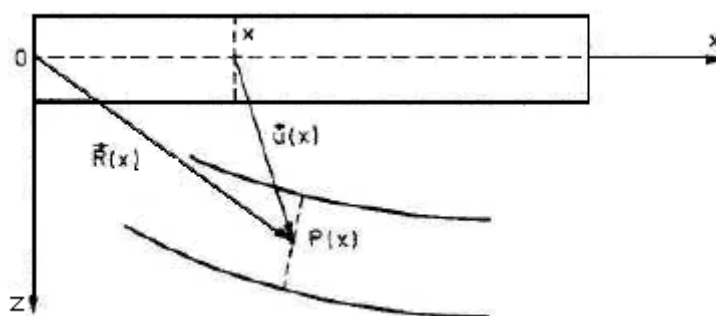
$$\varphi_z = u'_y, \quad \varphi_y = -u'_z, \quad (7)$$

a pretpostavka 2.3. daje

$$\varphi_x = 0. \quad (8)$$

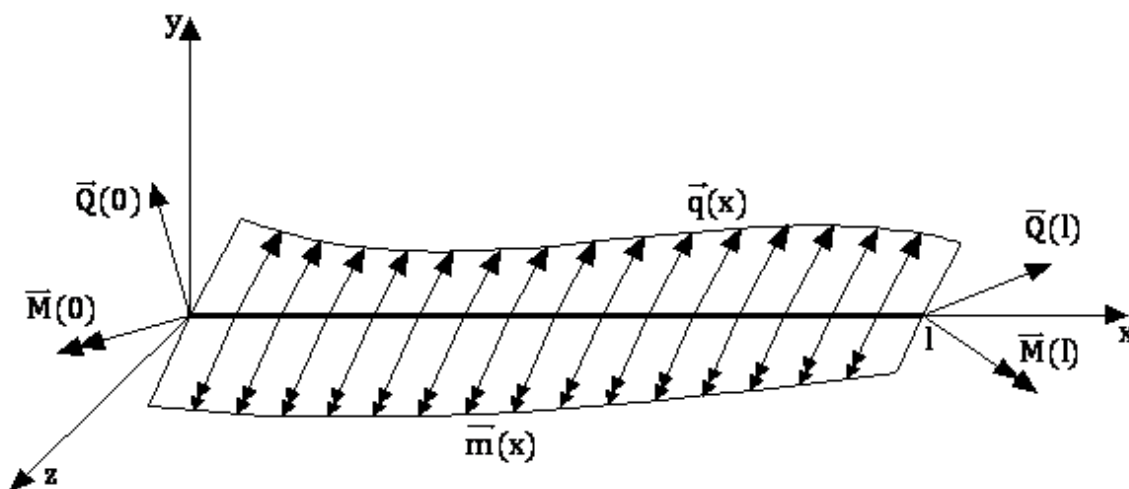
Sada je položaj deformiranog štapa potpuno opisan pomakom centralne linije, tj. funkcijom  $\vec{u}$ .

Označimo sa  $P(x)$  pomaknuti položaj točke  $x \in [0, l]$  (sl. 4).



Slika 4.

Vrijede sljedeće oznake (sl. 5):



Slika 5.

$\vec{Q}(x)$  – rezultanta unutarnje uzdužne sile  $\vec{N}$  i unutarnje poprečne sile  $\vec{T}$  u presjeku  $D(x)$ ,  
 $\vec{q}(x)$  – distribuirana sila po duljini štapa,  
 $\vec{M}(x)$  – moment savijanja u presjeku  $D(x)$ ,  
 $\vec{m}(x)$  – distribuirani moment po duljini štapa.

Ukupni moment unutarnjih sila u odnosu na ishodište u presjeku  $D(x)$  je

$$\vec{M}(x) + \vec{r}(x) \times \vec{Q}(x), \quad (9)$$

gdje je  $\vec{r}(x)$  radijus-vektor točke  $P(x)$ :

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} + \vec{u}(x). \quad (10)$$

Analogno, ukupni distribuirani moment u odnosu na ishodište po duljini štapa je

$$\vec{m}(x) + \vec{r}(x) \times \vec{q}(x). \quad (11)$$

Princip ravnoteže glasi: *Ako je tijelo u ravnoteži, onda su ukupna sila i ukupni moment u odnosu na po volji odabranu točku, koji djeluju na bilo koji komad tijela, jednaki nuli.* Tada za odsječak  $[0, x]$  štapa u ravnoteži vrijedi

$$\vec{Q}(x) - \vec{Q}(0) + \int_0^x \vec{q}(\xi) d\xi = 0, \quad (12)$$

$$\vec{M}(x) + \vec{r}(x) \times \vec{Q}(x) - \vec{M}(0) + \int_0^x (\vec{m}(\xi) + \vec{r}(\xi) \times \vec{q}(\xi)) d\xi = 0, \quad (13)$$

pri čemu smo zbog

$$ds = \sqrt{1 + (u')^2} dx \approx dx \quad (14)$$

diferencijal duljine luka na deformiranoj centralnoj liniji zamijenili diferencijalom luka na osi  $x$ . Deriviranjem po  $x \in (0, l)$  izlazi

$$\vec{Q}' + \vec{q} = 0, \quad (15)$$

$$\vec{M}' + \vec{r}' \times \vec{Q} + \vec{r} \times \vec{Q}' + \vec{m} + \vec{r} \times \vec{q} = 0. \quad (16)$$

Zbog (1) stavljamo

$$\vec{r}' \times \vec{Q} \approx \vec{i} \times \vec{Q}, \quad (17)$$

tako da iz (16), uzimajući u obzir (15), dobivamo

$$\vec{M}' + \vec{i} \times \vec{Q} + \vec{m} = 0. \quad (18)$$

Raspišemo li (15) i (18) po komponentama, dobivamo:

$$N' + q_x = 0 \quad (19)$$

$$T'_y + q_y = 0 \quad (20)$$

$$T'_z + q_z = 0 \quad (21)$$

$$M'_y - T'_z + m_y = 0 \quad (22)$$

$$M'_z + T'_y + m_z = 0. \quad (23)$$

To su skalarne diferencijalne jednačbe ravnoteže štapa, dok su (15) i (18) vektorske diferencijalne jednačbe ravnoteže, a (12) i (13) vektorske integralne jednačbe ravnoteže.

U nastavku ćemo opisati *zakone ponašanja štapa*. Odmah možemo primjetiti da će ponašanje za  $T'_y$  i  $T'_z$ , biti zadano ponašanjem za  $M'_z$ , odnosno  $M'_y$ .

Za uzdužno naprezanje  $\sigma_x$  pretpostavljamo da se ponaša po *Hookeovom zakonu*, što znači da je to naprezanje na pomaknutom presjeku  $D(x)$  proporcionalno derivaciji (po  $x$ ) uzdužne komponente pomaka (6):

$$\sigma_x(x) = E(u'_x(x) + \varphi'_y(x)z - \varphi'_z(x)y) = E(u'_x(x) - u''_z(x)z - u''_y(x)y), \quad (24)$$

gdje je  $E > 0$  Youngov modul elastičnosti, koji je za homogen štap konstanta, a inače je funkcija od  $x$ . Uzdužna sila u presjeku  $D(x)$  dobiva se integracijom



izraza (24) po površini presjeka (kako su deformacije male svi integrali se uzimaju po nedeformiranom štapu):

$$\begin{aligned}
 N(x) &= \iint_{D(x)} E(u'_x(x) - u''_z(x)z - u''_y(x)y) dy dz \\
 &= E(x)A(x)u'_x(x) - E(x)u''_z(x) \iint_{D(x)} z dy dz - E(x)u''_y(x) \iint_{D(x)} y dy dz,
 \end{aligned} \tag{25}$$

gdje je  $A(x)$  površina presjeka  $D(x)$ . Kako smo pretpostavili da se težišta poprečnih presjeka nalaze na centralnoj liniji, dobivamo

$$N = EAu'_x. \tag{26}$$

Moment savijanja  $\vec{M}(x)$  je ukupni moment naprezanja (24) u odnosu na težište poprečnog presjeka.

$$\begin{aligned}
 \vec{M}(x) &= \iint_{D(x)} (y\vec{j} + z\vec{k}) \times E\vec{i}(u'_x(x) - u''_z(x)z - u''_y(x)y) dy dz \\
 &= E \left( -u''_z(x)I_z(x) - u''_y(x)I_{yz}(x) \right) \vec{j} + E \left( u''_z(x)I_{yz}(x) + u''_y(x)I_y(x) \right) \vec{k},
 \end{aligned} \tag{27}$$

uzimajući u obzir da su

$$I_y(x) = \iint_{D(x)} y^2 dy dz, \tag{28}$$

$$I_z(x) = \iint_{D(x)} z^2 dy dz, \tag{29}$$

$$I_{yz}(x) = \iint_{D(x)} yz dy dz. \tag{30}$$

U nastavku ćemo pretpostaviti da se koordinatne osi  $y$  i  $z$  mogu odabrati tako da je

$$I_{yz}(x) = 0 \text{ za sve } x \in [0, l]. \tag{31}$$

Taj je uvjet ispunjen za cilindrični i rotacijski štap. Jednadžbe za  $\vec{M}(x)$  po komponentama su, prema tome,

$$M_z = EI_y u_y'', \quad (32)$$

$$M_y = -EI_z u_z''. \quad (33)$$

Uvrstimo li (32) i (33) u (22) odnosno (23), dobivamo

$$T_y = -(EI_y u_y'')' - m_z, \quad (34)$$

$$T_z = -(EI_z u_z'')' + m_y. \quad (35)$$

U nastavku ćemo promatrati slučaj kada je  $m_z = m_y = 0$ .

Jednadžbe (26), (32) – (35) su zakoni ponašanja za štap. Iz (19) – (21) i zakona (26), (34) i (35) izlazi

$$(EAu_x')' + q_x = 0, \quad (36)$$

$$-(EI_y u_y'')'' + q_y = 0, \quad (37)$$

$$-(EI_z u_z'')'' + q_z = 0. \quad (38)$$

To su diferencijalne *jednadžbe ravnoteže* štapa izražene u komponentama pomaka. Jednadžba (36) je neovisna o druge dvije i opisuje *uzdužnu deformaciju*. Jednadžbe (37) i (38) opisuju *poprečnu deformaciju (progib štapa  $u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ )*. One su također međusobno neovisne. Zbog toga možemo pretpostaviti da se štap progiba u ravnini  $xz$ . Uvodeći kraće oznake,

$$w = u_z, \quad T = T_z, \quad M = M_y, \quad q = q_z, \quad EI = EI_z, \quad (39)$$

odgovarajuće jednadžbe (34), (32) i (37) sada pišemo u obliku

$$T = -(EIw'')', \quad (40)$$

$$M = -EIw'', \quad (41)$$

$$(EIw'')'' = q. \quad (42)$$

Funkcija  $w$  koja zadovoljava jednadžbu (42) zove se *ravnotežna progibna linija*.

### 3. Rubni problemi za štap

Kod savijanja štapa imamo dvije *geometrijske* veličine (*progib i rotaciju*) i dvije *dinamičke* veličine (*silu i moment*). Izbor rubnih uvjeta je puno raznolikiji nego, primjerice, kod žice. Na svakom kraju možemo zadati obje geometrijske veličine ili obje dinamičke veličine ili jednu geometrijsku i jednu dinamičku veličinu. Zadanih geometrijskih veličina, međutim, mora biti dovoljno da se spriječe pomaci štapa kao krutog tijela. *Geometrijski, kinematički* ili *Dirichletov* uvjet je kada se zadaju progib ili rotacija, a *prirodni, dinamički* ili *Neumannov* uvjet je kada se zadaju sila ili moment. Uvjet je *homogen* ako je zadana vrijednost geometrijske odnosno dinamičke veličine jednaka nuli, dok je u protivnom *nehomogen*.

Kraj štapa je *upet* (učvršćen na progib i na rotaciju) kada su

$$w(0) = 0, \quad \varphi(0) = w'(0) = 0. \quad (1)$$

Kraj štapa je *slobodan* (slobodan i na progib i na rotaciju) kada su

$$T(0) = -(EIw'')'(0) = 0, \quad M(0) = (-EIw'')(0) = 0. \quad (2)$$

Kraj štapa je *zglob* (učvršćen na progib, a slobodan na rotaciju) kada su

$$w(0) = 0, \quad M(0) = (-EIw'')(0) = 0. \quad (3)$$

## 4. Princip virtualnog rada

Pod utjecajem raznih djelovanja (vanjskih sila, temperaturnih promjena, slijeganje ležajeva) štap mijenja oblik. Vanjske sile pri tome obavljaju rad na pomacima točaka u kojima djeluju, a unutarne sile na infinitezimalnim prirastima pridruženih polja pomaka. Vršiti li sila tijekom deformiranja štapa rad na pomaku (ili na infinitezimalnom prirastu polja pomaka) koji je sama uzrokovala ili čijem se razvoju odupire, njezin je rad stvaran. No, ako sila obavlja rad na pomaku izazvanom nekim drugim uzrocima, rad se naziva virtualnim.

I dalje ćemo se ograničiti na analizu savijanja štapa u ravnini  $xz$ . Os  $x$  se poklapa s osi štapa, jedan kraj štapa je u ishodištu, a drugi u točki s apscisom  $l$ .

Pretpostavimo da je  $w$  ravnotežno stanje, tj.

$$(EIw''')'' - q = 0. \quad (1)$$

Uzmemo li bilo kakvu funkciju  $\delta w$ , pomnožimo (1) sa  $\delta w$  i integriramo na intervalu  $[0, l]$ , izlazi

$$\int_0^l ((EIw''')'' - q)\delta w dx = 0. \quad (2)$$

Ako prvi član na lijevoj strani transformiramo dvjema parcijalnim integracijama i ograničimo se, primjera radi, na rubne uvjete

$$w(0) = w'(0) = 0 \quad (\text{upeti kraj}), \quad (3)$$

$$w''(l) = (EIw''')'(l) = 0 \quad (\text{slobodni kraj}), \quad (4)$$

tada iz (2) dobivamo

$$\int_0^l (EIw'' \delta w'' - q \delta w) dx = 0 \quad \text{za svako dopušteno } \delta w. \quad (5)$$

Za funkciju  $\delta w$  na segmentu  $(0, l)$  kažemo da je *dopuštena* ako zadovoljava zadane homogene geometrijske uvjete rubnog problema; u našem slučaju to znači

$$w(0) = w'(0) = 0. \quad (6)$$

Interpretiramo li funkciju  $\delta w$  kao *polje virtualnih pomaka*, članove na lijevoj strani u (5) možemo tumačiti kao *rad* pojedinih sila na „putu“ od ravnotežnog položaja  $w$  do *virtualnog položaja*  $w + \delta w$ : prvi član možemo tumačiti kao *rad*

*unutarnjih sila, a drugi član kao rad vanjskih linijskih sila. Sada jednakost (5) možemo tumačiti kao Bernoullijev princip virtualnog rada:*

*Ukupan rad vanjskih i unutarnjih sila na proizvoljnom polju virtualnih pomaka jednak je nuli.*

Sve spomenuto u ovom poglavlju možemo sažeti u ovaj teorem:

#### **4.1. Teorem o virtualnim pomacima**

- (i) *-Ako je funkcija  $w$  rješenje rubnog problema (1), (3), (4), onda je ona i rješenje jednadžbe virtualnog rada (5), ili, fizikalno  
-ako se štap pod zadanim opterećenjem nalazi u stanju ravnoteže, onda je rad stvarnih vanjskih sila na po volji odabranim poljima virtualnih pomaka jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja*
  
- (ii) *- Ako je funkcija  $w$  rješenje jednadžbe virtualnog rada (5), onda je ona rješenje rubnog problema (1), (3), (4), ili, fizikalno  
-ako je rad stvarnih vanjskih sila na svim poljima virtualnih pomaka jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja, onda su vanjske i unutarnje sile u ravnoteži.*

## 5. Funkcional energije

Promatrat ćemo još jedan oblik navedenog rubnog problema

$$(EIw'')'' = q, \quad (1)$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad (2)$$

$$w''(l) = (Aw'')'(l) = 0. \quad (3)$$

Pretpostavimo da funkcija  $\bar{w}$  zadovoljava rubni uvjete (2), to jest

$$\bar{w}(0) = \bar{w}'(0) = 0, \quad (4)$$

(drugim riječima,  $\bar{w}$  je dopuštena funkcija), i promotrimo izraz

$$\Phi(\bar{w}) = \frac{1}{2} \int_0^l M(x) \bar{\kappa}(x) dx - \int_0^l q \bar{w} dx. \quad (5)$$

Raspisivanjem izraza (5) uz relacije

$$M(x) = -EI\bar{\kappa}(x), \quad (6)$$

$$\bar{\kappa}(x) = -\bar{w}''(x), \quad (7)$$

dobivamo

$$\Phi(\bar{w}) = \frac{1}{2} \int_0^l EI[\bar{w}'']^2 dx - \int_0^l q \bar{w} dx. \quad (8)$$

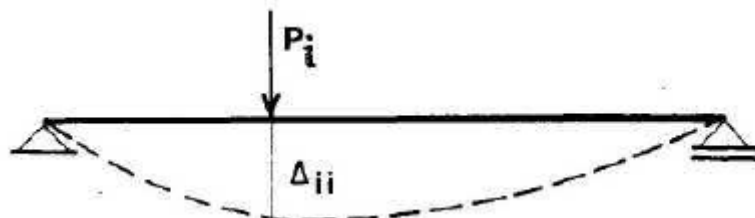
Svakoj dopuštenoj funkciji  $\bar{w}$  pridružen je po formuli (8) broj  $\Phi(\bar{w})$ . Preslikavanje koje svakoj funkciji iz nekog skupa pridružuje broj zove se **funkcional**. Dakle, promatramo funkcional  $\Phi$  na skupu dopuštenih funkcija. Članovi na desnoj strani u (8) imaju redom ove nazive: *potencijalna energija deformacije i potencijalna energija vanjske linijske sile*. Zato  $\Phi$  zovemo **funkcional energije**.

Sada ćemo fizikalno interpretirati potencijalnu energiju deformacije i pokazati kako se fizikalno dolazi do izraza za funkcional energije.

Ako vanjske sile deformiraju sistem, tada obavljaju pozitivan rad. Po zakonu o održanju energije taj rad potpuno prelazi u potencijalnu energiju. Sile, koje međusobno djeluju među materijalnim česticama tijela, pri opterećenju obavljaju negativan rad, jer se suprotstavljaju deformacijama tijela. Kod rasterećenja je situacija obrnuta: unutarnje sile obavljaju pozitivan rad, a

vanjske negativan. Potencijalna energija deformacije ( $\mathcal{U}$ ) ili *deformacijski rad* jednak je radu vanjskih sila, tj. negativnoj vrijednosti rada unutarnjih sila:

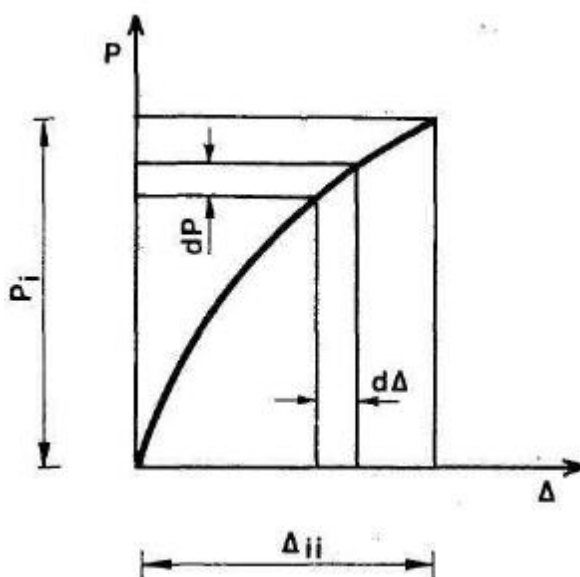
$$\mathcal{U} = V = -U \quad (9)$$



Slika 6.

Prvo promatramo rad jedne sile  $P_i$  zadanog smjera (sl. 6) na pomaku  $\Delta_{ii}$  u smjeru njenog djelovanja, a koji je sama ta sila izazvala. Između sile  $P_i$  i pomaka  $\Delta$  postoji veza koja se može pretpostaviti potpuno općenito (sl.7),  $P = f(\Delta)$ . Rad je jednak površini dijagrama funkcije  $P = f(\Delta)$ :

$$V_i = \int_0^{\Delta_{ii}} P d\Delta. \quad (10)$$



Slika 7.

Za linearnu vezu između sile  $P$  i pomaka  $\Delta$  dobivamo

$$V_i = \frac{P_i \Delta_{ii}}{2}. \quad (11)$$

Sada možemo rad više sila napisati u ovom oblik:

$$V_P = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2} + \dots + \frac{P_n \Delta_n}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \Delta_i}{2}, \quad (12)$$

dok je rad distribuirane sile jednak

$$V_q = \frac{1}{2} \int_0^l q \bar{w} dx. \quad (13)$$

Tako dolazimo do izraza za stvarni rad vanjskih sila:

$$V = V_P + V_q. \quad (14)$$

Sada treba izraziti rad zadanih vanjskih sila preko unutarnjih, koje su te vanjske sile izazvale. U tu svrhu promatramo beskonačno mali element grede duljine  $ds$  na kojega se nanose unutarnje sile, koje u ovom slučaju imaju karakter vanjskih sila.

Radi jednostavnosti pretpostavljamo da je deformacija mala pa se zanemaruje promjena zaokreta uslijed uzdužne sile, odnosno zanemaruje se promjena duljine  $ds$  uslijed momenta.

Potencijalna energija deformacije izražava se kao rad sila  $N, T, M$  koje su za taj element vanjske sile.

Rad uzdužne sile je

$$d\mathfrak{A}_N = dU_N = \frac{N\Delta ds}{2} = \frac{N\epsilon ds}{2}, \quad (15)$$

poprečne sile

$$d\mathfrak{A}_T = dU_T = \frac{T\gamma ds}{2} \quad (16)$$

i momenta

$$d\mathfrak{A}_M = dU_M = \frac{M\Delta d\varphi}{2} = \frac{M\kappa ds}{2}. \quad (17)$$

Ukupan deformacijski rad u promatranom elementu štapa bit će:

$$d\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(M\kappa + N\epsilon + T\gamma)ds. \quad (18)$$

Ako se dobivena veličina podijeli sa  $ds$  dobit će se deformacijski rad po jedinici dužine na promatranom mjestu. To se naziva *specifičnim deformacijskim radom* ili *elastičnim potencijalom štapa*, a označava se sa  $\bar{A}$ :

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(M\kappa + N\epsilon + T\gamma). \quad (19)$$

Ako se deformacijske veličine izraze kao funkcija sila, pri čemu se pretpostavlja da nema temperaturnih promjena, dobiva se

$$\bar{A}(M, N, T) = \frac{1}{2}\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EA} + k\frac{T^2}{GA}\right). \quad (20)$$

Ako se sila izraze kao funkcije deformacijskih veličina dobiva se

$$\bar{A}(\kappa, \epsilon, \gamma) = \frac{1}{2}(EI\kappa^2 + EA\epsilon^2 + GA\gamma^2). \quad (21)$$



Ukupan deformacijski rad sistema dobiva se integriranjem vrijednosti  $dA = \bar{A}ds$  preko svih elemenata u sistemu, pa se dobiva:

$$A = \int_s \bar{A}ds = \frac{1}{2} \int_s (M\kappa + N\epsilon + T\gamma)ds, \quad (22)$$

odnosno

$$A(M, N, T) = \frac{1}{2} \int_s \left( \frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{EA} + k \frac{T^2}{GA} \right) ds, \quad (23)$$

$$A(\kappa, \epsilon, \gamma) = \frac{1}{2} \int_s (EI\kappa^2 + EA\epsilon^2 + GA\gamma^2)ds. \quad (24)$$

Proizlazi da su stvarni rad vanjskih sila i potencijalna energija deformacije sistema uvijek pozitivni.

Promatramo li naš slučaj opterećenja štapa, gdje na njega djeluje samo distribuirana sila, tada izraz za deformacijski rad poprima oblik

$$A(M) = \frac{1}{2} \int_s \frac{M^2}{EI} ds \quad (25)$$

odnosno

$$A(\kappa) = \frac{1}{2} \int_s EI\kappa^2 ds, \quad (26)$$

uz zanemarivanje rada poprečne sile jer je zanemarivo mali naspram rada momenta.

Kada se potencijalnoj energiji deformacije  $A(\kappa, \epsilon, \gamma)$  doda potencijalna energija vanjskih aktivnih sila, dobiva se potencijalna energija sistema  $\Pi(\kappa, \epsilon, \gamma)$ :

$$\Pi(\kappa, \epsilon, \gamma) = A(\kappa, \epsilon, \gamma) - \sum P_i s_i - \int_0^l q \bar{w} dx. \quad (27)$$

Neka je  $w$  rješenje problema (1) – (3). Funkcional energije odlikuje se time što svoju najmanju vrijednost (na skupu dopuštenih funkcija) postiže upravo za  $\bar{w} = w$ . Preciznije o tome govori ovaj teorem, koji je zapravo **princip minimuma potencijalne energije**.

## 5.1. Teorem o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije

*Problem (1) – (3) ekvivalentan je minimizaciji funkcionala (8) na skupu dopuštenih funkcija, tj. vrijedi sljedeće:*

- (i) *Ako je neka funkcija rješenje problema (1) – (3), onda ona minimizira funkcional  $\Phi$  na skupu dopuštenih funkcija (funkcional na njoj postiže svoju najmanju vrijednost).*
- (ii) *Ako neka funkcija minimizira funkcional  $\Phi$  na skupu dopuštenih funkcija, onda je ona rješenje problema (1)-(3).*

*Dokaz. (i)* Neka je  $w$  rješenje problema (1)-(3), a  $\bar{w}$  bilo koja dopuštena funkcija. Tada je  $\delta w = \bar{w} - w$  također dozvoljena funkcija. Uvrstimo li  $\bar{w} = w + \delta w$  u (8), dobivamo

$$\begin{aligned}
 \Phi(\bar{w}) &= \Phi(w + \delta w) = \frac{1}{2} \int_0^l EI[w'' + \delta w'']^2 dx - \int_0^l q[w + \delta w] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l EI[w''^2 + 2w'' \delta w'' + \delta w''^2] dx - \int_0^l q[w + \delta w] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^l EI[w''^2] dx - \int_0^l q w dx + \int_0^l [w'' \delta w'' + (\delta w'')^2 - q \delta w] dx \\
 &= \Phi(w) + \int_0^l (w'' \delta w'' - q \delta w) dx + \int_0^l (\delta w'')^2 dx \\
 &= \Phi(w) + \int_0^l (\delta w'')^2 dx
 \end{aligned} \tag{28}$$

gdje smo pri prijelazu iz predzadnjeg u zadnji redak uzeli da prema teoremu 4.1. funkcija  $w$  zadovoljava jednadžbu virtualnog rada (4.5). Kako je zadnji član na desnoj strani nenegativan, zaključujemo

$$\Phi(w) \leq \Phi(\bar{w}). \tag{29}$$

*Dokaz. (ii)* Neka funkcija  $\bar{w}$  minimizira funkcional  $\Phi$  na skupu dopuštenih funkcija. Uzimajući u obzir zaključak (i), imamo

$$\Phi(\bar{w}) = \Phi(w), \tag{30}$$

gdje je  $w$  rješenje problema (1) – (3). Stavljajući  $\delta w = \bar{w} - w$  i uvrštavajući  $\bar{w} = w + \delta w$  u (12), dobivamo

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI[w'' + \delta w'']^2 dx - \int_0^l q[w + \delta w] dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI[w'']^2 dx - \int_0^l q w dx,$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI[w''^2 + 2w'' \delta w'' + \delta w''^2] dx - \int_0^l q[w + \delta w] dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI[w'']^2 dx - \int_0^l q w dx.$$

Kada sredimo izraz, imamo

$$\int_0^l (EI w'' \delta w'' - q \delta w) dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI [\delta w'']^2 dx = 0. \quad (31)$$

Opet uzimamo u obzir da prema teoremu 4.1. funkcija  $w$  zadovoljava jednadžbu virtualnog rada (4.5), pa na kraju proizlazi

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI [\delta w'']^2 dx = 0, \quad (32)$$

a iz toga slijedi  $\delta w = 0$ , tj.  $\bar{w} = w$ .

*Na kraju ćemo rezimirati dosadašnje rezultate o raznim oblicima ili formulacijama ravnotežnog rubnog problema. Te formulacije su sljedeće:*

- a) **Integralna formulacija.** *Odrediti funkciju  $u$  koja uz zakone ponašanja zadovoljava jednakost*

$$\vec{Q}(x) - \vec{Q}(0) + \int_0^x \vec{q}(\xi) d\xi = 0,$$

$$\vec{M}(x) + \vec{r}(x) \times \vec{Q}(x) - \vec{M}(0) + \int_0^x (\vec{m}(\xi) + \vec{r}(\xi) \times q(\xi)) d\xi = 0$$

*za svaki  $x \in [0, l]$  i rubne uvjete na krajevima.*

- b) **Diferencijalna formulacija.** *Odrediti funkciju  $u$  koja zadovoljava jednadžbu ravnoteže i rubne uvjete na krajevima.*
- c) **Princip virtualnog rada.** *Odrediti dopuštenu funkciju koja zadovoljava jednadžbu virtualnog rada.*
- d) **Energetska formulacija.** *Odrediti funkciju koja minimalizira funkcional energije na skupu dopuštenih funkcija.*

*Formulacije a) - d) su ekvivalentne: Ako je neka funkcija rješenje rubnog problema po jednoj od njih, onda je ona rješenje po svakoj.*

## 6. Izvod matrice krutosti za štap primjenom teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije

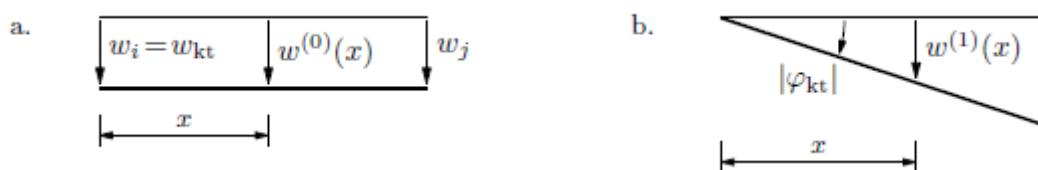
### 6.1. Pretpostavljeno polje pomaka

Ograničit ćemo se na problem savijanja Bernoulli-Eulerove grede u ravnini  $xz$ , izražen diferencijalnom jednačinom

$$(EIw''')'' = q; \quad (1)$$

nepoznata funkcija  $w$  opisuje progibnu liniju štapa pod zadanim poprečnim distribuiranim opterećenjem čiju vrijednost opisuje funkcija  $q$ . Pomaci svih točaka elementa odvijaju se po pravcima koji su usporedni s osi  $z$ . U općem slučaju je polje pomaka vektorsko, no u ovom ga jednostavnom slučaju možemo smatrati skalarnim poljem.

Pretpostavljeno polje pomaka mora omogućiti prikaz translacijskih (sl. 8a) i rotacijskih (sl. 8b) pomaka elementa kao krutog tijela, pomaka pri kojima se element ne deformira.



Slika 8.

Pri translacijskom pomaku okomito na os elementa sve točke elementa imaju jednaki pomak, pa polje pomaka mora sadržavati konstantni član:

$$w(x) = a_0. \quad (2)$$

Polje pomaka nastalo rotacijom krutog tijela oko čvora  $i$  opisuje se u teoriji malih pomaka linearnom funkcijom

$$w^{(1)}(x) = a_1 x. \quad (3)$$

Rotacija oko bilo koje točke može se prikazati kompozicijom translacije i rotacije

$$w(x) + w^{(1)}(x) = a_0 + a_1 x. \quad (4)$$

Zamislimo li da je konstrukcija sastavljena od konačnih elemenata, koje u nizu uzastopnih i sve finijih aproksimacija smanjujemo (povećavajući pritom njihov broj), stanje deformacija će se uzduž pojedinih elemenata sve manje mijenjati i približavat će se nekoj konstantnoj vrijednosti (*stanje konstantne deformacije*).

Osnovna je deformacijska veličina u Bernoulli-Eulerovoj teoriji zakrivljenost koju aproksimiramo drugom derivacijom polja pomaka. Kako je druga derivacija kvadratne funkcije konstanta, pretpostavljeno polje pomaka mora sadržavati i kvadratni član

$$w^{(2)}(x) = a_2 x^2. \quad (5)$$

Konačni elementi međusobno su povezani u čvorovima. Neprekinutost štapa (nema prekida, a ni lomova) osigurana je zahtjevom da u spoju susjedni elementi imaju jednaki pomak i jednaki zaokret. Uvjete neprekinutosti treba zadovoljiti na oba kraja elementa. To znači da na polje pomaka unutar elementa utječu četiri međusobno neovisne veličine. Pretpostavljenom polju pomaka moramo dodati četvrti član

$$w^{(3)}(x) = a_3 x^3. \quad (6)$$

Polje pomaka na elementu pretpostavit ćemo u obliku polinoma trećega stupnja:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \quad (7)$$

Uvodimo vektor

$$\mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \quad (8)$$

i jednorodnu matricu

$$\mathbf{X}(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3], \quad (9)$$

sada funkciju  $w$  možemo zapisati u obliku

$$w(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{a}. \quad (10)$$

Skup funkcija  $X = \{1, x, x^2, x^3\}$  čini bazu vektorskog prostora funkcija koji sadrži sve polinome do i uključujući trećega stupnja. Prva je derivacija funkcije  $w$

$$w'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{a}, \quad (11)$$

gdje je  $X'(x)$  matrica prvih derivacija funkcija baze  $X$ :

$$X'(x) = [0 \quad 1 \quad 2x^1 \quad 3x^2]. \quad (12)$$

Koeficijenti  $a_0$  i  $a_1$  imaju jasnu geometrijsku interpretaciju

$$a_0 = w_{kt}, \quad (13)$$

$$a_1 = -\varphi_{kt}. \quad (15)$$

Za preostala dva koeficijenta se to ne može reći.

Umjesto baze  $X$  pogodnije je polinome prikazati u bazi za koju su koeficijenti u linearnoj kombinaciji vrijednosti pomaka i kutova zaokreta krajeva elementa. Neka su

$$w(0) = w_i, \quad (16)$$

$$-w'(0) = \varphi_i, \quad (17)$$

$$w(l_{i,j}) = w_j, \quad (18)$$

$$-w'(l_{i,j}) = \varphi_j. \quad (19)$$

Iz izraza (7) i njegove derivacije slijedi sustav jednačbi u kojemu su nepoznanice brojevi  $a_0, a_1, a_2$  i  $a_3$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l_{i,j} & l_{i,j}^2 & l_{i,j}^3 \\ 0 & -1 & -2l_{i,j} & -3l_{i,j}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Riješimo li sustav, dobivamo

$$a_0 = w_i, \quad (21)$$

$$a_1 = -\varphi_i, \quad (22)$$

$$a_2 = -\frac{3}{l_{i,j}^2} w_i + \frac{2}{l_{i,j}} \varphi_i + \frac{3}{l_{i,j}^2} w_j + \frac{1}{l_{i,j}} \varphi_j, \quad (23)$$

$$a_3 = \frac{2}{l_{i,j}^3} w_i - \frac{1}{l_{i,j}^2} \varphi_i - \frac{2}{l_{i,j}^3} w_j - \frac{1}{l_{i,j}^2} \varphi_j. \quad (24)$$

Uvrštavanjem (21) – (24) u (7) i sređivanjem izraza, dobivamo

$$w(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{l_{i,j}^2} + \frac{2x^3}{l_{i,j}^3}\right) w_i + \left(-x + \frac{2x^2}{l_{i,j}} - \frac{x^3}{l_{i,j}^2}\right) \varphi_i + \left(\frac{3x^2}{l_{i,j}^2} - \frac{2x^3}{l_{i,j}^3}\right) w_j + \left(\frac{x^2}{l_{i,j}} - \frac{x^3}{l_{i,j}^2}\right) \varphi_j, \quad (25)$$

ili, u vektorskom zapisu,

$$w(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{u}_{i,j}, \quad (26)$$

gdje su

$$\mathbf{u}_{i,j} = [w_i \quad \varphi_i \quad w_j \quad \varphi_j]^T, \quad (27)$$

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{l_{i,j}^2} + \frac{2x^3}{l_{i,j}^3} & -x + \frac{2x^2}{l_{i,j}} - \frac{x^3}{l_{i,j}^2} & \frac{3x^2}{l_{i,j}^2} - \frac{2x^3}{l_{i,j}^3} & \frac{x^2}{l_{i,j}} - \frac{x^3}{l_{i,j}^2} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

## 6.2. Izvod matrice krutosti

Izraz za komponente matrice krutosti možemo izvesti primjenom teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije. Znamo da je ta energija jednaka zbroju potencijalne energije deformacije i potencijalne energije aktivnih vanjskih sila.

Od prije nam je poznat izraz za potencijalnu energiju štapa u Bernoulli-Eulerovoj teoriji

$$\mathfrak{X}_{i,j} = \frac{1}{2} \int_0^{l_{i,j}} M(x)\kappa(x) = \frac{EI}{2} \int_0^{l_{i,j}} [w''(x)]^2 dx. \quad (1)$$

Umjesto stvarnog, nepoznatog polja pomaka uvrstit ćemo u (1) pretpostavljeno polje pomaka (5.1.26) čija je druga derivacija jednaka

$$w''(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{u}_{i,j}; \quad (2)$$

matrica  $\mathbf{B}(x)$  sadrži druge derivacije baznih funkcija  $N_i(x)$ :

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{N}''(x) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{l_{i,j}^2} + \frac{12x}{l_{i,j}^3} & \frac{4}{l_{i,j}} - \frac{6x}{l_{i,j}^2} & \frac{6}{l_{i,j}^2} - \frac{12x}{l_{i,j}^3} & \frac{2}{l_{i,j}} - \frac{6x}{l_{i,j}^2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Sada izraz za potencijalnu energiju deformacije izgleda ovako:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_{i,j} &= \frac{EI}{2} \int_0^{l_{i,j}} \mathbf{u}_{i,j}^T [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{B}(x) \mathbf{u}_{i,j}(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \left( EI \int_0^{l_{i,j}} [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{B}(x) dx \right) \mathbf{u}_{i,j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Integralni podizraz u zagradi,

$$\mathbf{k}_{i,j} = EI \int_0^{l_{i,j}} [\mathbf{B}(x)]^T \mathbf{B}(x) dx, \quad (5)$$

zapis je matrice krutosti štapa čije su komponente

$$k_{(i,j)\alpha,\beta} = EI \int_0^{l_{i,j}} [\mathbf{B}_\alpha(x)]^T \mathbf{B}_\beta(x) dx. \quad (6)$$

Izračunamo li sve komponente matrice krutosti, dobivamo

$$\mathbf{k}_{i,j} = \frac{EI}{l_{i,j}} \begin{bmatrix} 12/l_{i,j}^2 & -6/l_{i,j} & -12/l_{i,j}^2 & -6/l_{i,j} \\ -6/l_{i,j} & 4 & 6/l_{i,j} & 2 \\ -12/l_{i,j}^2 & 6/l_{i,j} & 12/l_{i,j}^2 & 6/l_{i,j} \\ -6/l_{i,j} & 2 & 6/l_{i,j} & 4 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Sada izraz (4) možemo zapisati kao

$$\mathfrak{U}_{i,j} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}. \quad (8)$$

Potencijalna je energija zadanog opterećenja, uz pretpostavljeno polje pomaka:

$$\mathfrak{E}_{i,j}^{\bar{f}} = - \int_0^{l_{i,j}} q(x) w(x) dx = - \mathbf{u}_{i,j}^T \int_0^{l_{i,j}} [\mathbf{N}(x)]^T q(x) dx = - \mathbf{u}_{i,j}^T \bar{\mathbf{f}}_{i,j}, \quad (9)$$

gdje su komponente vektora  $\bar{\mathbf{f}}_{i,j}$

$$\bar{f}_{i,j\alpha} = \int_0^{l_{i,j}} N_\alpha(x) q(x) dx. \quad (10)$$

Uvrstimo li, primjerice, za  $q(x) = q_0$ , dobivamo

$$\bar{\mathbf{f}}_{i,j} = \left[ -\frac{q_0 l_{i,j}}{2} \quad \frac{q_0 l_{i,j}^2}{12} \quad -\frac{q_0 l_{i,j}}{2} \quad -\frac{q_0 l_{i,j}^2}{12} \right]^T. \quad (11)$$

Potencijalna energija sila na krajevima elementa jednaka je

$$\mathfrak{E}_{i,j}^f = - \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{f}_{i,j}, \quad (12)$$



gdje su komponente vektora  $\mathbf{f}_{i,j}$  vrijednosti sila na krajevima elementa,

$$\mathbf{f}_{i,j} = [T_{i,j} \quad M_{i,j} \quad T_{j,i} \quad M_{j,i}]^T. \quad (13)$$

To znači da je ukupna potencijalna energija sistema

$$\Pi_{i,j} = \mathfrak{A}_{i,j} + \mathfrak{E}_{i,j}^{\bar{f}} + \mathfrak{E}_{i,j}^f = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_{i,j}^T (\bar{\mathbf{f}}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j}). \quad (14)$$

Prema teoremu o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije sistema, od svih mogućih stanja pomaka, ravnotežnu konfiguraciju tijela čini ono polje pomaka za koje je potencijalna energija sistema, kao funkcija vrijednosti pomaka i odgovarajućih deformacija, poprima stacionarnu vrijednost.

Uvrstimo li pretpostavljeno polje pomaka (6.1.26) potencijalna energija sistema postaje funkcijom vrijednosti pomaka krajeva elemenata:

$$\Pi_{i,j} : \mathbf{u}_{i,j} \rightarrow \Pi_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j}). \quad (15)$$

Stacionarna vrijednost funkcije točka je u kojoj njezin gradijent iščezava:

$$\text{grad } \Pi_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j}) = 0. \quad (16)$$

Funkcija  $\Pi_{i,j}(\mathbf{u}_{i,j})$  sastavljena je od kvadratnog dijela

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \quad (17)$$

i od linearnog dijela

$$\mathbf{u}_{i,j}^T (\bar{\mathbf{f}}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j}). \quad (18)$$

Raspišemo li izraz (17), primjerice, samo za prva dva člana  $\mathbf{u}_{i,j}$  i za lijevi gornji kvadrant matrice  $\mathbf{k}_{i,j}$ , imamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} &= \frac{1}{2} [w_i \quad \varphi_i] \frac{EI}{l_{i,j}} \begin{bmatrix} 12/l_{i,j}^2 & -6/l_{i,j} \\ -6/l_{i,j} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}. \\ &= \frac{EI}{2l_{i,j}} [12w_i/l_{i,j}^2 - 6\varphi_i/l_{i,j} \quad -6w_i/l_{i,j} + 4\varphi_i] \begin{bmatrix} w_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} \\ &= \frac{EI}{2l_{i,j}} [12w_i^2/l_{i,j}^2 - 12\varphi_i w_i/l_{i,j} + 4\varphi_i^2]. \end{aligned} \quad (19)$$

Uz činjenicu da je  $\mathbf{k}_{i,j}$  simetrična matrica, možemo vidjeti da je gradijent kvadratnog dijela jednak  $\mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}$ ; slično tome, gradijent linearnog dijela (18) jednak je  $\bar{\mathbf{f}}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j}$ .

Pokažimo to na izrazu (19):

$$\text{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \right)}{\partial w_i} \\ \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \mathbf{u}_{i,j}^T \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} \right)}{\partial \varphi_i} \end{bmatrix} = \frac{EI}{2l_{i,j}} \begin{bmatrix} \frac{24w_i}{l_{i,j}^2} - \frac{12\varphi_i}{l_{i,j}} \\ \frac{12w_i^2}{l_{i,j}^2} - \frac{12w_i}{l_{i,j}} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j}. \quad (20)$$

Iz toga slijedi

$$\mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} - (\bar{\mathbf{f}}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j}) = 0 \quad (21)$$

ili

$$\mathbf{k}_{i,j} \mathbf{u}_{i,j} = \bar{\mathbf{f}}_{i,j} + \mathbf{f}_{i,j}, \quad (22)$$

a to je sustav jednadžbi ravnoteže sila koje djeluju na štap.

## 7. Zaključak

Uz zadane rubne uvjete izveli smo integralni i diferencijalni oblik ravnoteže štapa u prostoru te zakone ponašanja za taj štap. Potom smo promatrali Bernoullijev princip virtualnog rada i energetska formulaciju ravnotežnog stanja. Ustanovili smo da će funkcija koja zadovoljava bilo koji od ta četiri uvjeta ravnoteže štapa, zadovoljavati i ostala tri uvjeta ravnoteže uz iste rubne uvjete. Na koncu smo izveli matricu krutosti štapa primjenom teorema o stacionarnoj vrijednosti potencijalne energije pomoću koje možemo napisati sustav jednadžbi ravnoteže štapa u matričnoj formulaciji.

## 8. Literatura

- [1] I. Aganović, K. Veselić: *Jednadžbe matematičke fizike*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
- [2] M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [3] Keith D. Hjelmstad: *Fundamentals of Structural Mechanics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [4] V. Simović: *Građevna statika I*, Građevinski institut, Zagreb, 1988.
- [5] V. Simović, K. Fresl: *Građevna statika I*, bilješke s predavanja, Građevinski fakultet, Zagreb, <http://www.grad.hr/nastava/gf/bilj1/index.html>.
- [6] D. Žubrinić: *Uvod u varijacione metode za diferencijalne jednadžbe*, Elektrotehnički fakultet, Zagreb, 1991.