

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

Jelena Vukadin, Dominik Vidović, Josip Vuco

**OCJENA SLIČNOSTI RAVNOTEŽNIH OBLIKA VLAČNIH KONSTRUKCIJA –
Ravnotežna ploha naspram ravnotežne mreže**

Zagreb, 2021.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za tehničku mehaniku, Katedra za statiku, dinamiku i stabilnost konstrukcija pod vodstvom doc.dr. sc. Petre Gidak, dipl. ing. građ. i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2020./2021.

SADRŽAJ:

1. UVOD.....	1
2. OPĆI I SPECIFIČNI CILJEVI RADA.....	4
3. TRAŽENJE OBLIKA PREDNAPETE MREŽE (eng. <i>form finding</i>).....	5
3.1. FIZIČKI MODEL.....	7
3.2. NUMERIČKI MODEL.....	9
3.2.1. Neke numeričke metode za traženje oblika prednapetih mreža kabela.....	11
4. METODA GUSTOĆA SILA.....	12
5. OBLIKOVANJE PREDNAPETIH MREŽA KABELA PRIMJENOM METODE GUSTOĆA SILA.....	14
5.1. PROGRAMSKA PODRŠKA.....	16
5.2. APROKSIMACIJA MINIMALNE PLOHE MREŽOM PREDNAPETIH KABELA.....	17
5.2.1. Općenito o minimalnim ploham.....	17
5.2.2. Aproksimacija.....	18
5.2.2.1. Scherkova minimalna ploha.....	19
5.2.2.2. Usporedba minimalne mreže s minimalnom plohom.....	41
5.3. TRAŽENJE OBLIKA POMOĆU METODE GUSTOĆA SILA.....	57
5.4. USPOREDBA FIZIČKOGA I NUMERIČKOGA MODELA.....	71
5.4.1. Općenito o izradi fizičkoga modela prednapetih konstrukcija.....	71
5.4.2. Izrada fizičkoga modela.....	71
5.4.3. Izrada numeričkoga modela.....	74
5.4.4. Usporedba fizičkoga i numeričkoga modela.....	77
6. ZAKLJUČCI.....	78
7. ZAHVALE.....	81
8. POPIS SLIKA.....	82
9. POPIS TABLICA.....	85
10. POPIS DIJAGRAMA.....	85
11. POPIS LITERATURE.....	86

12.	SAŽETAK	88
13.	SUMMARY	88

1. UVOD

Intenzivan razvoj tehnologije, znanosti i obrazovanja, postavio je zahtjev, ali i omogućio realizaciju građevina koje premošćuju velike raspone. Tradicionalni građevni materijali kao što su kamen, drvo, beton i čelik odlikuju se vlastitom težinom i krutošću koje im osiguravaju stabilnost i omogućuju prijenos sila. Težina i krutost nisu osobine poželjne kod konstrukcija koje svladavaju velike raspone. Tijekom 19. i 20. stoljeća Rankine, Maxwell, Cremona i Michell razvijaju teorije koje će doprinijeti postupku optimizacije konstrukcija. Njihove se teorije kombiniraju s tadašnjom optimizacijom topologije i alatima *traženja oblika* (eng. *form finding*) u ideju koja će inženjerima omogućiti kreiranje građevina koje će ispunjavati cijeli niz zahtjeva – konstruktivne, estetske, ekonomske, ekološke – uz minimalan utrošak materijala [1].

Lagane konstrukcije objedinjuju više tipova konstrukcija: vlačne konstrukcije, ljske, složenice (eng. *folded plates*), rebraste kupole (eng. *grid domes*), kabela kupole (eng. *cable domes*), *tensegrity* konstrukcije [2]. Kritično obilježje svih navedenih tipova konstrukcija je kontinuirana, prostorno zakrivljena ploha. U ovom radu, analizirat će se vlačne konstrukcije koje se dijele na: membranske vlačne konstrukcije (eng. *membrane structures*) [3], mreže prednapetih kabela (eng. *prestressed cable nets*) i pneumatske konstrukcije (eng. *air supported*). Nosivi elementi kao što su platno ili kabel, a koji tvore vlačnu konstrukciju, moraju formirati specifični geometrijski oblik koji osigurava isključivo vlačni prijenos sila. Kritično svojstvo vlačne konstrukcije je upravo njezin oblik te je za pronalaženje pravoga oblika neophodno poznavanje nestandardnih metoda proračuna. Vlačna prednapeta konstrukcija poprima oblik zahvaljujući uvjetima pridržanja i uvjetima preraspodijele sila [4]. Zajedno s veličinom prednapona oblik određuju iznos i razdioba naprezanja i pomaka za zadano opterećenje. Razlikuju se od konvencionalnih građevina utoliko što se sile vanjskih djelovanja prenose isključivo napetošću membrane, odnosno kabela. Ukoliko je odabran odgovarajući materijal, zakrivljenost i prijenos sila, njihov konstrukcijski oblik odgovara točno vlačnom prijenosu sila.

Osnovna karakteristika vlačnih konstrukcija je optimalno iskorištavanje materijala. Materijal se koristi optimalno ako je pod utjecajem membranskih sila, a ne momenta savijanja. Vlačne konstrukcije prenose opterećenje samo vlačnim silama u svim presjecima. Vlačni elementi se mogu opterećivati gotovo do granice tečenja pa je materijal potpuno iskorišten. Uz malu težinu, karakteristična je njihova elegancija i imponantnost što ih čini atraktivnim načinom natkrivanja velikih raspona [5].

Osnovni oblik vlačnih konstrukcija je ploha oslonjena na minimalno četiri točke. Jedna od četiri točke, mora biti izvan ravnine određene trima preostalim točkama kako bi ploha razapeta između te četiri točke bila sedlasta (antiklastična), odnosno dvostruke zakrivljenosti. Upravo dvostruka zakrivljenost daje konstrukciji stabilnost i nosivost.

Zadnjih nekoliko desetljeća ubrzano raste broj i područje primjene vlačnih konstrukcija. Razvoj vlačnih konstrukcija potaknut je razvojem materijala i tehnika projektiranja, što budi zanimanje inženjera koji

žele sudjelovati u projektiranju i izvođenju ovih konstrukcija. U projektu vlačnih konstrukcija usko su povezani oblik i ponašanje konstrukcije te odabrani materijali i znanje o proizvodnji istih. Arhitektonske mogućnosti oblika su ograničene obzirom da odabrani oblik mora biti fizikalno moguć i u ravnoteži, u neopterećenom i opterećenom stanju.

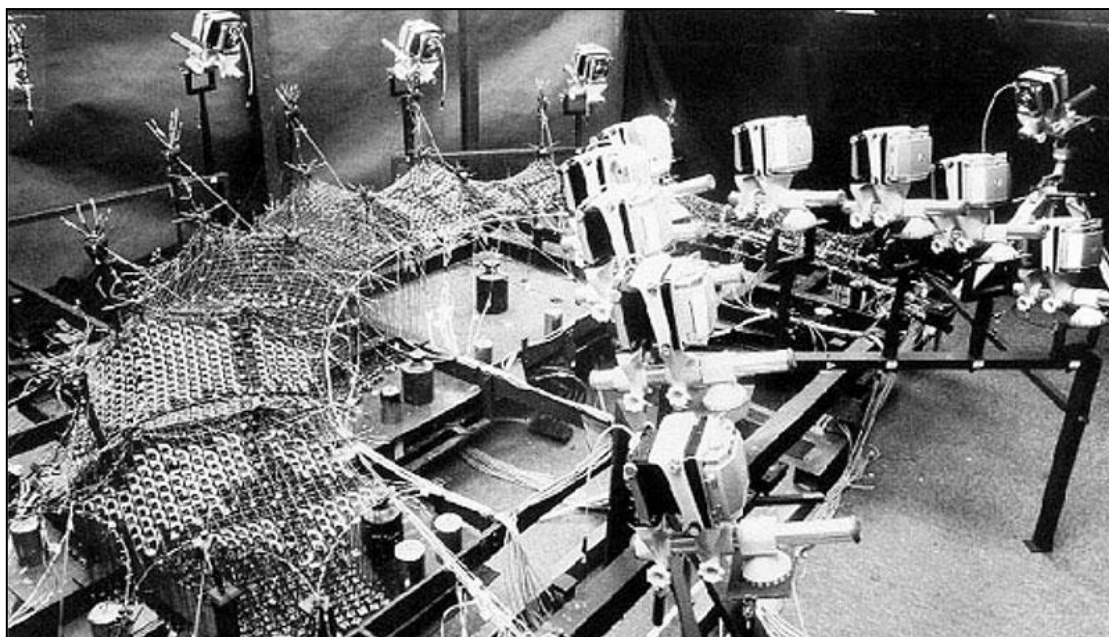
Jedne od prvih ljudskih građevina bili su šatori. Iako vlačne konstrukcije, malo se znalo o analitičkom modeliranju njihova ponašanja pod opterećenjem. Prenapete mreže kabela i membrane karakterizira interakcija njihove geometrije i raspodjele napreznja. Upravo zahvaljujući vezi između oblika i sila, nemoguće je projektirati vlačne konstrukcije izravno, što je moguće kod konvencionalnih građevina. Geometrija vlačnih konstrukcija nije poznata prije proračuna, već mora slijediti stroga pravila. Važno je minimiziranje savijanja, odnosno minimiziranje deformacijske energije, a ne težine, kao što naziv "lagane konstrukcije" možda implicira.

Frei Otto, njemački građevinski i arhitektonski inženjer, postavio je temelj proučavanja ovakvih konstrukcija. Otto je, zajedno s timom stručnjaka, sredinom prošlog stoljeća uvidio nepobitnu važnost izrade fizičkoga modela koji vjerno prikazuje ponašanje konstrukcije, njen oblik i raspored kabela uslijed djelovanja vanjskog opterećenja. Varijabilnost ponašanja konstrukcije mjeri se fotogrametrijskom metodom, a rezultati se koriste kao bazične pretpostavke za numerički proračun.



Slika 1: Olimpijski kompleks, München, Njemačka [6]

U velikoj ostavštini Frei Otta, neupitno se ističe revolucionarna konstrukcija minhenskog Olimpijskog stadiona iz 1972. godine. Bila je to prva konstrukcija na koju je primijenjena numerička metoda u svrhu nalaženja oblika. Predstavlja most između fizičkih modela praćenih jednostavnim ručnim 2D analizama i modernoga doba računalnoga modeliranja vlačnih konstrukcija, njihove 3D analize i krojenja [7]. Zbog osjetljivosti na pogreške prilikom očitavanja s fizičkoga modela, projektanti spomenutoga projekta su tražili veću točnost pomoću analitičkih rješenja što je rezultiralo prvim softverom namijenjenim isključivo analizi vlačnih konstrukcija. Novi je softver mogao nanositi opterećenje u malim koracima i računati novu geometriju nakon svake promjene opterećenja te na taj način na kraju dobiti točan oblik ravnotežne plohe i pripadna naprezanja [14].



Slika 2: Fizički model Olimpijskog stadiona, München, Njemačka [8]

2. OPĆI I SPECIFIČNI CILJEVI RADA

Opći cilj ovoga rada je ocjena sličnosti vlačnih konstrukcija od prednapete mreže kabela. Ispituju se uvjeti pod kojima se prednapeta mreža kabela približava membrani te na koji je način moguće što točnije aproksimirati minimalnu plohu ravnotežnom mrežom (općom i minimalnom).

Specifični ciljevi rada uključuju:

1. Aproksimaciju minimalne plohe mrežom prednapetih kabela,
2. Aproksimaciju minimalne plohe minimalnom mrežom,
3. Nalaženje oblika prednapetih vlačnih konstrukcija primjenom metode gustoća sila (gdje će se na nekoliko primjera izložiti reprezentativne iteracije),
4. Vizualnu usporedbu fizikalnoga i numeričkoga modela vlačne konstrukcije.

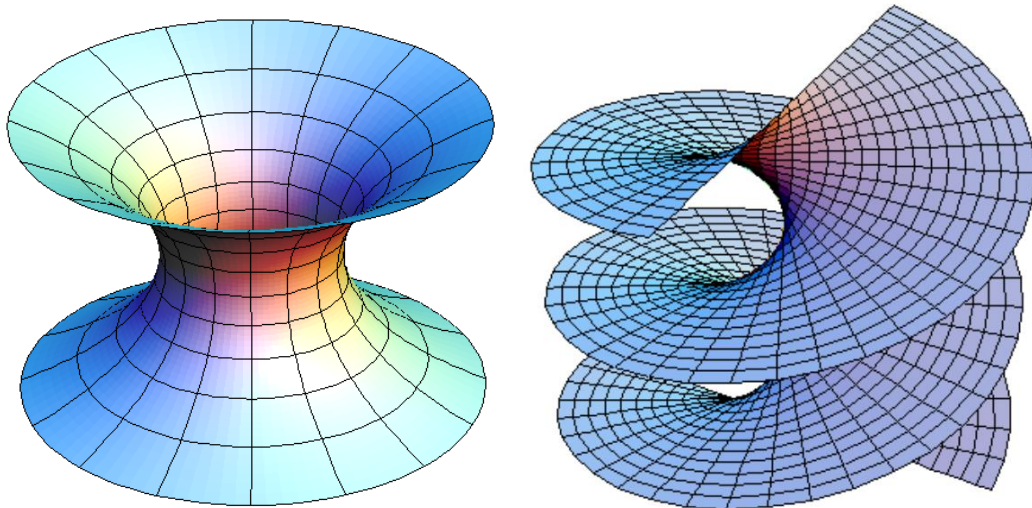
Dakle, ovaj rad se osvrće na konstrukcije kojima teorijski optimalno odgovara upravo oblik minimalne plohe. Preciznije, promatraju se prednapete mreže kabela čiji rubni uvjeti zadovoljavaju analitički izraz za plohu. Donosi se zaključak o odnosu povećanja broja čvorova mreže i razlike volumena analitičke minimalne plohe i mreže prednapetih kabela (plohe kojom je aproksimirana opća i minimalna mreža). Doneseni zaključak će se iskoristiti u nastavku rada te dodatno ispitati na određenim oblicima vlačnih konstrukcija modeliranjem istih pomoću mreža kabela.

Držimo kako je izrada fizičkoga modela u procesu projektiranja vlačnih konstrukcija od velike važnosti te u konačnici, želimo podsjetiti na doprinose ove tradicionalne metode nalaženja oblika. Kroz postupak izrade ukazuje se na prednosti i nedostatke fizičkoga modela te ga se uspoređuje s danas korištenim numeričkim modelom.

3. TRAŽENJE OBLIKA PREDNAPETE MREŽE (eng. *form finding*)

Kao što je ranije spomenuto, geometrija vlačnih konstrukcija nije poznata prije proračuna, već mora slijediti stroga pravila. Traženje oblika je primarna stavka u projektiranju vlačnih konstrukcija, i to upravo zbog izravne veze između oblika i distribucije sila.

Odabir ležajnih točaka definira oblik konstrukcije. Geometrija ležajnih točaka uz definirani prednapon upućuje na određeni ravnotežni oblik. Kada su zadani rubni uvjeti konstrukcije i distribucija unutarnjih, prednaponskih sila, postoji *samo jedna* ploha koja je u svakoj točki u ravnoteži pod zadanim uvjetima. Oblik baš te plohe određuje se matematičkim postupkom zvanim *traženje oblika* (eng. *form finding*). Ploha koja je rezultat navedenog postupka je dvostruke zakrivljenosti (eng. *doubly curved surface*). Takva ploha nema mogućnost razmotavanja u ravninu bez deformiranja, pa kao takva zahtijeva posebne metode i procese proizvodnje elemenata vlačnih konstrukcija. Matematički se te plohe mogu aproksimirati diferencijalnim jednačbama. Mnoga su rješenja diferencijalne jednačbe minimalne plohe, a najpoznatija su katenoid i helikoid (Slika 3).



Slika 3: Katenoid i helikoid – rješenja diferencijalne jednačbe minimalne plohe [9, 10]

Ravnotežni je oblik membrane sedlasta ploha nerazmotljiva u ravninu te se ploha mora dijeliti na komade ravninske tkanine koje zajedno spojene čine sedlastu plohu. Ista se izrezuje i spaja u skladu s geometrijskim i konstrukcijskim zahtjevima projektiranja kako bi se dobio željeni izgled membrane, koji je u skladu s postavljenim zahtjevima.

Sedlaste konstrukcije uvijek imaju negativnu Gaussovu zakrivljenost i stoga se ne mogu razviti iz trodimenzionalnog oblika u dvodimenzionalni. Kako bi se proizveli dvodimenzionalni dijelovi, razlike u duljinama nastale zbog matematički – geometrijskih ograničenja moraju se nadoknaditi kroz proračun krojenja, a koji se bazira na deformacijskim svojstvima materijala.

Potrebno je pronaći mjeru u veličini tkanine. Pri odabiru veličine traka, bitno je smanjiti veličinu platna kako bi iskrivljenje plohe bilo što manje, no istovremeno treba nastojati minimizirati količinu otpada platna. Ako je u pitanju odabir više manjih traka, bit će više šavova koji predstavljaju linije diskontinuiteta. S druge strane, odabir manjeg broja velikih traka rezultirat će povećanjem zakrivljenosti te će dovesti do mogućnosti pojave nabiranja tkanine iako će biti manje šavova, što znači i manje linija diskontinuiteta.

Dakle, utvrđivanje trodimenzionalnih šablona za rezanje s određivanjem rasporeda traka i dimenzioniranje pojedine trake membranske površine zove se *krojenje* (eng. *patterning*), a ovisno je o obliku i površini koja se treba dobiti. Krojenje mreža kabela odnosi se na precizno određivanje duljine kabela kao i njegove pozicije u mreži [11].

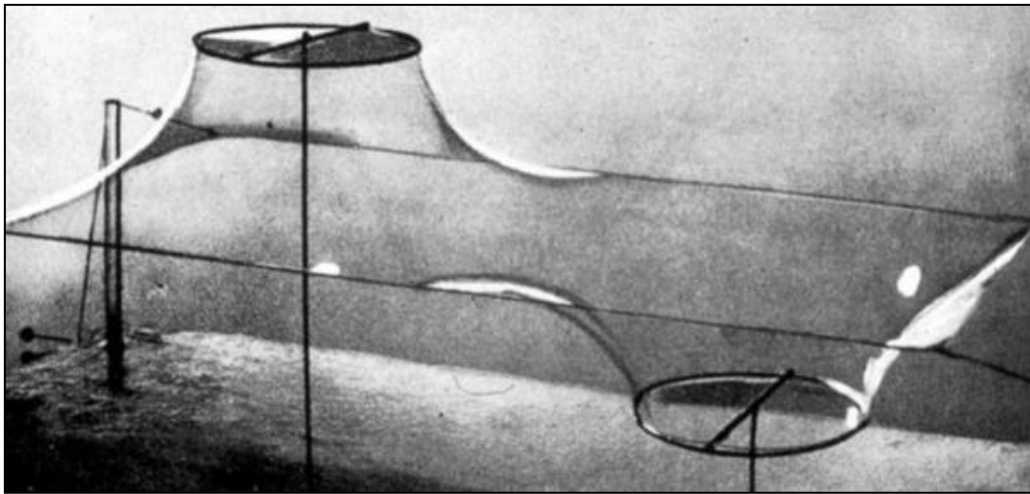
Tražanjem oblika odnosno *form findingom* želi se naći ravnotežni oblik vlačne konstrukcije i to baš za odabrani raspored prednaponskih sila. Taj je dio proračuna karakterističan za vlačne konstrukcije. Ukoliko se dobiveni oblik plohe želi izmijeniti, sile prednapona ili raspored ležajnih točaka moraju biti promijenjeni. Dakle, možemo reći kako se vlačne konstrukcije ponašaju prema principu eng. *form follows force* [12].

Konstrukcija prenosi opterećenje promjenom geometrije, tj. velikim pomacima i promjenom sila prednapona u elementima. Čak i kada je opterećenje u granicama elastičnosti, pomaci su takvi da ih se ne smije zanemariti u analizi. Riječ je o proračunu prema teoriji drugoga reda prema kojoj su pomaci veliki, a deformacije male.

Postoje dva načina određivanja oblika: fizičkim modelom i numeričkim modelom.

3.1. FIZIČKI MODEL

Frei Otto 60-ih godina prošloga stoljeća uvodi fizikalni model kao metodu određivanja ravnotežnoga oblika. Problem *traženja oblika* je usko povezan s određivanjem minimalnih ploha o kojima će se, u nastavku rada, više govoriti. Eksperimentalno se takva ploha može dobiti kao opna od sapunice između zadanih rubnih uvjeta (slika 4). Opna od sapunice je ploha s minimalnom potencijalnom energijom. Između zadanih rubnih uvjeta, opušta se i zadržava oblik kojim se minimizira unutarnje vlačno naprezanje. Otto razvija, po uzoru na fizikalni model gdje je minimalna ploha dobivena kao opna od sapunice, tehniku upotrebe tankih žica i malih spajalica za traženje ravnotežnog oblika, s ciljem što preciznijeg određivanja koordinata točaka dobivene plohe.



Slika 4: Fizički model – minimalna ploha dobivena kao opna od sapunice [13]



Slika 5: Fizički model krovišta Olimpijskog stadiona u Münchenu [14]

Fizički modeli s opnom od sapunice i drugi fizički modeli razvijeni po uzoru na isti, primjenjivali su se za potrebe optimizacije oblika vlačnih konstrukcija i ljuski u tlaku. Optimizacija oblika ljuski u tlaku utemeljena je na vlačno – tlačnoj analogiji. Razvila su se dva smjera istraživanja koja se bave oblikom konstrukcija: *form finding* i optimizacija konstrukcije. *Form finding* se primjenjuje na vlačne konstrukcije, a služi se metodom spomenute analogije s opnom od sapunice za konstrukciju u čistom vlaklu i metodom ovješanih modela za traženje oblika tlačnih konstrukcija inverzijom oblika vlačnih konstrukcija. Optimizacija konstrukcije je primjenjiva na sve tipove konstrukcija [14].

Fizički modeli se koriste u raznim fazama izrade projekta, ne samo kao početna vizualizacija ravnotežnog oblika, iako im je to danas osnovna svrha. Prije intenzivnog razvoja znanosti i tehnologije, bili su jedini način traženja oblika iako praćeni brojnim manjkavostima od kojih je bitno istaknuti očitavanje koordinata točaka dobivene plohe. Primjena znanja o svojstvima konstrukcije, skupljenih proučavanjem fizičkog modela, na stvarnu konstrukciju može rezultirati velikim greškama. Na primjer, pogreška u određivanju duljine kabela može uzrokovati promjenu u predviđenoj veličini sile prednapona od čak 60%. Jasno je kako je analiza numeričkog modela neophodna za kvalitetan proračun konstrukcije.

Traženje oblika provodi se u dvije faze. Prva faza je izrada fizičkog modela za zadane rubne uvjete služeći se jednom od metoda *form finding*-a (opna od sapunice, rastezljiva tkanina ili rastezljive niti). Kada je dobiven željeni oblik, slijedi druga faza u kojoj se formira numerički model.



Slika 6: Khan Shatyr zabavni centar, Nur – Sultan, Kazahstan, 2010. – najviša prednapeta mreža kabela na svijetu (150 m) [15]

3.2. NUMERIČKI MODEL

Potreba za razumijevanjem ponašanja složenih inženjerskih struktura izloženih složenim kombinacijama opterećenja zajedno sa sukladnim razvojem računala i inženjerskih softvera omogućili su izvođenje složenijih kalkulacija. Pri izradi numeričkih modela različiti programski paketi i programski jezici koriste se za modeliranja, a nerijetko i za simuliranje stvarnih situacija na konstrukciju. Pritom se rezultati simulacije računalno prikazuju u dva oblika: tako da ih iščitava ili sami program ili čovjek ručno. Danas je ovakav način izrade modela vrlo primjenjivan. Tako je i učenje na takvim programima uključeno u sami sustav edukacije inženjera, ne samo građevine, već i ostalih struka. Ovakav način modeliranja smanjuje cijenu, podiže kvalitetu proizvoda i dokumentira podatke iz prijašnjih modela. Upravo zbog toga se danas primarno koriste numerički ili računalni modeli u svakodnevi te su zamijenili fizičke modele. Posebno popularan vizualni jezik zbog svoje jednostavnosti jest onaj korišten za izradu numeričkog modela u nastavku rada – Grasshopper.

Druga faza, faza traženja oblika analizom numeričkoga modela rezultirat će:

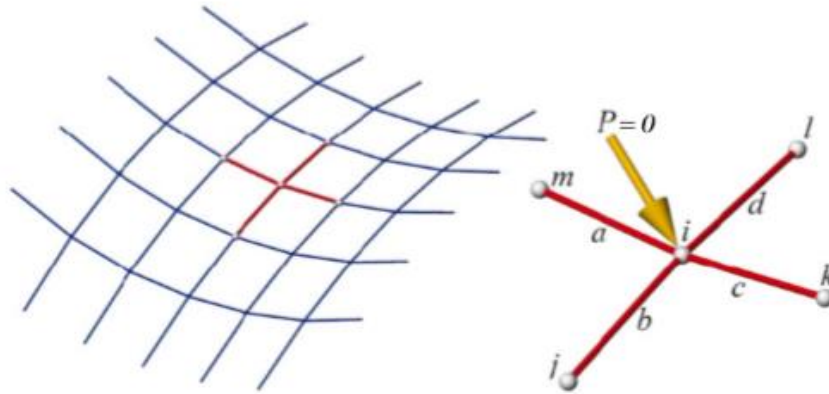
1. Optimalnim oblikom konstrukcije, tj. stabilnom ravnotežnom plohom,
2. Oblikom konstrukcije koja je u stanju statičke ravnoteže, s tim da naprezanja ne moraju biti ista u svim elementima mreže i u svakom smjeru ili

Postojanje više rješenja koja zadovoljavaju zadane rubne uvjete u postupku određivanja oblika govori o njegovoj složenosti. U slučaju n slobodnih čvorova, broj nepoznanica je $3n+m$ gdje je m broj elemenata odnosno predneponskih sila u elementima. U svakom čvoru mogu se napisati 3 uvjeta ravnoteže što znači da postoji premalen broj uvjeta ravnoteže u odnosu na ukupan broj nepoznanica. Prema tome, potrebno je postavljati dodatne uvjete koji smanjuju broj nepoznanica (na primjer, uvjet jednakih sile prednapona u svim elementima). Na sjecištu (čvoru) dva kabela (odnosno četiri elementa mreže) tri jednadžbe ravnoteže u općem zapisu glase (vanjskog opterećenja nema, a vlastita težina elementa se zanemaruje):

$$\sum_{j=1}^4 \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \cdot S_{ij} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{(y_i - y_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \cdot S_{ij} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} \cdot S_{ij} = 0.$$



Slika 7: Dio mreže kabela – Izdvojen slobodni čvor mreže kabela [14]

Novonastali sustav, sustav je triju jednadžbi ravnoteže svakoga čvora mreže. Razlikujemo slobodne i ležajne čvorove. Kao jedan od ulaznih podataka analize koristimo koordinate ležajnih čvorova, a koordinate slobodnih čvorova rješenje su sustava. Već je rečeno, kako bi sustav mogao biti riješen, moraju se uvesti ograničenja i dodatne pretpostavke kako bi se došlo do jedinstvenog rješenja. Konstrukcija dobiva oblik minimalne mreže ako se pretpostavi jednaka sila prednapona u svakom elementu mreže te ujedno tom pretpostavkom sustav postaje rješiv. Moguće je zadavanje i drugih pretpostavki ukoliko prije spomenuti uvjet ne zadovoljava, na primjer, estetske ili funkcionalne uvjete. Pretpostavke mogu biti:

1. Različite ali poznate sile prednaprezanja,
2. Unutarnja geometrija mreže, odnosno udaljenosti među čvorovima ili smjer kabela,
3. Veličina projekcije mreže na horizontalnu ravninu xy ,
4. Odnos sile i duljine pojedinih elemenata.

Uzme li se u obzir od prije postavljenu pretpostavku o jednakim silama u elementima, S_{ij} , u navedenom sustavu jednadžbi iščezava. Rješenje se ne može dobiti izravno zbog nelinearnosti sustava. Iz tog razloga, iterativnim postupkom potrebno se približiti konačnome rješenju, odnosno potrebno je pretpostaviti početno rješenje (*Newton – Rhapsod metoda*) [16].

Dobivanjem rješenja sustava jednažbi i pronalaskom oblika konstrukcije, potrebno je dobiveni oblik ispitati na postavljenje zahtjeve funkcionalnosti i arhitekta te, ukoliko je potrebno, ponoviti postupak, što zajedno čini spomenuti postupak postupkom optimizacije konstrukcije. Ukoliko do zadovoljavajućeg rješenja nije moguće doći, moraju se mijenjati koordinate ležajnih čvorova, to jest promijeniti geometriju rubova.

Prilikom nalaženja oblika u obzir se ne uzimaju vanjska djelovanja. Postoje samo sile prednapona kojima se kontrolira i po potrebi mijenja početni oblik te se čuva postojanost vlačnih napreznja kako bi se spriječila nestabilnost konstrukcije. Dobiveni oblik mjerodavan za daljnji proračun je funkcija omjera napreznja u smjeru kabela i rubnih uvjeta. Sljedeći je korak statički proračun konstrukcije u

kojemu se u obzir uzimaju vanjska djelovanja (vjetar, snijeg i vlastita težina) koja djeluju na početni, prethodno dobiven oblik. Daljnji proračun je novi susret s nelinearnošću koja je mala u odnosu na onu u fazi traženja oblika te je statičku analizu moguće provesti u većini softvera za konvencionalne konstrukcije [14].

3.2.1. Neke numeričke metode za traženje oblika prednapetih mreža kabela

Zahvaljujući manjkavosti fizičkog modela, 50-ih godina prošlog stoljeća se razvijaju računalni programi koji će značajno unaprijediti točnost oblika i naprezanja koja se javljaju pod zadanim opterećenjem. Prvi takav program bio je namijenjen isključivo određivanju oblika vlačne konstrukcije i to za potrebe spomenutoga projekta krovništva minhenskog Olimpijskog stadiona. U istom projektu, isprva se koristio precizan fizički model (Slika 4). Trebao je predstavljati izvor svih važnih podataka za projektiranje. Fotogrametrijskom su se metodom trebale utvrditi koordinate određenih točaka mreže kabela. Koordinate dobivene na ovaj način su se morale modificirati kako bi se dobila ekvidistantna mreža i ravnoteža sila u svakom čvoru. Numeričko rješenje dobiveno je primjenom metode najmanjih kvadrata na izmjerenim koordinatama. Tako su dobiveni podaci o duljini kabela potrebni za krojenje mreže. To je bio početak razvoja numeričkih metoda i računalnih programa za analizu svih vrsta vlačnih konstrukcija.

U pravilu, računalni modeli su baza numeričkih i grafičkih podataka koji opisuju oblik konstrukcije, naprezanja i deformacije pod određenim opterećenjem, skupljenih pomoću algoritama koji opisuju iterativan postupak namještanja vlačne plohe dok se ne postigne statička ravnoteža. Početni je položaj samo pretpostavka oblika, te je potrebna iteracija kojom se dolazi do ravnotežnog oblika.

Najčešće numeričke metode koje se primjenjuju pri traženju geometrijski nelinearnog odziva konstrukcije su:

1. Metoda gustoća sila (eng. *the force density method*),
2. Metoda dinamičke relaksacije (eng. *the dynamic relaxation method*),
3. Metoda matrice krutosti (eng. *the transient stiffness method*)
4. Aproksimacija linearne metode,
5. Metoda konačnih elemenata

U ovome radu, korištena je *metoda gustoća sila*. Ista se temelji na opisivanju stanja ravnoteže pomoću sustava linearnih jednadžbi koji se sastavlja pomoću omjera sile i duljine elementa (f/l) nazvanog gustoćom sila elemenata mreže. Jedna vrijednost pridružena je svakom elementu, a rješenje linearnog sustava jednadžbi je jedinstven ravnotežni oblik konstrukcije.

4. METODA GUSTOĆA SILA

Nelinearne jednadžbe i nelinearni sustavi rješavaju se numeričkim iteracijskim postupcima u kojima se niz operacija ponavlja do zadovoljenja odabranoga kriterija. Opće poznata metoda za rješavanje takvog sustava je Newton – Rhapsosnov postupak, tzv. *metoda tangente*. Potrebno je zadati početno rješenje i upravo o tom rješenju ovisi konvergentnost metode [17].

Metoda gustoća sila temelji se na linearizaciji nelinearnog sustava jednadžbi, a rješenje sustava su koordinate točaka ravnotežne mreže. Nisu potrebne bilo kakve početne koordinate. Jedini potreban podatak prije rješavanja sustava je tzv. gustoća sila svakog elementa.

Metodu gustoće sila Sherk je razvio prvotno samo za ekvidistantne kvadratne mreže kabela. Kasnije, zajedno s Linkwitzom predstavlja novu formulaciju ravnoteže sila u čvorovima mreže kabela. Nazvali su je formulacijom gustoća sila. [18]

Kasnije nazvana metoda gustoća sila pokazala se kao moćan alat za sastavljanje i rješavanje jednadžbi ravnoteže mreže prednapetih kabela i membrana bez potrebe određivanja početnih koordinata. Osnovna je ideja bila: ravnoteža je postignuta ako su u čvoru uravnotežene unutarnje (s) i vanjske sile (p).

$$s_a \cos(a, x) + s_b \cos(b, x) + s_c \cos(c, x) + s_d \cos(d, x) = p_x ,$$

$$s_a \cos(a, y) + s_b \cos(b, y) + s_c \cos(c, y) + s_d \cos(d, y) = p_y ,$$

$$s_a \cos(a, z) + s_b \cos(b, z) + s_c \cos(c, z) + s_d \cos(d, z) = p_z ,$$

gdje su:

s_a, s_b, s_c, s_d – sile u kabelima a, b, c, d

$\cos(a, x) = \frac{(x_m - x_i)}{a}$ – duljine projekcija kabela na os x

Prema tome:

$$\frac{s_a}{a} (x_m - x_i) + \frac{s_b}{b} (x_j - x_i) + \frac{s_c}{c} (x_k - x_i) + \frac{s_d}{d} (x_l - x_i) = p_x ,$$

$$\frac{s_a}{a} (y_m - y_i) + \frac{s_b}{b} (y_j - y_i) + \frac{s_c}{c} (y_k - y_i) + \frac{s_d}{d} (y_l - y_i) = p_y ,$$

$$\frac{s_a}{a} (z_m - z_i) + \frac{s_b}{b} (z_j - z_i) + \frac{s_c}{c} (z_k - z_i) + \frac{s_d}{d} (z_l - z_i) = p_z .$$

a , b , c , d su nelinearne funkcije koordinata čvorova:

$$a = \sqrt{(x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2},$$

$$b = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2},$$

$$c = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2},$$

$$d = \sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2 + (z_l - z_i)^2}.$$

Sile unutar kabela, odnosno prednaponske sile su ovisne o duljini nedeformiranih kabela i Hookeovom zakonu pa gustoću sila definiramo kao:

$$q_a(x_m - x_i) + q_b(x_j - x_i) + q_c(x_k - x_i) + q_d(x_l - x_i) = p_x ,$$

$$q_a(y_m - y_i) + q_b(y_j - y_i) + q_c(y_k - y_i) + q_d(y_l - y_i) = p_y ,$$

$$q_a(z_m - z_i) + q_b(z_j - z_i) + q_c(z_k - z_i) + q_d(z_l - z_i) = p_z .$$

U fazi traženja oblika, desna strana jednakosti jednadžbi u sustavu je jednaka nuli, s obzirom da vanjsko opterećenje ne postoji. Sustav jednadžbi je linearan te se može dodatno pojednostavniti uvođenjem jednake vrijednosti gustoće sila za sve elemente mreže. Rješenje služi kao dobra početna aproksimacija početnog položaja.

Ako se promijeni gustoća sila svih elemenata za istu vrijednost, oblik se ne mijenja. Promjenom omjera gustoće sila elemenata, mijenjaju se oblik i rješenje sustava. Postupak se ponavlja dok se ne dobije zadovoljavajući oblik konstrukcije.

Ulazni podaci za proces traženja oblika su: veze između elemenata, gustoća sila i rubni uvjeti. Postupak provođenja traženja oblika metodom gustoće sila bit će objašnjen u točki 5.2..

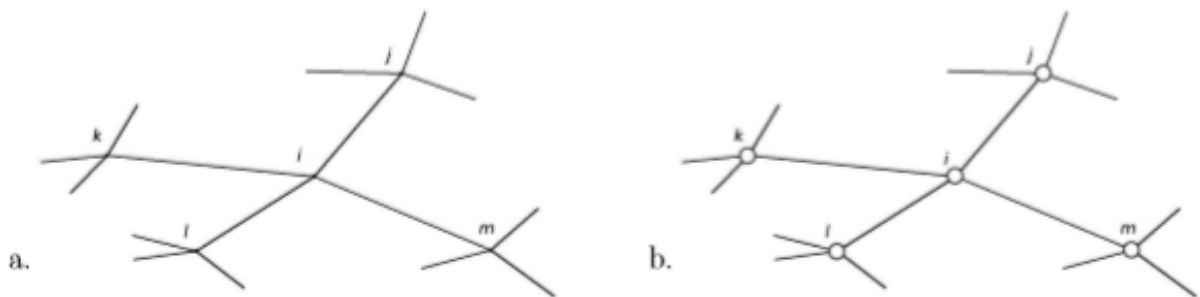
5. OBLIKOVANJE PREDNAPETIH MREŽA KABELA PRIMJENOM METODE GUSTOĆA SILA

Postupak projektiranja vlačnih konstrukcija podijeljen je u tri faze:

1. nalaženje oblika (eng. *form finding*)
2. geometrijski nelinearan statički proračun i
3. krojenje kabela.

Prva faza projektiranja gipkih prednapetih konstrukcija od platna i užadi je nalaženje njihova oblika prije nanošenja korisnog opterećenja, najčešće uz zanemarivanje njihove vlastite težine. *Nalaženje oblika* konstrukcije od prednapetih kabela podrazumijeva određivanje početne konfiguracije koja obuhvaća njezin geometrijski oblik i razdiobu prednaponskih sila u kabelima.

Za oblikovanje proračunskoga modela mreže, pretpostavlja se da su kabeli potpuno savitljivi i bez težine. Promatra se samo faza nalaženja oblika, pa se utjecaj vanjskoga opterećenja ne uzima u obzir. Ako kabele prednapnemo vlačnim silama, između njih će, u točkama u kojima se križaju, djelovati kontaktne sile. Ako kabeli jedni po drugima mogu klizati bez trenja, te će sile biti normalne na dodirne plohe, a ako je klizanje spriječeno, djelomice ili potpuno, sile će imati i tangencijalne komponente. Kako su površine dodirnih površina male, kontaktne sile ćemo smatrati koncentriranim. Zbog pretpostavljene potpune savitljivosti, kabel opterećen samo koncentriranim silama poprima oblik ravninske ili poligonalne linije, tako da će odsječci između točaka u kojima se neki kabel križa s drugim biti ravni.



Slika 8: Detalj mreže [19]

Iako se zbog debljine kabela njihove osi u sjecištima mimoilaze, pretpostavit ćemo da su ta sjecišta geometrijske točke u kojima se osi kabela sijeku. Uzimajući u obzir navedene pretpostavke, u proračunskom modelu promatraju se odsječci kabela između sjecišta kao zglobni štapovi, a sjecišta kao zglobni čvorovi u koje su štapovi centrično priključeni.

Uz unutarnje čvorove u kojima se kabeli križaju i čvorova u kojim su unutarnji elementi spojeni s rubnima, mreža ima i ležajne čvorove u kojima su kabeli spojeni s „krutim“ rubnim i, rjeđe, unutarnjim linijskim i točkastim osloncima. Pod pojmom krutih oslonaca podrazumijevamo „tradicionalne“

konstrukcijske elemente kao što su grede, lukovi, „jarboli“, „sidra“, koji nisu apsolutno kruti, ali čvorove na njima možemo smatrati nepomičnima. Položaji ležajnih čvorova su zadani. Čvorove koji nisu ležajni nazivat ćemo slobodnim čvorovima.



Slika 9: Ležajni čvor [20]

Temeljne varijable u nalaženju oblika prednapetih konstrukcija od užadi su topologija i geometrija mreže užadi, geometrijski rubni uvjeti te vrijednosti prednaponskih sila u užadi ili omjeri tih vrijednosti. Formulacije zadaće nalaženja oblika ovise o tome koje se varijable zadaju, a koje su nepoznanica. Upravo različite formulacije nalaženja oblika su predmet proučavanja ovoga rada i prezentiraju se u nastavku.

Topologija mreže opisuje povezanost kabela, štapova i čvorova i čvorova. Matematičkim rječnikom, ta je povezanost relacija incidencije: za štap i čvor u koji je on priključen kaže se da su incidentni. Zadaje se unaprijed, a određena je predviđenim brojem i rasporedom kabela.

Geometrija mreže ključna je varijabla u nalaženju oblika. Oblik mora zadovoljiti konstrukcije, funkcionalne i estetske zahtjeve. U proračunskom je modelu određen koordinatama čvorova. S obzirom kako je traženi oblik mreže ravnotežna konfiguracija prednaponskih vlačnih sila u sustavu zglobno spojenih štapova, koordinate slobodnih čvorova su temeljne nepoznanice u postupku nalaženja oblika. Dakle, duljine štapova, za razliku od duljina u „klasičnim“ rešetkastim konstrukcijama, mogu se značajno mijenjati. U nekim je slučajevima potrebno osim uvjeta ravnoteže sila u čvorovima uvesti i dodatne uvjete izražene u obliku kinematičkih ograničenja koja povezuju nepoznate koordinate.

Geometrijski rubni uvjeti su određeni zadanim koordinatama nepomičnih ležajnih čvorova. Jedan od načina kojim se može utjecati na promjenu oblika mreže je promjena razmještaja i oblika oslonaca, odnosno, u matematičkom modelu, geometrijskih rubnih uvjeta.

Vrijednosti prednaponskih sila u kabelima mogu biti unaprijed zadane, ali mogu biti i nepoznanice koje se određuju uravnoteženjem čvorova ili, u specifičnim slučajevima, zadovoljavanjem dodatnih kinematičkih ograničenja.

5.1. PROGRAMSKA PODRŠKA

Primjenom metode gustoća sila u traženju oblika prednapetih vlačnih konstrukcija, ravnotežni položaj određivan je numerički. Pritom smo koristili programe Rhinoceros3D [21] i Grasshopper (vizualni programski jezik i okruženje unutar Rhinoceros3D), Heteropteru [22] (podrška za Grasshopper) te matematički softver otvorenog tipa SageMath [23] kojemu je u pozadini programski jezik Phytion.



Slika 10: Programska podrška

5.2. APROKSIMACIJA MINIMALNE PLOHE MREŽOM PREDNAPETIH KABELA

5.2.1. Općenito o minimalnim ploham

Problem traženja oblika blisko je povezan s određivanjem minimalnih ploha. *Minimalna ploha* je definirana kao ploha čija je srednja zakrivljenost jednaka nuli. Na takvoj su plohi naprezanja jednaka u svakoj točki i u svim smjerovima tangencijalne ravnine. Ima najmanju površinu od svih ploha koje zadovoljavaju iste rubne uvjete. Minimalne plohe dobiju se minimalizacijom površine za dane rubne uvjete. Zadovoljavaju Lagrangeovu diferencijalnu jednačbu:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$$

Kod ploha koje imaju relativno male visinske razlike, prve derivacije daju male iznose ($f_x \approx 0, f_y \approx 0$), pa ne utječu bitno na Lagrangeovu jednačbu. Ako se zanemare ti članovi, Lagrangeova jednačba aproksimira se Laplaceovom:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

Kod ploha koje imaju relativno velike visinske razlike, ti članovi nisu zanemariivi.

Minimalna ploha, kao oblik za prednapete membranske konstrukcije, praćena je brojnim pogodnostima. Osnovna je prednost uniformno naprezanje, odnosno naprezanje jednako u svim točkama i u svim smjerovima. Dakle, nema kritičnih mjesta na kojima može doći do popuštanja membrane jer nigdje na plohi nema ekstremnih naprezanja. Minimalna ploha po svojoj definiciji zauzima minimum prostora što znači i minimalan utrošak materijala. Oblik deformirane plohe opterećene samo prednaponskim silama ne ovisi o svojstvima materijala, niti o apsolutnom iznosu prednaponskih sila, nego samo o omjeru i razdiobi tih sila. Navedeno implicira kako sile ne smiju biti negativne. Vlačne konstrukcije koje teže obliku minimalne plohe imaju malu ili gotovo nikakvu krutost na tlak i posmik te nema momenta savijanja. Zahvaljujući navedenim karakteristikama neminovno su optimalne konstrukcije. [24]

Treba uzeti u obzir kako kod izvođenja uvjeti nisu idealni, tj. često postoje ograničenja i prepreke koje onemogućuju izvođenje minimalne plohe te projektant može mijenjati oblik mijenjajući prednaprezanje u membrani ili kabelima po iznosu i smjeru. Teoretski, to je nemoguće kod minimalnih ploha pa govorimo o aproksimacijama.

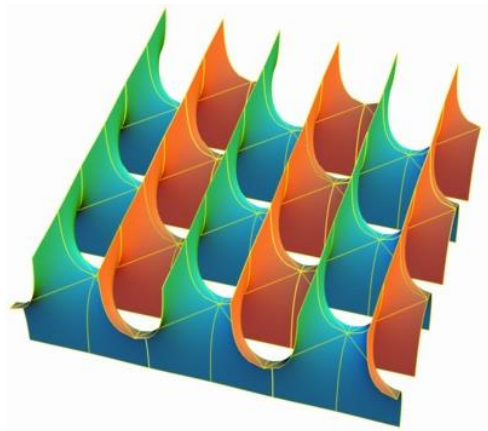
5.2.2. Aproksimacija

Promatra se Scherkova minimalna ploha.

Aproksimacija se vrši mrežama tlocrtnih dimenzija 20×20 metara. Ploha se aproksimirana četirima mrežama različitoga broja kabela. U sjecištu dvaju kabela nalazi se čvor. Rubne uvjete mreže, dakle koordinate rubnih čvorova, dobivaju se pomoću rubnih krivulja plohe na rubovima intervala.

Scherkova minimalna ploha definirana je analitičkim izrazom: $f(x, y) = \ln(\cos x / \cos y)$. Zadovoljava Lagrangeovu diferencijalnu jednadžbu i prava je minimalna ploha.

Istu je plohu moguće zadati i implicitnom jednadžbom: $e^z \cos y - \cos x = 0$. Ovaj način zadavanja plohe omogućava zadovoljavajući prikaz Scherkove minimalne plohe u širem području.

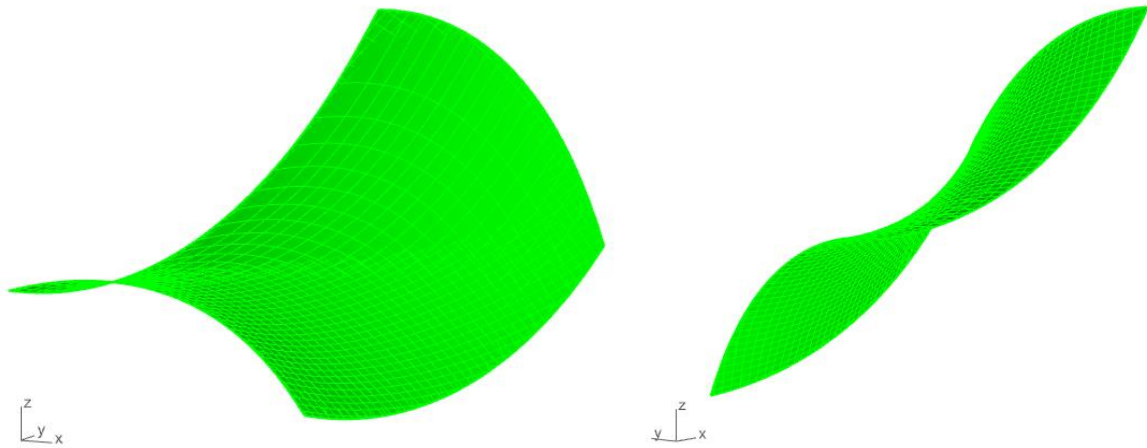


Slika 11: Scherkova minimalna ploha u širem području [25]

Cilj je ispitati koliko se mreža prednapetih kabela može približiti minimalnoj plohi zadanoj analitičkim izrazom.

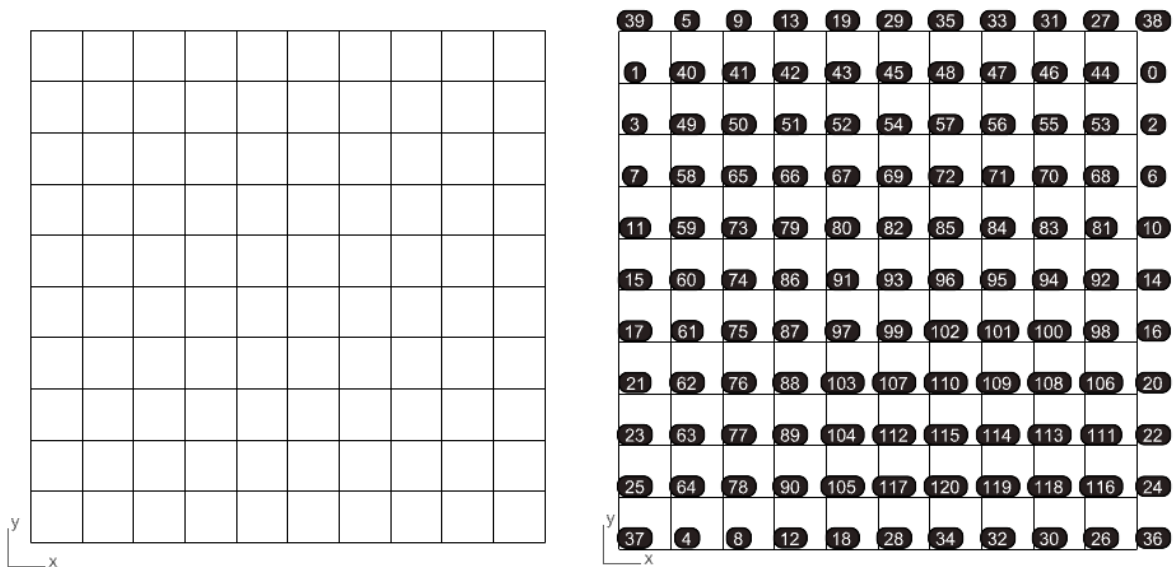
5.2.2.1. Scherkova minimalna ploha

Promatra se minimalna ploha na području $x \in [0,1], y \in [0,1]$.



Slika 12: Scherkova minimalna ploha $f(x, y) = \ln(\cos x / \cos y)$ na području $x \in [0,1], y \in [0,1]$.

Prvu mrežu (u nastavku Mreža 1) tvori jedanaest kabela u x smjeru i jedanaest kabela u y smjeru koji su međusobno udaljeni 2 m. Ukupno ima 121 čvor.

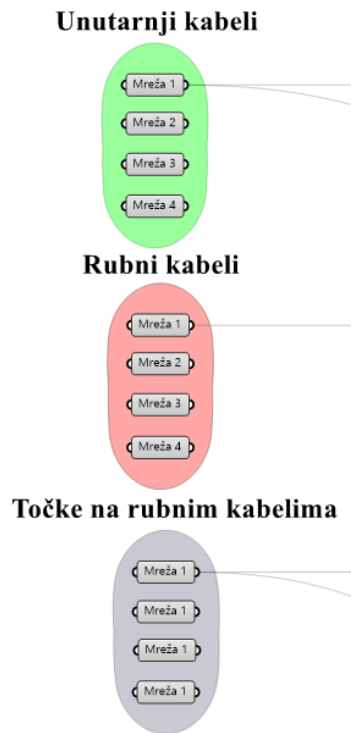


Slika 13: Mreža 1 (lijevo) i indeksi čvorova Mreže 1 (desno)

Definiraju se unutarnji i rubni kabele te rubni čvorovi. Potrebno je posebno definirati rubne čvorove jer će isti rubni čvorovi s novim koordinatama dobivenima pomoću rubne krivulje Scherkove minimalne plohe na rubovima intervala predstavljati rubne uvjete, u matematičkom smislu, za buduću prednapetu mrežu kojom aproksimiramo minimalnu plohu.

Iz informacija o unutarnjim i rubnim kabelima generira se mreža. Uređeni par [indeks prvog čvora, indeks drugog čvora] predstavlja jedan element, odnosno povezanost dva čvora.

Mreža 1 sadrži 220 elemenata (els).

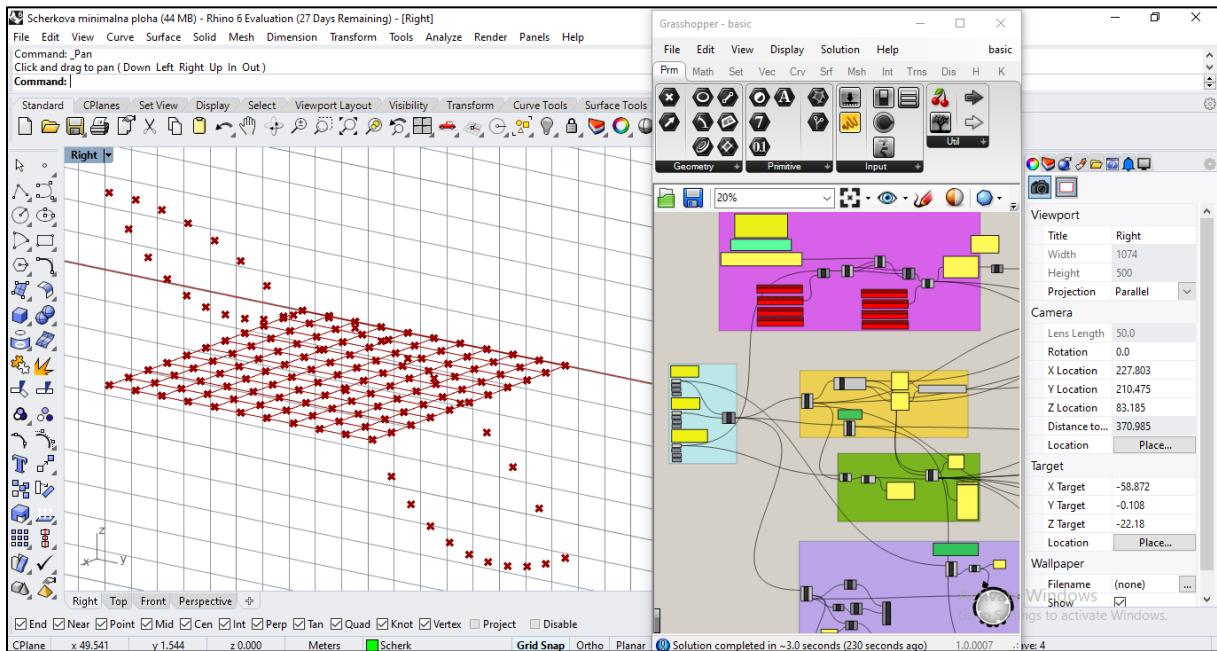


```
els = [[0, 2],[0, 38],[0, 44],[1, 3],[1, 39],[1, 40],[2, 6],[2, 53],[3,
7],[3, 49],[4, 8],[4, 37],[4, 64],[5, 9],[5, 39],[5, 40],[6, 10],[6,
68],[7, 11],[7, 58],[8, 12],[8, 78],[9, 13],[9, 41],[10, 14],[10,
81],[11, 15],[11, 59],[12, 18],[12, 90],[13, 19],[13, 42],[14, 16],[14,
92],[15, 17],[15, 60],[16, 20],[16, 98],[17, 21],[17, 61],[18, 28],[18,
105],[19, 29],[19, 43],[20, 22],[20, 106],[21, 23],[21, 62],[22,
24],[22, 111],[23, 25],[23, 63],[24, 36],[24, 116],[25, 37],[25,
64],[26, 30],[26, 36],[26, 116],[27, 31],[27, 38],[27, 44],[28, 34],[28,
117],[29, 35],[29, 45],[30, 32],[30, 118],[31, 33],[31, 46],[32,
34],[32, 119],[33, 35],[33, 47],[34, 120],[35, 48],[40, 41],[40,
49],[41, 42],[41, 50],[42, 43],[42, 51],[43, 45],[43, 52],[44, 46],[44,
53],[45, 48],[45, 54],[46, 47],[46, 55],[47, 48],[47, 56],[48, 57],[49,
50],[49, 58],[50, 51],[50, 65],[51, 52],[51, 66],[52, 54],[52, 67],[53,
55],[53, 68],[54, 57],[54, 69],[55, 56],[55, 70],[56, 57],[56, 71],[57,
72],[58, 59],[58, 65],[59, 60],[59, 73],[60, 61],[60, 74],[61, 62],[61,
75],[62, 63],[62, 76],[63, 64],[63, 77],[64, 78],[65, 66],[65, 73],[66,
67],[66, 79],[67, 69],[67, 80],[68, 70],[68, 81],[69, 72],[69, 82],[70,
71],[70, 83],[71, 72],[71, 84],[72, 85],[73, 74],[73, 79],[74, 75],[74,
86],[75, 76],[75, 87],[76, 77],[76, 88],[77, 78],[77, 89],[78, 90],[79,
80],[79, 86],[80, 82],[80, 91],[81, 83],[81, 92],[82, 85],[82, 93],[83,
84],[83, 94],[84, 85],[84, 95],[85, 96],[86, 87],[86, 91],[87, 88],[87,
97],[88, 89],[88, 103],[89, 90],[89, 104],[90, 105],[91, 93],[91,
97],[92, 94],[92, 98],[93, 96],[93, 99],[94, 95],[94, 100],[95,
96],[95, 101],[96, 102],[97, 99],[97, 103],[98, 100],[98, 106],[99,
102],[99, 107],[100, 101],[100, 108],[101, 102],[101, 109],[102, 110],[103, 104],[103, 107],[104,
105],[104, 112],[105, 117],[106, 108],[106, 111],[107, 110],[107, 112],[108, 109],[108, 113],[109,
110],[109, 114],[110, 115],[111, 113],[111, 116],[112, 115],[112, 117],[113, 114],[113, 118],[114,
115],[114, 119],[115, 120],[116, 118],[117, 120],[118, 119],[119, 120]]
```

Slika 14: Grasshopper, prvi korak u formiranju mreže

Koordinate rubnih čvorova zamjenjuju se novim koordinatama (support_nodes) koje zadovoljavaju analitički izraz za plohu.

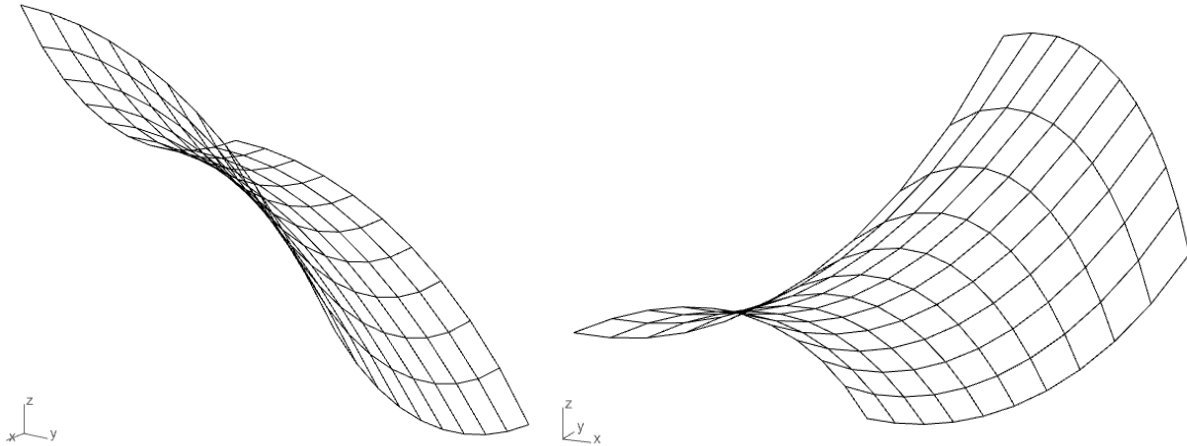
```
support_nodes = [[20, 41, 5.084714], [0, 25, 0], [2, 25, 0.100167], [4, 25, 0.402695], [6, 25,
0.913833], [8, 25, 1.64458], [10, 25, 2.611685], [12, 25, 3.839303], [14, 25, 5.361715], [16, 25,
7.227815], [18, 25, 9.508849], [20, 25, 12.312529], [20, 27, 12.212362], [20, 29, 11.909834], [20, 31,
11.398696], [20, 33, 10.667949], [20, 35, 9.700845], [20, 37, 8.473226], [20, 39, 6.950814], [20, 43,
2.803681], [20, 45, 0], [18, 45, -2.803681], [16, 45, -5.084714], [14, 45, -6.950814], [12, 45, -
8.473226], [10, 45, -9.700845], [8, 45, -10.667949], [6, 45, -11.398696], [4, 45, -11.909834], [2, 45,
-12.212362], [0, 45, -12.312529], [0, 43, -9.508849], [0, 41, -7.227815], [0, 39, -5.361715], [0, 37, -
3.839303], [0, 35, -2.611685], [0, 33, -1.64458], [0, 31, -0.913833], [0, 29, -0.402695], [0, 27, -
0.100167]]
```

Slika 15: Rhinoceros3D & Grasshopper; postavljanje rubnih uvjeta

Preostaje definirati gustoću sila elemenata. U situaciji, kada su svi rubni čvorovi ujedno i ležajni, gustoća sila nema veliki utjecaj na oblik mreže, pa se svim elementima zadaje jedinična gustoća sila.

Kada su svi ulazni podaci poznati, tj. definirani su čvorovi, elementi, rubni uvjeti i gustoća sila, moguće je pronaći ravnotežni oblik Mreže 1 koristeći programski kod napisan u SageMath-u.

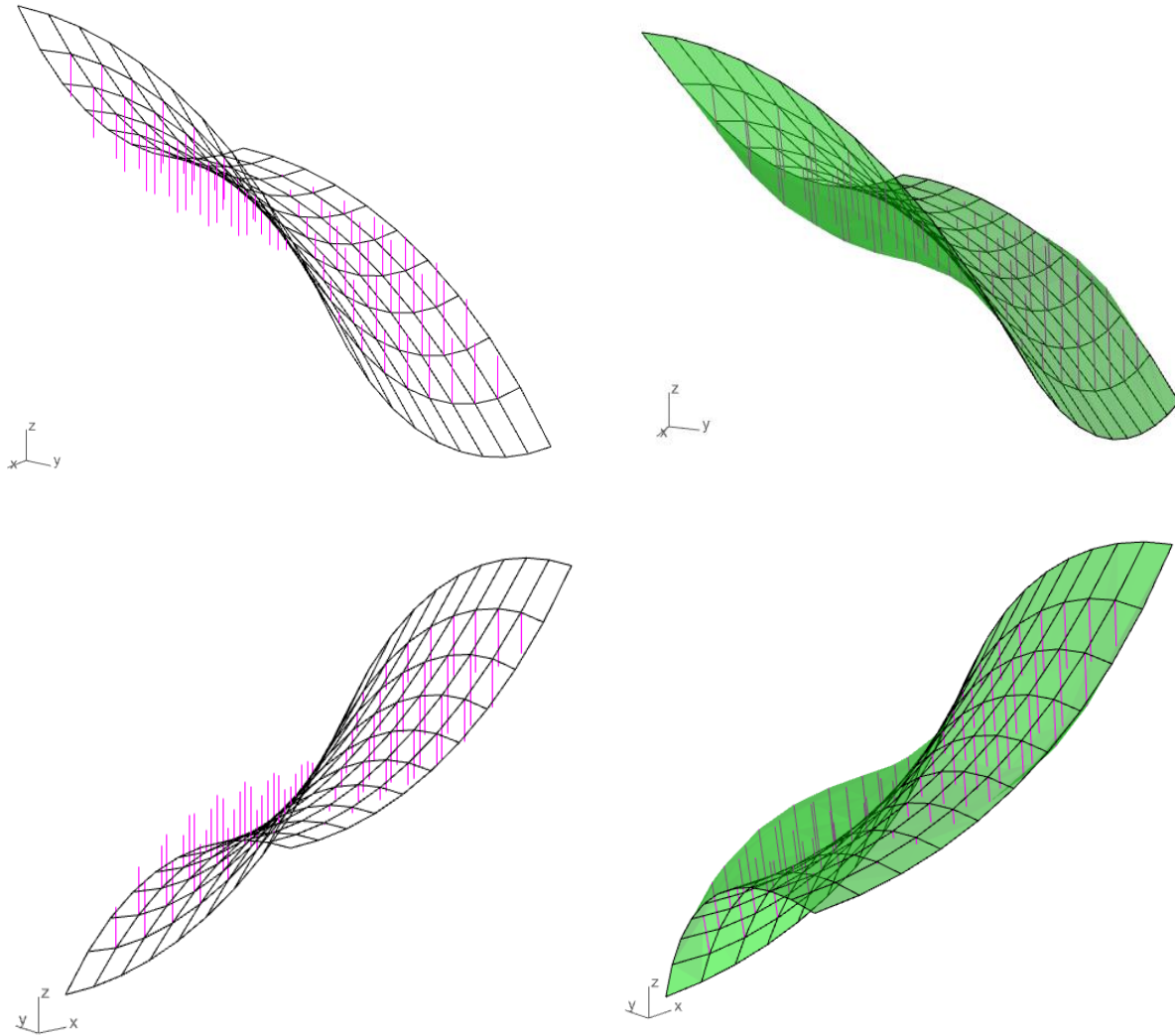


Slika 16: Ravnotežni oblik Mreže 1

Koordinate čvorova ravnotežne mreže (eq_nodes):

```
eq_nodes = [[20, 43, 2.803681], [0, 43, -9.508849], [20, 41, 5.084714], [0, 41, -7.227815], [2, 25,
0.100167], [2, 45, -12.212362], [20, 39, 6.950814], [0, 39, -5.361715], [4, 25, 0.402695], [4, 45, -
11.909834], [20, 37, 8.473226], [0, 37, -3.839303], [6, 25, 0.913833], [6, 45, -11.398696], [20, 35,
9.700845], [0, 35, -2.611685], [20, 33, 10.667949], [0, 33, -1.64458], [8, 25, 1.64458], [8, 45, -
10.667949], [20, 31, 11.398696], [0, 31, -0.913833], [20, 29, 11.909834], [0, 29, -0.402695], [20, 27,
12.212362], [0, 27, -0.100167], [18, 25, 9.508849], [18, 45, -2.803681], [10, 25, 2.611685], [10, 45, -
9.700845], [16, 25, 7.227815], [16, 45, -5.084714], [14, 25, 5.361715], [14, 45, -6.950814], [12, 25,
3.839303], [12, 45, -8.473226], [20, 25, 12.312529], [0, 25, 0], [20, 45, 0], [0, 45, -12.312529], [2,
43, -9.636053], [4, 43, -9.427269], [6.0, 43, -8.942089], [8.0, 43, -8.195957], [18, 43, 0], [10.0, 43,
-7.184703], [16, 43, -2.343947], [14, 43, -4.291073], [12.0, 43, -5.892006], [2, 41, -7.395733], [4, 41,
-7.221099], [6.0, 41, -6.746435], [8.0, 41, -5.989086], [18, 41.0, 2.343947], [10.0, 41, -4.950004],
[16, 41, 0], [14, 41, -1.977524], [12.0, 41, -3.619023], [2, 39, -5.497964], [2, 37, -3.919449], [2, 35,
-2.633226], [2, 33, -1.615498], [2, 31, -0.846947], [2, 29, -0.31241], [2, 27, 0], [4, 39, -5.314958],
[6, 39, -4.833468], [8, 39, -4.063947], [18.0, 39, 4.291073], [10, 39, -3.007204], [16.0, 39, 1.977524],
[14, 39, 0], [12, 39, -1.656557], [4, 37, -3.707302], [4, 35, -2.386272], [4.0, 33, -1.337239], [4, 31,
-0.546046], [4, 29.0, 0], [4, 27, 0.31241], [6, 37, -3.20853], [8, 37, -2.426031], [18, 37, 5.892006],
[10, 37, -1.358309], [16.0, 37, 3.619023], [14, 37, 1.656557], [12.0, 37, 0], [6, 35, -1.86732], [6, 33,
-0.80114], [6, 31, 0], [6, 29, 0.546046], [6, 27, 0.846947], [8, 35, -1.073338], [18, 35, 7.184703],
[10, 35, 0], [16, 35, 4.950004], [14, 35, 3.007204], [12, 35, 1.358309], [8, 33, 0], [18, 33, 8.195957],
[10.0, 33, 1.073338], [16.0, 33, 5.989086], [14.0, 33, 4.063947], [12.0, 33, 2.426031], [8.0, 31,
0.80114], [8, 29, 1.337239], [8, 27.0, 1.615498], [18.0, 31, 8.942089], [10.0, 31.0, 1.86732], [16.0,
31, 6.746435], [14.0, 31.0, 4.833468], [12.0, 31.0, 3.20853], [18.0, 29, 9.427269], [10.0, 29.0,
2.386272], [16.0, 29.0, 7.221099], [14.0, 29.0, 5.314958], [12.0, 29.0, 3.707302], [18.0, 27, 9.636053],
[10.0, 27.0, 2.633226], [16.0, 27, 7.395733], [14.0, 27.0, 5.497964], [12.0, 27.0, 3.919449]]
```

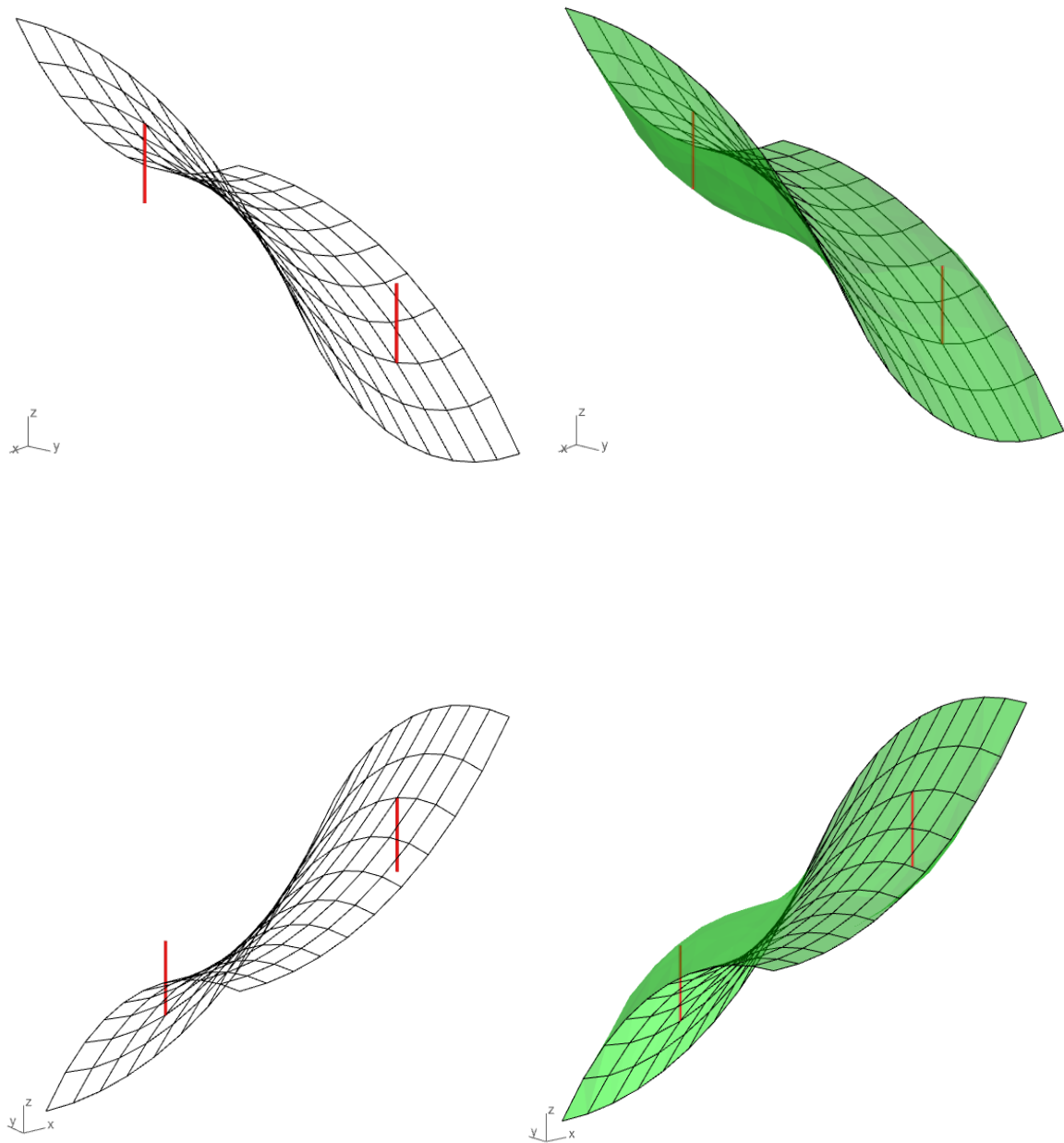
Odstupanje z koordinata čvorova ravnotežne mreže u odnosu na Scherkovu minimalnu plohu (Δz), u nastavku, skalirano je deset puta, s obzirom da je riječ o malim odstupanjima.



Slika 17: Mreža 1: Odstupanje z koordinata, preklapljene deset puta skalirana Scherkova ploha i ravnotežni oblik Mreže 1 (desno)

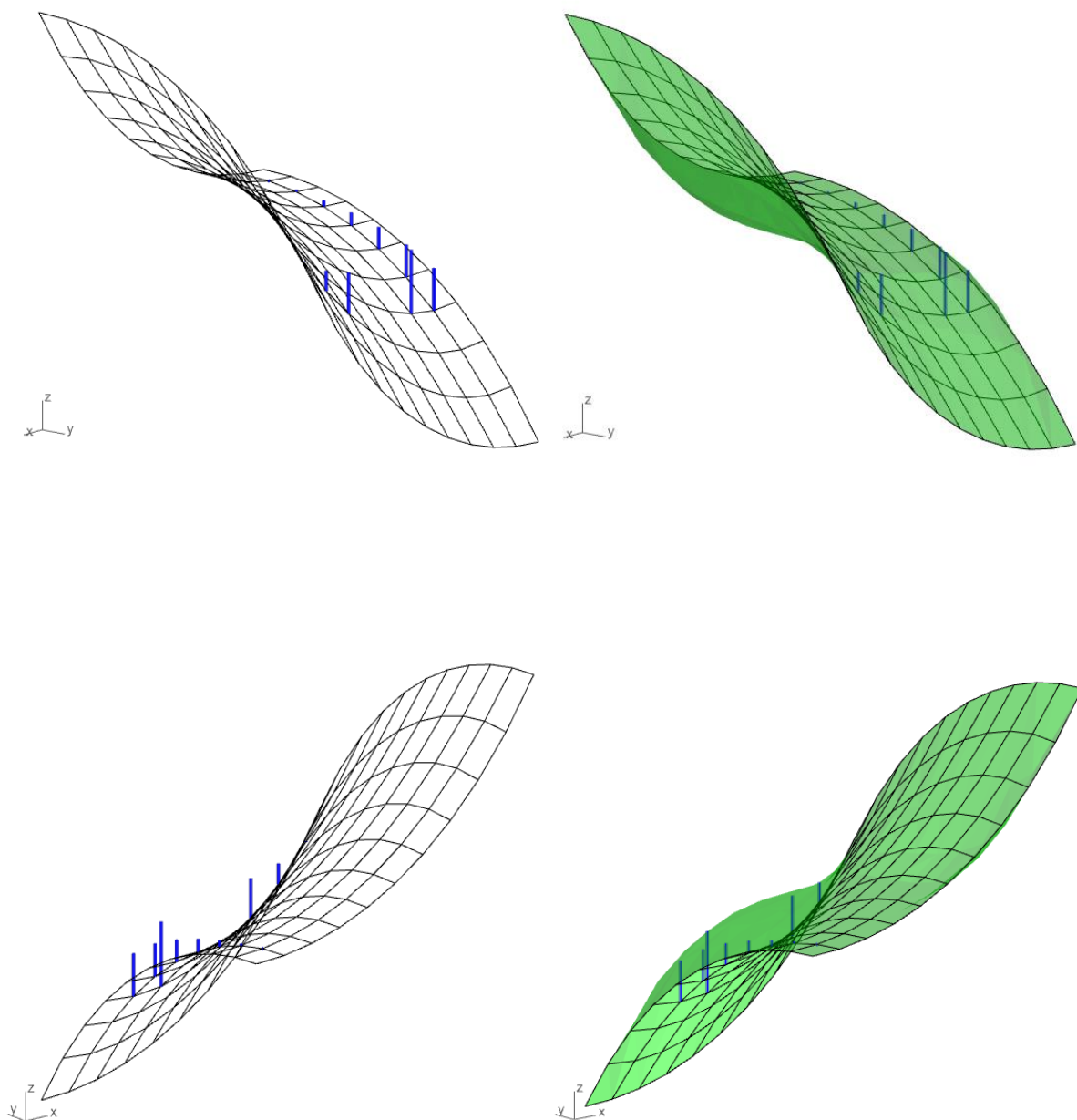
Sortirana lista od minimalnog Δz do maksimalnog:

$\Delta z = [-0.432453, -0.405851, -0.395979, -0.385586, -0.355938, -0.347073, -0.346812, -0.333874, -0.331688, -0.321115, -0.287539, -0.28306, -0.270694, -0.268085, -0.257174, -0.236415, -0.231308, -0.230511, -0.227371, -0.222461, -0.180312, -0.177282, -0.169468, -0.143939, -0.134145, -0.13069, -0.121708, -0.111424, -0.106233, -0.095354, -0.071085, -0.070392, -0.062913, -0.034909, -0.033281, -0.009882, -4.7149e-7, -4.64e-7, -4.6105e-7, -4.0772e-7, -4.0115e-7, -3.8839e-7, -3.815e-7, -2.9526e-7, -2.892e-7, -2.5636e-7, -1.9113e-7, -1.5136e-7, -1.2828e-7, -1.1852e-7, -1.1246e-7, -6.3773e-8, -5.3328e-8, -2.6219e-8, -1.9332e-8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.9332e-8, 2.6219e-8, 5.3328e-8, 6.3773e-8, 1.1246e-7, 1.1852e-7, 1.2828e-7, 1.5136e-7, 1.9113e-7, 2.5636e-7, 2.892e-7, 2.9526e-7, 3.815e-7, 3.8839e-7, 4.0115e-7, 4.0772e-7, 4.6105e-7, 4.64e-7, 4.7149e-7, 0.009882, 0.033281, 0.034909, 0.062913, 0.070392, 0.071085, 0.095354, 0.106233, 0.111424, 0.121708, 0.13069, 0.134145, 0.143939, 0.169468, 0.177282, 0.180312, 0.222461, 0.227371, 0.230511, 0.231308, 0.236415, 0.257174, 0.268085, 0.270694, 0.28306, 0.287539, 0.321115, 0.331688, 0.333874, 0.346812, 0.347073, 0.355938, 0.385586, 0.395979, 0.405851, 0.432453]$



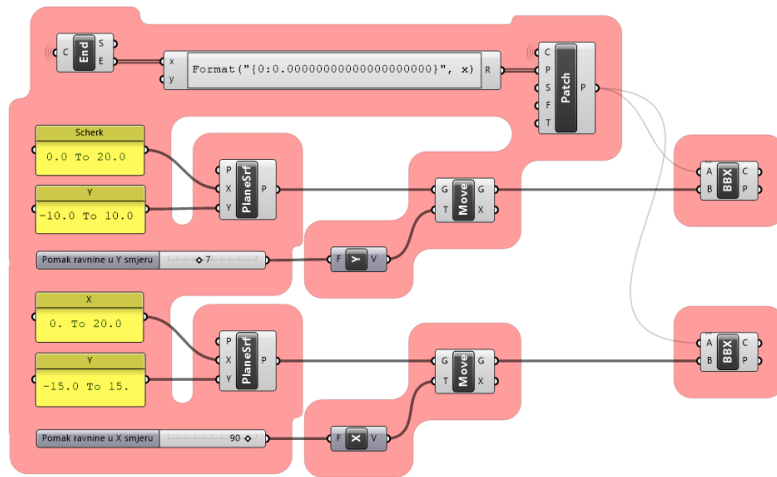
Slika 18: Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{1,max} = |0,432453|$$



Slika 19: Minimalno odstupanje z koordinata

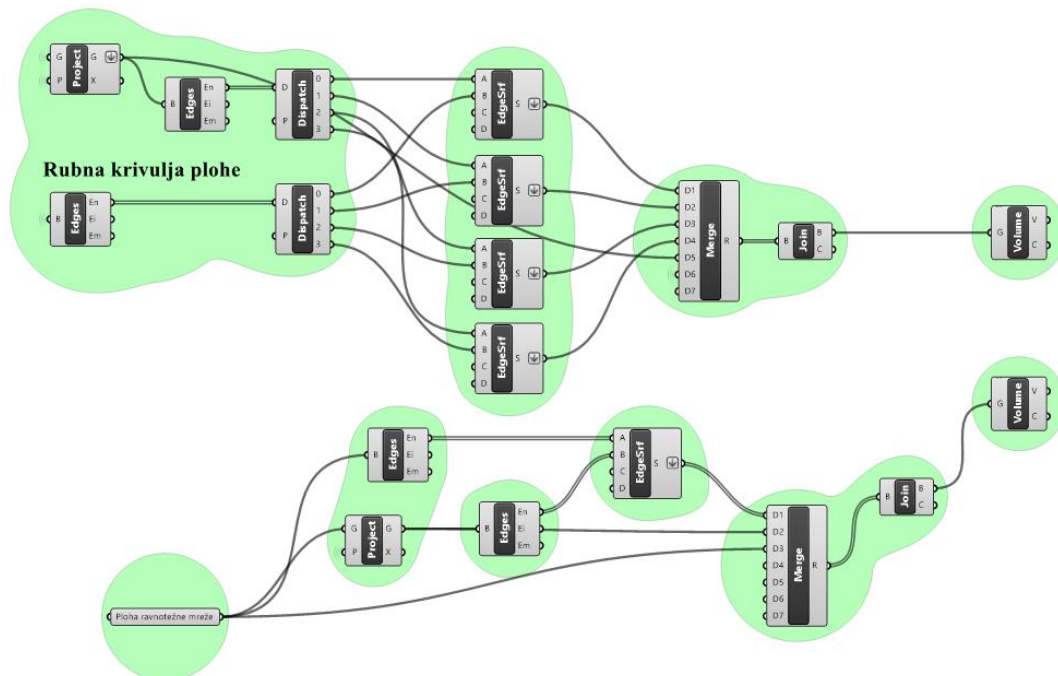
$$\Delta z_{1,min} = |1,9332e^{-8}|, \Delta z_{min} > 0$$



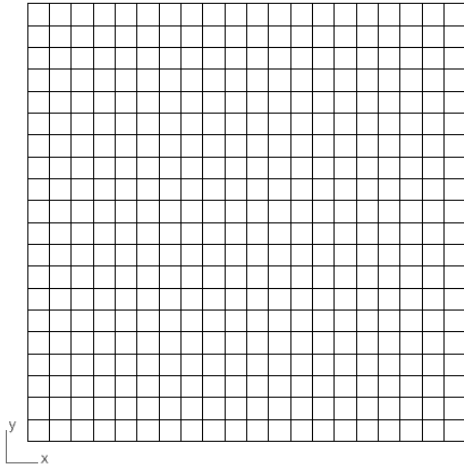
Slika 20: Postupak dobivanja skalirane plohe (Δz) i presječnih krivulja skalirane plohe i ravniina xz i yz

U svrhu prikazivanja odstupanja mreže prednapetih kabela od Scherkove minimalne plohe, ravnotežna mreža aproksimira se plohom. Volumen što ga zatvaraju Scherkova minimalna ploha i ploha kojom je aproksimirana promatranu mrežu prednapetih kabela, dobar je pokazatelj odstupanja ravnotežnog oblika mreže od minimalne plohe.

$$V_s - V_1 = 0,086773$$



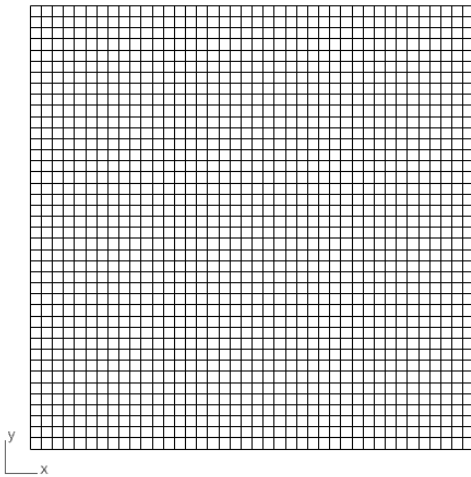
Slika 21: Postupak mjerenja volumena između dvaju ploha



Slika 22: Mreža 2

Drugu mrežu (u nastavu Mreža 2) tvori dvadeset i jedan kabel u x smjeru i dvadeset i jedan kabel u y smjeru koji su međusobno udaljeni 1 m.

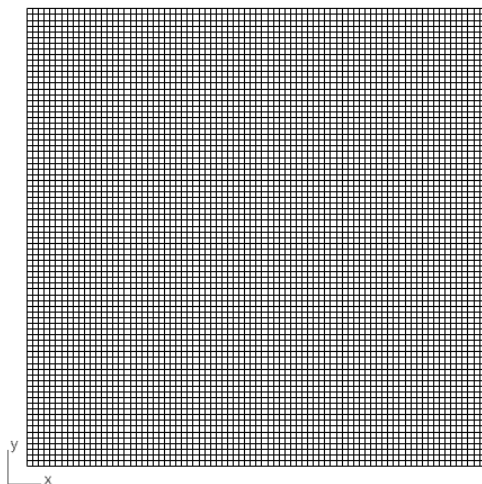
Ukupno ima 441 čvor.



Slika 23: Mreža 3

Treću mrežu (u nastavku Mreža 3) tvori četrdeset i jedan kabel u x smjeru i četrdeset i jedan kabel u y smjeru koji su međusobno udaljeni 0,5 m.

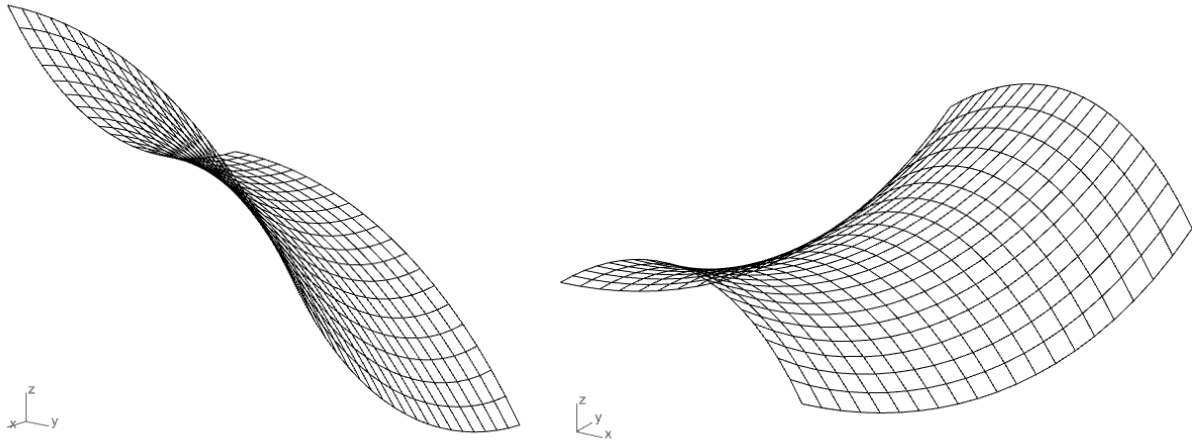
Ukupno ima 1681 čvor.



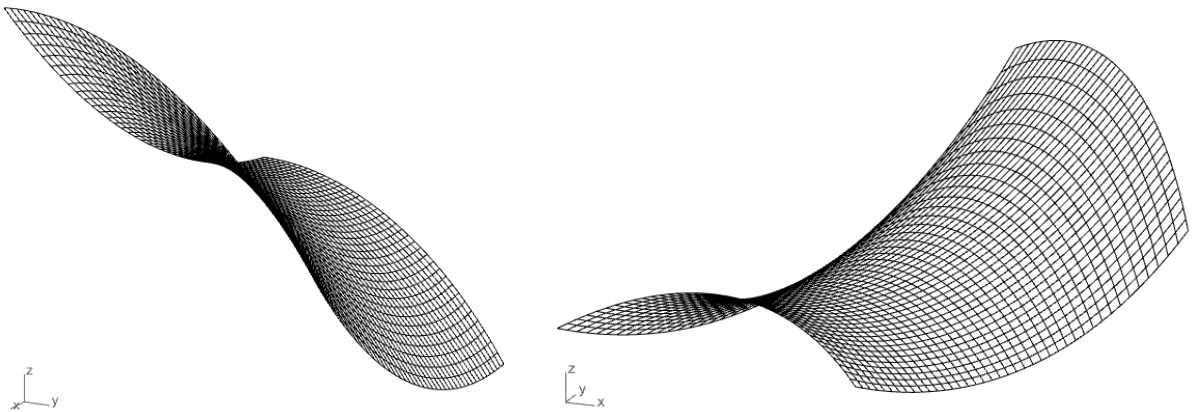
Slika 24: Mreža 4

Četvrtu mrežu (u nastavku Mreža 4) tvori osamdeset i jedan kabel u x smjeru i osamdeset i jedan kabel u y smjeru koji su međusobno udaljeni 0,25 m.

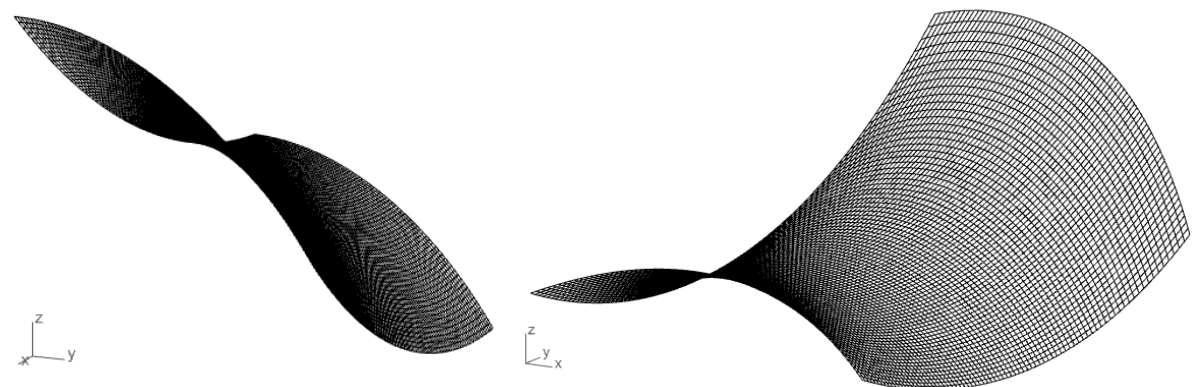
Ukupno ima 6561 čvor.



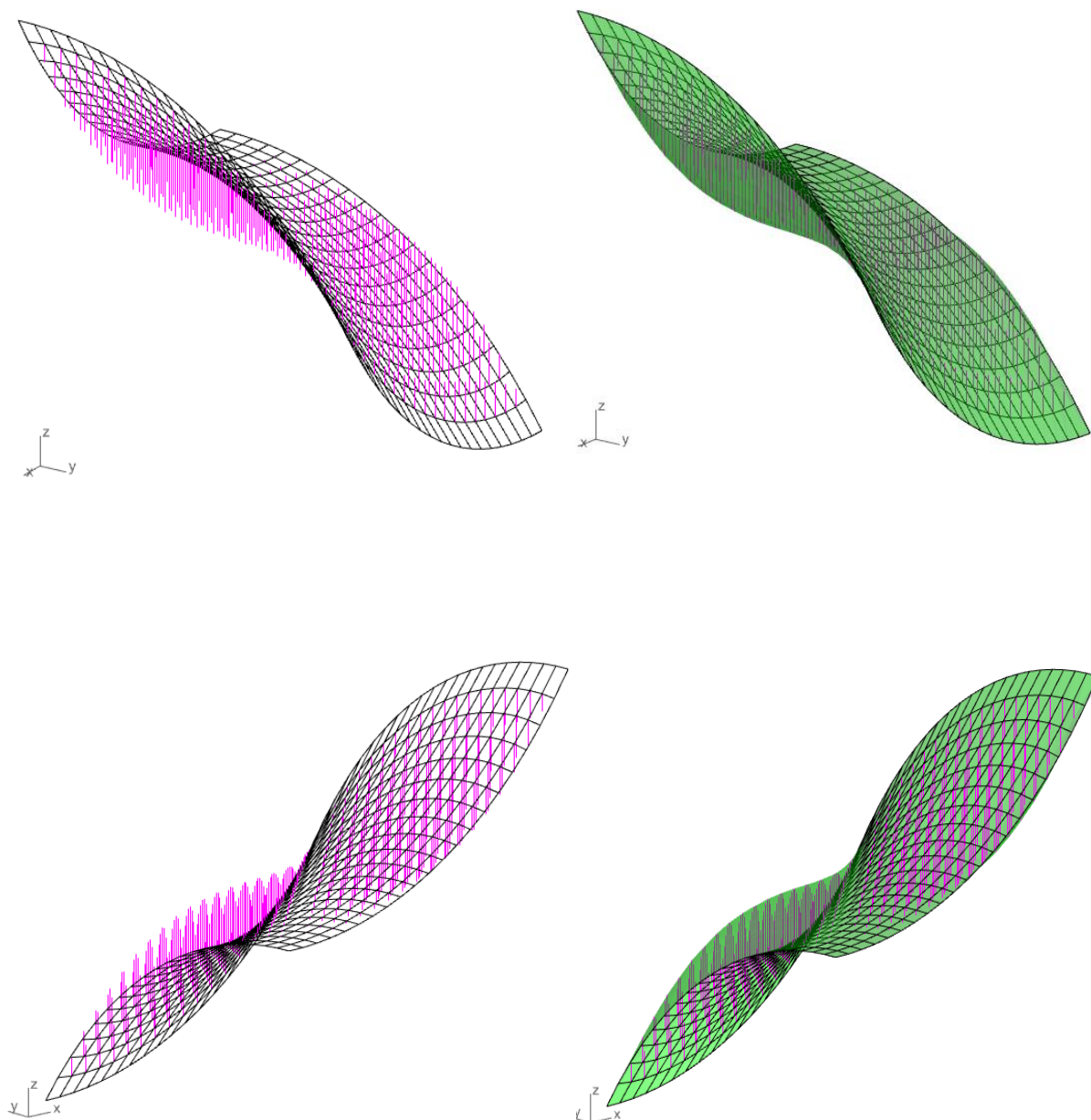
Slika 25: Ravnotežni oblik Mreže 1



Slika 26: Ravnotežni oblik Mreže 3



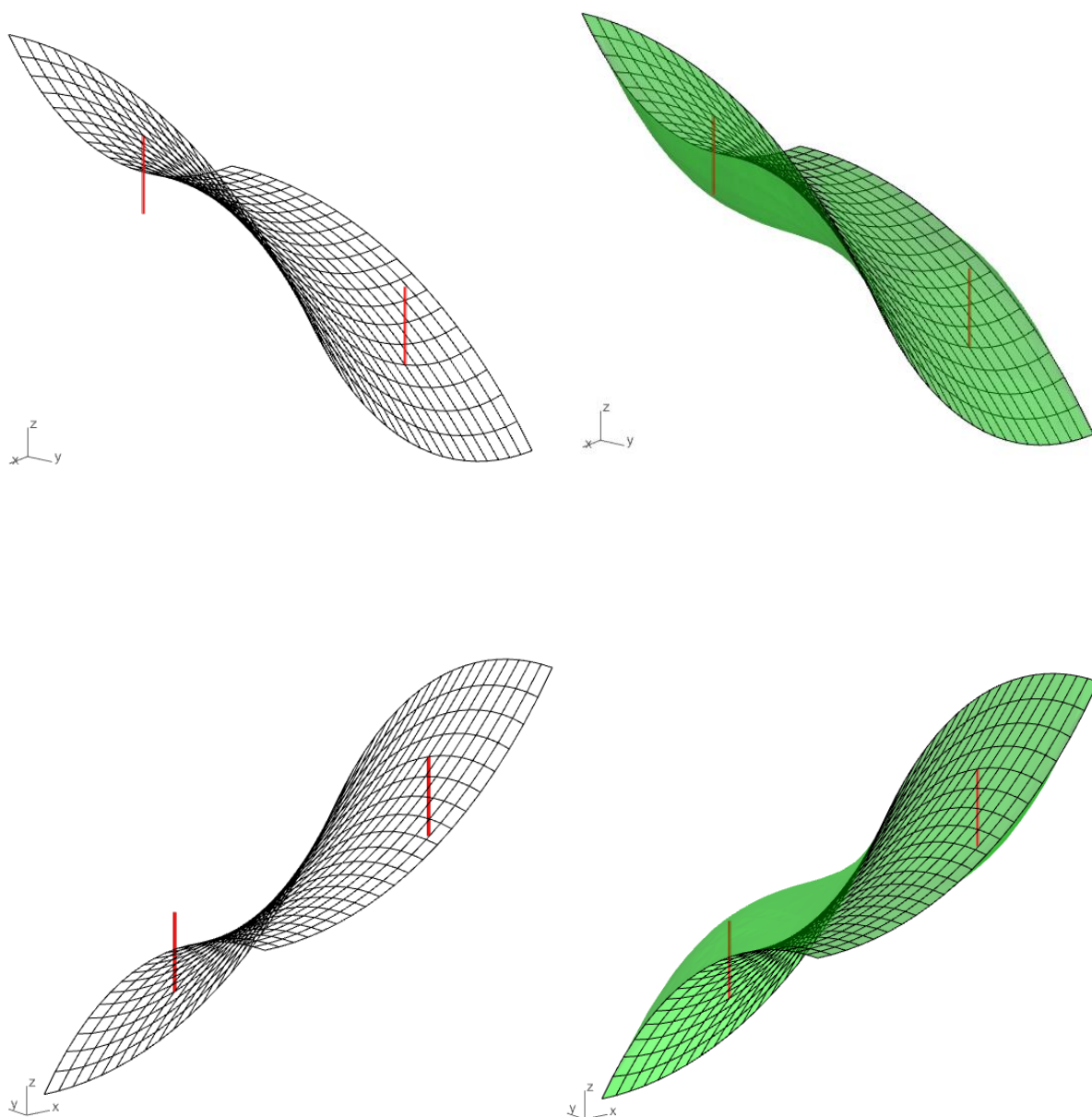
Slika 27: Ravnotežni oblik Mreže 4



Slika 28: Mreža 2: Odstupanje z koordinata

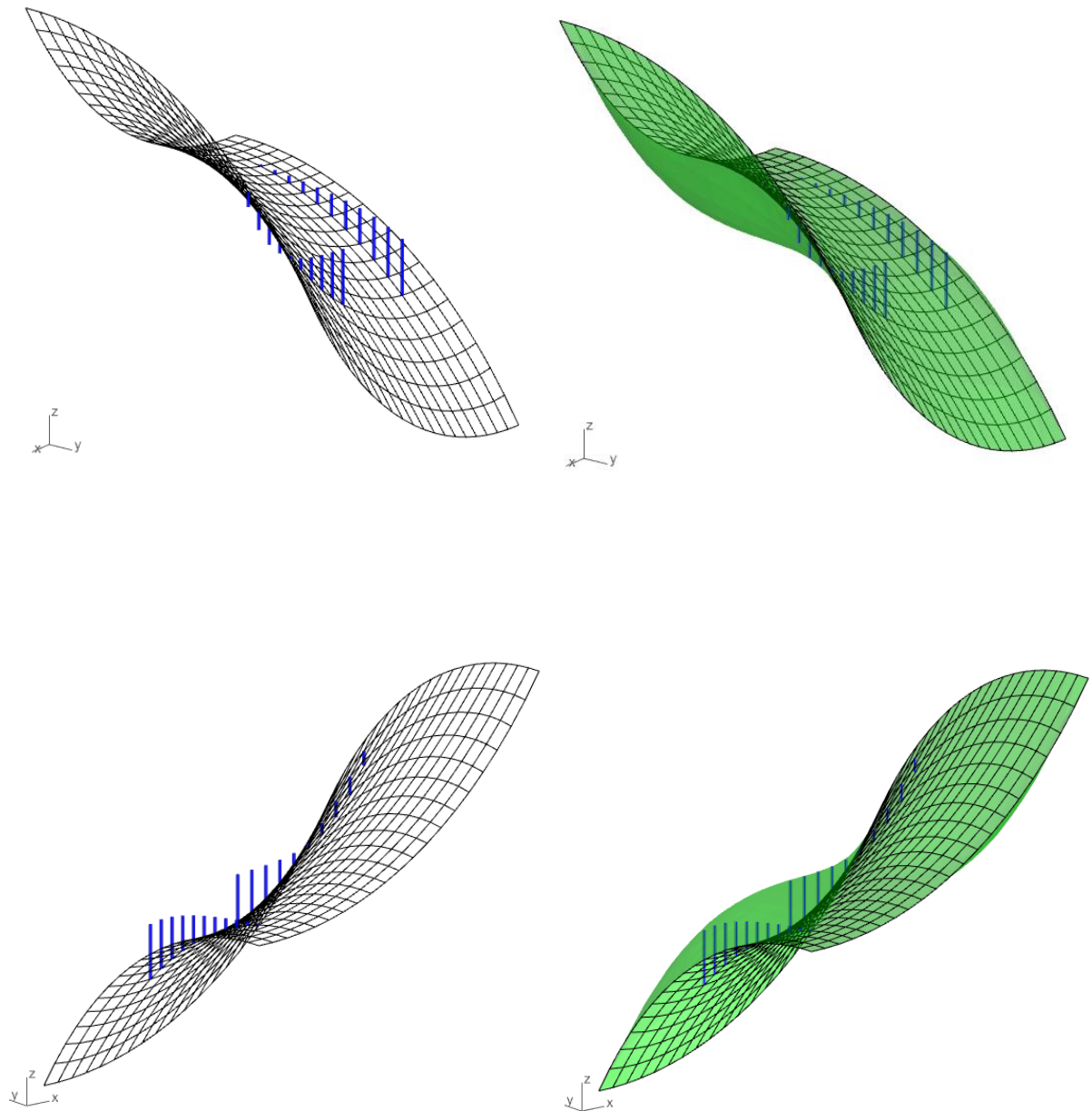
Razlika volumena:

$$V_s - V_2 = 0,004816$$



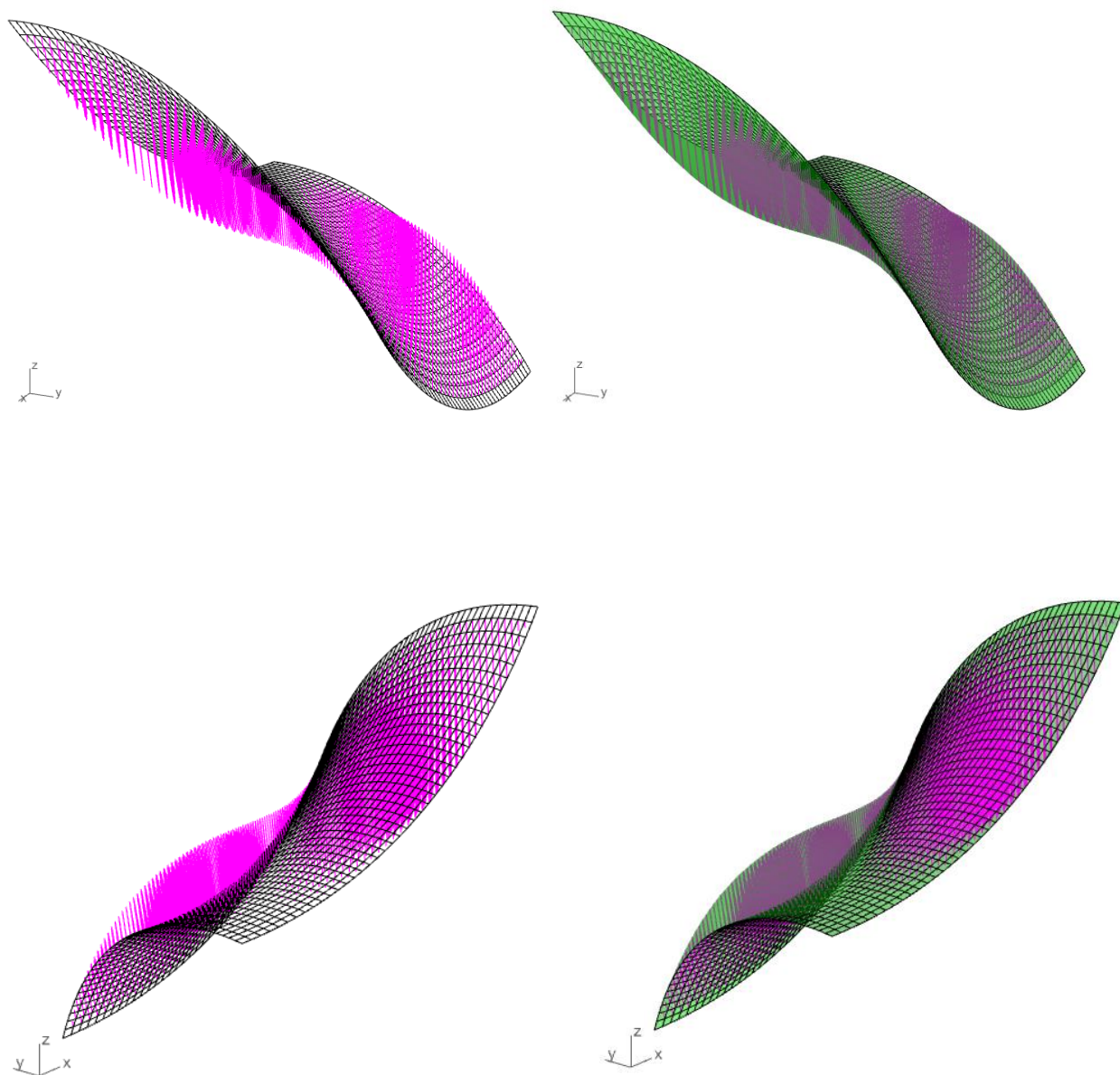
Slika 29: Mreža 2: Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{2,max} = |0,437090|$$



Slika 30: Mreža 2: Minimalno odstupanje z koordinata

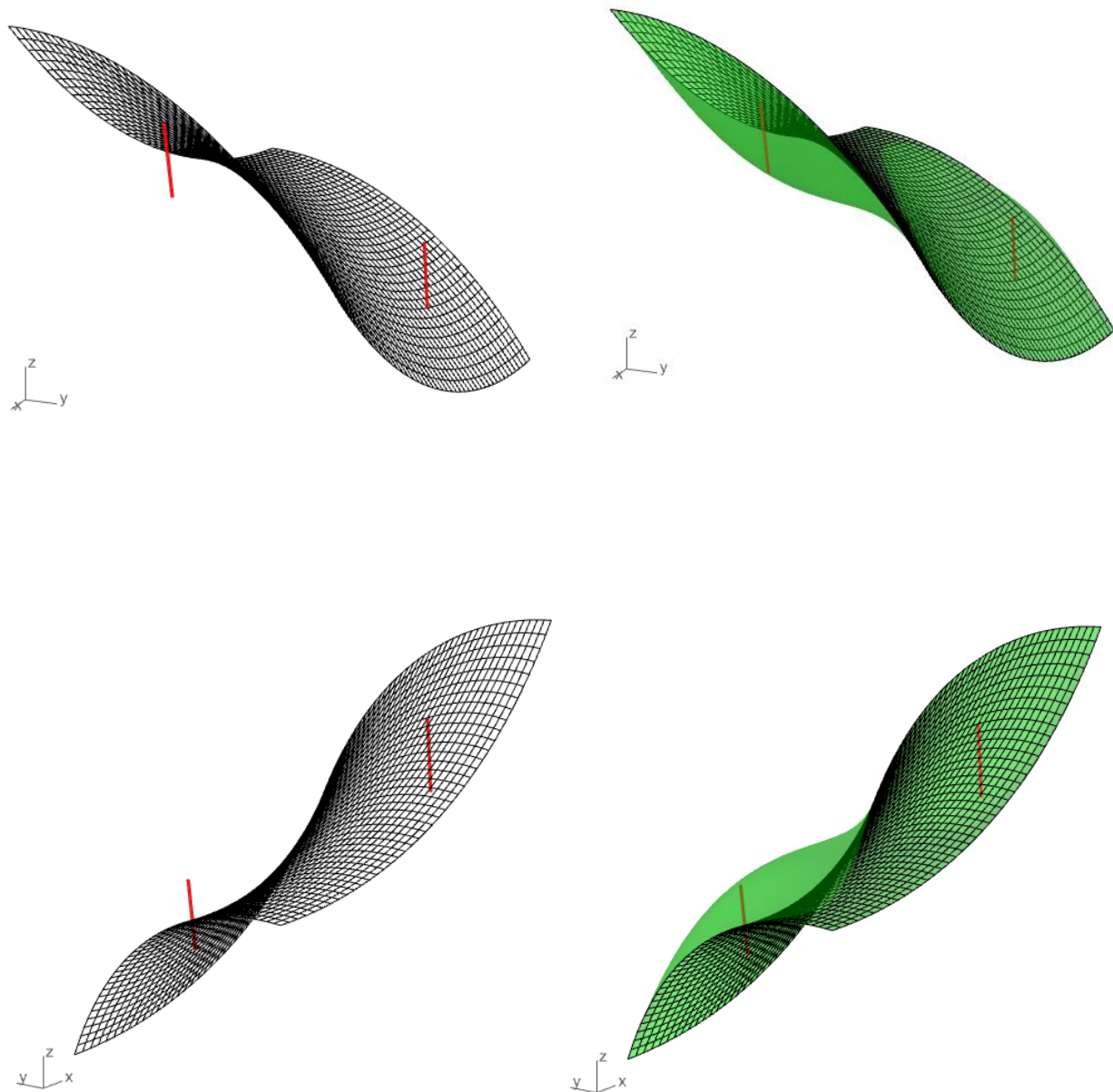
$$\Delta z_{2,min} = |1,2461e^{-8}|, \Delta z_{min} > 0$$



Slika 31: Mreža 3: Odstupanje z koordinata

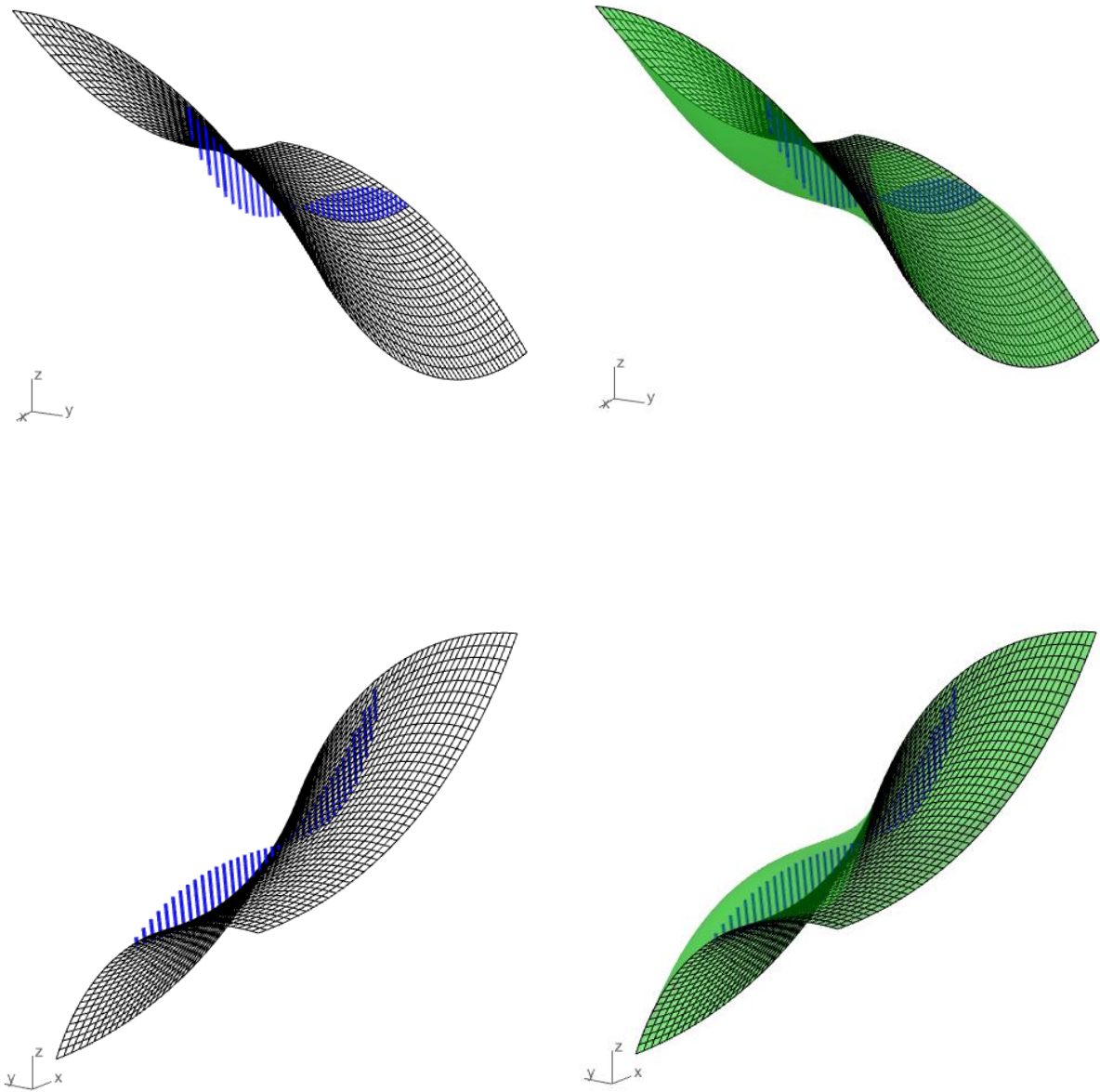
Razlika volumena:

$$V_s - V_3 = 0,002436$$



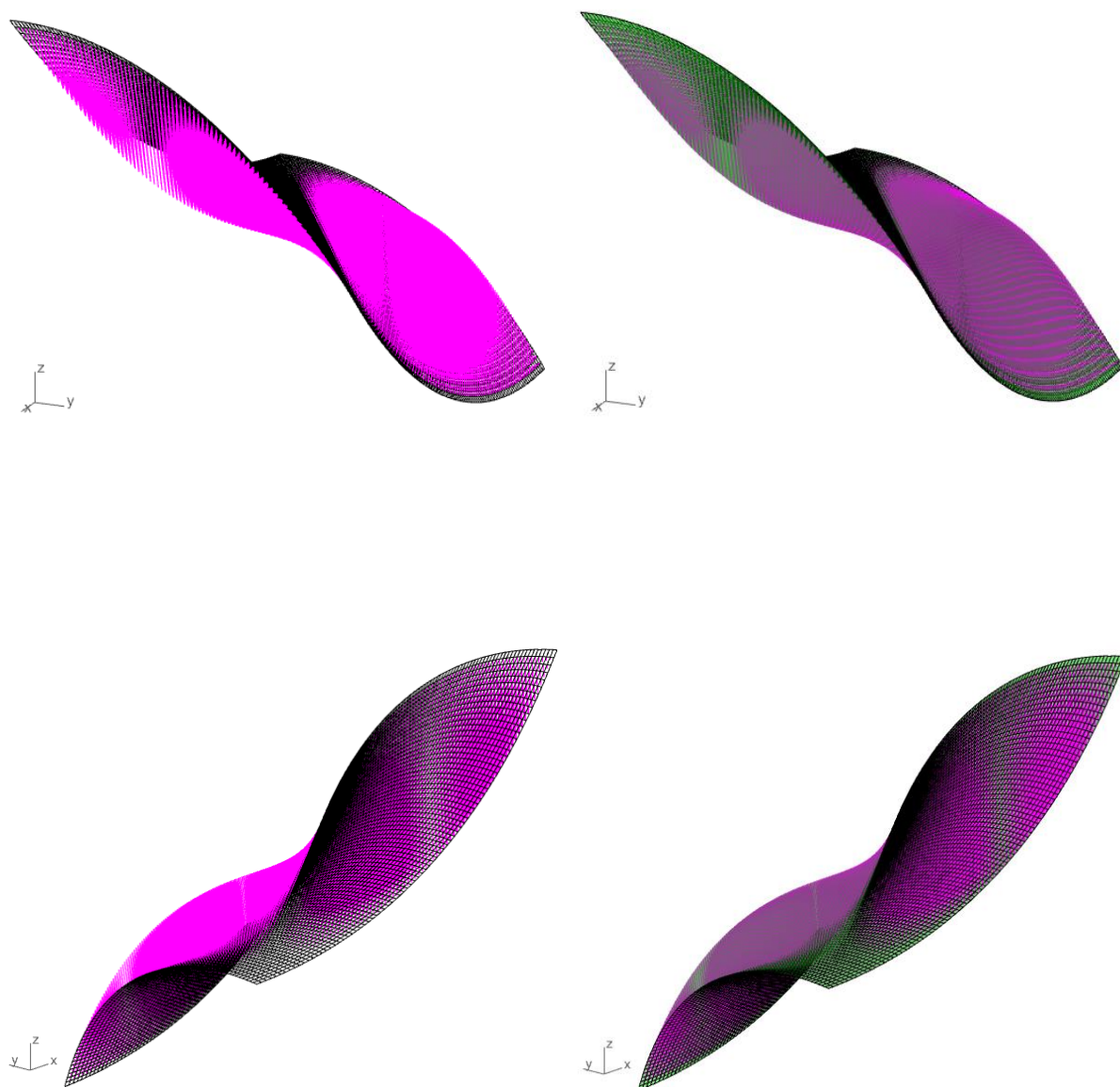
Slika 32: Mreža 3: Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{3,max} = |0,438284|$$



Slika 33: Mreža 3: Minimalno odstupanje z koordinata

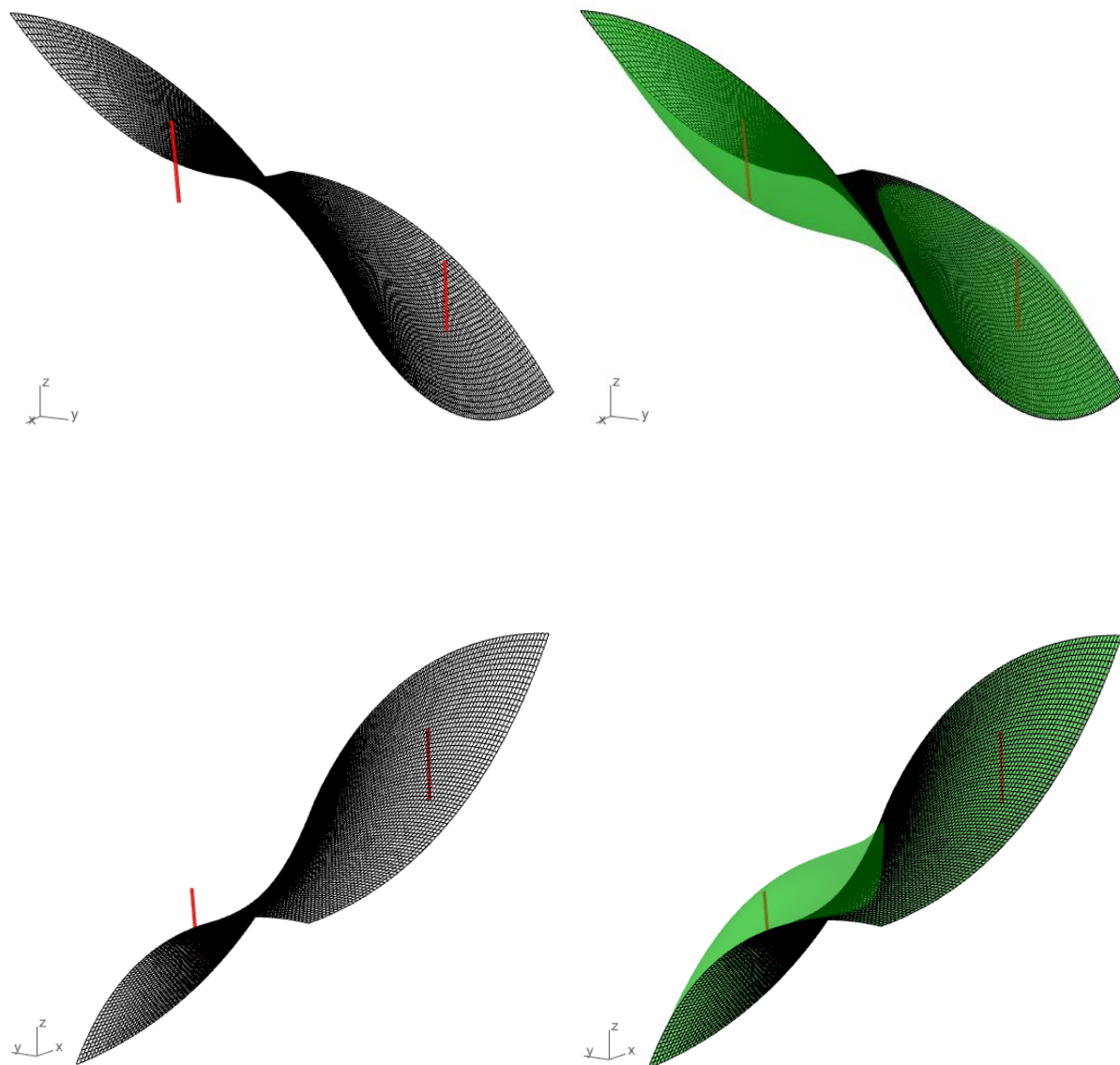
$$\Delta z_{3,min} = |1,2461e^{-8}|, \Delta z_{min} > 0$$



Slika 34: Mreža 4: Odstupanje z koordinata

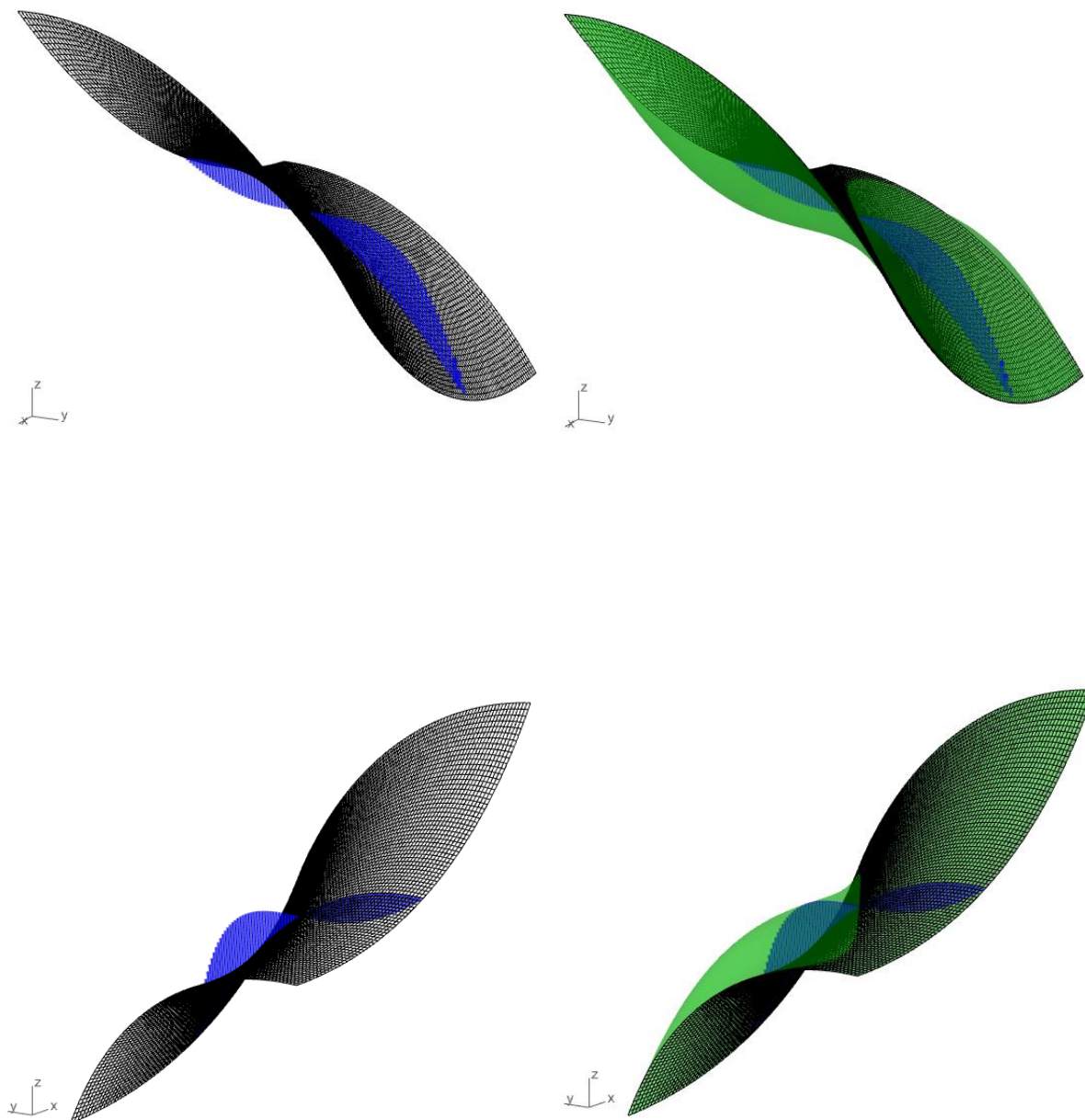
Razlika volumena:

$$V_s - V_4 = 0,000434$$



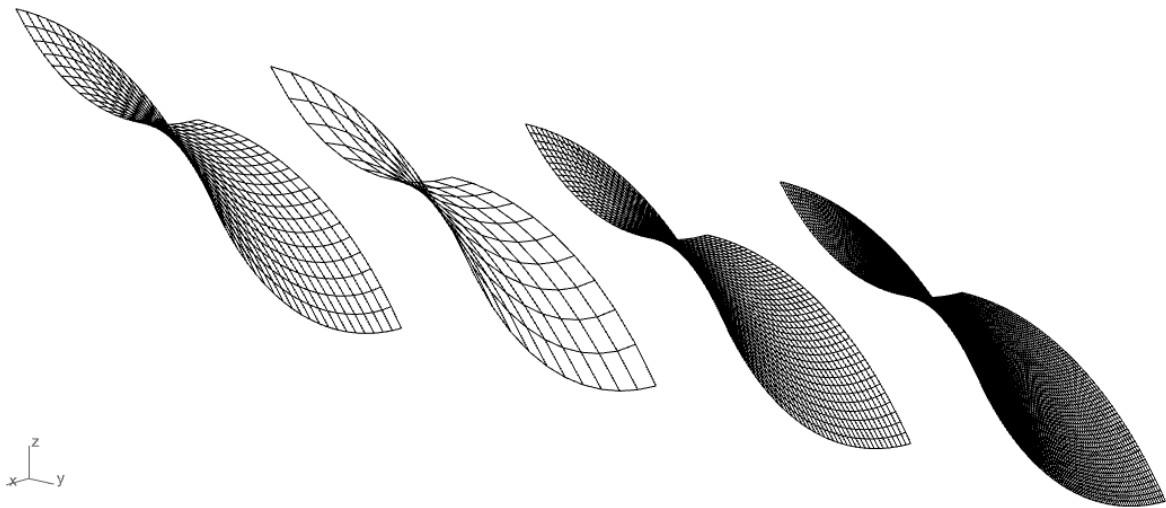
Slika 35: Mreža 4: Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{4,max} = |0,438585|$$

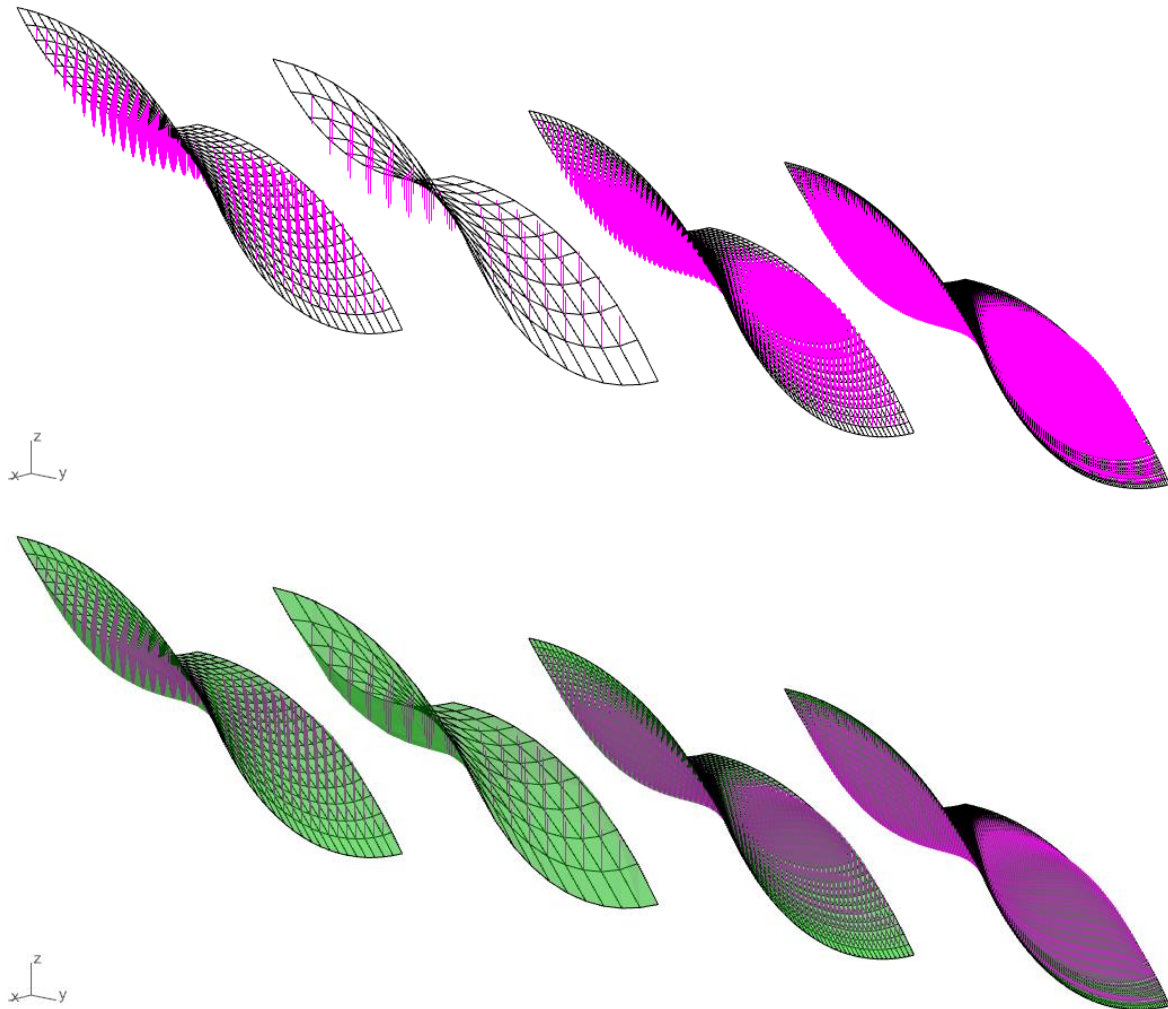


Slika 36: Mreža 4: Minimalno odstupanje z koordinata

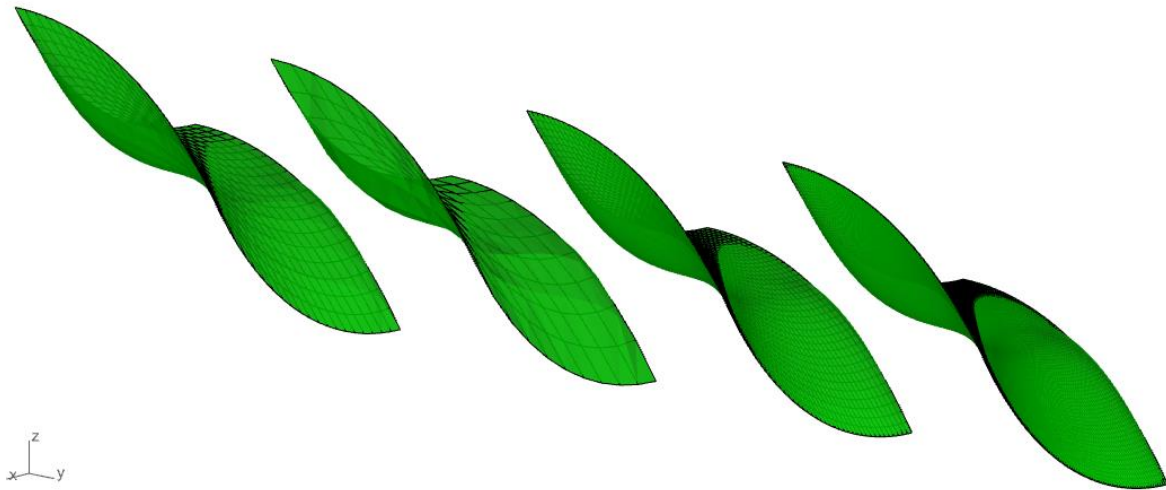
$$\Delta z_{4,min} = |6,0206e^{-9}|, \Delta z_{min} > 0$$



Slika 37: Usporedba ravnotežnog oblika četiriju aproksimacija

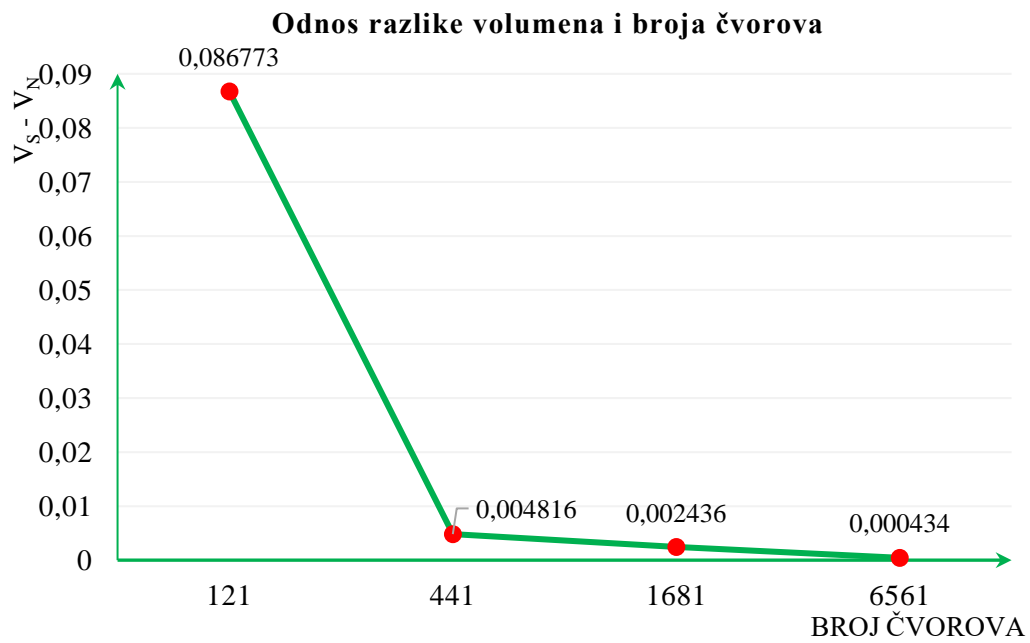


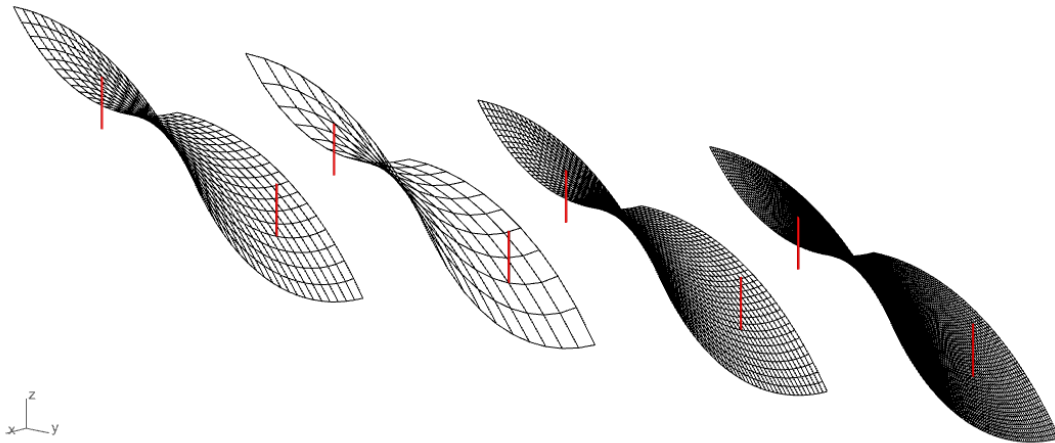
Slika 38: Usporedba odstupanja z koordinata četiriju aproksimacija



Slika 39: Razvoj plohe koja aproksimira mrežu – od poligonalnih ravnina koje aproksimiraju Mrežu 1 do glatke plohe koja aproksimira Mrežu 4 i koja minimalno odstupa od minimalne plohe

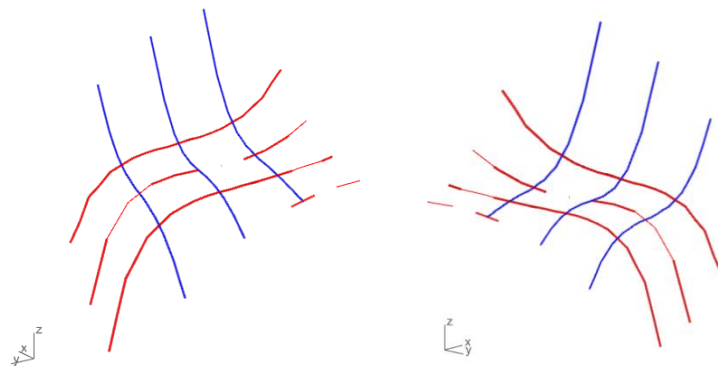
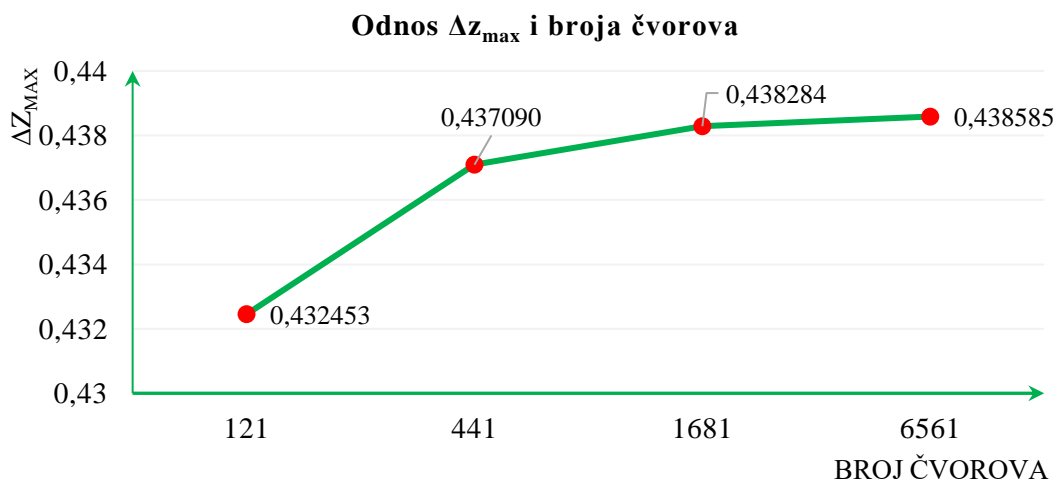
Dijagram 1: Odnos razlike volumena i broja čvorova





Slika 40: Usporedba odstupanja z koordinata (Δz_{\max}) na četirima aproksimacijama

Dijagram 2: Odnos Δz_{\max} i broja čvorova



Slika 41: Presječnica skalirane Scherkove minimalne plohe i: yz ravnine (crveno); xz ravnine (plavo)

5.2.2.2. Usporedba minimalne mreže s minimalnom plohom

Minimalnu plohu i minimalnu mrežu promatramo na području $x \in [0,1], y \in [0,1]$.

Promatraju se četiri mreže:

- Prvu mrežu tvori 11 kabela u x smjeru i isto toliko u y smjeru te su kabeli međusobno udaljeni 2 metra. Ukupno ima 121 čvor. (u nastavku Mreža 1)
- Drugu mrežu tvori 21 kabel u x smjeru i isto toliko u y smjeru te su kabeli međusobno udaljeni 1 metar. Ukupno ima 441 čvor. (u nastavku Mreža 2)
- Treću mrežu tvori 28 kabela u x smjeru i isto toliko u y smjeru te su kabeli međusobno udaljeni 0,75 metara. Ukupno ima 784 čvora. (u nastavku Mreža 3)
- Četvrtu mrežu tvori 81 kabel u x smjeru i isto toliko u y smjeru te su kabeli međusobno udaljeni 0,25 metara. Ukupno ima 6561 čvor. (u nastavku Mreža 4)

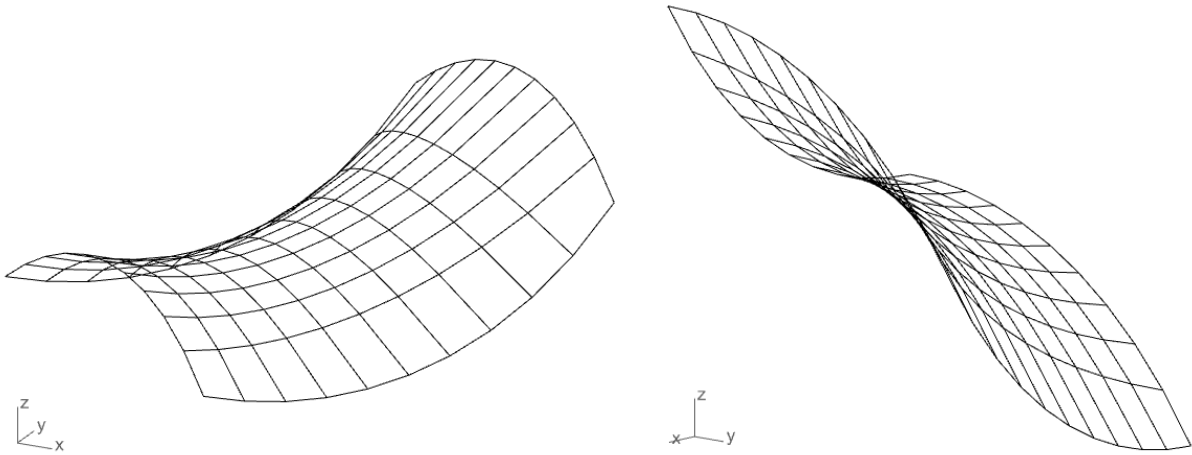
Postupak izrade mreže isti je kao u točki 5.1.2.1.. Razlika je u zadavanju gustoća sila, gdje je ista definira za unutarnje elemente, ali ne i za rubne. Gustoća sila rubnih elemenata ostaje nedefinirana zbog toga što je položaj rubnih elemenata određen jednadžbom Scherkove minimalne plohe (slika 12).

Također, potrebno je unutarnje sile svih elemenata zadati kao jedinične. U SageMath-u je pozivnom funkcijom „multistepFDM (nds, els, supps, qs, fcs = f1, lcs = [], l0cs = [], steps = 100)“ proveden postupak iteracije. Provedenim postupkom dobivena je lista unutarnjih sila:

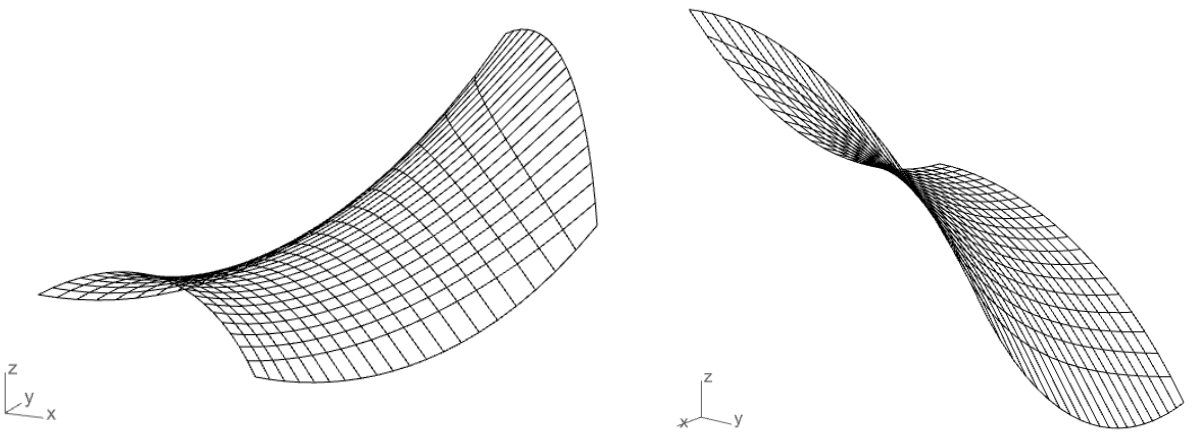
```
f2 = [1.0000435467286086, 0.9998638728845932, 1.000105596610896, 1.0000131344339482,
... ,
0.9999774616268665, 0.9999876317645333, 1.0000063836076687, 1.0000138535027296,
0.9999362044298703, 1.0000144125591315, 1.0000090782569913, 0.9999818285911944,
1.000004595189987, 1.000000876174545, 0.9999944488641525, 0.9999906890801195,
1.0000280508545696, 1.0000133540955454, 0.9999866936361324, 0.9999705167407315,
1.0000099437539092, 1.0001291999598934, 0.9998124355218365, 1.0000437061772847,
1.0000144125591317, 0.9999362044298701, 1.00001385350273, 1.0000063836076691,
0.9999876317645325, 0.999977461626869, 1.0000131344339487, 1.000105596610895,
0.999863872884593, 1.000043546728608, 1.0000373107866758, 0.9999357183694392,
1.00002806812651, 1.0000139912006514, 0.9999873912791989, 0.9999714025169766,
1.0000102080182127, 1.0001212221070845, 0.9998240685257647, 1.000041259518277,
1.0000413365506602, 0.9999309068982299, 1.0000307990568216, 1.00001531113063,
0.999987032635037, 0.9999698003039789, 1.0000102864278337, 1.0001305222327923,
0.9998086280061204, 1.0000424100510428, 1.0000219435608226, 0.9999017462918963,
1.000060271058509, 1.0000020563045062, 0.9999805702213889, 0.9999922102075787,
1.0000103789666936, 1.0000201656799854, 0.9999773551368881, 1.0000309878005549]
f2_min = 0.999808628, f2_max = 1.00013052
```

Vidljivo je kako se vrijednosti unutarnjih sila nalaze u rasponu $f_2 \in [0.999808628, 1.00013052]$.
Daljnjim iteriranjem, odnosno povećanjem broja koraka u pronalasku vrijednosti unutarnjih sila, smanjila bi se razlika maksimalne i minimalne vrijednosti unutarnjih sila. Dakle, vrijednosti unutarnjih sila bile bi obuhvaćene manjim rasponom, što rezultira većom točnošću.

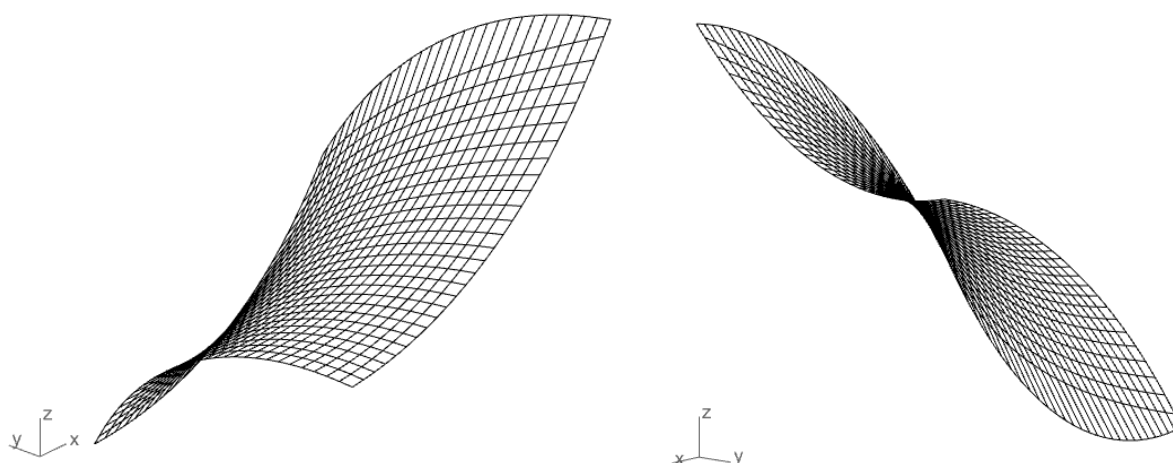
Dobivene vrijednosti unutarnjih sila s dovoljnom točnošću zadovoljavaju potrebe ovoga rada.



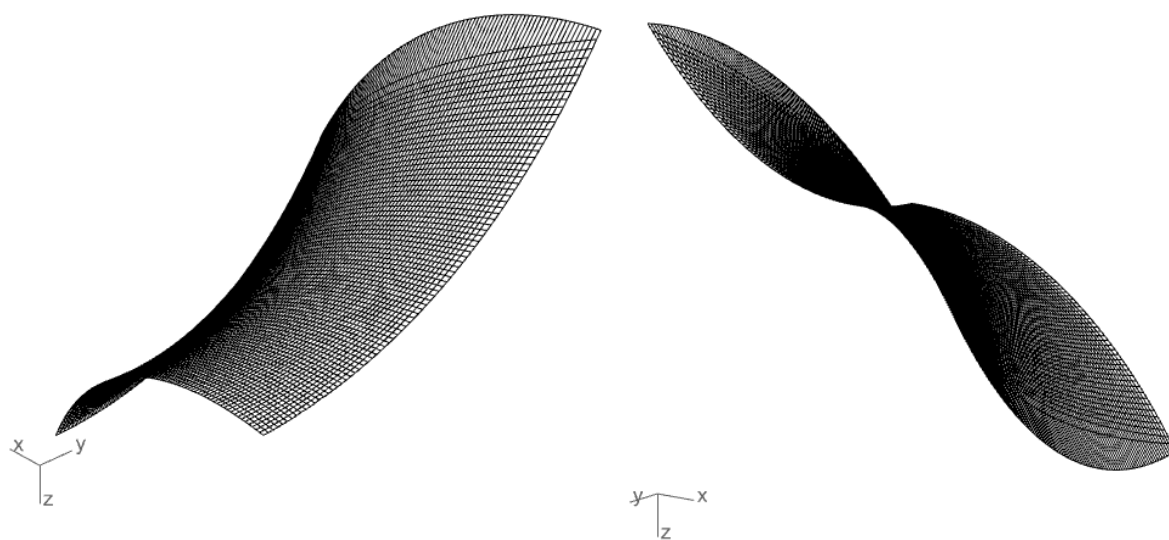
Slika 42: Ravnotežni oblik Mreže 1



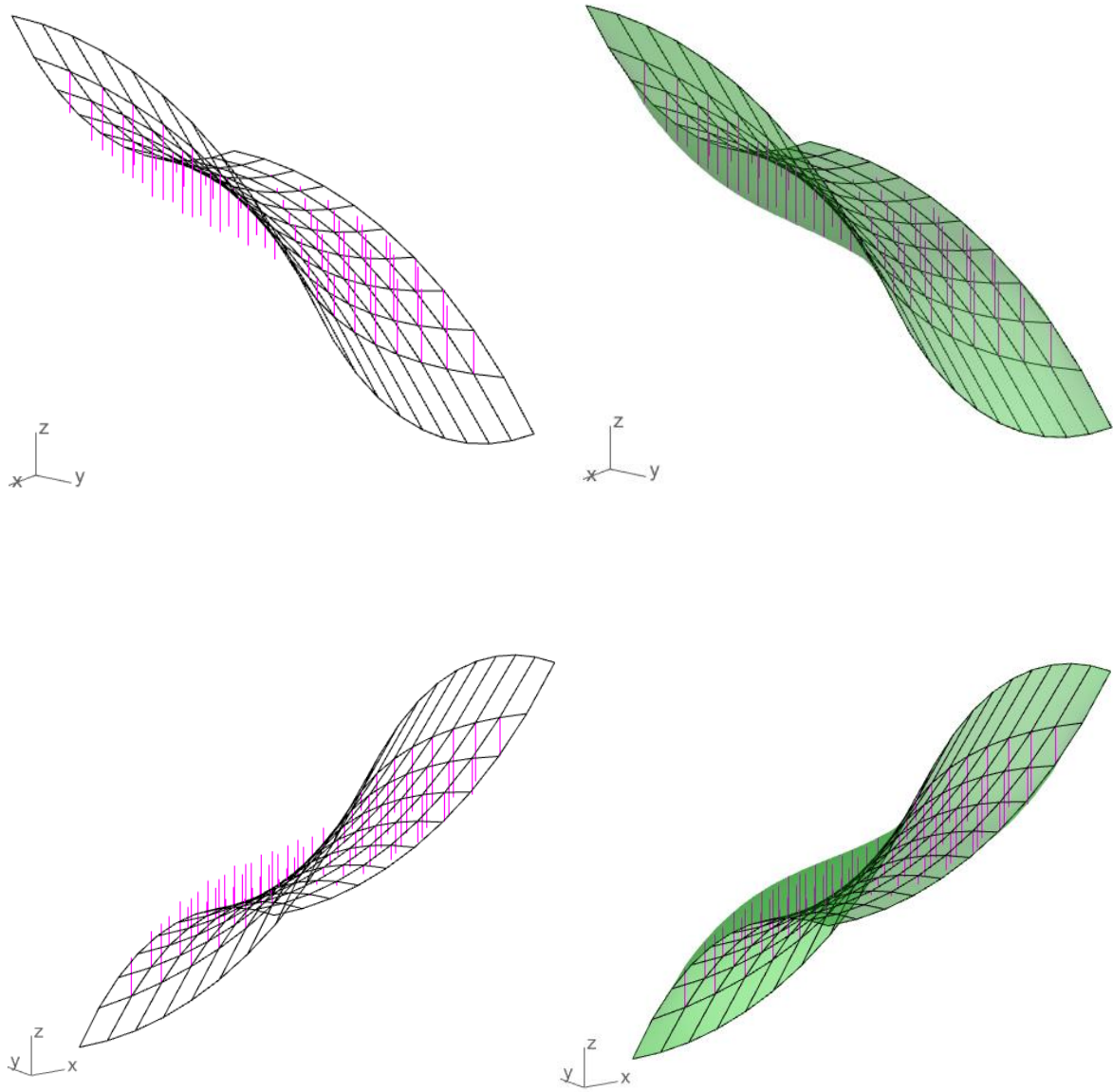
Slika 43: Ravnotežni oblik Mreže 2



Slika 44: Ravnotežni oblik Mreže 3



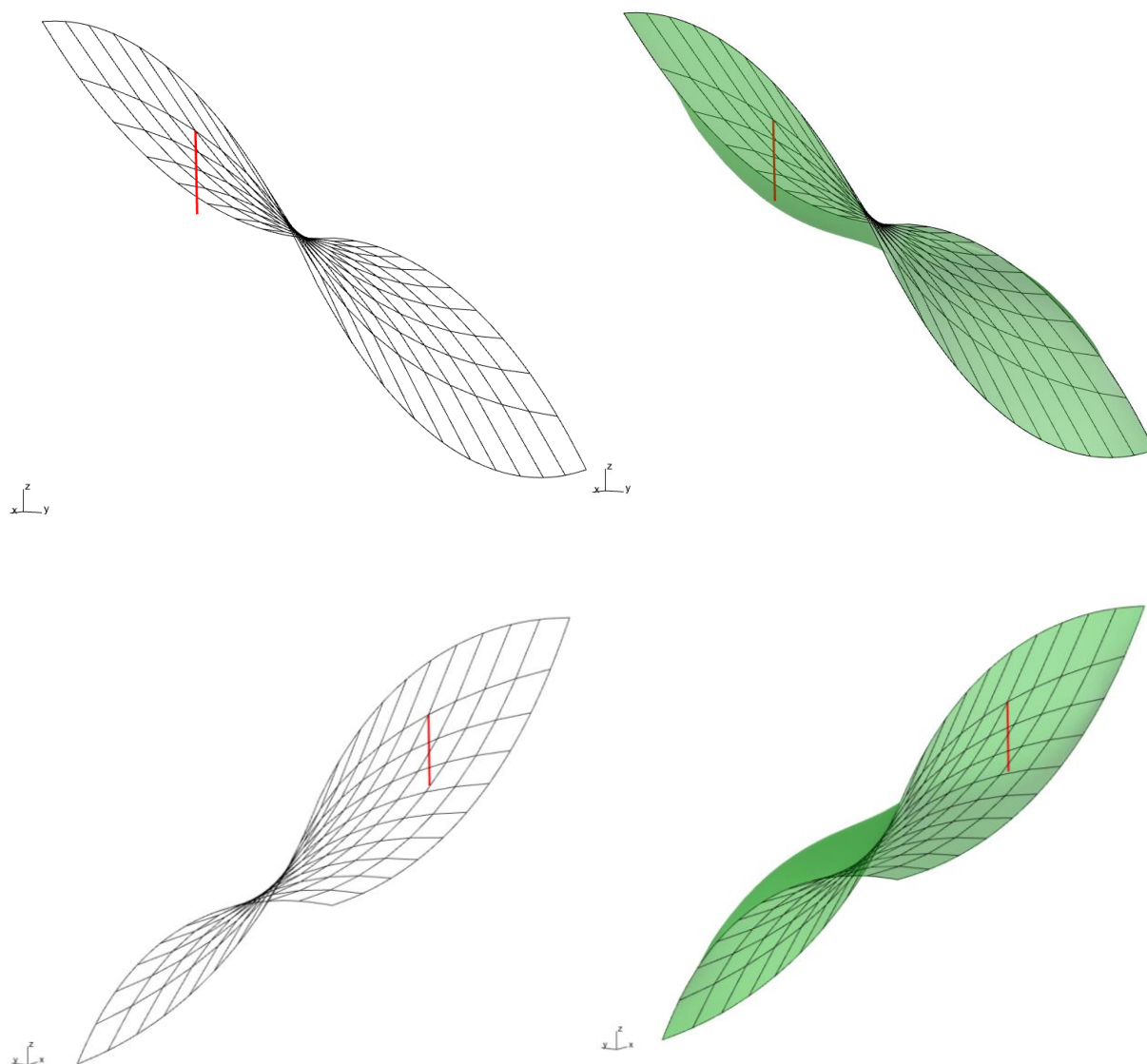
Slika 45: Ravnotežni oblik Mreže 4



Slika 46: Mreža 1 – Odstupanje z koordinata

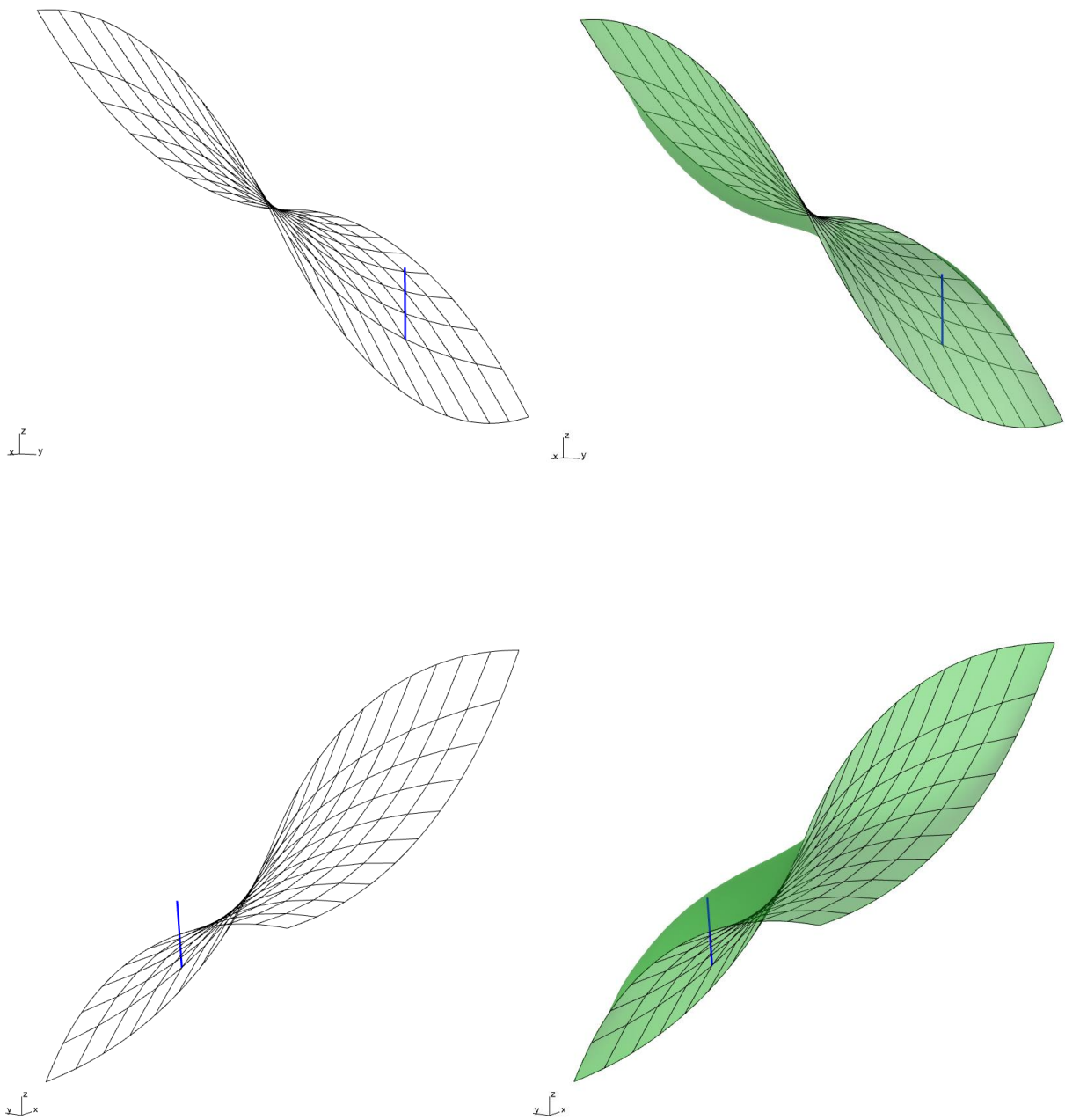
Razlika volumena:

$$V_s - V_1 = 0,81523$$



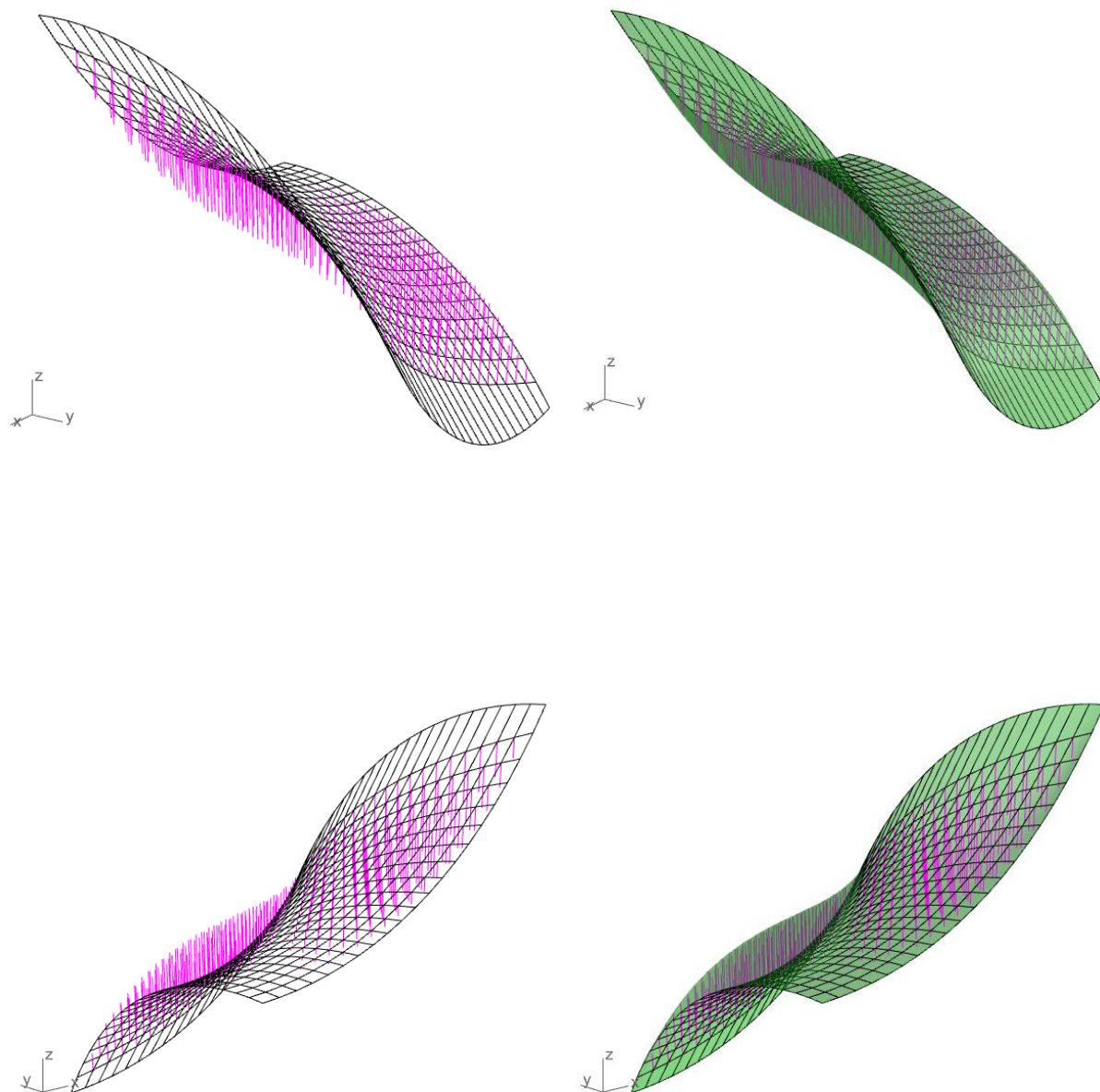
Slika 47: Mreža 1- Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{1,max} = |0,421997|$$



Slika 48: Mreža 1- Minimalno odstupanje z koordinata

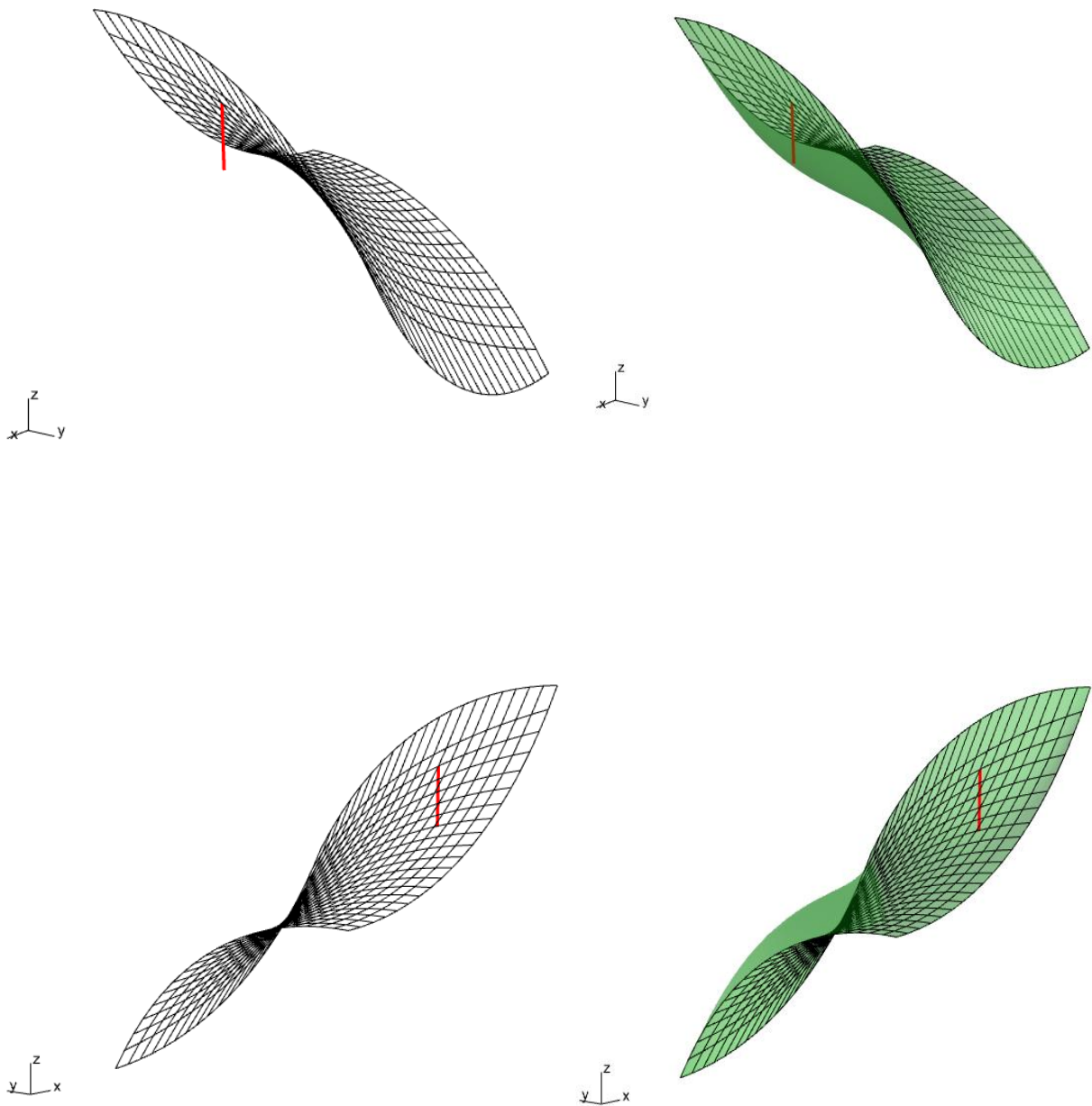
$$\Delta z_{1,min} = |8.047 \times 10^{-17}|, \Delta z_{min} > 0$$



Slika 49: Mreža 2 – Odstupanje z koordinate

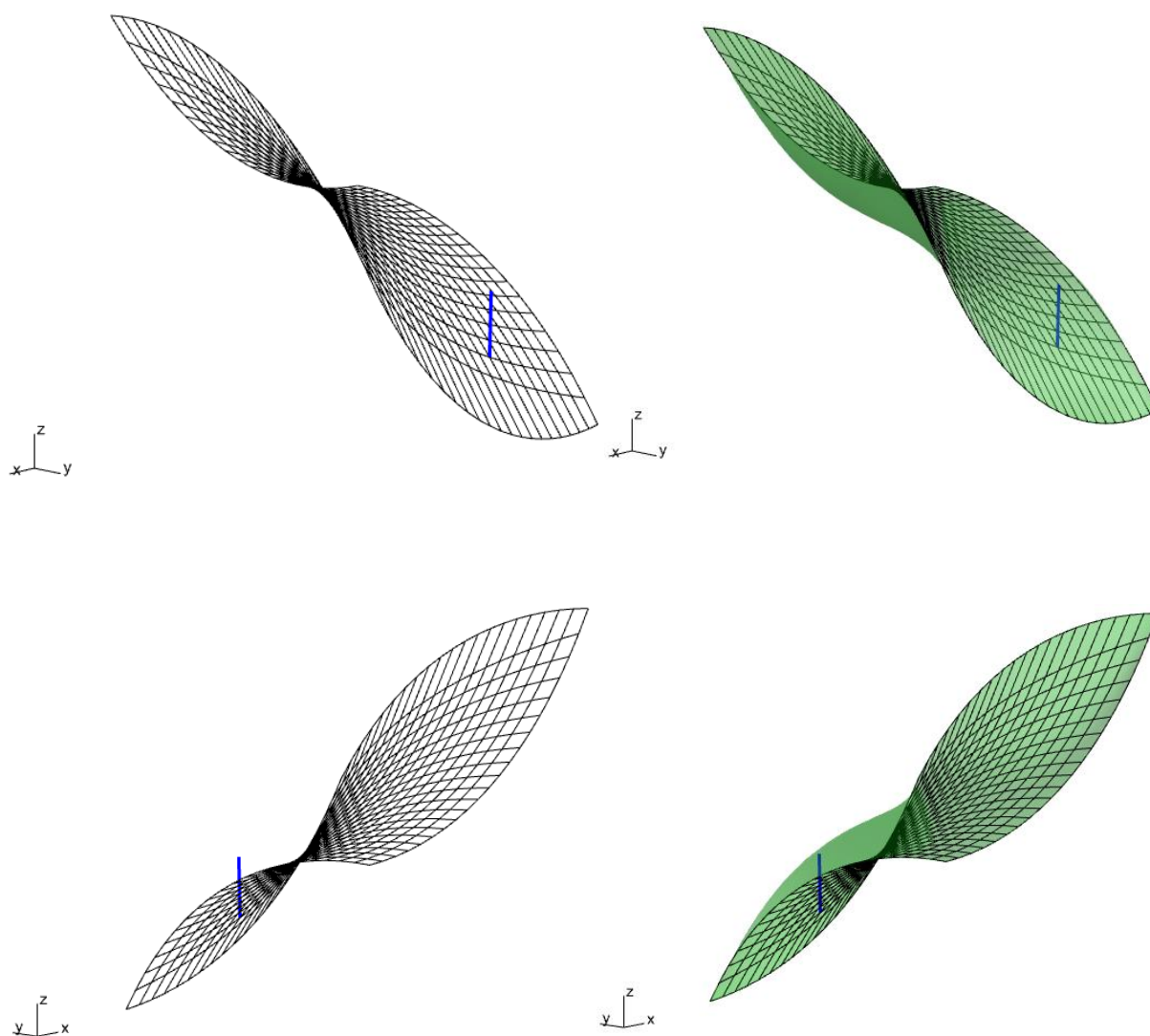
Razlika volumena:

$$V_s - V_2 = 0,144988$$



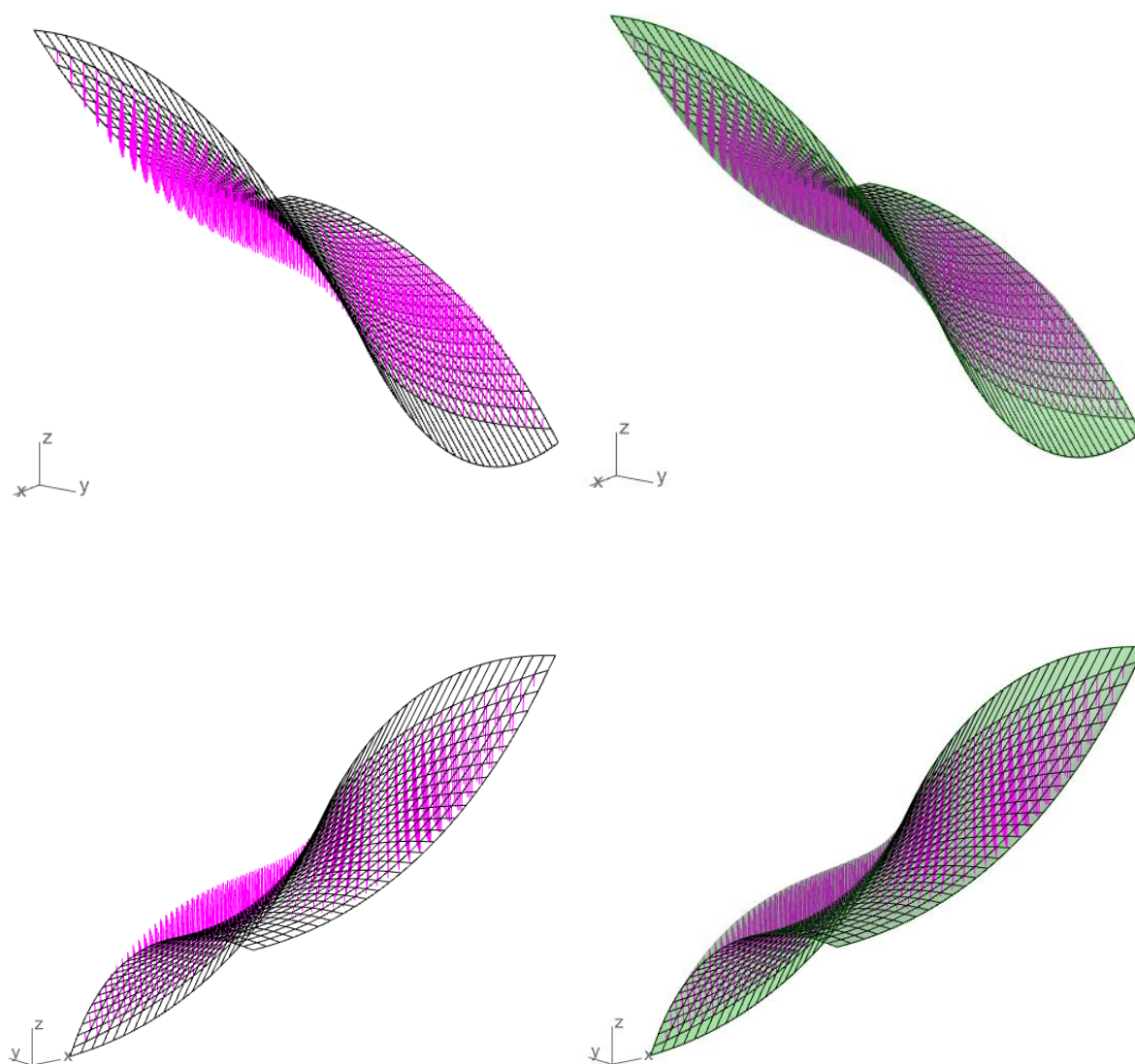
Slika 50: Mreža 2 - Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{2,max} = |0,398562|$$



Slika 51: Mreža 2- Minimalno odstupanje z koordinata

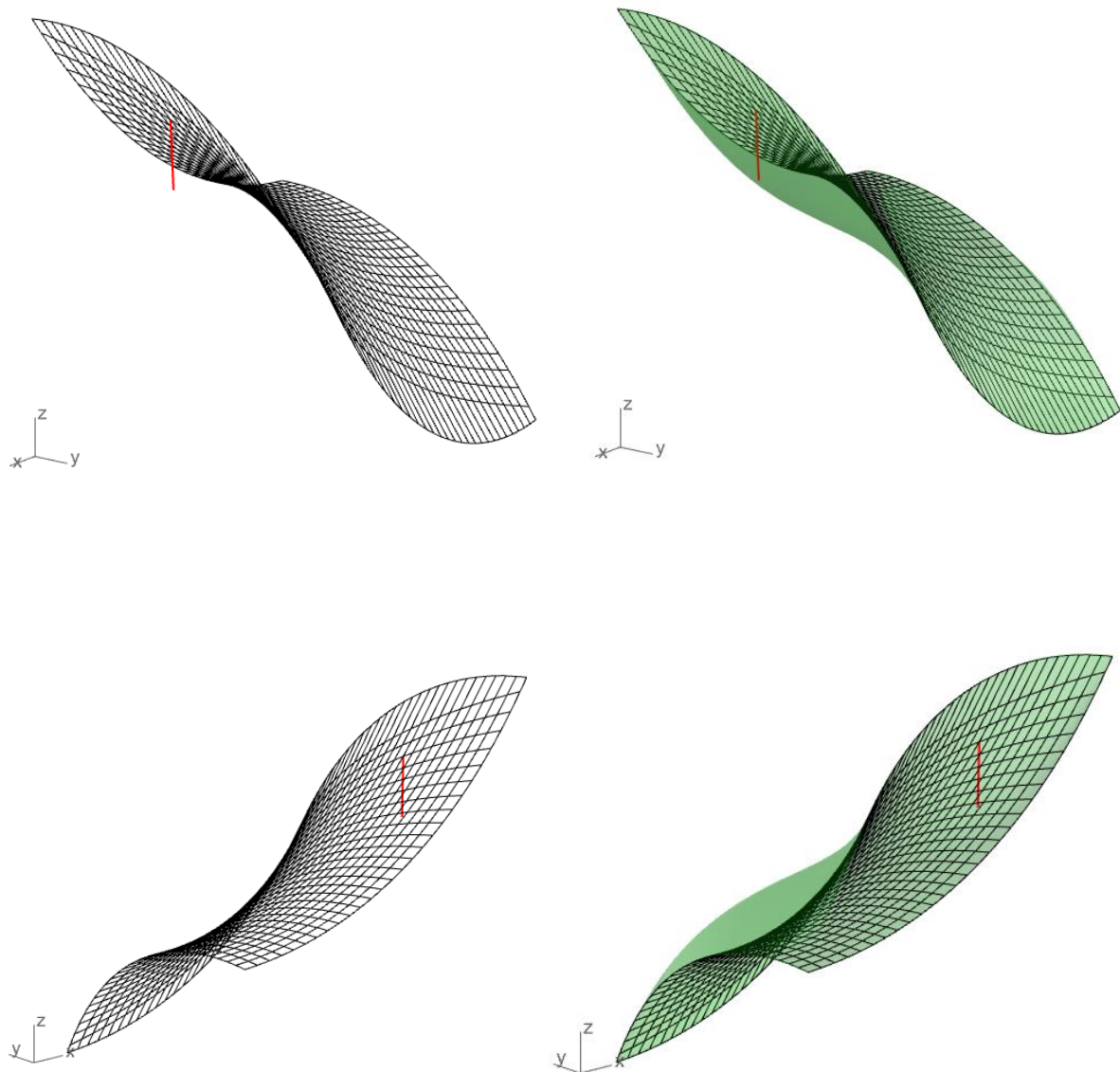
$$\Delta z_{2,min} = |1.576 \times 10^{-5}|, \Delta z_{min} > 0$$



Slike 52: Mreža 3 – Odstupanje z koordinata

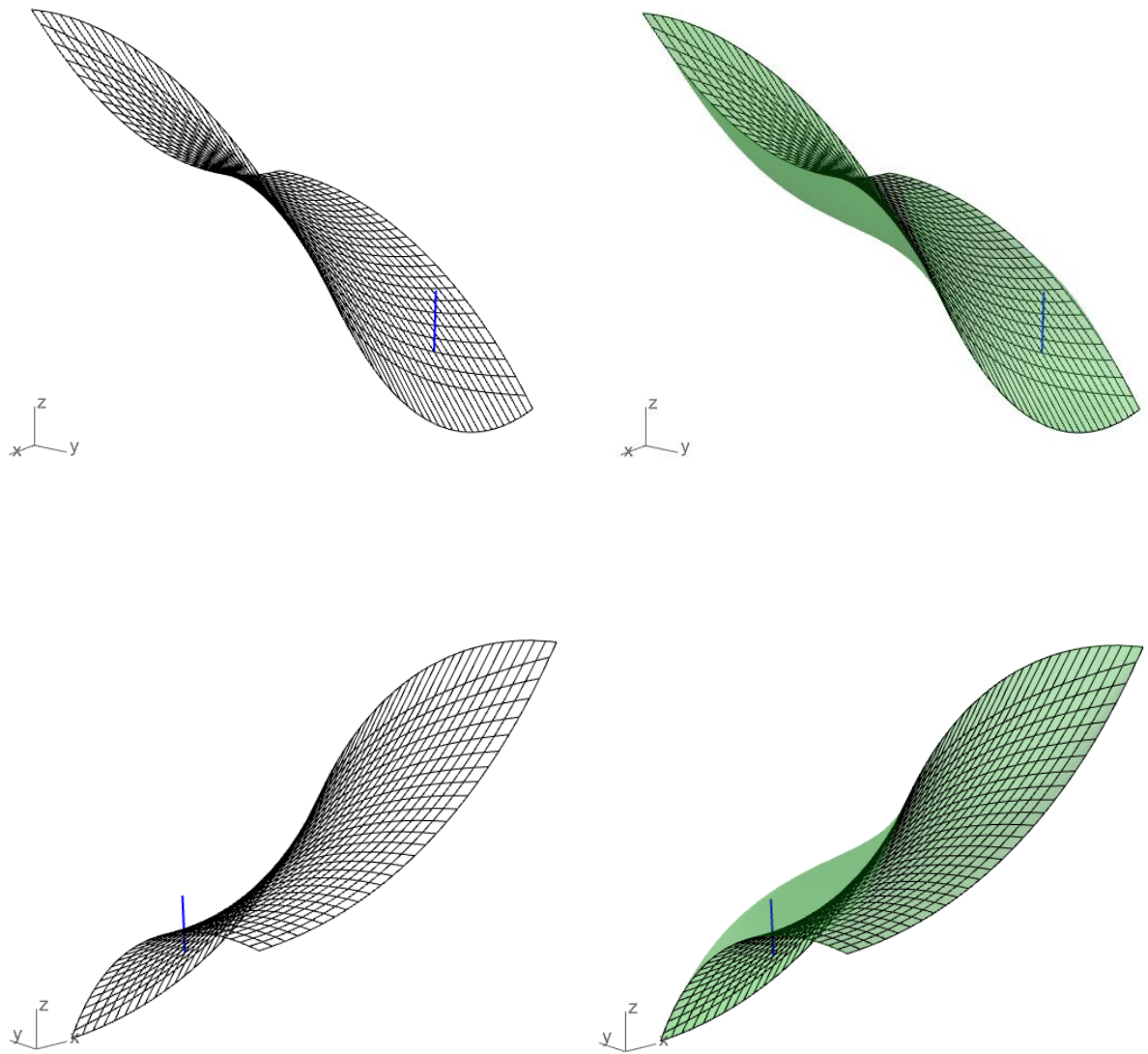
Razlika volumena:

$$V_s - V_3 = 0,142007$$



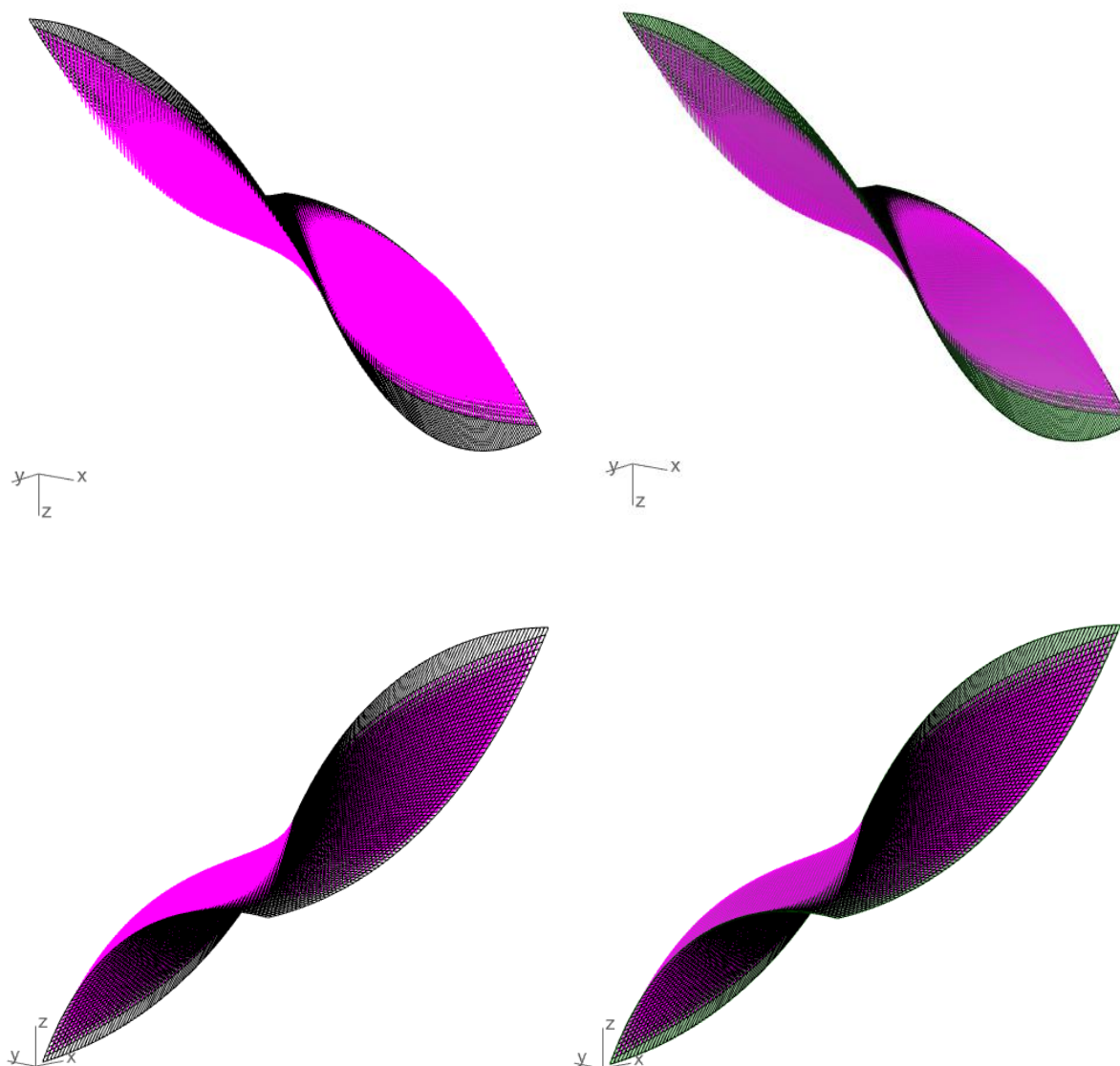
Slike 53: Mreža 3 – Maksimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{3,max} = |0,376225|$$



Slike 54: Mreža 3 – Minimalno odstupanje z koordinata

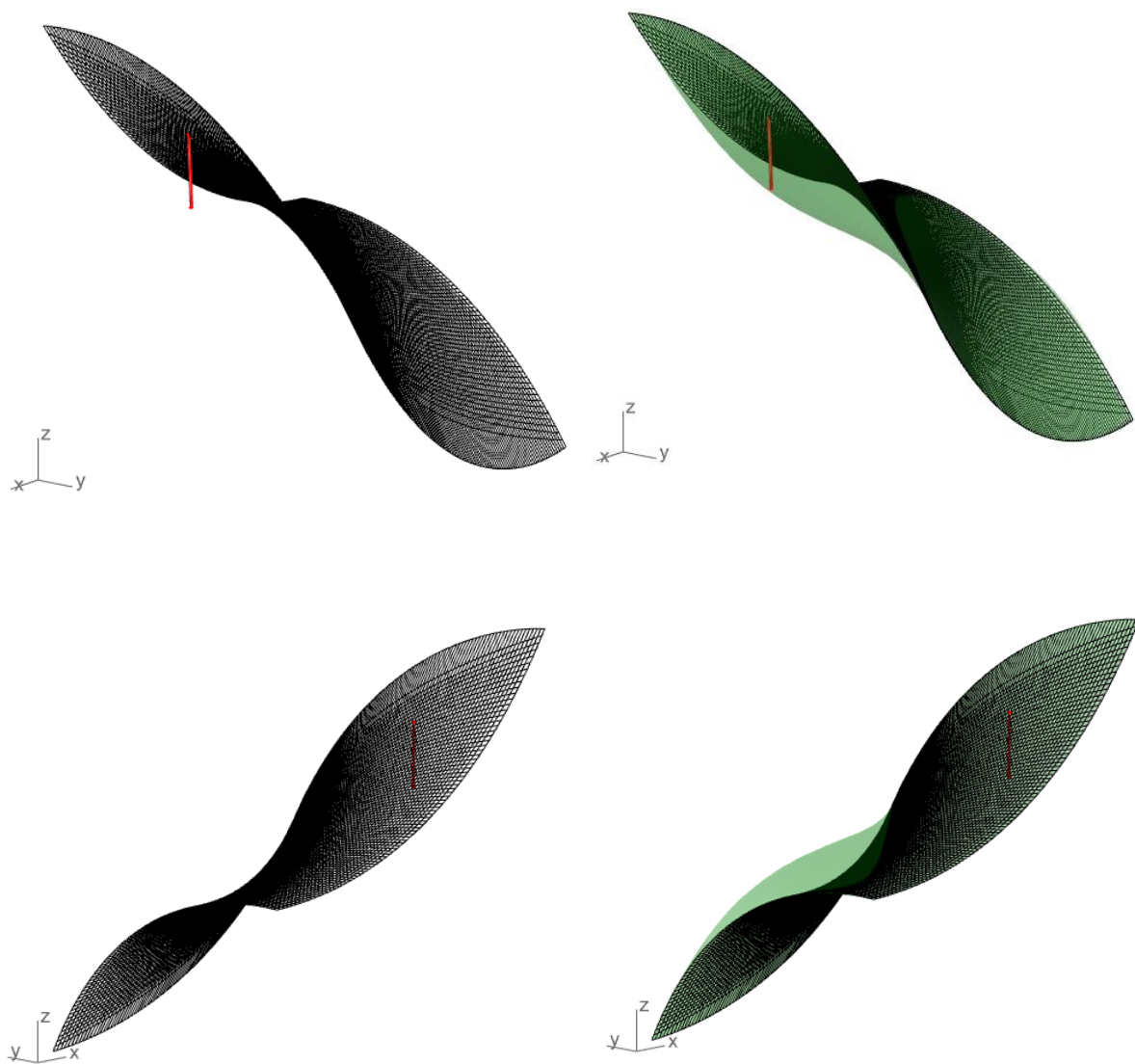
$$\Delta z_{3,min} = |4,535 \times 10^{-17}|, \Delta z_{min} > 0$$



Slike 55: Mreža 4 – Odstupanje z koordinata

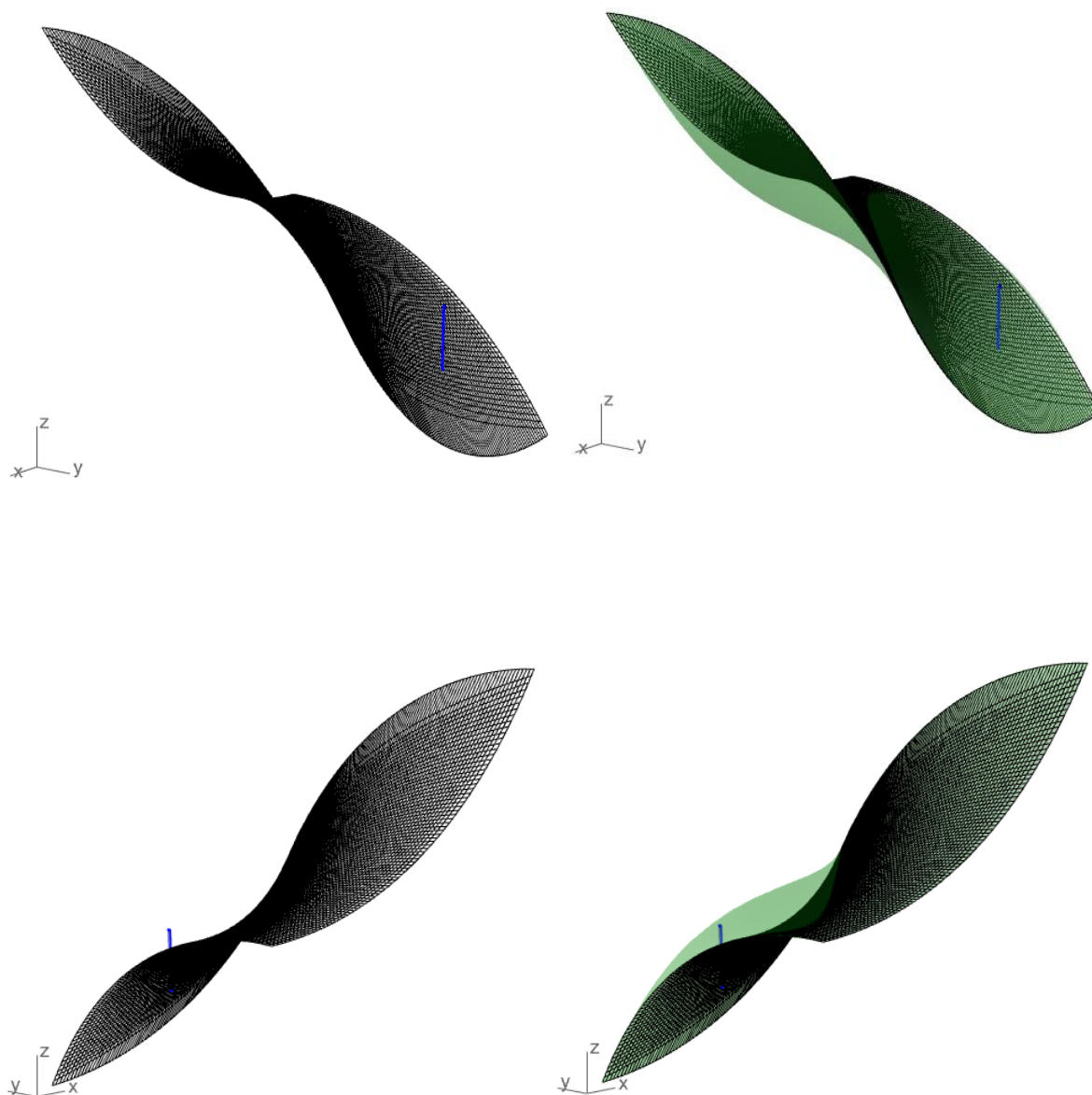
Razlika volumena:

$$V_s - V_4 = 0,062063$$



Slike 56: Mreža 4 – Maksimalno odstupanje z koordinata

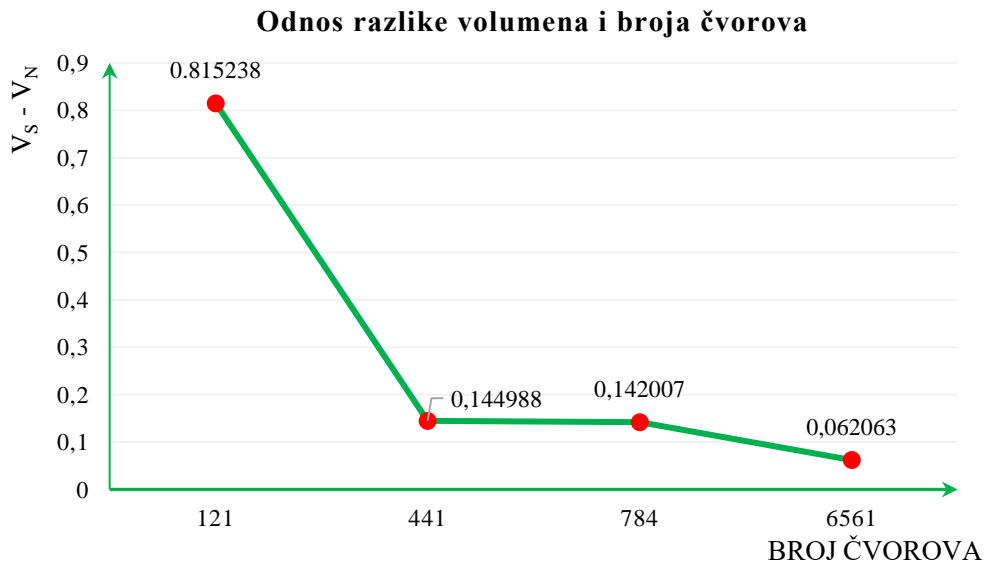
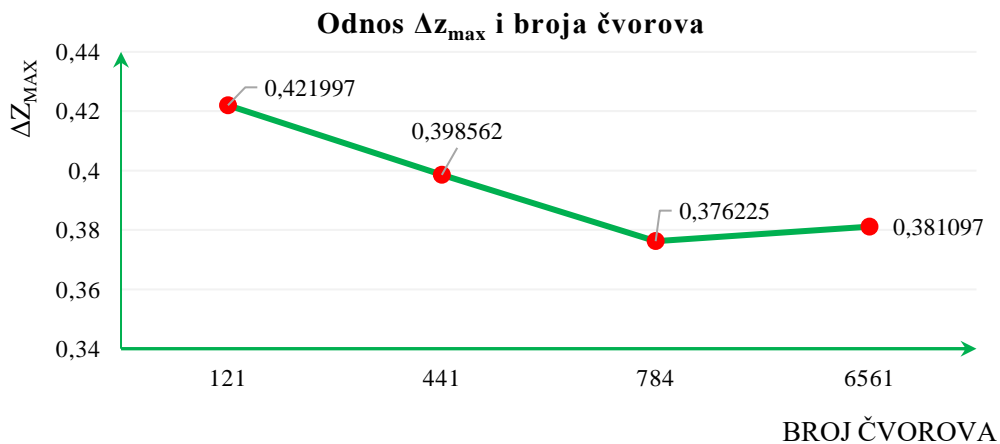
$$\Delta z_{4,max} = |0,381097|$$



Slike 57: Mreža 4 – Minimalno odstupanje z koordinata

$$\Delta z_{4,min} = |6,944 \times 10^{-15}|, \Delta z_{min} > 0$$

Dijagram 3: Odnos razlike volumena i broja čvorova

Dijagram 4: Odnos Δz_{\max} i broja čvorova

Iz Dijagrama 3 vidljivo je kako povećanje broja čvorova mreže uzrokuje smanjenje razlike volumena između Scherkove minimalne plohe i plohe koja predstavlja aproksimaciju ravnotežne mreže određene jediničnim vrijednostima unutarnjih sila.

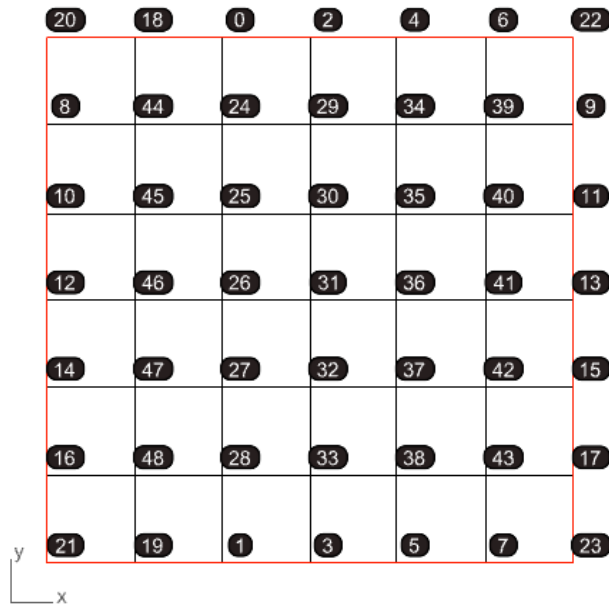
Intuitivno je jasno kako bi se maksimalno odstupanje z koordinate trebalo smanjivati povrećanjem broja čvorova (kao što je slučaj u Dijagramu 3, smanjenje razlike volumena). Međutim, u Dijagramu 4 dolazi do blagog porasta maksimalnog odstupanja z koordinate. Problematiku bi valjalo dodatno istražiti (što nije područje istraživanja ovoga rada). Potencijalno rješenje bilo bi dodatno iteriranje u svrhu dobivanja veće točnosti minimalne mreže u zadnjem primjeru što bi možebitno uzrokovalo smanjenje maksimalnog odstupanja z koordinate (skok se ne bi dogodio).

5.3. TRAŽENJE OBLIKA POMOĆU METODE GUSTOĆA SILA

Računalni modeli vlačnih konstrukcija sadrže numeričke i grafičke podatke koji opisuju oblik konstrukcije te daju naprezanja i deformacije pod određenim opterećenjem. Prvi pretpostavljeni oblik konstrukcije najčešće ne zadovoljava uvjete ravnoteže, pa se provodi iteracijski postupak promjene oblika koji se prekida zadovoljenjem ravnoteže svih sila, unutarnjih i vanjskih. Primjenom numeričkih metoda moguće je vrlo točno odrediti ravnotežni oblik, pri čemu je potrebna velika preciznost. Početni oblik konstrukcije prednapete mreže kabela rezultat je preliminarnog statičkog proračuna koji nazivamo *nalaženje oblika*, a koji osigurava ravnotežno stanje svake točke, što se postiže prednapinjanjem vlačnih elemenata. Osnovni je cilj projektiranja vlačnih konstrukcija odabrati i organizirati konstrukciju tako da ona sva opterećenja prenosi vlačnim silama u nosivim elementima – kabelima. U suprotnom dolazi do nabiranja tkanine, odnosno opuštenih kabela što može dovesti do lokalnog ili globalnog otkazivanja nosivosti konstrukcije. Kako bi se to spriječilo potrebno je povećati sile u kabelima ili mijenjati rubne uvjete. Potrebno je naznačiti koji su čvorovi ležajni, a koji su slobodni. Potom je moguće definirati matricu veza koja sadrži podatke o povezanosti između čvorova i podatke o numeraciji čvorova. Definira se i matrica gustoća sila svakoga elementa. Nakon toga se sastavljaju jednadžbe ravnoteže te se provodi proračun nepoznatih koordinata koji će predstavljati ravnotežni položaj. Linearni sustav jednadžbi moguće je pojednostavniti uvođenjem jednake gustoće sila. Čak i jedinična vrijednost gustoće sila daje zadovoljavajuće oblike te služi kao dobra aproksimacija početnog položaja. Upravo zato se iteracije s različitim gustoćama sila uspoređuju s modelima mreža čija je gustoća sila za sve elemente jednaka 1.

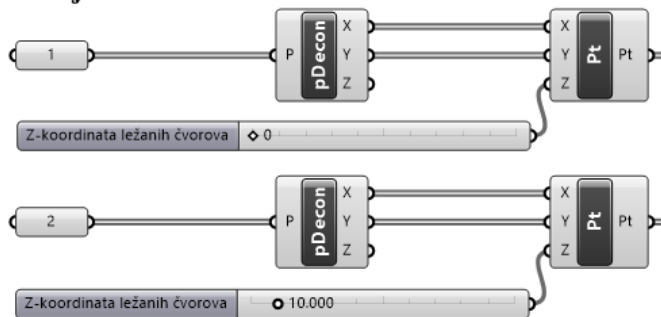
U nastavku rada prikazana je analiza oblika mreže s obzirom na promjenu gustoća sila. Analiziraju se tri tlocrtno različita modela te se na jednom modelu detaljno objašnjava evolucija modela i dobivene promijene, a druga dva se prilažu grafički. Modeli su osmišljeni proizvoljno te su izrađeni u *Rhinoceros3D*, unutar kojega je integriran dodatak (eng. plug-in) *Grasshopper*. Najprije se u *Rhinoceros3D-u* crtaju rubni kabeli (eng. *border cables*), konkretno rub mreže kabela koja tlocrtno ima oblik pravokutnika. Sljedeći korak je odabrati ležajne točke (eng. *support nodes*), koje se na modelu nalaze na rubnim kabelima. Kao najzahtjevniji zadatak predstoji odabir rasporeda unutarnjih kabela (eng. *inner cables*) na čemu je bazirana ova analiza. Kao početna mreža postavljena je mreža od 7×7 čvorova. Pritom se podrazumjeva da je na rubnim kabelima sedam čvorova u x smjeru i sedam čvorova u y smjeru, (kasnije u tekstu „Mreža 1“) s obzirom na koju će se vršiti sve daljnje usporedbe. Završavanjem crtanja modela u *Rhinoceros3D-u* prelazi se u *Grasshopper* u kojemu je cilj potrebne ulazne podatke za traženje oblika pretvoriti u liste u kojima se kao izlazni podatak dobivaju povezane cijeline koje se kasnije obrađuju u *SageMath-u*. *SageMath* je računalni algebra sustav sa značajkama koje pokrivaju mnoga područja matematike.

Čvorovima indeksa 20, 21, 22 i 23 postavljena je koordinata $z = 0$, dok je čvorovima indeksa 2, 3, 12 i 13 postavljena koordinata $z = 10$.



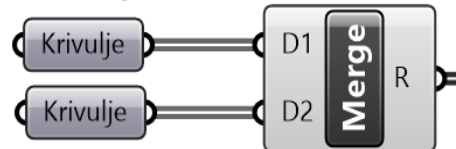
Slika 58: Bazna najrjeđa mreža

Ležajni čvorovi



Slika 59: Unos ležajnih čvorova

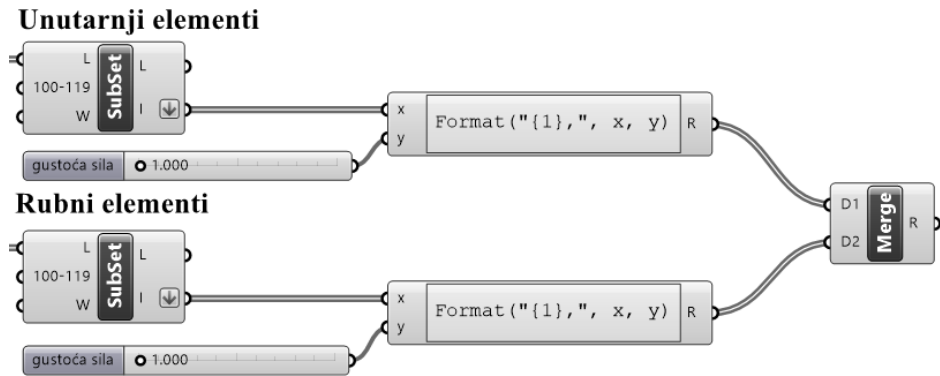
Unutarnji elementi



Rubni elementi

Slika 60: Unos unutarnjih i rubnih kabela

Za matematičku obradu podataka nužno je zadati gustoću sila u elementima. Gustoća sila svih elemenata za početni slučaj Mreže 1 iznosi $q_s = 1$. Za zadavanje domene unutarnjih i rubnih elemenata potrebno je znati indekse rubnih elemenata kako bi se moglo upravljati gustoćom sila unutarnjih elemenata neovisno o rubnima i obrnuto.



Slika 61: Postavljanje domene i odabir gustoće sila za unutarnje i rubne elemente

Grasshopper razvrstava informacije u obliku povezanih izlaznih podataka smještenih u četiri odvojene liste. U izlaznim listama nalaze se uređeni parovi koordinata čvorova, elemenata, indeksa ležajnih čvorova te gustoća sila.

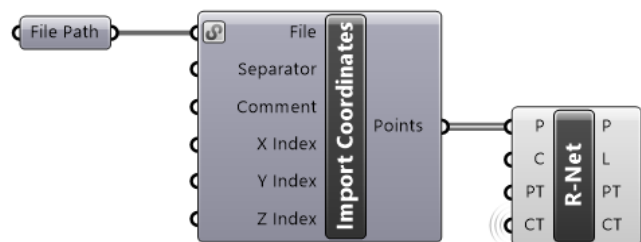
KOORDINATE ČVOROVA	ELEMENTI	INDEKSI LEŽAJNIH TOČAKA	GUSTOĆA SILA
[91, 0, -9.9], [91, 20, -9.9], [92, 0, -9.6], [92, 20, -9.6], [93, 0, -9.1], [93, 20, -9.1], [94, 0, -8.4], [94, 20, -8.4], [95, 0, -7.5], [95, 20, -7.5], [96, 0, -6.4], [96, 20, -6.4], [97, 0, -5.1], [97, 20, -5.1], [90, 0, -10], [90, 20, -10], [98, 0, -3.6], [98, 20, -3.6], [99, 0, -1.2], [99, 20, -1.2]	0 [0, 98], 1 [98, 80], 2 [80, 81], 3 [81, 82], 4 [82, 83], 5 [83, 84], 6 [84, 85], 7 [85, 86], 8 [86, 87], 9 [87, 88]	0 78 1 72 2 62 3 58 4 54 5 48 6 44 7 38 8 34 9 28	0 1, 1 1, 2 1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9 1

Slika 62: Izlazni podatci za SageMath

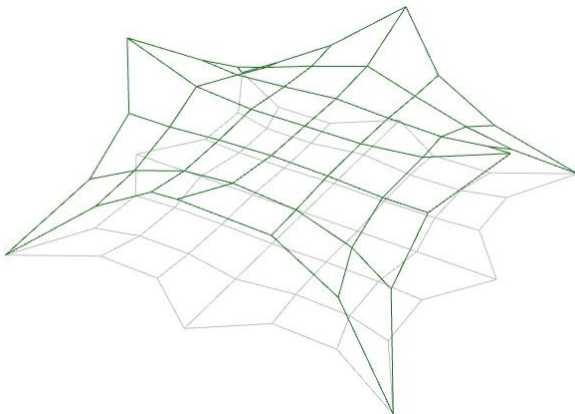
Pozivnom funkcijom:

```
FDM (nodes, elems, supports, qs) :
    ndof, tdof = table_of_nodal_DsOF (len (nodes), supports)
    nodes_rf = nodes_to_RDF (nodes)
    qs_rf = force_densities_to_RDF (qs)
    return _FDM (ndof, tdof, nodes_rf, elems, qs_rf)
```

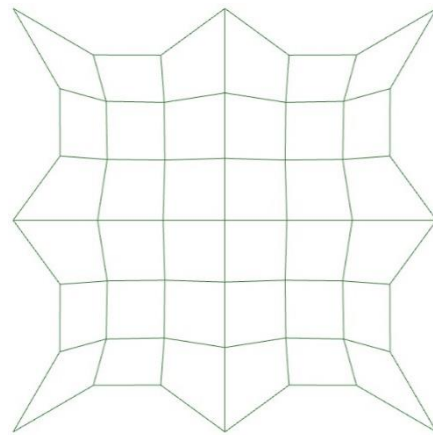
u SageMath-u se *metodom gustoća sila* određuju koordinate ravnotežne mreže, koja se može i grafički prikazati. Lista dobivenih koordinata predstavlja ulazni podatak za naredbu u Grasshopperu kojom se prikazuje ravnotežni položaj mreže.



Slika 63: Postavljanje liste dobivenih koordinata u Grasshopper



Slika 64: Aksonometrijski prikaz, Mreža 1

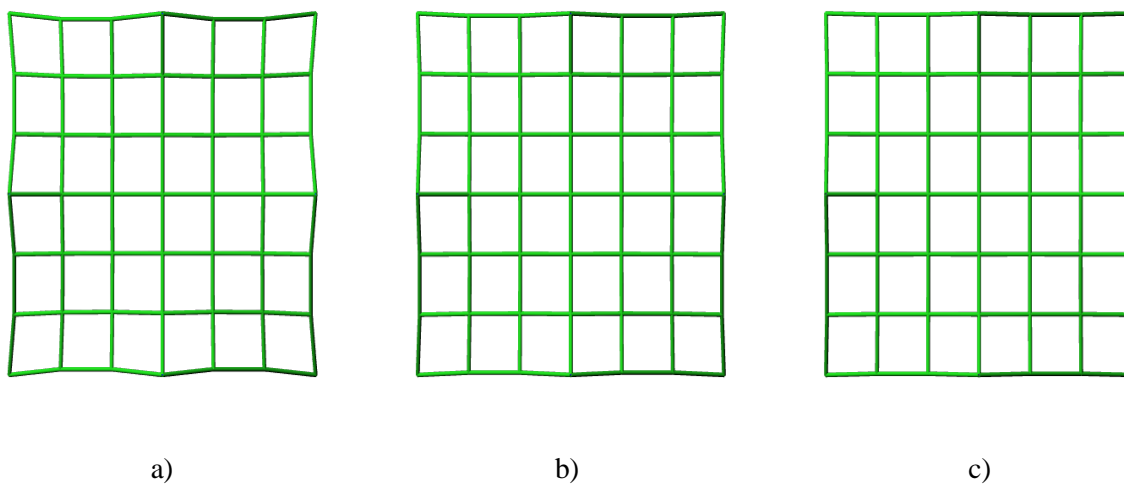


Slika 65: Tlocrt, Mreža 1

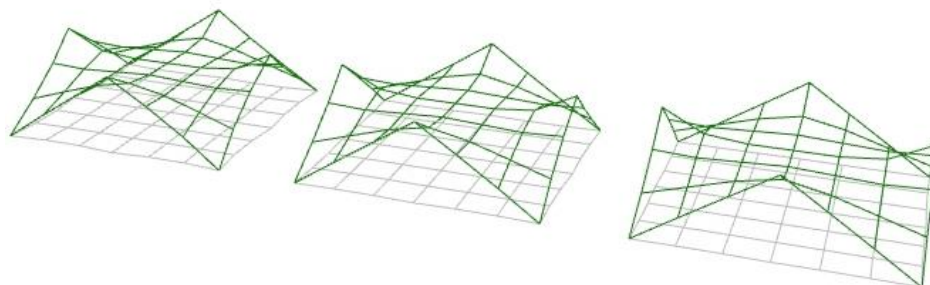
Primjetni su znatni nedostaci ravnotežne Mreže 1. Površina mreže je poligonalna što predstavlja velike probleme prilikom opterećenja snijegom i kišom. Nužno je težiti glatkoj krivulji, kada elementi mreže točnije aproksimiraju krivulju višeg stupanja. Kao potencijalno rješenje, mijenja se iznos gustoća sila za rubne elemente čime se zatežu isti, dok broj elemenata mreže ostaje isti.

Tablica 1: Povećanje gustoće sila Mreže 1, tlocrt

	A	B	C
Unutarnji elementi	qs = 1	qs = 1	qs = 1
Rubni elementi	qs = 10	qs = 25	qs = 50



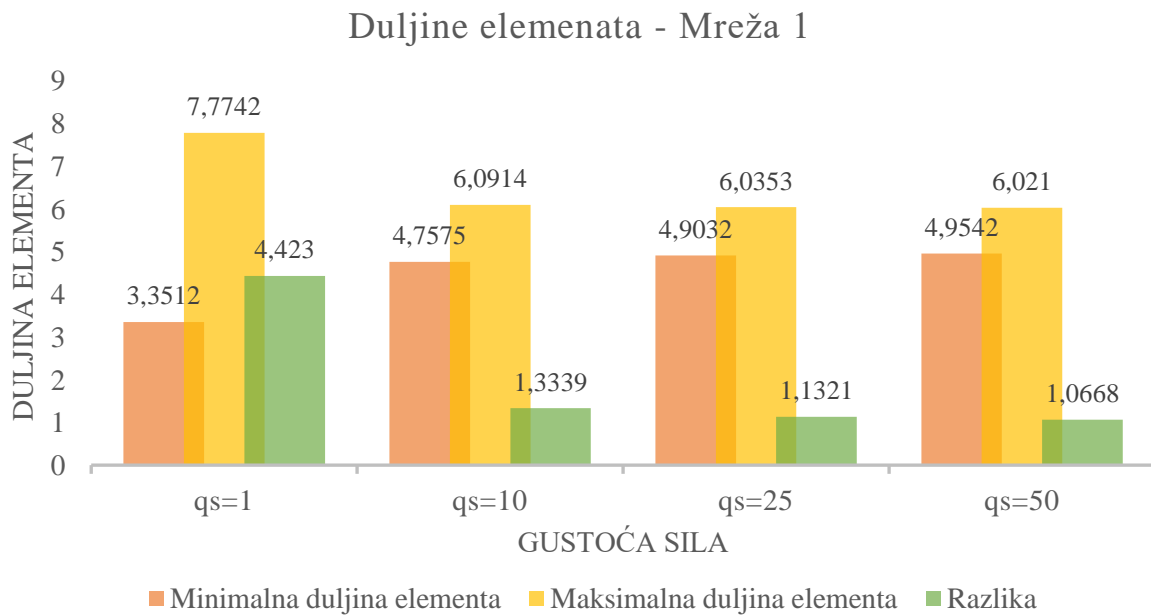
Slika 66: Povećanje gustoće sila Mreže 1, tlocrt



Slika 67: Povećanje gustoće sila Mreže 1, aksonometrijski prikaz

Iz odnosa $qs = \frac{F}{l}$ je jasno kako su gustoća sila „qs“ i duljina elemenata „l“ obnuto proporcionalne.

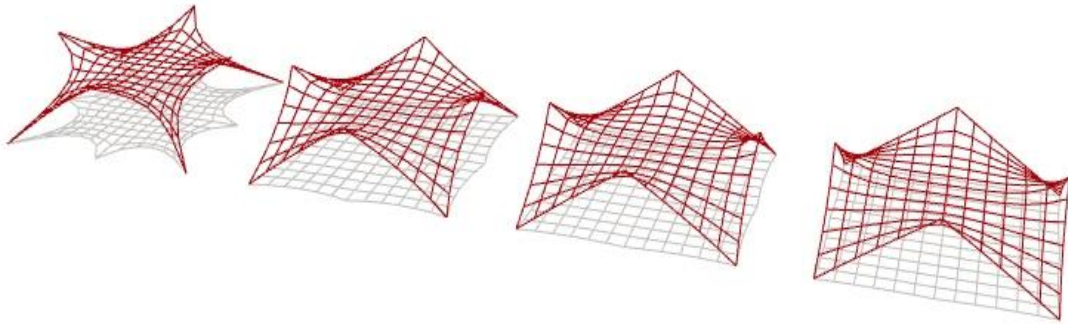
Dijagram 5: Duljine elemenata – Mreža 1



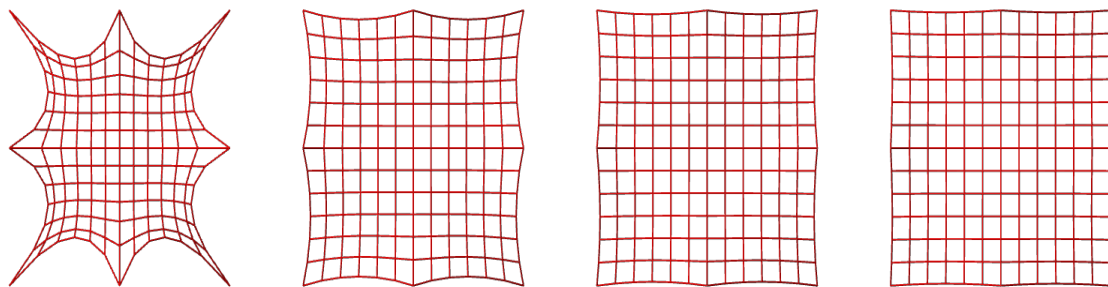
Mreža 1 ne zadovoljava osnovne zahtjeve vlačnih konstrukcija, prvenstveno zbog svoje izrazite poligonalnosti i prevelike udaljenosti između čvorova. Zbog toga će se u nastavku povećavati gustoća sila rubnih elemenata kao i broj čvorova, u svrhu smanjenja razlike između minimalne i maksimalne duljine elemenata. Provjerava se do koje vrijednosti se može povećati gustoća sila uz povećanje broja čvorova. Težnja je približiti se membrani, a da pritom numerička stabilnost ne bude ugrožena. Promjene na

- Mreži 13×13 čvorova (kasnije imenovana kao „Mreža 2“)
- Mreži 25×25 čvorova (kasnije imenovana kao „Mreža 3“)
- Mreži 49×49 čvorova (kasnije imenovana kao „Mreža 4“)

bit će prikazane grafički (slikom i dijagramom).



Slika 68: Mreža 2, aksonometrijski prikaz



a) $qs = 1$

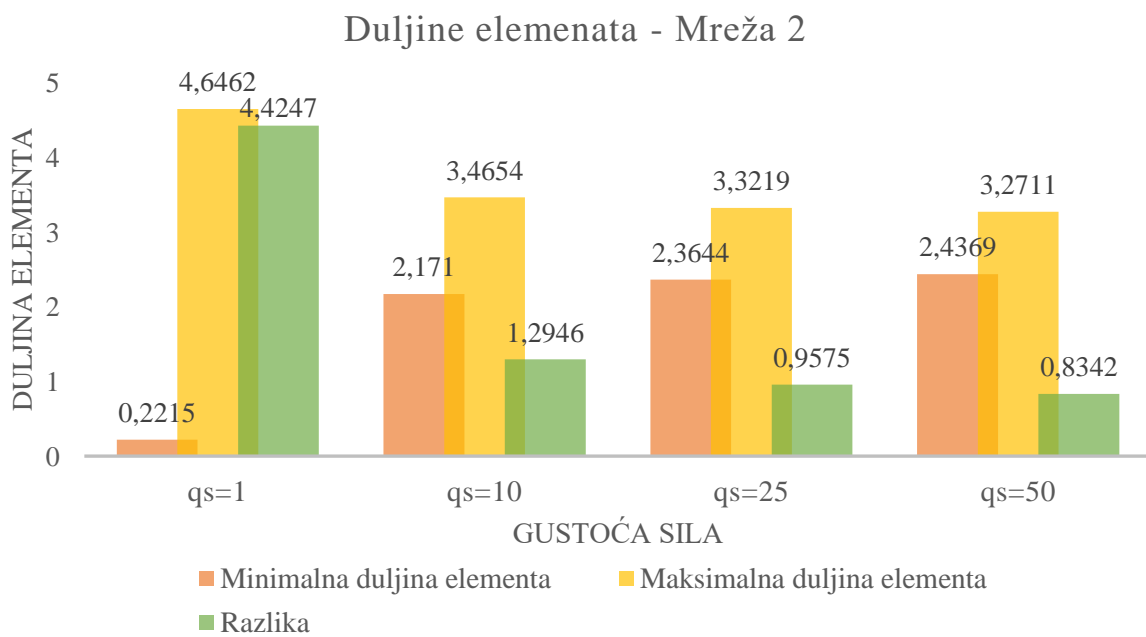
b) $qs = 10$

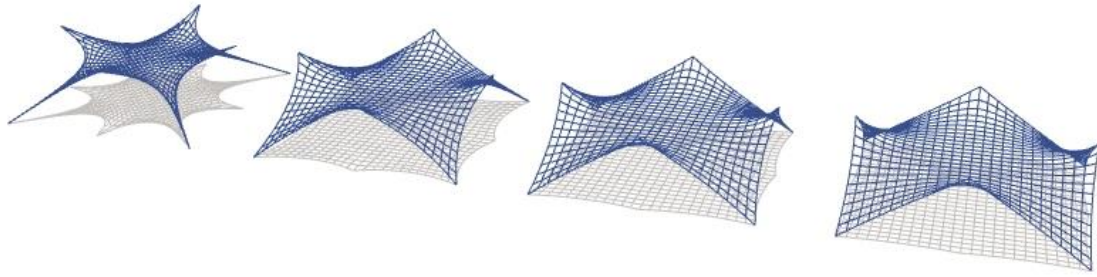
c) $qs = 25$

d) $qs = 50$

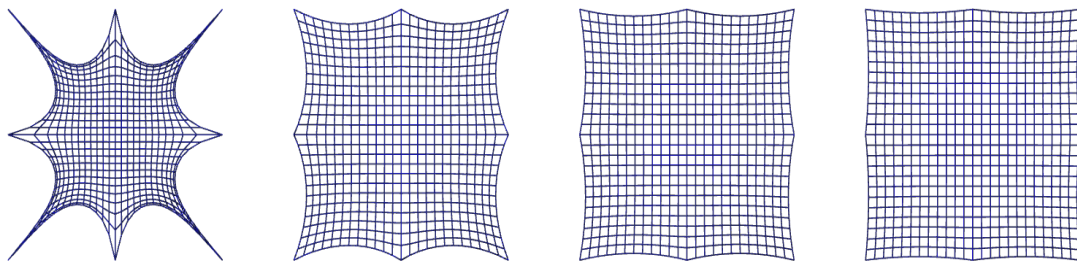
Slika 69: Mreža 2, tlocrt

Dijagram 6: Duljine elemenata – Mreža 2





Slika 70: Mreža 3, aksonometrijski prikaz



a) $qs = 1$

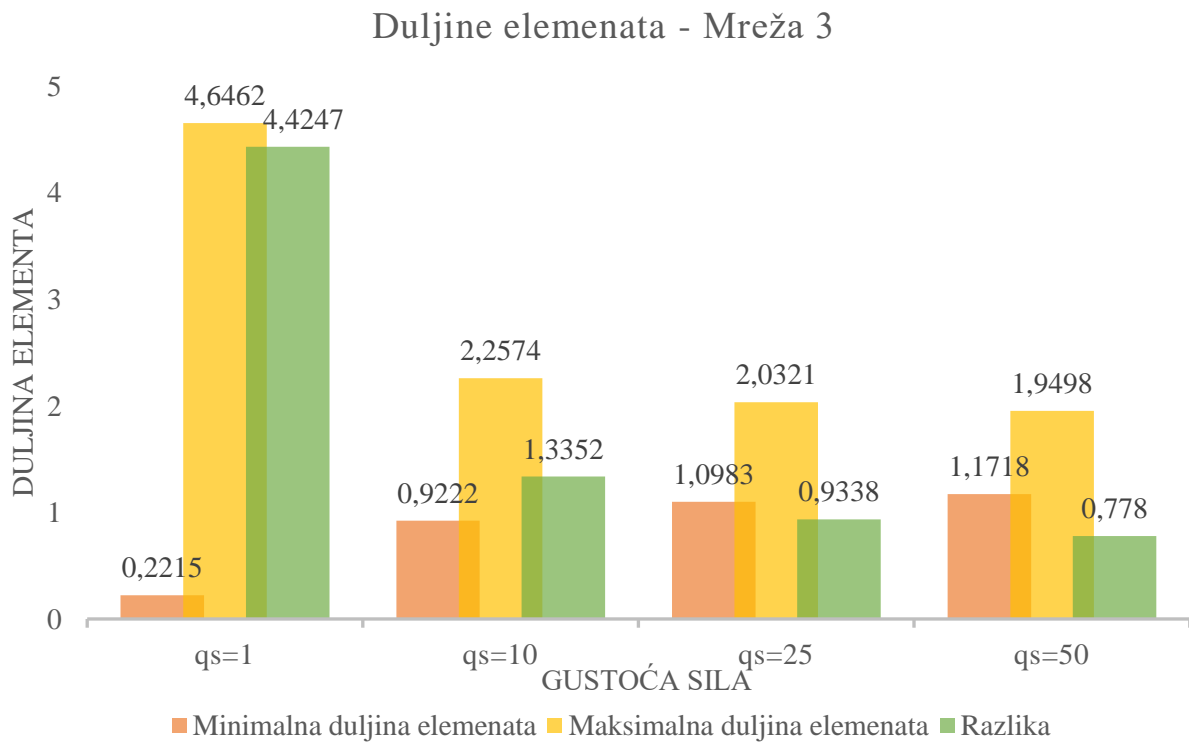
b) $qs = 10$

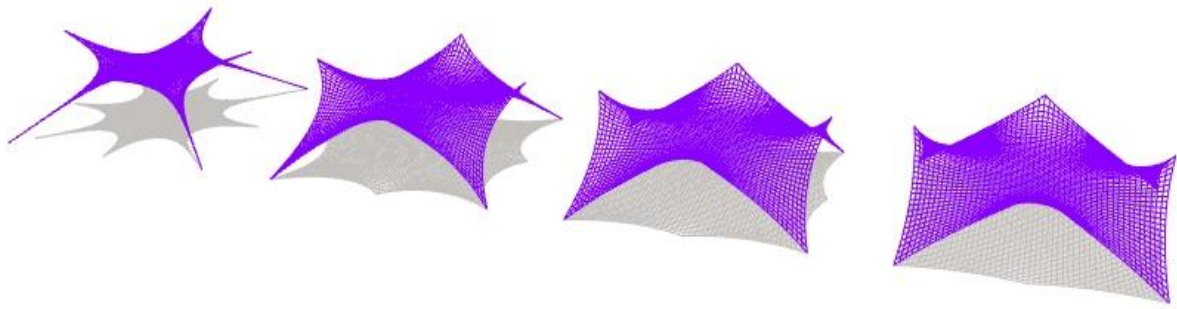
c) $qs = 25$

d) $qs = 50$

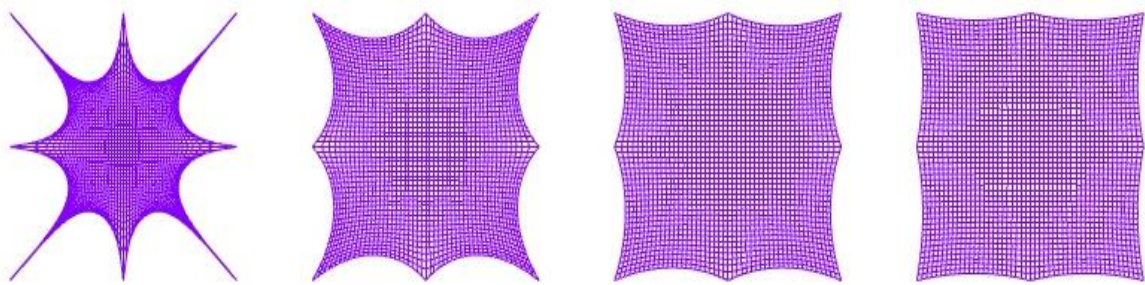
Slika 71: Mreža 3, tlocrt

Dijagram 7: Duljine elemenata – Mreža 3





Slika 72: Mreža 4, aksonometrijski prikaz



a) $qs = 1$

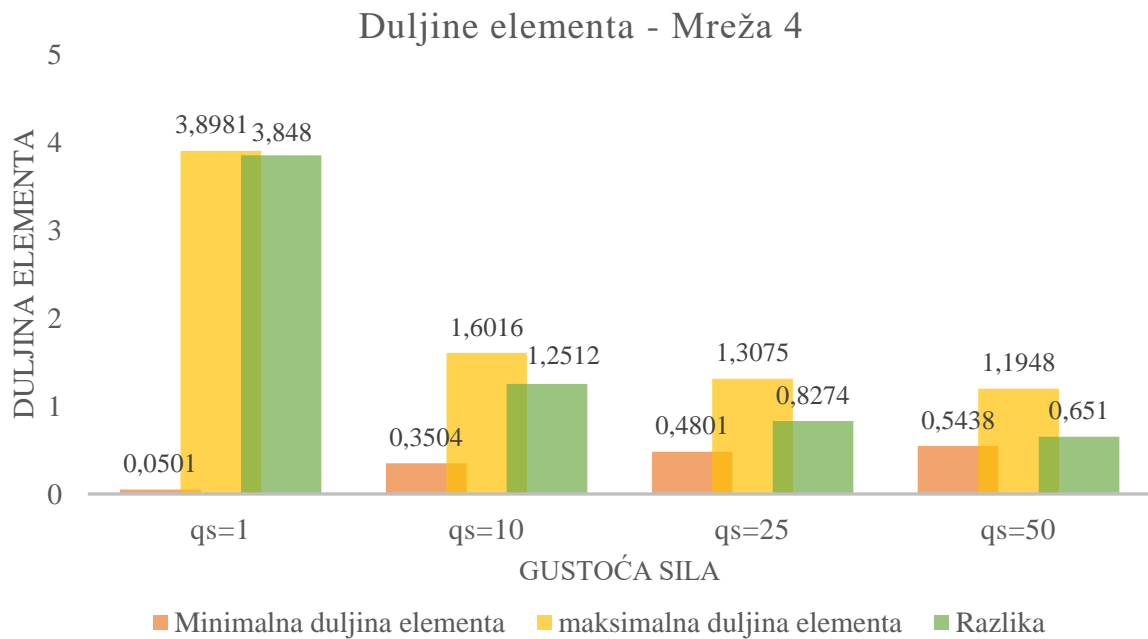
b) $qs = 10$

c) $qs = 25$

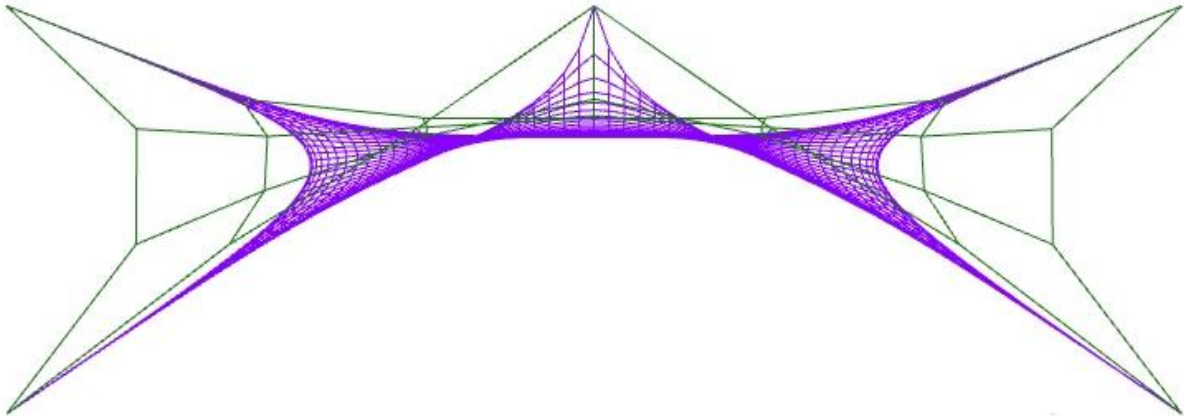
d) $qs = 50$

Slika 73: Mreža 4, tlocrt

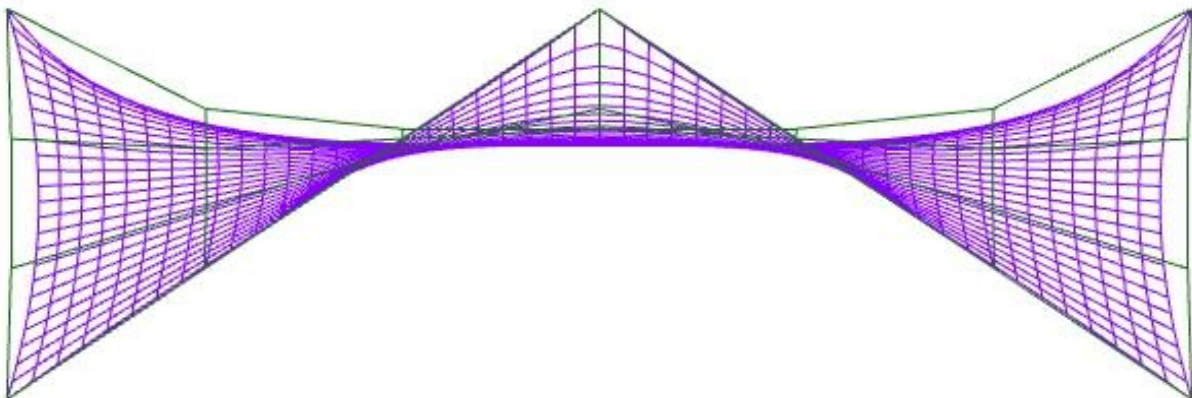
Dijagram 8: Duljine elemenata – Mreža 4



Primjetno je znatno smanjenje razlike između maksimalne i minimalne duljine elemenata, stoga nije potreban natak povećanja broja čvorova. Daljnjim povećanjem broja čvorova, ravnotežni oblik bi se asimptotski približavao membrani za iste rubne uvjete i razinu prednapona. Problem se javlja kada duljina elementa teži nuli, pri čemu se javlja numerička nestabilnost. Presjekom Mreže 1 i Mreže 4 pri gustoći svih elemenata $q_s = 1$ dobiva se jasan grafički prikaz kretanja modela.

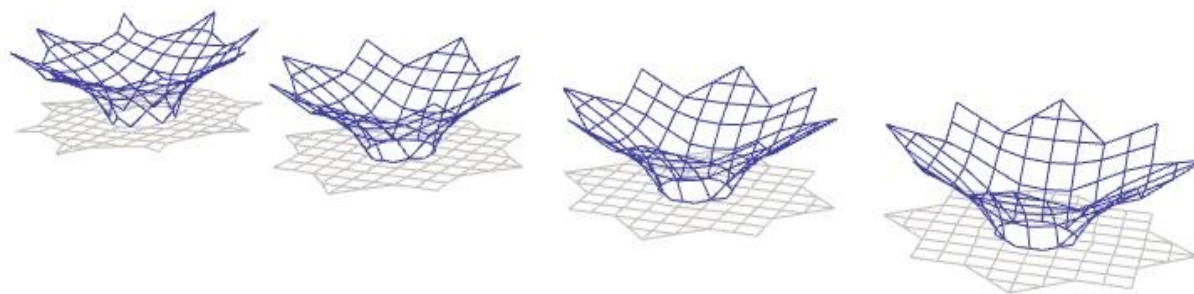


Slika 74: Presjek Mreže 1 i Mreže 4 elemenata pri gustoći sila svih elemenata

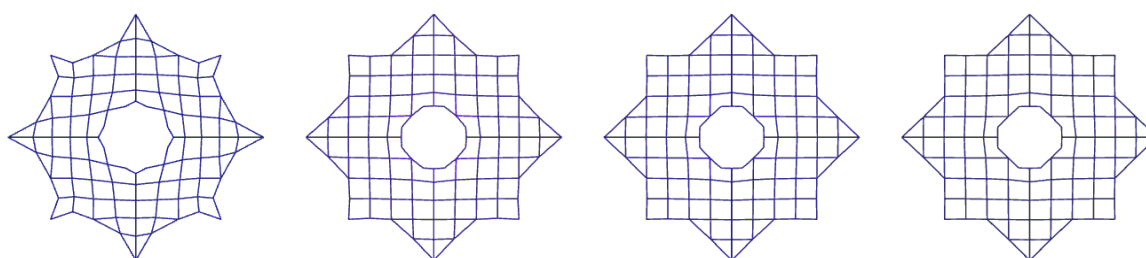


Slika 75: Presjek Mreže 1 i Mreže 4 elemenata pri gustoći sila svih elemenata

U nastavku je vizualno prikazana evolucija preostala dva modela.



Slika 76: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 8×8



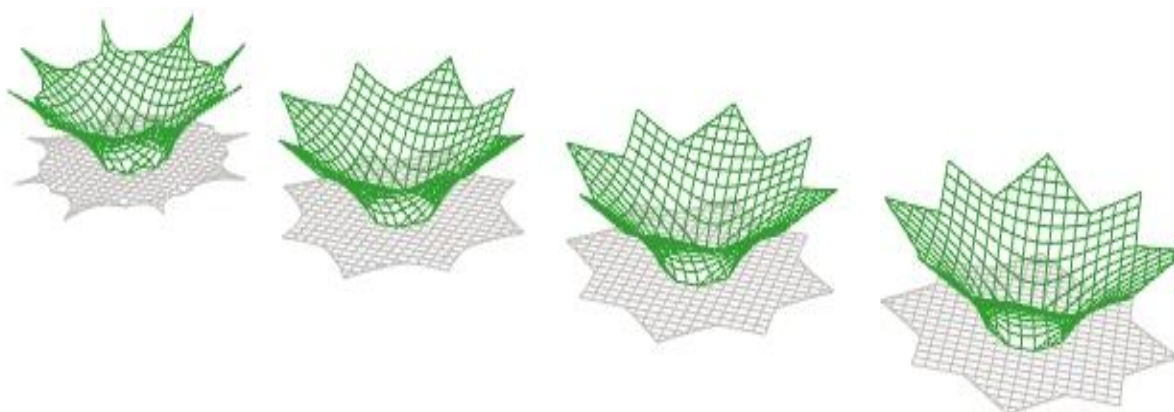
a) $qs=1$

b) $qs=10$

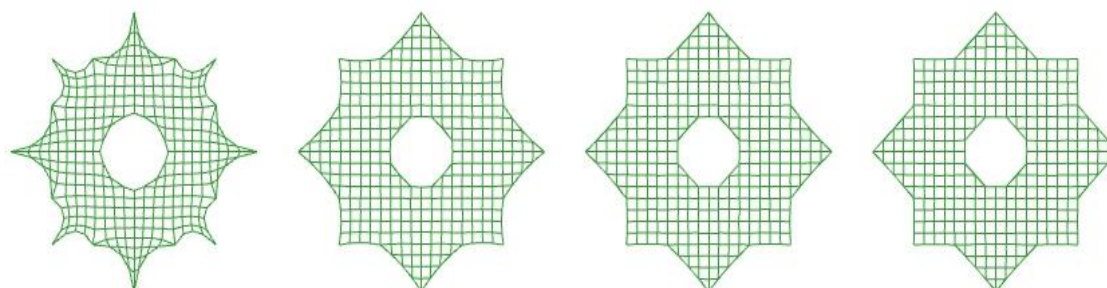
c) $qs=25$

d) $qs=50$

Slika 77: Model 2 u tlocrtu, mreža 8×8



Slika 78: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 16×16



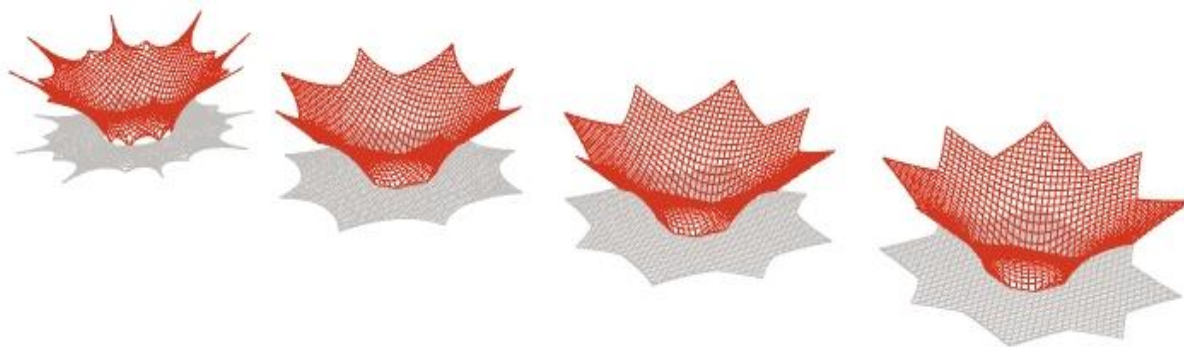
a) $qs=1$

b) $qs=10$

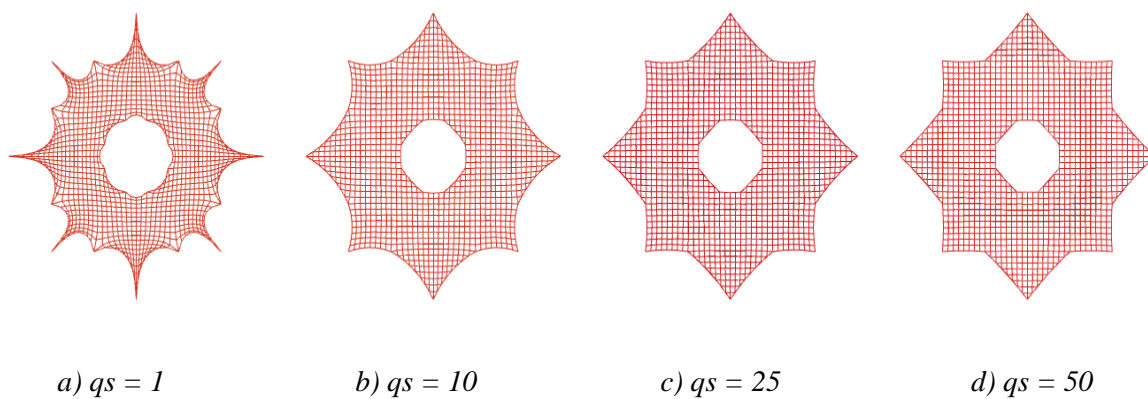
c) $qs=25$

d) $qs=50$

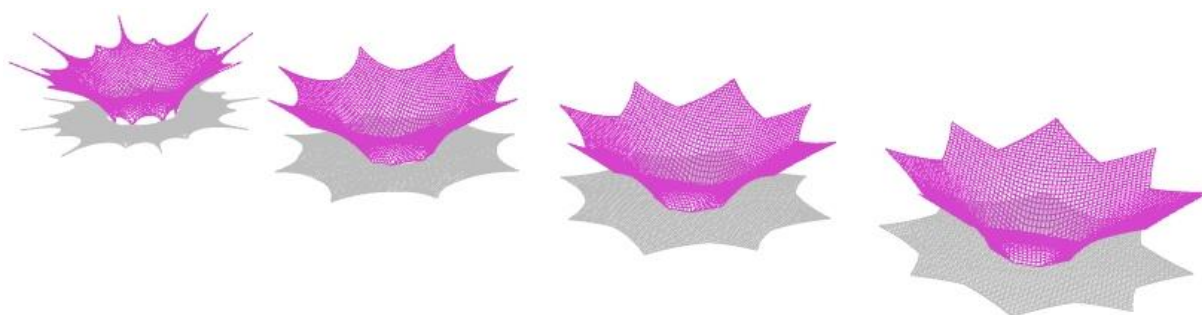
Slika 79: Model 2 u tlocrtu, mreža 16×16



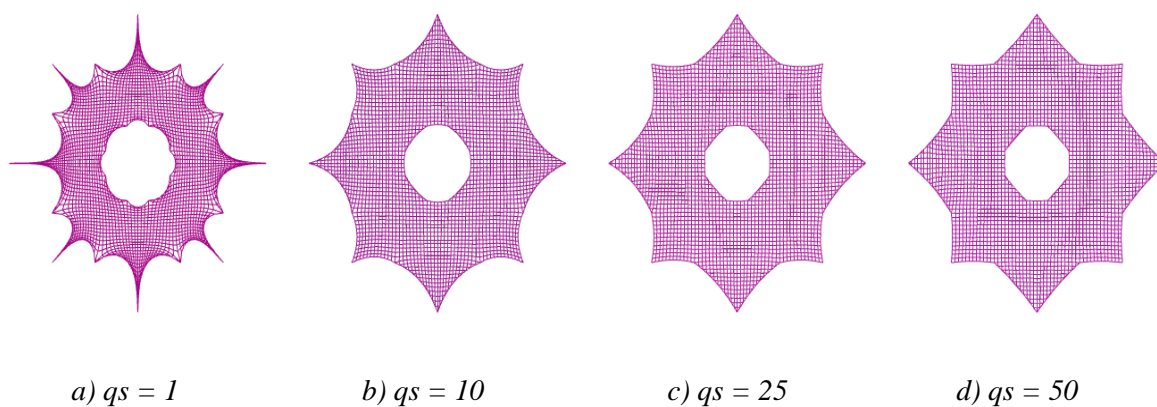
Slika 80: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 32×32



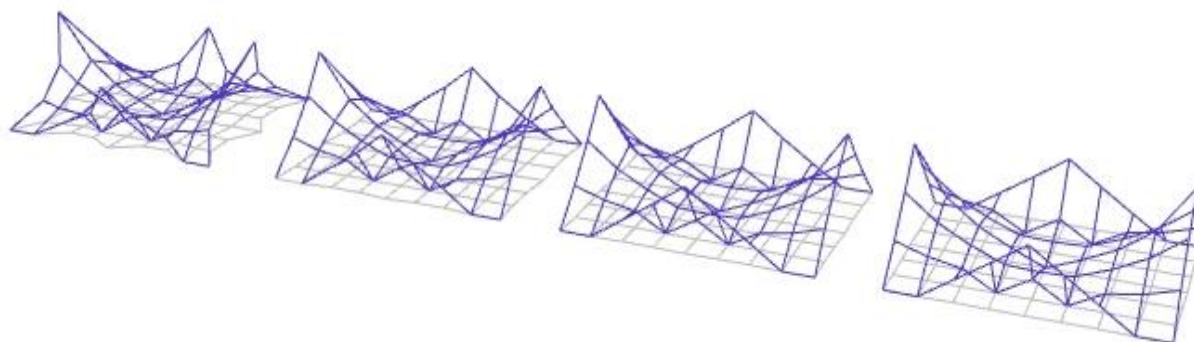
Slika 81: Model 2 u tlocrtu, mreža 32×32



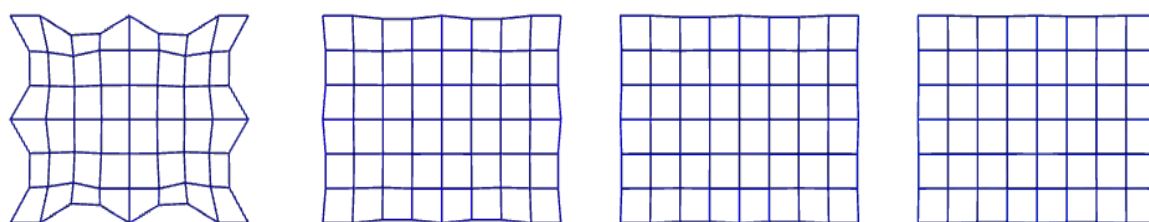
Slika 82: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 64×64



Slika 83: Model 2 u tlocrtu, mreža 64×64



Slika 84: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 8×6



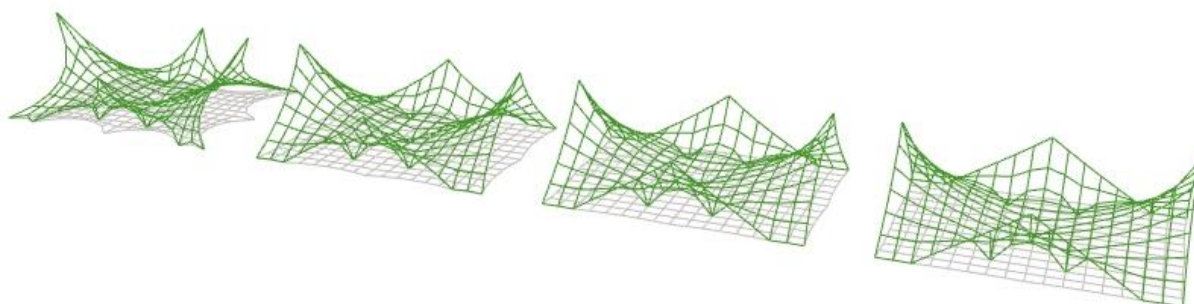
a) $qs=1$

b) $qs=10$

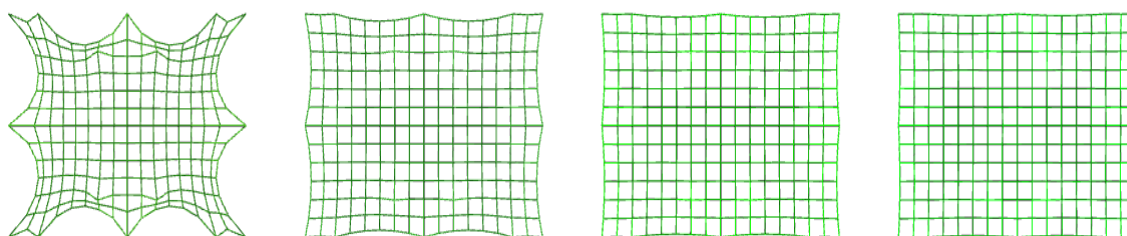
c) $qs=25$

d) $qs=50$

Slika 85: Model 3 u tlocrtu, mreža 8x6



Slika 86: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 16×12



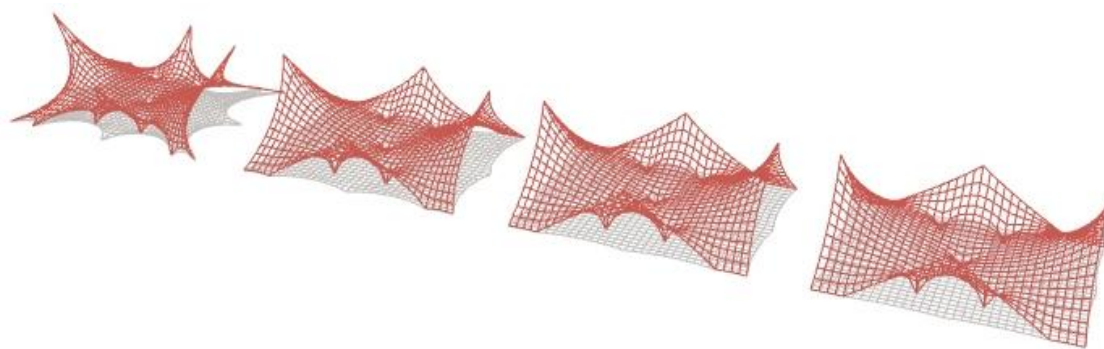
a) $qs=1$

b) $qs=10$

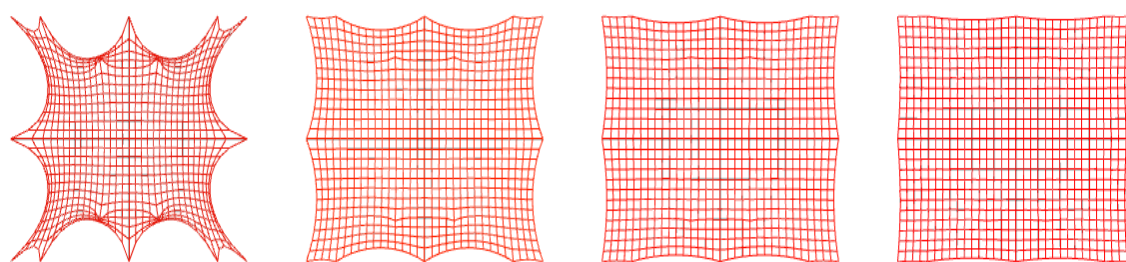
c) $qs=25$

d) $qs=50$

Slika 87: Model 3 u tlocrtu, mreža 16×12



Slika 88: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 32×24



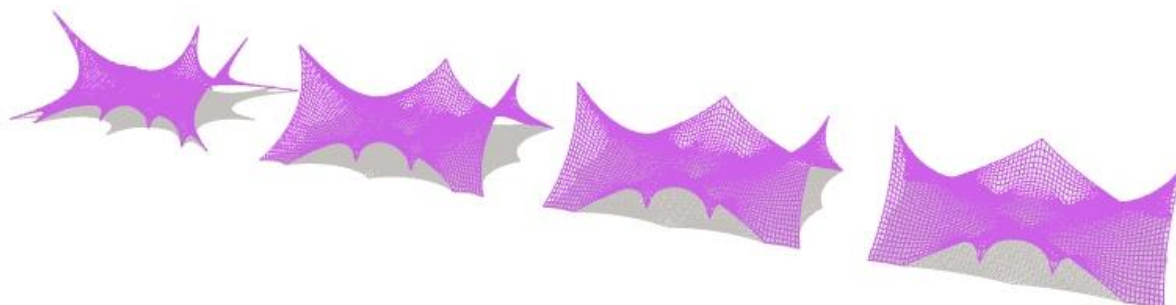
a) $qs=1$

b) $qs=10$

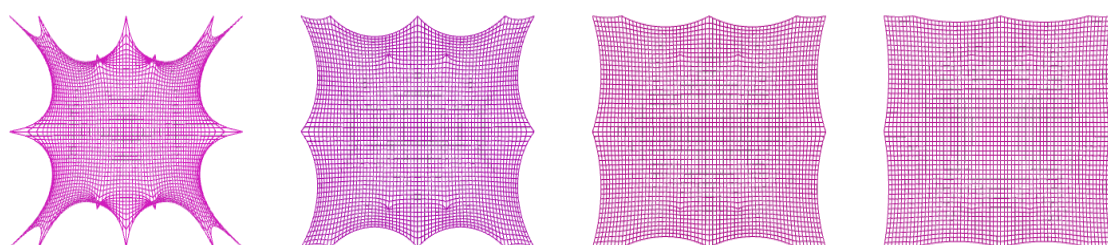
c) $qs=25$

d) $qs=50$

Slika 89: Model 3 u tlocrtu, mreža 32×64



Slika 90: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 64×48



a) $qs=1$

b) $qs=10$

c) $qs=25$

d) $qs=50$

Slika 91: Model 3 u tlocrtu, mreža 64×48

5.4. USPOREDBA FIZIČKOGA I NUMERIČKOGA MODELA

5.4.1. Općenito o izradi fizičkoga modela prednapetih konstrukcija

Fizički modeli, općenito, služe kao skalirani prikaz stvarnoga objekta (uvećani ili umanjeni). U građevinarstvu općenito, modeli su umanjeni prikaz građevine. Fizički modeli omogućuju nam vizualni prikaz modela kojeg se može ispitivati i koristiti kao simulaciju za stvarne događaje na objektu koji predstavlja u karakterističnom mjerilu. Nadalje, u građevinarstvu se model može koristiti radi boljeg uvidanja komunikacije objekta s okolišem u kojem se nalazi (također skalirano). Sveobuhvatno razumijevanje ponašanja dijelova konstrukcije i membrane je ključno za projektiranje prednapetih konstrukcija. Pri izradi takvih konstrukcija osnovno je zadovoljiti stabilnost konstrukcije i uzeti u obzir ograničenja korištenih elemenata konstrukcije. Upravo zbog toga je tijekom izrade prednapetih konstrukcija bitna izrada fizičkog modela. U izradi istoga, potrebno je pomno izabrati materijal koji će se upotrebljavati, a ključni materijal je platno koje će tvoriti prednapetu konstrukciju. Platno ne smije biti niti prekruto, ali niti preelastično. Međutim, u današnje vrijeme u većini slučajeva koriste se numerički modeli, zbog jeftinije izvedbe, ali i lakšeg ispitivanja modela s preciznijim rezultatima. Također, numerički modeli prednapetih konstrukcija baziraju se na mnogobrojnim razvijenim metodama *nalaženja oblika*.

5.4.2. Izrada fizičkoga modela

Pri izradi fizičkoga modela prednapete konstrukcije korišteni materijal mora na zadovoljavajući način zamjenjivati materijale koji se koriste pri izvedbi prednapetih konstrukcija. U izradi fizičkog modela korišteno je:

- kartonsko postolje na koje se oslanja konstrukcija modela,
- drveni štapovi jednakih promjera,
- pribadače,
- konac, tkanina
- stiropor i ljepilo.



Slika 92: Materijal korišten pri izradi fizičkoga modela

Potrebno je unaprijed zadati položaj ležajnih točaka. Ležajni prstenovi oslanjaju se o štapove koji preuzimaju opterećenje preko užeta. Obzirom da se štapovi nalaze pod kutom u odnosu na ravninu xy (ravnina kartona) (slika 94), posebnu pažnju posvećuje se uvjetima oslanjanja.



Slika 93: Temeljenje štapa

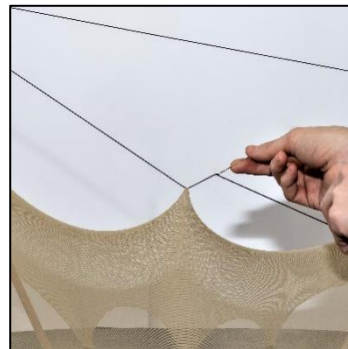


Slika 94: Položaj štapa u odnosu na ravninu xy

Konstrukcija je izrađena zatezanjem platna, a oblik poprima fiksiranjem ležajeva te podizanjem dva ležajna prstena (slika 95) i središnje ležajne točke također na visini $z \neq 0$ (slika 96). Prijenos opterećenja sa središnje ležajne točke postigao se pričvršćivanjem iste o štapove.



Slika 95: Oslanjanje prstena o štap

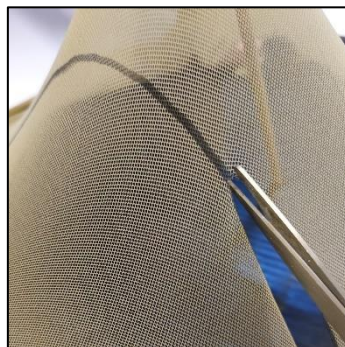


Slika 96: Podizanje središnje ležajne točke

Ostatak platna opterećenje je prenosilo preko ležajnih točaka u podlogu. U izradi se postiže potrebna napetost platna, unatoč specifičnim svojstvima istoga čija je struktura na granici membrane i guste mreže kabela. Platno je, na mjestima gdje je to bilo potrebno, rezano škarama kako bi se dobili ulazi u konstrukciju, ali i za prolazak nosivih stupova primjerice u fiksnim kružnicama na vrhu. Natezanjem tkanine te dobivanjem njene odgovarajuće napetosti stječe se znanje za isti proces u radu na numeričkim modelima.



Slika 97: Označavanje viška platna



Slika 98: Odstranjivanje viška platna

Fizičkim modelom postignut je željeni oblik prednapete konstrukcije, te je napravljeni model korišten prilikom izrade numeričkog modela i kasnije u usporedbi istih. Izradom fizičkog modela, spoznaje se kako tkanina treba izgledati kada je dovoljno napeta. Cilj je izbjeći paranje platna izazvano prevelikom vlačnom silom u konstrukciji. Izrada fizičkog modela uvelike je olakšala daljnji rad na numeričkim modelima iz točaka jedan i dva te modela usporedbe sa fizičkim modelom.



Slika 99: Prikaz fizičkoga modela

5.4.3. Izrada numeričkoga modela

Prilikom izrade numeričkoga modela koristilo se slijedećim programskim paketima: SageMath-om (programski paket bazirana na programskome jeziku Python) te Rhinoceros3D aplikacijom u koju je integriran programerski vizualni jezik Grasshopper, te Heteropterom (dodatkom za Rhino, odnosno eng. *plug-in*).

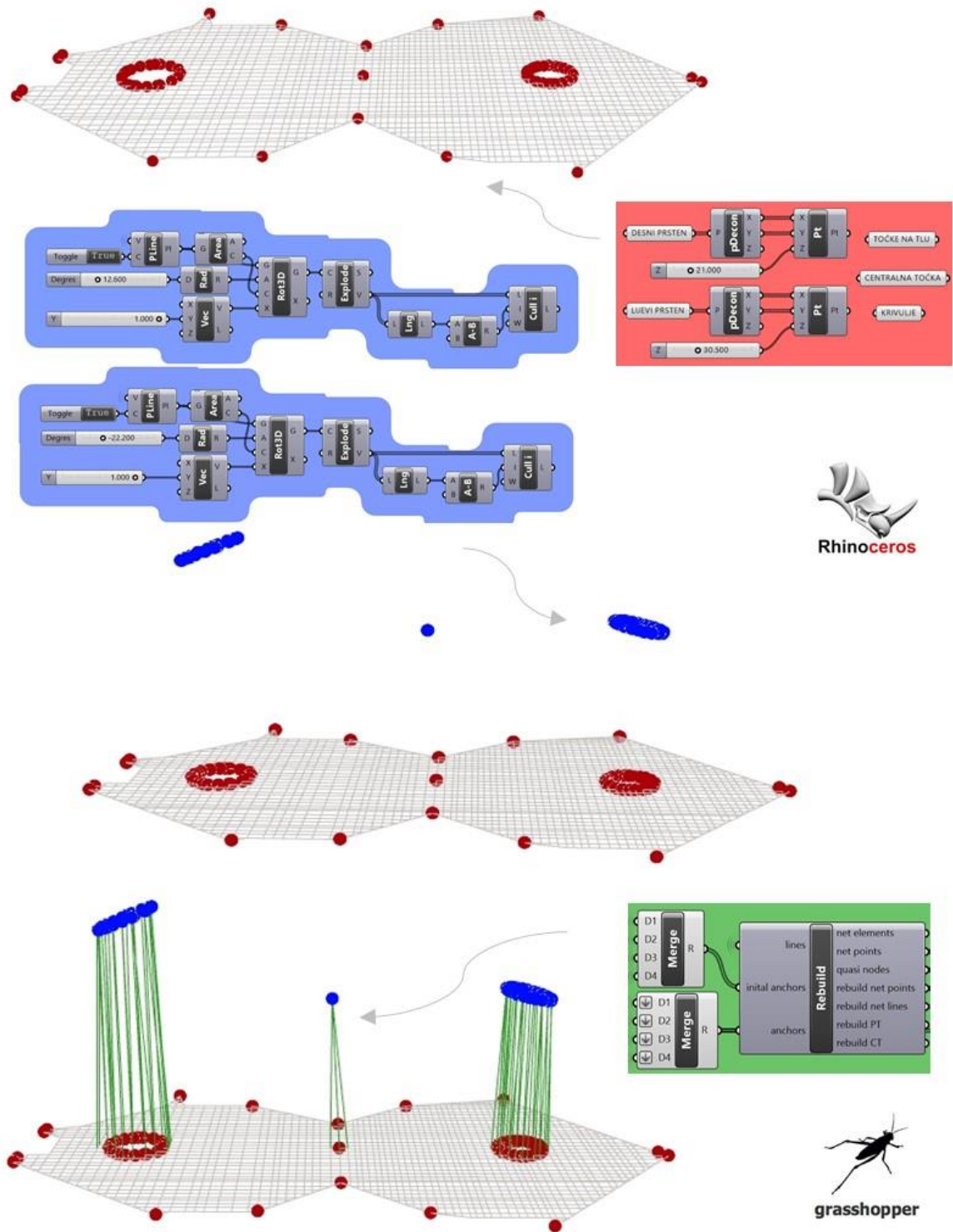
Pomoću programa Rhinoceros3D koji primarno služi kao 3D grafički program, fizikalni se model iscrtao u trodimenzionalnome koordinatnome sustavu. Sve koordinate ležajnih točaka fizičkog modela koje je bilo potrebno definirati u Rhinoceros3D-u kao rubne uvjete, dobivene su se mjerenjem fizičkog modela. Zbog ograničenosti informacija za koje Rhinoceros3D može pružiti povratnu informaciju, ali i složenosti fizičkog modela, bile su nužne određene preinake pri početku izrade numeričkoga modela. Obzirom da je fizički model izrađen od platna koje se, po strukturi, nalazi između membrane i guste mreže kabela, izrada numeričkoga modela postaje zahtjevnija.

Platno je aproksimirano gustom mrežom okomito posloženih kabela. Mjerenjem fizičkoga modela očitano je:

- 13 ležajnih točaka, čije su z koordinate jednake nuli ($z = 0$),
- dva ležajna prstena, čije su z koordinate središta veće od nule ($z > 0$) i
- središnja ležajna točka čija je z koordinata također veća od nule ($z > 0$).

Povezivanjem očitanih točaka na visini $z = 0$, definirani su rubni kabeli između kojih se definirala mreža okomito posloženih kabela. Naglasak je na što većem broju istih koje je moguće programski analizirati bez numeričkih nestabilnosti. Nakon zadovoljavanja svih kriterija ulazi se u programski vizualni jezik Grasshopper koji je integriran unutar Rhinoceros3D-a, čija je zadaća povezivanje tlocrta, mreže kabela i ležajnih točaka u jedinstvenu i povezanu cjelinu te ujedno olakšanje definiranja ulaznih podataka kao primjerice povezanosti čvorova i koordinata ležajnih točaka.

Dva ležajna prstena (otvori) predstavljaju skup ležajnih točaka određene visine $z > 0$, pri čemu se središte manjeg prstena nalazi na $z = 21,0$, a središte višeg prstena na $z = 30,5$. Bitno je naglasiti kako se prsten definira z koordinatom središta jer koordinate točaka prstena imaju promjenjivu z koordinatu, što je posljedica heterogenosti sila u elementima mreže, što uzorkuje *otklon* prstenova *od ravnine xy* (u nastavku "otklon"). Spomenuti otklon posebno se definirao u Grasshopperu. Kroz prstenove je omogućen prolazak stupova koji su nužna potpora konstrukcije. Otklon i razlika u visinama stupova doprinose, osim vizualnom dojmu konstrukcije, njenoj kompleksnosti. Između dvaju prstenova postavljena je središnja ležajna točka Kao problem javlja se pokušaj aproksimacije platna korištenog u izradi fizikalnog modela mrežom kabela definiranih u Rhinoceros3D-u. Nužno je mrežom povezati sve ležajne točke, paziti na okomitost kabela, a pritom održati pravilan izgled mreže, to jest težiti stalnom rasteru kabela i, najvažnije, odabrati dostatnu broj kabela mreže.



Slika 100: Postupak definiranja mreže kabela (Rhinoceros3D, Grasshopper)

Ulazak u SageMath, koji daje informaciju o koordinatama čvorova ravnotežne mreža kabela, zahtjeva definiranje ležajnih točaka, rubnih te unutarnjih elemenata.

Kao ulazni podaci odabiru se:

- ležajne točke te im se u Grasshopperu dodjeljuju vrijednosti z koordinata,
- rubni kabeli (sve linije koje međusobno povezuju ležajne točke ($z = 0$), kojima je određen tlocrtni oblik mreže kabela),
- unutarnji kabeli.

U SageMath-u se koristio izvorni programski kod kojim su izlazni podatci iz Grasshopper-a ulazni parametri te se pozivom funkcije “FDM = (nds,els,supps,qs)” određuje ravnotežni položaj mreže prednapetih kabela. [26, 27]

```
def mDmDf (ndof, doft, nodes, elems, qs) :
    mD = zero_matrix (RDF, ndof, ndof)
    mDf = zero_matrix (RDF, ndof, 3)
    for j in xrange (len (elems)) :
        eni = elems[j]
        i0, i1 = element_DsOF (eni, doft)
        if i0 != -1 :
            mD[i0, i0] += qs[j]
            if i1 != -1 :
                mD[i0, i1] -= qs[j]
            else :
                nc = nodes[eni[1]]
                mDf[i0, 0] -= qs[j] * nc[0]
                mDf[i0, 1] -= qs[j] * nc[1]
                mDf[i0, 2] -= qs[j] * nc[2]
        if i1 != -1 :
            mD[i1, i1] += qs[j]
            if i0 != -1 :
                mD[i1, i0] -= qs[j]
            else :
                nc = nodes[eni[0]]
                mDf[i1, 0] -= qs[j] * nc[0]
                mDf[i1, 1] -= qs[j] * nc[1]
                mDf[i1, 2] -= qs[j] * nc[2]
    return mD, mDf
```

Naredbom „for el in nc: print list(el)“ dobiva se lista koordinata svih čvorova ravnotežne mreže. Potom se dobivene koordinate čvorova u ravnoteži učitava u Grasshopperu te se naredbom „bake“ (hrv. *prži*) omogućuje postavljanje konačnog oblika konstrukcije s odgovarajućom gustoćom sila u vizualnome obliku u Rhinoceros3D-u kao 3D model. Konačni oblik prednapete konstrukcije koristi se prilikom vizualne usporedbe fizikalnoga i numeričkoga modela.

5.4.4. Usporedba fizičkoga i numeričkoga modela

Preklopom fizičkoga i numeričkoga modela vidljive su određene nepodudarnosti. Prilikom izrade fizičkoga modela, kod otvora ispod višeg ležajnoga prstena, javio se problem značajnijega viška tkanine. Na spomenutom mjestu je izrezan višak opuštene tkanine čime je stvoren veliki otvor (Slika 99). Alternativno rješenje bilo bi udaljavanje ležajnih točaka od središta ležajnoga prstena ili povećanje gustoće sila na tom dijelu modela (kao što je učinjeno kod nižega ležajnoga prstena). [28]



Slika 101: Preklop fizičkoga i numeričkoga modela [28]

6. ZAKLJUČAK

Prednapete vlačne konstrukcije uvelike odstupaju od konvencionalnih građevina i ističu se specifičnošću oblikovanja. Naime, za razliku od uobičajenih konstrukcija gdje su oblik i dimenzije unaprijed poznati, kod prednapetih se konstrukcija najprije mora, nekom od metoda nalaženja oblika, dobiti oblik ravnotežne konstrukcije. Sve ravnotežne mreže u ovome radu dobivene su metodom *gustoća sila*. Razvili su je Linkwitz i Schek sredinom sedamdesetih godina prošloga stoljeća na zahtjev Frei Otta za potrebe projektiranja Olimpijskog stadiona u Münchenu. Osnovna je ideja linearizacija matematičkog problema uvođenjem gustoće sila kao supstitucije.

Kako bi se utvrdilo odstupanje ravnotežne mreže od minimalne plohe, u ovom je radu provedena ocjena sličnosti Scherkove minimalne plohe i ravnotežnih prednapetih mreža (općih i minimalnih). Ravnotežne mreže dobivene su na dva načina: zadavanjem gustoća sila unutarnjih elemenata i zadavanjem željenih jediničnih sila unutarnjih elemenata, pri čemu je metoda gustoća sila primijenjena iteracijski.

Tablica 2: Usporedba promjene razlike volumena između Scherkove minimalne plohe i prednapete mreže kabela u ovisnosti o broju čvorova

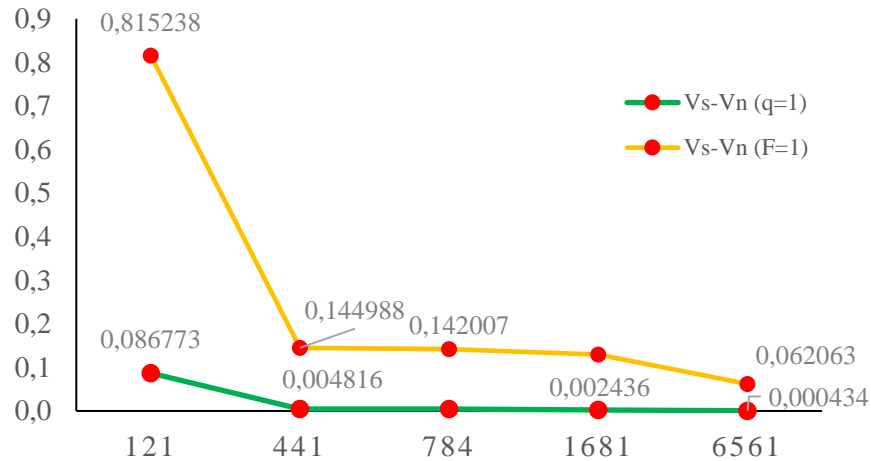
Broj čvorova	Razlika volumena ($q_s = 1,0$)	Broj čvorova	Razlika volumena ($F_s = 1,0$)
121	0,086773	121	0,815238
441	0,004816	441	0,144988
1681	0,002436	784	0,142007
6561	0,000434	6561	0,062063

$q_s = 1,0$ Jedinične vrijednosti gustoće sile
 $F_s = 1,0$ Jedinične vrijednosti unutarnjih sila

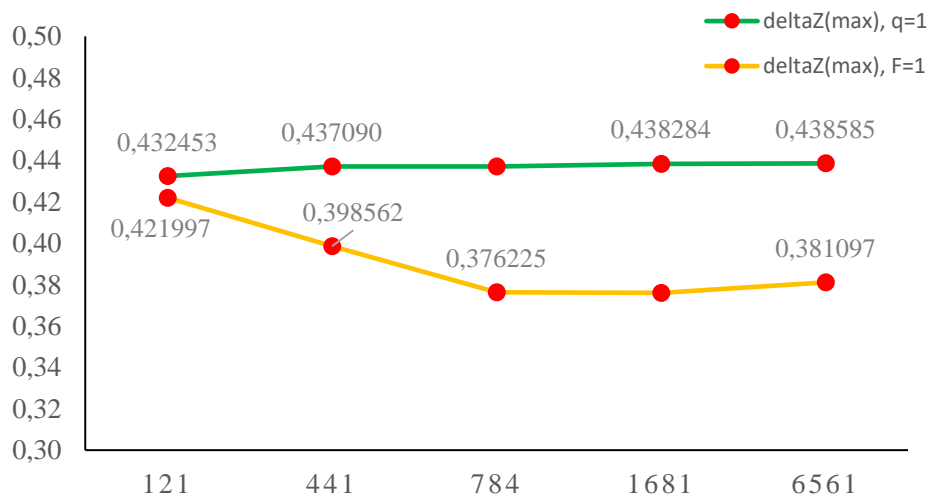
U Tablici 2 prikazane su promjene razlike volumena u ovisnosti o broju čvorova. Razlika volumena određenog Scherkovom minimalnom plohom i plohom kojom se aproksimiraju ravnoteže mreže smanjuje se s povećanjem broja čvorova. Rezultati ukazuju kako je Scherkovu minimalnu plohu točnije opisuje ravnotežna mreža čija je gustoća sila svih elemenata jedinična, u usporedbi s ravnotežnom mrežom čije su vrijednosti unutarnjih sila svih elemenata jedinične. Bitno je ukazati na strmi nagib pravca (Dijagram 1) koji prikazuje naglo smanjenje razlike volumena ovisno o promjeni broja čvorova. Kako broj čvorova raste, nagib pravca pada. U određenom trenutku, promjene nagiba su minimalne što upućuje na zadovoljavajuću aproksimaciju Scherkove plohe. Scherkovu plohu nije moguće potpuno prikazati mrežom. Hipotetski, kada bi postojao beskonačan broj čvorova, bilo bi moguće postići Scherkovu minimalnu plohu, no u tom slučaju govorilo bi se o membrani, a ne o mreži prednapetih

kabela. Obzirom da navedeno nije moguće, zadovoljava dovoljno bliska aproksimacija (dovoljan broj čvorova).

Dijagram 9: Usporedba razlike volumena ovisno o broju čvorova



Dijagram 10: Usporedba maksimalnog odstupanja z koordinate ovisno o broju čvorova



Promjene maksimalnih vertikalnih udaljenosti Scherkove plohe i mreže prikazane su grafički (Dijagram 10). Pri aproksimaciji općom mrežom ($q_s = 1,0$) vidljivo je kako vertikalna udaljenost stagnira nakon određenog broja iteracija (jer je nemoguće anulirati pogrešku pri aproksimaciji plohe općom mrežom), dok je kod minimalne mreže vidljiv trend silaska pravca u grafu, odnosno udaljenost plohe i mreže se smanjuje s povećanjem broja čvorova mreže.

U nastavku rada u centru je pažnje usporedba i analiza ravnotežnih mreža dobivenih povećavanjem broja kabela i povećanjem gustoće sila na proizvoljno osmišljenim modelima kako bi se pokazalo ponašanje

prednapetih vlačnih konstrukcija (pri čemu je broj čvorova ostajao isti). Cilj je ispitati do koje je granice moguće proglašivati mrežu kabela, a da se pritom ne naruši numerička stabilnost.

Naposljetku, kao završni dio rada opisana je važnost fizičkih modela u građevini. Dan je konkretan opis izrade fizičkoga modela konstrukcije osmišljenog za javnu uporabu, koju su autori ovoga rada osmislili i napravili samostalno, te usporedbe s numeričkim modelom napravljenim s ulaznim podacima (položajem ležajnih čvorova) mjerenim na fizičkom modelu.

7. ZAHVALE

Zahvaljujemo se mentorici doc. dr. sc. Petri Gidak na bezrezervnoj pomoći u izradi ključnih dijelova rada, na savjesnom i stručnom vođenju kroz proces te strpljenju i potpori.

Također zahvaljujemo prof. dr. sc. Krešimiru Freslu na stručnim savjetima i asistentici Elizabeti Šamec, dipl. ing. aedif. na pomoći i suradnji.

Dodatno se zahvaljujemo kolegama koji su nam pružali moralnu potporu te prijateljima na nesebičnom razumijevanju i podršci.

Konačno, želimo se zahvaliti i svojim obiteljima na potpori i razumijevanju tijekom izrade ovoga rada.

8. POPIS SLIKA

Slika 1: Olimpijski kompleks, München, Njemačka [6]	2
Slika 2: Fizički model Olimpijskog stadiona, München, Njemačka [8].....	3
Slika 3: Katenoid i helikod – rješenja diferencijalne jednadžbe minimalne plohe [9, 10]	5
Slika 4: Fizički model – minimalna ploha dobivena kao opna od sapunice [13].....	7
Slika 5: Fizički model krovišta Olimpijskog stadiona u Münchenu [14].....	7
Slika 6: Khan Shatyry zabavni centar, Nur – Sultan, Kazahstan, 2010. – najviša prednapeta mreža kabela na svijetu (150 m) [15].....	8
Slika 7: Dio mreže kabela – Izdvojen slobodni čvor mreže kabela [14].....	10
Slika 8: Detalj mreže [19]	14
Slika 9: Ležajni čvor [20].....	15
Slika 10: Programska podrška	16
Slika 11: Scherkova minimalna ploha u širem području [25]	18
Slika 12: Scherkova minimalna ploha $f_{x,y} = \ln(\cos x / \cos y)$ na području $x \in 0,1, y \in 0,1$	19
Slika 13: Mreža 1 (lijevo) i indeksi čvorova Mreže 1 (desno)	19
Slika 14: Grasshopper, prvi korak u formiranju mreže	20
Slika 15: Rhinoceros3D & Grasshopper; postavljanje rubnih uvjeta.....	21
Slika 16: Ravnotežni oblik Mreže 1	22
Slika 17: Mreža 1: Odstupanje z koordinata, preklopljene deset puta skalirana Scherkova ploha i ravnotežni oblik Mreže 1 (desno).....	23
Slika 18: Maksimalno odstupanje z koordinata.....	24
Slika 19: Minimalno odstupanje z koordinata	25
Slika 20: Postupak dobivanja skalirane plohe (Δz) i presječnih krivulja skalirane plohe i ravnina xz i yz	26
Slika 21: Postupak mjerenja volumena između dvaju ploha.....	26
Slika 22: Mreža 2	27
Slika 24: Mreža 4	27
Slika 23: Mreža 3	27
Slika 25: Ravnotežni oblik Mreže 1	28
Slika 26: Ravnotežni oblik Mreže 3	28
Slika 27: Ravnotežni oblik Mreže 4	28
Slika 28: Mreža 2: Odstupanje z koordinata	29
Slika 29: Mreža 2: Maksimalno odstupanje z koordinata	30
Slika 30: Mreža 2: Minimalno odstupanje z koordinata.....	31
Slika 31: Mreža 3: Odstupanje z koordinata	32
Slika 32: Mreža 3: Maksimalno odstupanje z koordinata	33

Slika 33: Mreža 3: Minimalno odstupanje z koordinata.....	34
Slika 34: Mreža 4: Odstupanje z koordinata	35
Slika 35: Mreža 4: Maksimalno odstupanje z koordinata	36
Slika 36: Mreža 4: Minimalno odstupanje z koordinata.....	37
Slika 37: Usporedba ravnotežnog oblika četiriju aproksimacija	38
Slika 38: Usporedba odstupanja z koordinata četiriju aproksimacija.....	38
Slika 39: Razvoj plohe koja aproksimira mrežu – od poligonalnih ravnina koje aproksimiraju Mrežu 1 do glatke plohe koja aproksimira Mrežu 4 i koja minimalno odstupa od minimalne plohe.....	39
Slika 40: Usporedba odstupanja z koordinata (Δz_{\max}) na četirima aproksimacijama	40
Slika 41: Presječnica skalirane Scherkove minimalne plohe i: yz ravnine (crveno); xz ravnine (plavo)	40
Slika 42: Ravnotežni oblik Mreže 1	42
Slika 43: Ravnotežni oblik Mreže 2	42
Slika 44: Ravnotežni oblik Mreže 3	43
Slika 45: Ravnotežni oblik Mreže 4	43
Slika 46: Mreža 1 – Odstupanje z koordinata	44
Slika 47: Mreža 1- Maksimalno odstupanje z koordinata	45
Slika 48: Mreža 1- Minimalno odstupanje z koordinata	46
Slika 49: Mreža 2 – Odstupanje z koordinate	47
Slika 50: Mreža 2- Maksimalno odstupanje z koordinata	48
Slika 51: Mreža 2- Minimalno odstupanje z koordinata	49
Slike 52: Mreža 3 – Odstupanje z koordinata	50
Slike 53: Mreža 3 – Maksimalno odstupanje z koordinata	51
Slike 54: Mreža 3 – Minimalno odstupanje z koordinata.....	52
Slike 55: Mreža 4 – Odstupanje z koordinata	53
Slike 56: Mreža 4 – Maksimalno odstupanje z koordinata	54
Slike 57: Mreža 4 – Minimalno odstupanje z koordinata.....	55
Slika 58: Bazna najrjeđa mreža	58
Slika 59: Unos ležajnih čvorova.....	58
Slika 60: Unos unutarnjih i rubnih kabela.....	58
Slika 61: Postavljanje domene i odabir gustoće sila za unutarnje i rubne elemente	59
Slika 62: Izlazni podatci za SageMath	59
Slika 63: Postavljanje liste dobivenih koordinata u Grasshopper	60
Slika 65: Tloprt, Mreža 1.....	60
Slika 64: Aksonometrijski prikaz, Mreža 1	60
Slika 66: Povećanje gustoće sila Mreže 1, tloprt.....	61
Slika 67: Povećanje gustoće sila Mreže 1, aksonometrijski prikaz.....	61

Slika 68: Mreža 2, aksonometrijski prikaz.....	63
Slika 69: Mreža 2, tlocrt.....	63
Slika 70: Mreža 3, aksonometrijski prikaz.....	64
Slika 71: Mreža 3, tlocrt.....	64
Slika 72: Mreža 4, aksonometrijski prikaz.....	65
Slika 73: Mreža 4, tlocrt.....	65
Slika 74: Presjek Mreže 1 i Mreže 4 elemenata pri gustoći svih elemenata $q_s=1$	66
Slika 75: Presjek Mreže 1 i Mreže 4 elemenata pri gustoći svih elemenata $q_s=50$	66
Slika 76: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 8×8	67
Slika 78: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 16×16	67
Slika 77: Model 2 u tlocrtu, mreža 8×8	67
Slika 79: Model 2 u tlocrtu, mreža 16×16	67
Slika 80: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 32×32	68
Slika 81: Model 2 u tlocrtu, mreža 32×32	68
Slika 82: Model 2 u aksonometrijskom prikazu, mreža 64×64	68
Slika 83: Model 2 u tlocrtu, mreža 64×64	68
Slika 84: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 8×6	69
Slika 85: Model 3 u tlocrtu, mreža 8×6	69
Slika 86: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 16×12	69
Slika 87: Model 3 u tlocrtu, mreža 16×12	69
Slika 88: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 32×24	70
Slika 89: Model 3 u tlocrtu, mreža 32×64	70
Slika 90: Model 3 u aksonometrijskom prikazu, mreža 64×48	70
Slika 91: Model 3 u tlocrtu, mreža 64×48	70
Slika 92: Materijal korišten pri izradi fizičkoga modela.....	71
Slika 94: Položaj štapa u odnosu na ravninu xy.....	72
Slika 93: Temeljenje štapa.....	72
Slika 96: Podizanje središnje ležajne točke.....	72
Slika 95: Oslanjavanje prstena o štap.....	72
Slika 97: Označavanje viška platna.....	73
Slika 98: Odstranjivanje viška platna.....	73
Slika 99: Prikaz fizičkoga modela.....	73
Slika 100: Postupak definiranja mreže kabela (Rhinoceros3D, Grasshopper).....	75
Slika 101: Preklap fizičkoga i numeričkoga modela [28].....	77

9. POPIS TABLICA

Tablica 1: Povećanje gustoće sila Mreže 1, tlocrt	61
Tablica 2: Usporedba promjene razlike volumena u ovisnosti o broju čvorova (jedinične vrijednosti gustoće sile lijevo, jedinične vrijednosti unutarnjih sila desno)	78

10. POPIS DIJAGRAMA

Dijagram 1: Odnos razlike volumena i broja čvorova.....	39
Dijagram 2: Odnos Δz_{\max} i broja čvorova	40
Dijagram 4: Odnos Δz_{\max} i broja čvorova	56
Dijagram 3: Odnos razlike volumena i broja čvorova.....	56
Dijagram 5: Duljine elemenata – Mreža 1	62
Dijagram 6: Duljine elemenata – Mreža 2	63
Dijagram 7: Duljine elemenata – Mreža 3	64
Dijagram 8: Duljine elemenata – Mreža 4	65
Dijagram 9: Usporedba razlike volumena ovisno o broju čvorova	79
Dijagram 10: Usporedba maksimalnog odstupanja z koordinate ovisno o broju čvorova	79

11. POPIS LITERATURE

- [1] William F. Baker, Lauren L. Beghini, Arkadiusz Mazurek, Juan Carrion and Alessandro Beghini (2015). Structural Innovation: Combining Classic Theories with New Technologies, *Engineering Journal*, American Institute of Steel Construction, Vol. 52, pp. 203-217.
- [2] Vassart, N., Motro, R.: Multiparametered formfinding method: Application to tensegrity systems, *International Journal of Space Structures*, 14 (1999), 2, pp. 147-154.
- [3] Maurin, B., Motro, R.: The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes, *Engineering Structures*, 20 (1998) 8, pp. 712-719.
- [4] Berger, H.: *Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Tensile Architecture*, 2005.
- [5] Šamec, E., Fresl, K.: Ocjena primjenjivosti bezmrežnih postupaka u oblikovanju prednapetih gipkih konstrukcija, 1. Simpozij doktorskog studija građevinarstva, Lakušić, Stjepan (ur.), Zagreb, Građevinski fakultet u Zagrebu, pp. 159-166, 2015.
- [6] <https://bobedre.dk/arkitektur/paa-trods-af-tragedier-historiens-10-smukkeste-ol-bygninger?fbclid=IwAR1EI7Ljpn4hRIf3tN6ZGJop1JglJ876IWlF3Zmjbk5q4CbYpkMIpKNz2M>. (Pristupljeno: 07. siječnja 2021.)
- [7] W. Nerdinger , Ed., Frei Otto, *Complete Works - Lightweight Construction, Natural Design*, Birkhauser, Basel, 2005.
- [8] Whitehead, R.: *Model Behavior: The Evolving Use of Physical Prototypes in Structural Shell Design, 1959-1974*, 2016.
https://lib.dr.iastate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1110&context=arch_conf. (Pristupljeno: 7. studenoga 2020.)
- [9] <http://xahlee.info/surface/catenoid/catenoid.html>. (Pristupljeno: 22. veljače 2021.)
- [10] <https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Helicoids>. (Pristupljeno 22. veljače 2021)
- [11] Šamec, E., Baniček, M.: *Posebnosti projektiranja membranskih konstrukcija*, Zagreb, 2017.
- [12] Veenendaal, D., Block, P.: An overview and comparison of structural form-finding methods for general networks; *International Journal of Solids and Structures*, 49 (2012) 26, pp. 3741-3753.
- [13] Zexin, S., Mei, H.: *Robotic Form-Finding and Construction Based on the Architectural Projection Logic*, 216 (2017).
- [14] Gidak, P.: *Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, magistarski rad, Zagreb, 2011.

- [15] <https://www.dezeen.com/2010/07/06/the-khan-shatyr-entertainment-centre-by-foster-partners/?fbclid=IwAR29QVBFcbnVKFMophZxWZNYgiQrraKuRasCKr1QxKacxvYg2S8mEVu9UGo>. (Pristupljeno: 15. siječnja 2021.)
- [16] Schek, H. J.: The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3 (1): 115–134, 1974.
- [17] Dvornik, J., Lazarević, D.: Fractals and Formfinding – Magic With Real Numbers, *Engineering Modelling*, 16 (2003) 1-2, pp. 1-11.
- [18] Linkwitz, K., Schek, H. J.: Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen, *Ingenieur-Archiv*, 40 (1971), pp. 145-158.
- [19] Fresl, K.; *Građevna statika 2, Predavanja, Zagreb, 2017., p. 123.* <http://grad.hr/nastava/gS/gS2/gS2.pdf>. (Pristupljeno: 18. prosinca 2020.)
- [20] https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/763566/frei-otto-premio-pritzker-2015?ad_medium=gallery&fbclid=IwAR3_JqALOpQt9LZofCcUQjIz779GA0jWs7e2QKyrgybZXUu_d3CMIAjOtaHc. (Pristupljeno: 1. ožujka 2021.)
- [21] R. McNeel & Assoc.: Rhinoceros 3D, [Rhino - Rhinoceros 3D \(rhino3d.com\)](http://rhino3d.com)
- [22] Bahrami, A.: Heteroptera. <https://www.food4rhino.com/en/app/heteroptera>
- [23] The Sage Developers: SageMath, the Sage Mathematics Software System, <https://www.sagemath.org/>
- [24] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Sauvigny, F.: *Minimal Surfaces I*, Springer, Heidelberg, 1992.
- [25] <https://mathcurve.com/surfaces.gb/scherk/scherk.shtml?fbclid=IwAR0attLr6wHCmS4w9cDDmXtH5VqvLS2n5dXzCBNyxJhyE3XijD4TOGVQnd4>. (Pristupljeno: 13. travnja 2021.)
- [26] Gidak, P., Fresl, K.: Programming the Force Density Method, IASSAPCS 2012, From spatial structures to space structures, (ed. Seung Deog, K.), Seoul, South Korea, 2012, p. 197 (abstract, full paper on CD).
- [27] Fresl, K., Gidak, P., Vrančić, R.: Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi, *Građevinar*, 2013.
- [28] Vukadin, J., Vidović, D., Vuco, J., Šamec, E., Gidak, P., Fresl, K.: Learning by building: physical vs. numerical form – finding, *Zbornik radova, International Conference on Spatial Structures, Surrey, 2020/21.* (U procesu objave.)

12. SAŽETAK

Autori: Jelena Vukadin, Dominik Vidović, Josip Vuco

Naslov: Ocjena sličnosti ravnotežnih oblika vlačnih konstrukcija – Ravnotežna ploha naspram ravnotežne mreže

U radu je opisana upotreba metode gustoća sila pomoću koje se traži ravnotežni oblik mreže, s ciljem analize sličnosti i ponašanja laganih vlačnih konstrukcija. Rad je tematski odvojen na tri cijeline. Usporedba ravnotežne mreže sa Scherkovom minimalnom plohom, gdje se nastoji pokazati mogućnost maksimalnog približavanja mreže plohi. Promatrane su ravnotežne mreže dobivene zadavanjem gustoća sila unutarnjih elemenata te ravnotežne mreže čiji unutarnji elementi imaju jediničnu vrijednost sile. U drugom dijelu rada teži se dobivanju zadovoljavajućeg oblika ravnotežne mreže progušćivanjem mreže kabela i povećanjem gustoće sila, s ciljem smanjenja razlike između elemenata pojedine mreže, ali i pokazati do koje je granice moguće vršiti progušćivanje bez pojave numeričke nepravilnosti (mogućnost dijeljenja nulom u izrazu za gustoću sila). Na koncu rada opisana je važnost i izrada fizičkoga modela te usporedba fizičkoga i numeričkoga modela.

Ključne riječi: vlačne konstrukcije, metoda gustoća sila, traženje oblika, minimalna ploha, fizički model, numerički model

13. SUMMARY

Authors: Jelena Vukadin, Dominik Vidović, Josip Vuco

Title: Similarity Evaluation of Equilibrium Forms of Tensile Structures – Equilibrium Surface Versus Equilibrium Network

In this paper we describe the use of the force density method for equilibrium form finding, with the goal of analyzing similarities and performance of light tensile constructions. The paper is divided into three parts. Comparing equilibrium networks with the Scherk minimal surface, where the aim is to demonstrate the possibility of maximum proximity of network and surface. Observed networks are obtained by setting force density of internal elements and equilibrium networks determined by unit value force of internal elements. The second part is aimed at defining a satisfactory form of balancing network by increasing the density of the cable network and force density, whereby reducing differences between elements of a particular network. It is also aimed at demonstrating the limits of increasing the density without creating numerical irregularities (possibility of dividing by zero in the phrase for *force density*). The last part describes the importance and the process of producing a physical model, and lastly it provides a comparison of the physical and numerical model.

Keywords: tensile construction, minimal surface, force density method, form finding, physical numerical model