

*Grafički postupci rješavanja  
ravninskih rešetkastih nosača*

**ENG: Graphostatics of planar trusses**

**Ines Romić**

**0082048019**

**Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl**

**13.9.2016.**

**Građevinski fakultet Zagreb**

# **Sadržaj**

|   |    |
|---|----|
| <b>1. UVOD</b> .....  | 2  |
| <b>2. Ravninski rešetkasti nosači</b> .....   | 3  |
| 2.1. Karakteristike statički određenih ravninskih rešetkastih nosača .....          | 4  |
| 2.2. Elementarna pravila koja vrijede općenito za ravninske rešetkaste nosače ..... | 8  |
| <b>3. Grafički postupci određivanja sila u štapovima</b> .....                      | 9  |
| 3.1. Metoda čvorova.....  | 9  |
| 3.2. Maxwell-Cremonin plan sila .....   | 10 |
| 3.3. Metode presjeka.....   | 21 |
| 3.4. Culmannov postupak.....  | 22 |
| <b>4. Grafičko određivanje pomaka čvorova</b> .....                                 | 24 |
| 4.1. Williotov plan pomaka.....   | 24 |
| 4.2. Pomaci konzolnih rešetkastih nosača.....                                       | 27 |
| 4.3. Pomaci grednih rešetkastih nosača.....   | 28 |
| <b>5. Primjeri</b> .....  | 31 |
| 5.1. Primjer 1. ....  | 31 |
| 5.1.1. Maxwell-Cremonin plan sila .....   | 32 |
| 5.1.2. Culmannov postupak .....   | 34 |
| 5.1.3. Williotov plan pomaka .....  | 36 |
| 5.2. Primjer 2. ....  | 39 |
| 5.2.1. Maxwell-Cremonin plan sila .....   | 40 |
| 5.2.2. Culmannov postupak .....   | 42 |
| 5.2.3. Williotov plan pomaka .....  | 44 |
| <b>6. Zaključak</b> .....   | 48 |
| <b>7. LITERATURA</b> .....  | 49 |

# 1. UVOD

Tema završnog rada su grafički postupci rješavanja ravninskih rešetkastih nosača, odnosno grafičko određivanje sila u štapovima statički određenih rešetkastog nosača i crtanje pomaka čvorova navedenog nosača.

Grafičke metode vezane na rešetkaste nosače u ravnini koje ćemo obraditi u ovom radu su: metode čvorova, Maxwell-Cremonin plan sila, metode presjeka i Culmannov postupak. Što se tiče pomaka čvorova rešetkastog nosača, pojasnit ćemo grafički postupak koji je u literaturi poznat kao Williotov plan pomaka.

U prvom dijelu rada ćemo teorijski odrediti rešetkaste nosače i osnovna pravila na kojima se temelje grafički postupci za određivanje sila u štapovima i pomaka čvorova.

U drugom dijelu rada ćemo, na dva primjera, prikazati metode i postupke koje smo obradili. Primjeri će biti riješeni Maxwell-Cremonin planom sila, a dobivena rješenja ćemo provjeriti Culmannovim postupkom. Na kraju ćemo nacrtati Williotov plan pomaka iz kojeg ćemo očitati pomake čvorova rešetkastog nosača.

## 2. Ravninski rešetkasti nosači

Rešetkaste konstrukcije, koje mogu biti prostorne i ravninske, važne su inženjerske nosive konstrukcije. Osnovni nosivi elementi ovih konstrukcija su ravni štapovi koji su na krajevima zglobno povezani u čvorove. Vlastita težina štapova se u proračunu zanemaruje ili se raspoređuje kao opterećenje na čvorove. Vanjsko opterećenje rešetkaste konstrukcije preuzima se samo preko čvorova. Prema tome, svaki štap rešetkaste konstrukcije može biti opterećen na svojim krajevima samo silom veze štapa i čvora. Drugim riječima, svaki štap je aksijalno opterećen. Dakle, proračun rešetkaste konstrukcije se svodi na određivanje sila u štapovima konstrukcije.

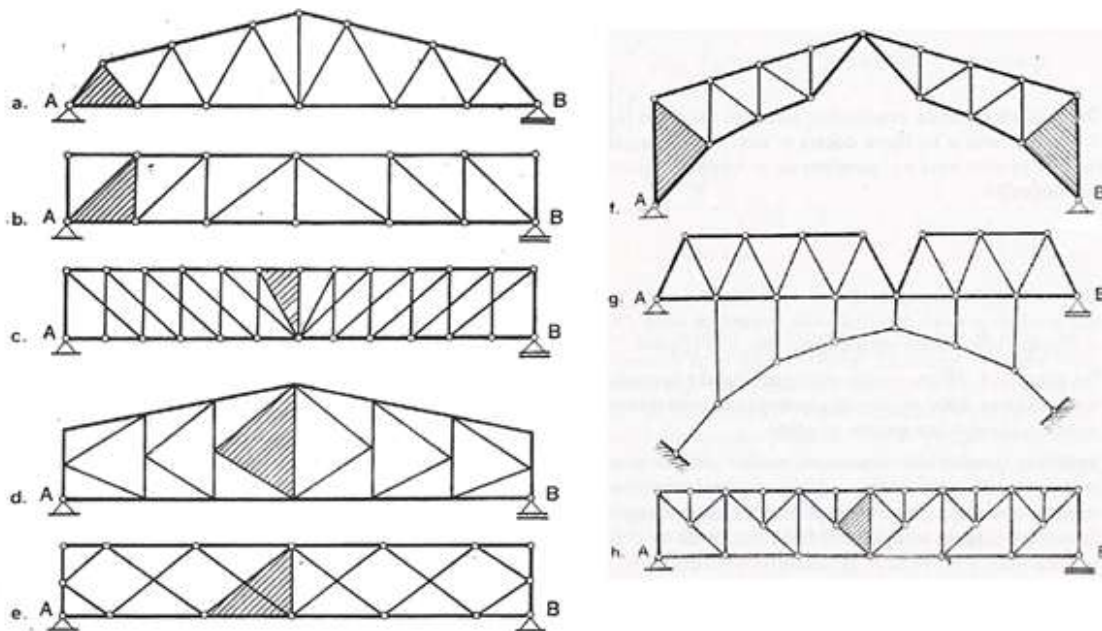
Prostorne rešetkaste konstrukcije su one kod kojih štapovi ne leže u istoj ravnini, već su smješteni u prostoru. Također, vanjske sile koje djeluju u čvorovima imaju opću orijentaciju.

Ovdje ćemo obraditi samo ravninske rešetkaste konstrukcije i to statički određene. Slike u ovom poglavlju preuzete su iz udžbenika [1]. Ravninski rešetkasti nosači su ravninske rešetkaste konstrukcije kod kojih svi štapovi i sve vanjske sile leže u istoj ravnini. Kod statički određenih rešetkastih nosača moguće je odrediti sile u svim štapovima za bilo koje opterećenje nosača pomoću jednadžbi ravnoteže statike krutog tijela.

Za određivanje sila u štapovima nosača postoje analitički i grafički postupci. Ovdje ćemo se koristiti samo grafičkim postupcima određivanja sila u štapovima statički određenih ravninskih rešetkastih nosača.

## 2.1. Karakteristike statički određenih ravninskih rešetkastih nosača

Rešetkasti nosači su rešetkaste konstrukcije sastavljene od rešetkastih diskova. Najjednostavnija struktura rešetkastog diska sastavljena od štapova je trokut. Trokut je jedina kruta figura koja ne mijenja svoj oblik pod bilo kojim opterećenjem u čvorovima.



Slika 1.

Na slici 1. prikazano je nekoliko rešetkastih nosača sa naznačenim karakterističnim trokutom (šrafirani trokut). Svi nosači se sastoje od jednog diska, osim nosača na slikama 1.f. i 1.g. koji imaju više od jednog diska.

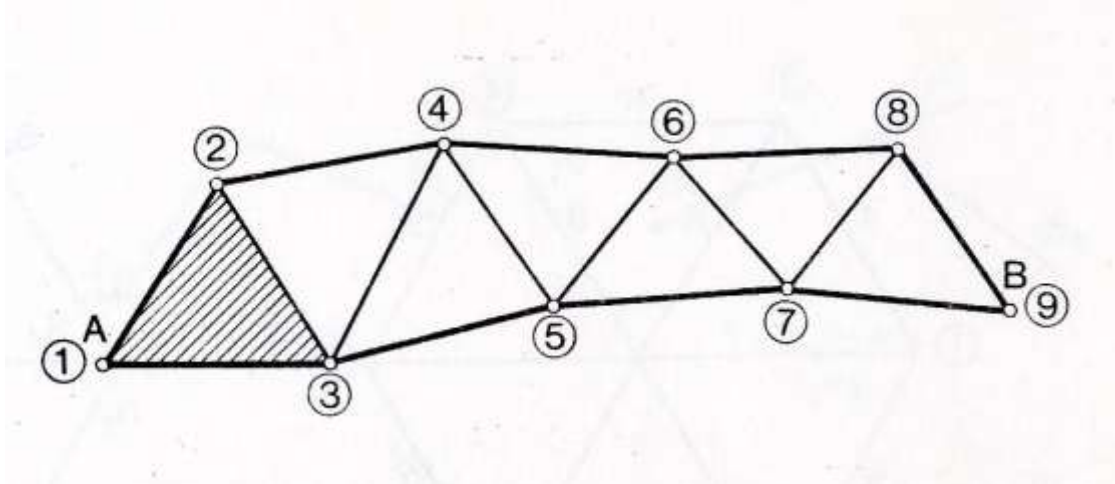
Potrebno je naglasiti da svaki rešetkasti sistem nije nužno i statički određen nosač. Samo rešetkasti sistem koji se sastoji iz dovoljnog, ali najmanjega potrebnoga broja međusobno zglobno spojenih štapova, ispravno raspoređenih, te s dovoljnim, ali najmanjim potrebnim brojem vanjskih veza, također ispravno raspoređenih, možemo zvati statički određenim rešetkastim nosačem. Pri tome se pretpostavlja da su svi štapovi ravni (nezakrivljeni), konstantnog poprečnog presjeka i da vanjska opterećenja djeluju u čvorovima i u ravnini nosača.

Ispravan raspored štapova znači da nosač zadovoljava nužan uvjet geometrijske nepromjenjivosti rešetkastog diska.

Geometrijsku nepromjenjivost rešetkastog diska najlakše ćemo pokazati polazeći od najjednostavnije strukture rešetkastog diska – trokuta. Trokut je osnovna geometrijski

nepromjenjiva figura sastavljena od tri štapa i tri čvora. Počevši od osnovnog trokuta postupnim spajanjem svakog novog čvora s dva štapa, dolazi se do geometrijski nepromjenjivog rešetkastog diska.

Na slici 2. prikazano je konstruiranje jednog takvog diska.



Slika 2.

Na osnovnu figuru (trokut 1, 2, 3) prvo se s dva štapa priključio čvor 4, pa je time dobivena figura (1, 2, 3, 4) postala rešetkastim diskom. Analognim postupkom dobivamo sve ostale čvorove prikazanog rešetkastog diska.

Kako bi rešetkasti disk ispunio nužni uvjet geometrijske nepromjenjivosti potreban je određen broj štapova. Da bi odredili minimalan broj potrebnih štapova sa  $n_s$  označimo broj štapova, a sa  $n_c$  broj čvorova.

Dakle:

$$n_s = 3 + (n_c - 3) \cdot 2 = 2n_c - 3$$

Ovo je broj štapova potrebnih da se sastavi rešetkasti disk. Da bi taj disk postao i nosač treba mu dodati tri vanjske veze. Te tri vanjske veze tretiramo kao štapove, pa naš izraz za ukupan, minimalno potreban, broj štapova da bi rešetkasti nosač bio geometrijski nepromjenjiv izgleda ovako:

$$n_s = 2 n_c$$

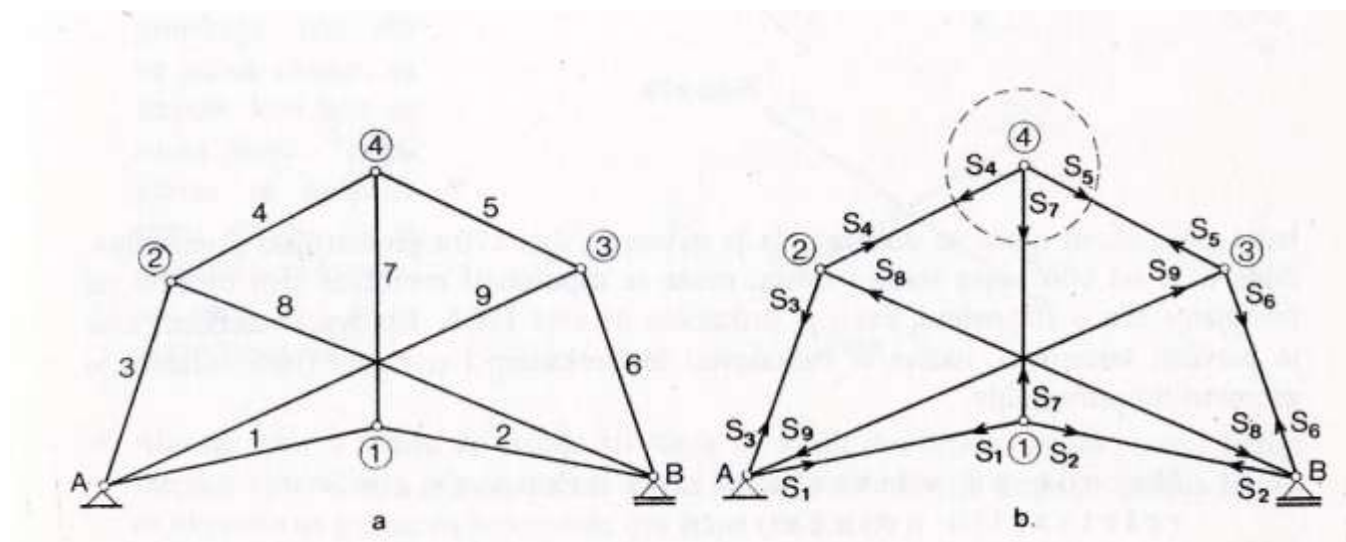
Prema tome, za geometrijsku nepromjenjivost i statičku određenost rešetkastog nosača nužno je imati dvostruko više štapova od broja čvorova.

Već smo opisali najjednostavniji oblik geometrijske nepromjenjivosti rešetkastog diska, prikazanog na slici 2., sastavljenog od najjednostavnijih geometrijskih nepromjenjivih struktura tj. trokutova. Također smo na slici 1. prikazali nekoliko rešetkastih nosača kod kojih se ovakvim postupkom vrlo lako dokazuje geometrijska nepromjenjivost. Svakom nosaču,

osim onom na slici 1.g., označen je karakterističan, odnosno polazni trokut (šrafirani trokut). Od tog trokuta se može započeti konstrukcija postupnim dodavanjem novih čvorova uz pomoć samo dva štapa. Ta dva štapa se vežu u čvor uz uvjet da ne leže na istom pravcu. Za nosač prikazan na slici 1.g. ne možemo utvrditi njegovu geometrijsku nepromjenjivost na opisan način, što ne znači da je nosač geometrijski promjenjiv. Njegova geometrijska promjenjivost utvrđuje se na drugi način.

Vidimo da su mogući i mnogo složeniji nosači kod kojih se, opisanim postupkom, ne može dokazati njihova geometrijska nepromjenjivost. Naime, takvi nosači nisu sastavljeni od trokutova, pa ni nema ni osnovnog trokuta od kojeg se moglo krenuti.

Kao primjer promatramo nosač prikazan na slici 3.



Slika 3.

Kako bi ispitati geometrijsku nepromjenjivost ovog sistema poslužit ćemo se metodom nultog opterećenja. Ukratko ćemo pojasniti osnovne postavke ove metode:

Ako na statički određen konstruktivni sistem ne djeluje nikakvo opterećenje, onda je jasno samo po sebi da su sile u svim štapovima jednake nuli. Drugim riječima, to je jedino moguće rješenje koje zadovoljava uvjete ravnoteže u svim čvorovima sistema. Samo je u tom slučaju konstruktivni sistem geometrijski nepromjenjiv.

U suprotnom, ako je moguće pronaći neko drugo rješenje gdje su sile u štapovima različite od nule, a u isto vrijeme zadovoljavaju uvjete ravnoteže u svim čvorovima, onda sa sigurnošću možemo zaključiti da je sistem geometrijski promjenjiv.

Vidimo da promatrani nosač, brojem svojih štapova, zadovoljava uvjete za geometrijsku nepromjenjivost i statičku određenost. Međutim, to je nužan ali ne i dovoljan uvjet. Naime, pored dovoljnog broja štapova za geometrijsku nepromjenjivost i statičku određenost, bitna je i njihova pozicija u konstruktivnom sistemu, odnosno njihov raspored.

Sada ćemo ispitati geometrijsku nepromjenjivost promatranog nosača metodom nultog opterećenja. Krenut ćemo od pretpostavke da u štapu 7 postoji sila  $S_7$  različita od nule, a zatim ćemo pokušati odrediti sile u svim ostalim štapovima. Napomenimo da su reakcije jednake nuli, jer nosač nije opterećen. Iz ravnoteže čvora 1 lako se odrede sile  $S_1$  i  $S_2$  u štapovima 1 i 2 (slika 3.b.). Postupak se nastavlja obilazeći čvorove A i B, te čvorove 2 i 3 odakle se, rješavajući uvjete ravnoteže u njima, određuju sile u svim štapovima. Napokon se dolazi do čvora 4, koji zapravo predstavlja kontrolni čvor jer se u njemu sastaju štapovi čije su sile već određene iz drugih čvorova. Naime, silu  $S_7$  smo pretpostavili, a sile  $S_4$  i  $S_5$  smo dobili iz ravnoteže čvorova 2 i 3.

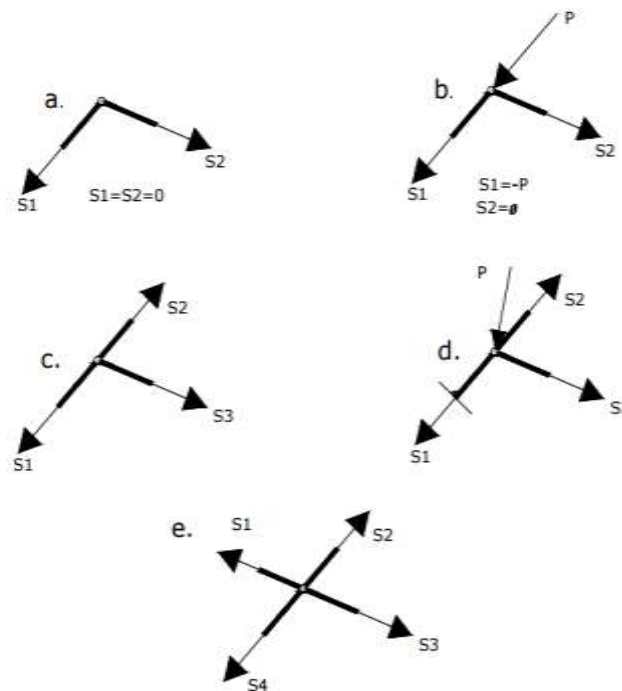
Promatrajući čvor 4 očito je da sile  $S_4$ ,  $S_5$  i  $S_7$  ne zadovoljavaju uvjet ravnoteže čvora, jer sve tri sile imaju svoje projekcije na vertikalnom pravcu u istom smjeru.

Zaključujemo da te sile mogu zadovoljiti uvjet ravnoteže u tom čvoru samo ako su sve tri sile jednake nuli. Nadalje je lako zaključiti da su sile u svim ostalim štapovima jednake nuli. Ovim je dokazano da je nemoguće postojanje sila u štapovima bez vanjskog opterećenja. Zaključujemo da je sistem geometrijski nepromjenjiv, odnosno da je sistem na slici 3. rešetkasti nosač.



## 2.2. Elementarna pravila koja vrijede općenito za ravninske rešetkaste nosače

U cilju boljeg razumijevanja postupka za određivanje sila u štapovima rešetkastih nosača korisno je navesti neka elementarna pravila koja općenito vrijede za rešetkaste nosače. Ona će nam bitno pojednostaviti postupak određivanja sila u štapovima, pogotovo u grafičkim postupcima, gdje se zahtijeva dublji uvid u mehanizam ravnoteže sila nego kod analitičkih postupaka.



Slika 4.

1. Ako na čvor u kojem se sastaju dva štapa ne djeluje vanjsko opterećenje, sile u tim štapovima jednake su nuli (slika 4.a.).
2. Ako na čvor u kojem se sastaju dva štapa djeluje sila u pravcu koji se poklapa s jednim od štapova, sila u drugom štapu jednaka je nuli (slika 4.b.).
3. Ako se u čvoru na koji ne djeluje vanjsko opterećenje sastaju tri štapa i od njih dva leže na istom pravcu, sila u trećem štapu je jednaka nuli (slika 4.c.).
4. Ako na čvor u kojem se sastaju tri štapa, od kojih dva leže na istom pravcu, djeluje vanjska sila, sila u trećem štapu može se odrediti iz zbroja projekcija sile na os okomitu na pravac na kojem leže dva štapa (slika 4.d.).
5. Ako postoji neopterećeni čvor u kojem se sastaju četiri štapa od kojih po dva leže na istom pravcu, onda su sile u štapovima koji leže na istom pravcu međusobno jednake (slika 4.e.).

### 3. Grafički postupci određivanja sila u štapovima

Kod grafičkog određivanja sila u štapovima rešetkastih nosača posebno ćemo protumačiti ove postupke:

- a) Metoda čvorova,
- b) Maxwell-Cremonin plan sila,
- c) Metode presjeka,
- d) Culmannov postupak.

Prema tipu rešetkastog nosača, kao i cilju proračuna, odabiremo najprikladniji grafički postupak. Naime, važno je znati da li se traže sile u svim štapovima rešetkastog nosača ili samo u nekim štapovima. Svaki od navedenih postupaka je, po svojoj prirodi, učinkovitiji od ostalih postupaka za određeni tip nosača i cilj proračuna. Slike u ovom poglavlju preuzete su iz udžbenika [1].

#### 3.1. Metoda čvorova

Temeljna zamisao ove metode je da zamišljamo kako se iz rešetkastog nosača izrezuju pojedini čvorovi na koje se onda postavljaju uvjeti ravnoteže.

Stoga se ova metoda još naziva "metodom izrezivanja čvorova" ili "metodom ravnoteže čvorova". Ova metoda je najopćenitija i najjednostavnija metoda za određivanje sila u štapovima rešetkastog nosača. Budući da se sve sile koje djeluju na jedan čvor sijeku u jednoj točki, moguće je postaviti samo dvije jednadžbe ravnoteže u tom čvoru. Te dvije jednadžbe možemo riješiti analitičkim postupkom, ali isto tako je iz mehanike poznato da te analitičke uvijete ravnoteže možemo zamijeniti grafičkim. Ovdje ćemo se zadržati na grafičkom postupku.

Kod grafičkog postupka određivanja sila u štapovima važno je napomenuti da je iz ravnoteže jednog čvora grafički moguće odrediti samo dvije nepoznate sile. Dakle, pri određivanju sila u štapovima po ovoj metodi treba polaziti od čvorova u kojima su nepoznate samo dvije sile. Kako su svi čvorovi u ravnoteži, odnosno sve sile u tim čvorovima su u ravnoteži, jasno je da te sile zatvaraju poligon sila u svakom čvoru. Ti poligoni sila mogu se crtati neovisno za svaki čvor, ali se mora voditi računa da pri crtanju poligona sila za neki čvor u tom čvoru ostaju samo dvije nepoznate sile koje će biti određene iz tog poligona. Na taj način, idući od čvora do čvora, možemo odrediti sile u svim štapovima nosača.

Međutim, crtajući neovisne poligone sila za svaki čvor posebno, uočavamo da se sila u svakom štapu pojavljuje u dva poligona. Naravno da se time pogreške pri crtanju gomilaju, a sama grafička konstrukcija postaje nepregledna i neprikladna.

Lako se naslućuje da bi se to moglo dovesti u red tako da se svi ti poligoni slože u jedinstven plan u kojem se svaka sila pojavljuje samo jedanput.

Iz mehanike je takav plan poznat kao Maxwell-Cremonin plan sila, što ćemo posebno obraditi u narednom poglavlju.

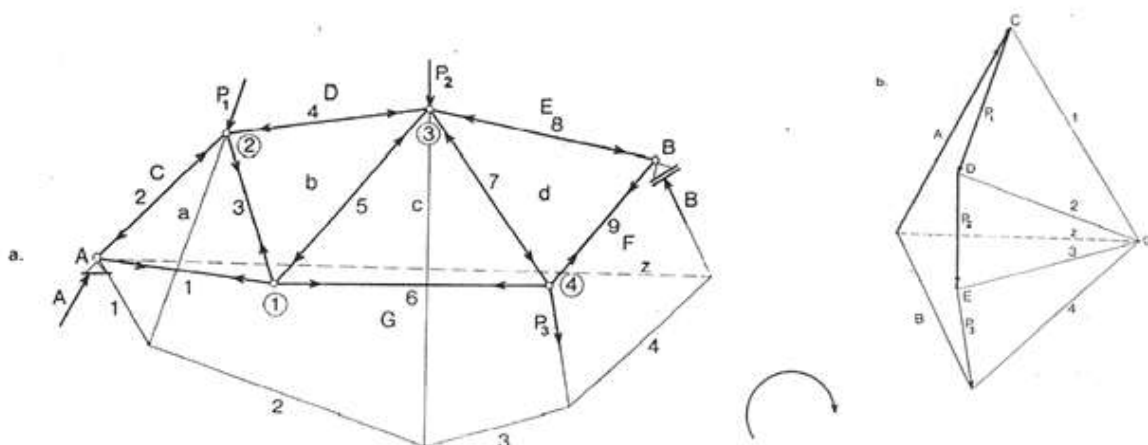
### 3.2. Maxwell-Cremonin plan sila

Kako smo već rekli, ovaj postupak je logičan nastavak već spomenute metode čvorova. Odnosno, može se reći da je ovaj postupak usavršena metoda čvorova gdje se svaka sila pojavljuje samo jedanput, a svi poligoni sila složeni su u jedinstven plan. Kao takav, ovaj plan sila puno je pregledniji i manje podložan pogreškama u odnosu na grafičku konstrukciju metode čvorova.

Ovaj postupak pronašao je 1864. godine engleski fizičar J. C. Maxwell. Neovisno od njega detaljno ga je razradio profesor politehnike u Milanu L. Cremona 1872. godine. U kontinentalnom dijelu Europe ovaj se postupak obično naziva Cremoninim planom sila.

Ovdje ćemo detaljnije prikazati konstrukciju Maxwell-Cremonin plana sila, kako bismo istaknuli neke bitne karakteristike ove grafičke konstrukcije. Također, nastojat ćemo objasniti vezu između geometrijske figure, koja se dobiva u planu sila, sa zadanim nosačem i silama opterećenja.

Za primjer ćemo uzeti rešetkasti nosač jednostavne strukture (čija je geometrijska nepromjenjivost i statička određenost očigledna) opterećen vanjskim silama kako je prikazano na slici 5.

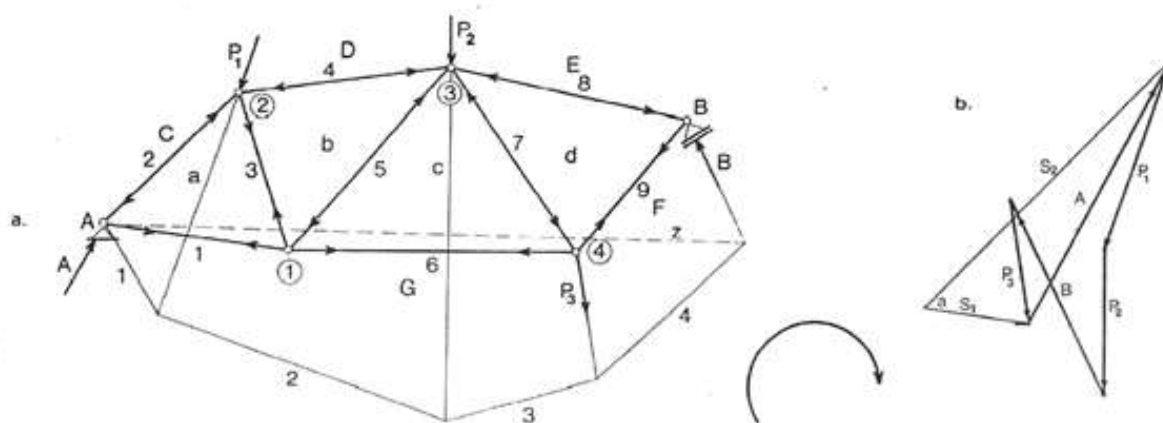


Slika 5.

Prvo određujemo reakcije u osloncima pomoću verižnog poligona, nakon čega su poznate sve vanjske sile koje djeluju na rešetku.

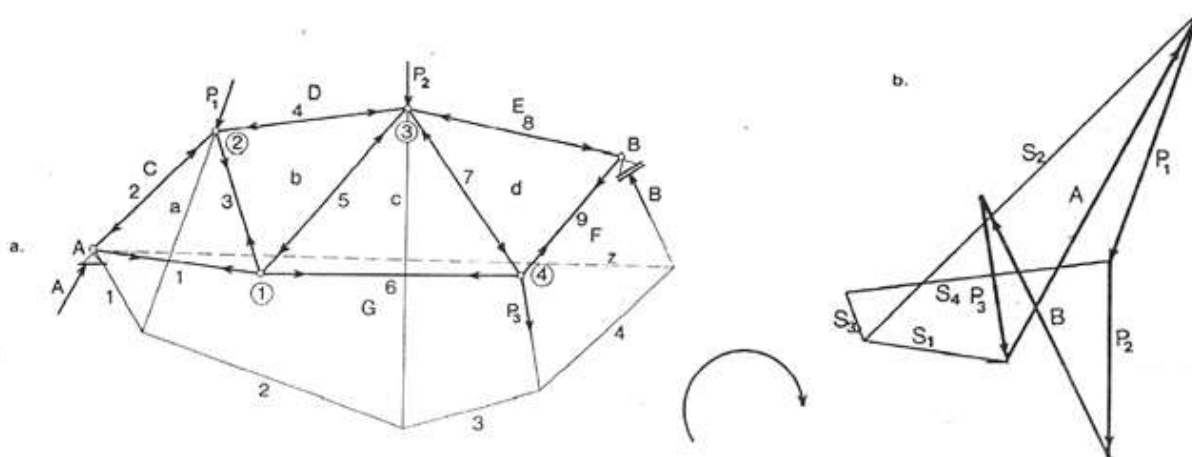
Prije nego što pristupimo konstrukciji plana sila u kojem se svaka sila pojavljuje samo jedanput moramo uvesti određenu disciplinu, odnosno neka pravila. Moramo odabrati smisao obilaska oko rešetke i tog se smisla držati do kraja konstrukcije Maxwell-Cremoninog plana sila. Preporučljivo je da se taj smisao označi na slici, a u našem primjeru odabrani smisao je smisao vrtnje kazaljke na satu (slika 5.).

Dakle, u skladu s odabranim smislom obilaska oko rešetke, redoslijed u poligonu vanjskih sila je sljedeći: A,  $P_1$ ,  $P_2$ , B,  $P_3$  (slika 6.). Sada možemo krenuti u određivanje sila u štapovima rešetke tako da tražimo čvor u kojem se sastaju samo dva štapa. Kako smo na početku postupka i još ne poznajemo ni jednu silu u štapu, moramo krenuti od čvora u kojem se sastaju dva štapa. Takvi čvorovi su A i B i potpuno je svejedno od kojega se kreće. Započinjemo s uravnoteženjem čvora A odakle dobivamo sile  $S_1$  i  $S_2$  (slika 6.).



Slika 6.

Nakon što su određene sile u štapovima 1 i 2 prelazimo na čvor 2, jer su u njemu nepoznate samo sile u štapovima 3 i 4, budući da je sila u štapu 2 određena iz prethodno uravnoteženog čvora A. Postupak je identičan kao u prethodnom čvoru, uz napomenu da se pridržavamo dogovorenog obilaska oko čvora, tj. u smislu vrtnje kazaljke na satu. Polazimo od prve poznate sile u tom čvoru, sile  $S_2$ , jer je to prva poznata sila na koju nailazimo pri obilasku oko čvora u dogovorenom smislu. Iz ravnoteže ovog čvora dobivaju se preostale dvije nepoznate sile u štapovima tog čvora ( $S_3$  i  $S_4$ ), što je vidljivo iz četverokuta sila:  $S_2, P_1, S_4, S_3$  (slika 7).

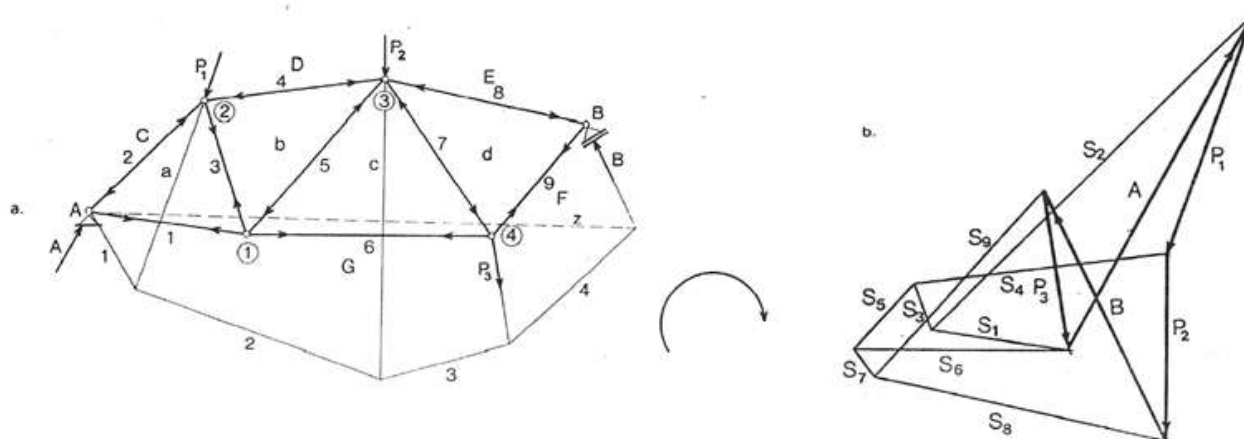


Slika 7.

Sljedeći čvor za koji ćemo konstruirati poligon sila je čvor 1, jer su sile  $S_1$  i  $S_3$  dobivene iz prethodno uravnoteženih čvorova. Iz tog poligona dobivaju se sile u štapovima 5 i 6 ( $S_5$  i  $S_6$ ). Nakon ovog čvora možemo dalje ići na čvor 3 i zatim na čvor 4. Po završetku konstruiranja poligona sila za čvor 4 vidimo da su određene sile u svim štapovima, pa dolazimo do zaključka da je čvor B zapravo kontrolni čvor. Tu će se pokazati da li je grafička konstrukcija ispravno provedena. Naime, u čvoru B (ležaj) sastaju se tri sile ( $B, S_8$  i  $S_9$ ) koje su prethodno određene. Budući da su one u ravnoteži moraju zatvoriti trokut sila.

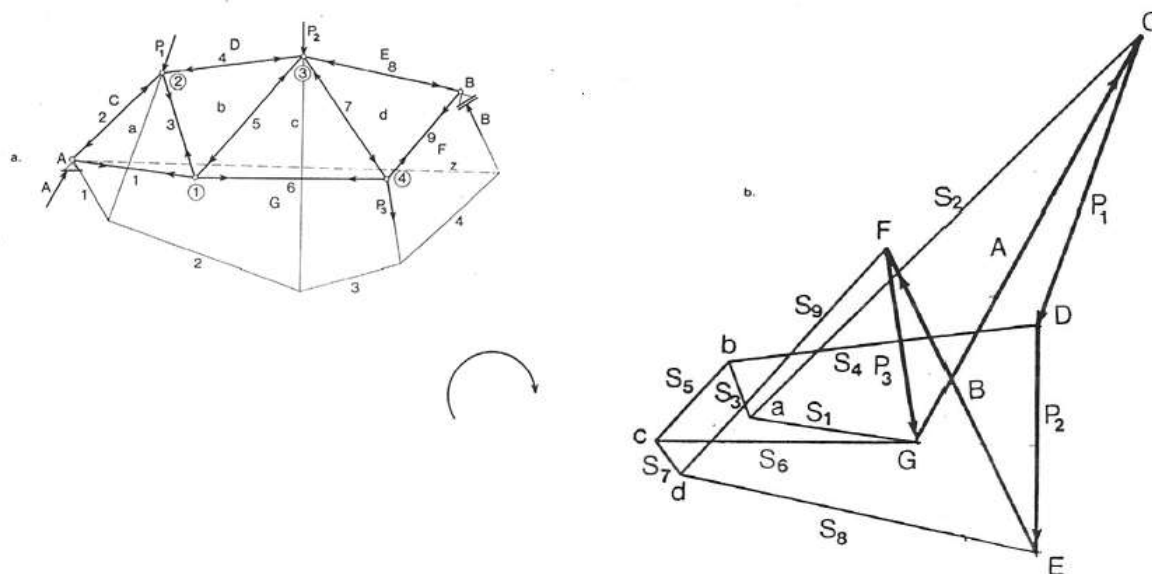
Ako se taj trokut sila ne zatvori, vjerojatno je napravljena pogreška u prethodnom postupku. Međutim, moguće je da se to dogodi zbog neprecizne grafičke konstrukcije gdje se prave sitne pogreške koje se gomilaju tijekom postupka. Zbog toga se umjesto točke dobiva trokutić koji nazivamo trokutom greške. Ako je taj trokut toliko velik da ga ne možemo zamijeniti točkom, a da pri tom ne narušimo točnost rezultata, onda smo sigurni da je napravljena pogreška u prethodnom postupku. Postupak treba ponoviti.

Obično se opisana konstrukcija provodi od početka do kraja, idući u jednom smjeru, pri čemu se povećava vjerojatnost gomilanja pogrešaka u rezultatu, naročito kod nosača sa većim brojem štapova. Kako bi se ovo izbjeglo ili barem umanjila vjerojatnost pogreške, najbolje je konstrukciju provoditi s obje strane. Na slici 8. Prikazana je konačna konstrukcija Maxwell-Cremonina plana sila.



Slika br. 8.

U prethodnom dijelu smo prikazali grafičku konstrukciju Maxwell-Cremoninog plana sila gdje su sadržana i statička objašnjenja problema. Međutim, tijekom postupka moglo se naslutiti da postoji neki geometrijski odnos između nosača s opterećenjem i plana sila. Boljim uvidom se može zaključiti da postoji zanimljiv odnos koji će pojednostaviti konstruiranje Maxwell-Cremonina plana sila. Naime, taj plan sila je geometrijska konstrukcija koja je recipročna zadanom nosaču s opterećenjem. Kako bismo bolje objasnili tu recipročnost promotrimo još jednom zadani nosač s opterećenjem i Maxwell-Cremonin plan sila. U tu svrhu smo unijeli još neke dodatne oznake kako je vidljivo na slici 9.



Slika 9.

Recipročnost Maxwell-Cremoninog plana sila (M-C plan) i zadanog nosača s opterećenjem karakteriziraju sljedeći odnosi:

1. *Svakom polju rešetkastog nosača odgovara u Maxwell-Cremoninom planu sila jedna točka.*

Rešetkasti nosač svoju ravninu dijeli na vanjska i unutarnja polja. Vanjska polja su omeđena vanjskim silama i vanjskim štapovima rešetke. Unutarnja polja omeđena su štapovima rešetke. Uobičajeno je da se vanjska polja označavaju velikim slovima, a unutarnja polja malim slovima.

Tako je u promatranom primjeru na slici 9. unutarnje polje omeđeno štapovima 1, 2 i 3 označeno malim slovom a. U M-C planu sila to isto polje predstavlja točka u kojoj se sijeku sile štapa 1, 2 i 3.

Vanjsko polje G je četverokut kojeg čine pravci djelovanja vanjskih sila A i  $P_3$ , te štapovi 1 i 6. Isto to polje u M-C planu predstavlja točku u kojoj se sijeku upravo one sile koje ga omeđuju. Ostala vanjska polja u promatranom primjeru su trokuti omeđeni sa po dva pravca djelovanja sila i po jednim pravcem pripadajućeg štapa.

Svakom polju zadane rešetke, koju smo označili jednim slovom, odgovara samo jedna točka u M-C planu sila koju označavamo istim slovom. Kako smo već rekli, između dva polja u rešetkastom nosaču nalazi se ili vanjska sila ili štap, odnosno sila u tom štapu. U M-C planu, odnosno recipročnoj figuri, tim poljima odgovaraju dvije točke. Spojnica tih dviju točaka predstavlja ili vanjsku silu ili silu u štapu, sukladno prelasku iz jednog polja u drugo. Stoga u M-C planu nije potrebno posebno označavati sile, pa ni na zadanom nosaču, odnosno oznakama točaka u planu.

Kad već ne moramo posebno označavati sile, moramo pojasniti određivanje predznaka sile u M-C planu. Uzmimo za primjer silu  $S_8$  u štapu 8 koja se nalazi između polja E i d (slika 9.). Promatra se čvor 3 i polazi se u obilazak tog čvora u odabranom smislu (smisao vrtnje kazaljke na satu). Na silu  $S_8$  nailazimo prilikom prelaska iz vanjskog polja E u unutarnje polje d. Upravo taj smisao ( $E \rightarrow d$ ) nam određuje smisao sile  $S_8$  u M-C planu. Strelica sile ide prema čvoru, što znači da je sila  $S_8$  negativna (tlačna). Kako je štap 8 svojim drugim krajem vezan za čvor B (oslonac) i svojom silom sudjeluje u njegovoj ravnoteži, jasno je da će sila  $S_8$  imati isti iznos, ali suprotan smisao od onog prema čvoru 3.

Opisani sistem označavanja polja i točaka, a time i sila uveo je engleski inženjer Bow, pa je pod imenom Bowov način i poznat.



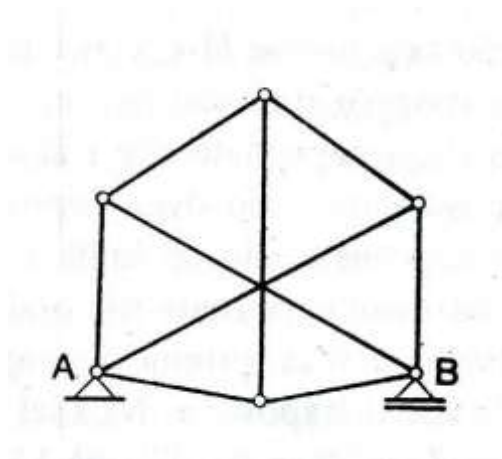
2. Svakoj točki (čvoru) rešetkastog nosača odgovara u Maxwell-Cremoninom planu sila jedno polje, tj. poligon.

*Stranice poligona recipročne figure paralelne su s pravcima štapova, odnosno sila koje djeluju u čvoru rešetke.*

Kod konstrukcije Maxwell-Cremoninog plana sila povlačili smo pravce paralelne s pravcima štapova rešetke i pravcima vanjskih sila. U biti, za svaki čvor rešetkastog nosača mi smo konstruirali zatvoreni poligon koji predstavlja uravnoteženi sistem svih sila koje djeluju u tom čvoru. Stoga je i razumljivo da su stranice tih poligona paralelne s pravcima štapova, odnosno sile koje djeluju u čvoru rešetke.

3. Ako se površina nosača s pripadajućim vanjskim silama može podijeliti na dijelove ograničene pravcima sila, tako da svaka točka koja ne leži na pravcima koji omeđuju polja pripada samo jednom polju, onda je za takav nosač moguće naći Maxwell-Cremonin plan sila.

Drugim riječima, za nosače kod kojih se polja preklapaju nije moguće napraviti Maxwell-Cremonin plan sila. Za ilustraciju, prikazan je jedan takav nosač na slici 10.

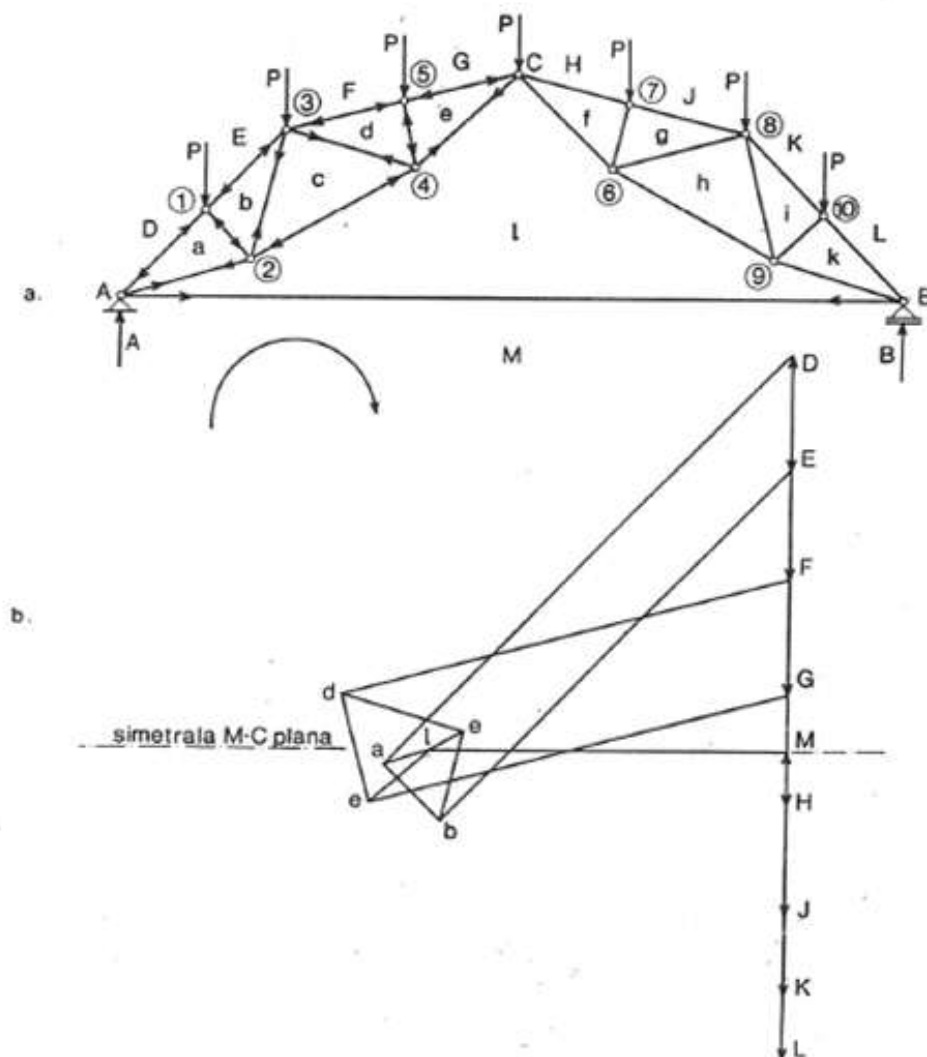


Slika 10.

Kako smo do sada vidjeli, konstrukcija M-C plana sila mora krenuti od čvora u kojem postoje samo dvije nepoznate sile. Nadalje, konstrukcija se može nastaviti ako nailazimo na čvorove u kojima su nepoznate samo dvije sile.

Ako imamo nosač u kojem nema čvorova s dvije nepoznate sile, od kojih bi se moglo krenuti sa konstrukcijom M-C plana ili se unutar nosača naiđe na čvorove s više od dvije nepoznate sile, tada je potrebno ispitati postoji li mogućnost za primjenu ovog postupka uz određenu prethodnu intervenciju. Ako to nije moguće, onda se sile u štapovima trebaju tražiti na neki drugi način.

Promotrit ćemo rešetkasti nosač s opterećenjem prikazan na slici 11.a.



Slika 11.

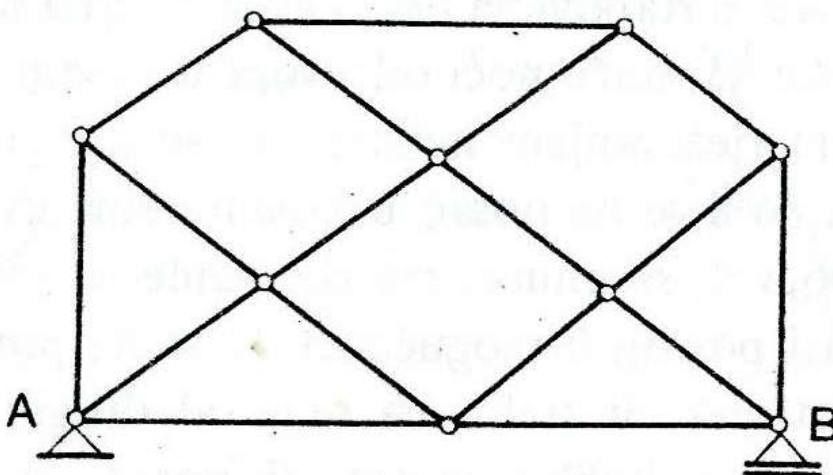
Vidimo da u rešetkastom nosaču ne postoji čvor od kojega bismo započeli konstrukciju M-C plana. Međutim, površinu rešetkastog nosača je nemoguće razdijeliti na odvojena polja, kao što je prikazano na slici 11.a. Reakcije je vrlo jednostavno odrediti, ali je potrebno naći jednu silu u jednom štapu i to u onom čvoru gdje se sastaju tri štapa. Na taj način bismo dobili čvor s dvije nepoznate sile, odakle bismo započeli konstrukciju M-C plana. Također je vidljivo da se ovdje radi o sistemu sa zategom (štap AB). Dalje, treba odrediti silu u zategi, odnosno štapu AB.

Silu u štapu AB ćemo vrlo jednostavno odrediti iz uvjeta da je moment u zglobu C jednak nuli. Tu silu ćemo tretirati kao vanjsku i kao takvu ćemo je, zajedno s vanjskim silama, unijeti u poligon sila.

Sada su stvoreni svi preduvjeti za konstrukciju M-C plana, a daljnji postupak je jednostavan. Nakon što smo odredili reakcije u ležajevima, silu u štapu AB (zatega) i odredili smisao obilaska oko čvorova (smisao vrtnje kazaljke na satu) možemo započeti postupak konstrukcije M-C plana. U našem slučaju krenuli smo od ležaja A gdje su nepoznate samo dvije sile u dva priključena štapa. Nakon toga prelazimo na čvor 1, a dalje nastavljamo na ostale čvorove redoslijedom kako su označeni.

Budući da je zadani rešetkasti nosač geometrijski simetričan, a i vanjsko opterećenje je simetrično bit će simetričan i M-C plan. Stoga nije nacrtan čitav M-C plan nego samo pola – do osi simetrije, kako je prikazano na slici 11.b.

U prethodnom primjeru smo promotriili slučaj nosača kod kojeg je moguće nacrtati M-C plan uz prethodnu intervenciju. Međutim, to nije uvijek slučaj. Na slici 12. je prikazan rešetkasti nosač kod kojeg nije moguće nacrtati M-C plan, jer nikakvom prethodnom intervencijom ne možemo doći do početnog čvora u kojem bi imali samo dvije nepoznate sile.

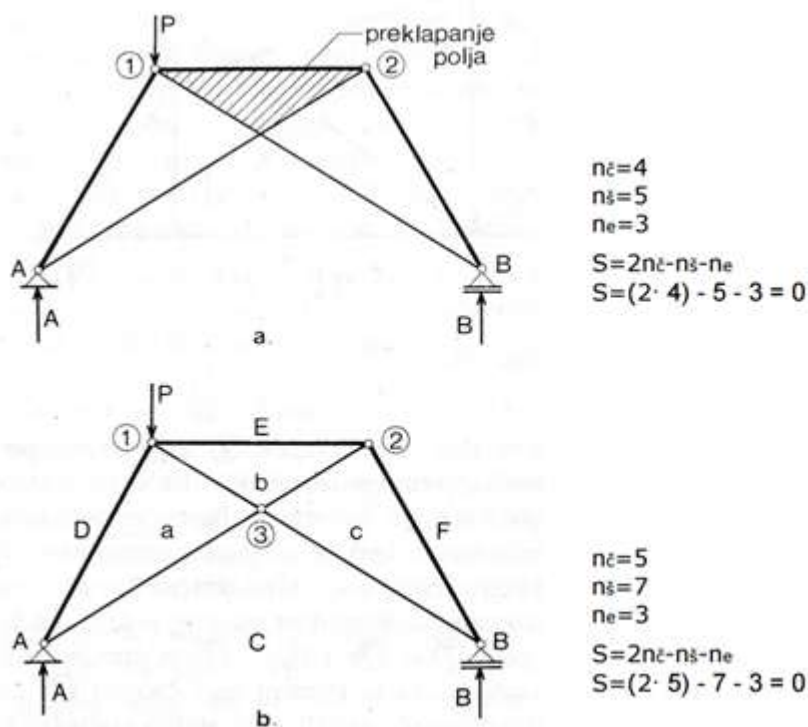


Slika 12.

Pored svega, do sada navedenog, korisno je razmotriti i slučajeve nosača kod kojih se polja preklapaju. Kako smo već rekli, za takve nosače nije moguće napraviti M-C plan. Međutim, treba razmotriti mogućnost nalaženja načina da se takav nosač pretvori u nosač za kojega je moguće napraviti M-C plan.

Kod rešetkastih nosača čiji se štapovi mimoilaze, odnosno križaju, polja se preklapaju. Međutim, presudan je broj štapova koji se križaju. Naime, ako se križaju samo po dva štapa, može se naći načina da se takav rešetkasti nosač pretvori u nosač kojemu je moguće nacrtati M-C plan. Ovo se temelji na činjenici da se sile u štapovima ne mijenjaju ako zamislimo da su štapovi prekinuti i zglobno povezani u točkama križanja. Ovakvom zamjenom se ne mijenja statička određenost niti geometrijska nepromjenjivost, jer se ubacivanjem jednog zgloba broj čvorova povećava za jedan, a broj štapova za dva.

Za ilustraciju, na slici 13. prikazan je jedan takav nosač. Od rešetkastog nosača s ukrštenim štapovima dobivamo rešetkasti nosač kojemu je moguće nacrtati M-C plan.

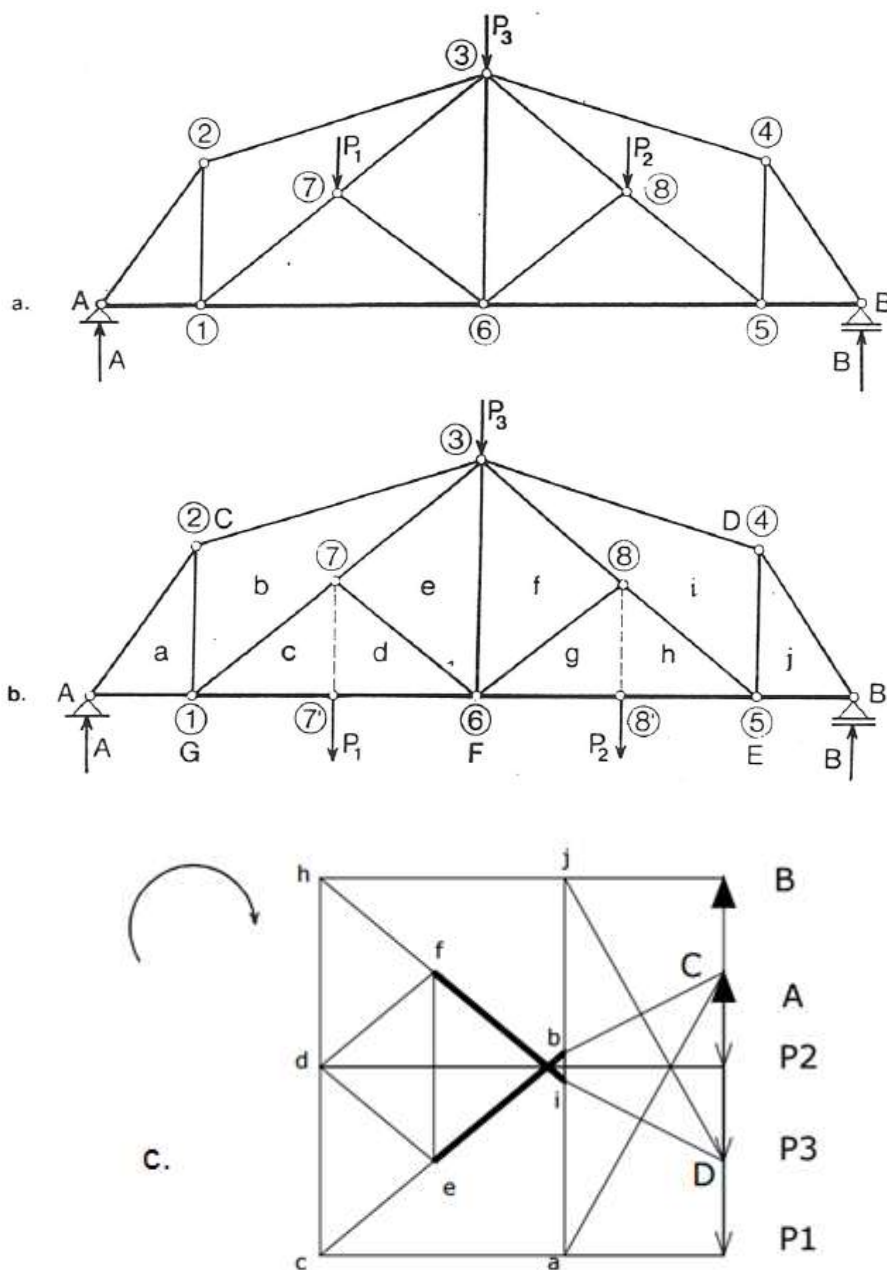


Slika 13.

Također, treba naglasiti da ovakav zahvat ne možemo primijeniti u slučajevima gdje se križaju tri ili više štapova. U takvim slučajevima mijenja se konstrukcijski sistem. Statički određeni nosači postaju statički neodređeni.

Obradit ćemo još jedan primjer nosača kod kojeg, na prvi pogled, nije moguće nacrtati M-C plan jer se vanjska i unutarnja polja preklapaju.

Promatramo nosač prikazan na slici 14.a.



Slika 14.

Kao što vidimo, rešetkasti nosač ima unutarnje čvorove 7 i 8. Dok ti čvorovi nisu opterećeni, onda je moguće nacrtati M-C plan. Međutim, ako su ti čvorovi opterećeni silama kao što je prikazano u primjeru, onda dolazi do preklapanja vanjskih i unutarnjih polja. Dakle, za taj slučaj nije moguće nacrtati recipročnu figuru.

Ipak, za promatrani nosač je moguće nacrtati M-C plan ako na nosaču izvršimo određene preinake koje neće promijeniti njegovu geometrijsku nepromjenjivost, niti statičku određenost. U tu svrhu dodajemo pomoćne čvorove 7' i 8', odnosno pomoćne štapove 7-7' i 8-8' u pravcima djelovanja sila  $P_1$  i  $P_2$ . Sada možemo premjestiti djelovanja sila  $P_1$  i  $P_2$  u čvorove 7' i 8', čime je nestao problem preklapanja vanjskih i unutarnjih polja. Također, potrebno je napomenuti da dodavanje navedenih pomoćnih štapova i čvorova nema utjecaja na veličine sila u štapovima zadanog nosača.

Sada je jasno da se za ovaj zamjenski nosač, prikazan na slici 14.b., može napraviti M-C plan. No, na kraju proračuna, ne smijemo zaboraviti izvršiti korekciju proračuna tako da su sile u dodanim (pomoćnim) štapovima jednake nuli, te da štapovi 1-6 i 5-6 nisu podijeljeni na dva štapa.

Recipročna figura za ovakav nosač prikazana je na slici 14.c.

### **3.3. Metode presjeka**

Metode presjeka su prikladne za određivanje sila samo u nekim štapovima rešetkastog nosača. Dakle, ove metode se primjenjuju u slučajevima kada nosač možemo presjekom podijeliti na dva dijela, tako da se presijeku samo tri štapa kojima se pravci ne sijeku u istoj točki. Naravno, moguće je presjeći i više štapova, ali među njima ne smije biti više od tri štapa s nepoznatim silama. Također, presjekom je moguće izdvojiti jedan dio nosača, ali opet pod navedenim uvjetom da imamo najviše tri štapa s nepoznatim silama.

Kod metoda presjeka jedan dio nosača se promatra, a drugi odbacuje, pri čemu je jasno da je promatrani dio nosača u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila koje na njega djeluju i sila kojima odbačeni dio djeluje na njega. Za razliku od punostjenih nosača, gdje se u presjeku pojavljuju moment savijanja, poprečna i uzdužna sila, kod rešetkastih nosača pojavljuju se samo sile u štapovima.

Iz mehanike nam je poznato da se iz uvjeta ravnoteže sila u ravnini iz jednog presjeka mogu odrediti najviše tri sile. Ako presjek ima četiri štapa, problem je rješiv ako je sila u jednom od tih štapova prethodno određena iz nekog drugog presjeka. Također, može se dogoditi da u presjeku imamo više od tri štapa u kojima neke sile nisu prethodno određene, odnosno sve su nepoznate. I tada je problem rješiv, ali samo onda kada se pravci svih presječenih štapova, osim jednog, sijeku u istoj točki.

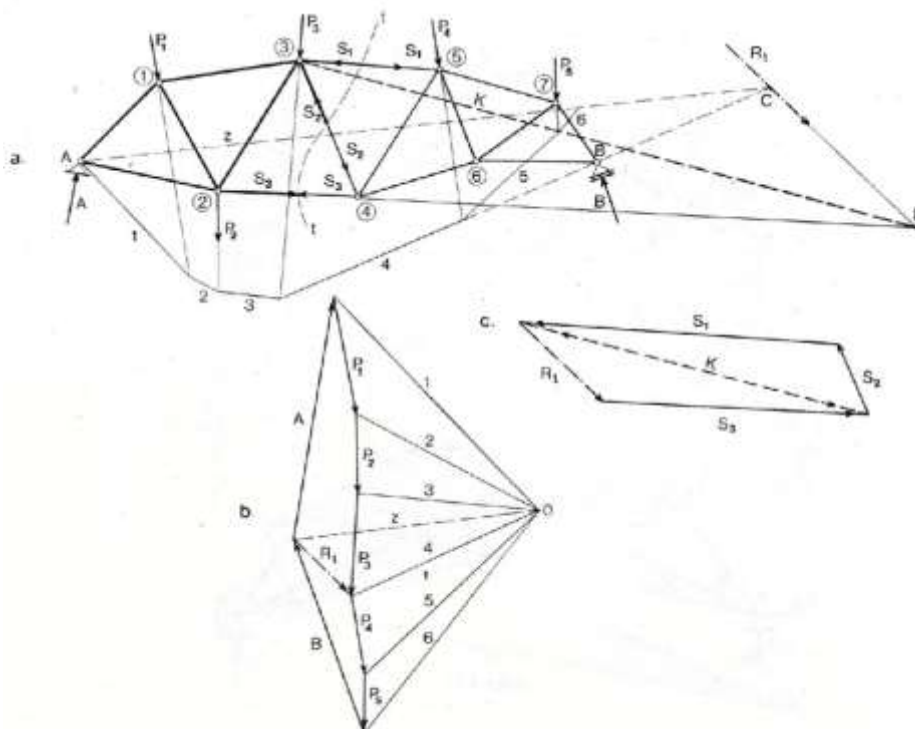
Metode presjeka mogu biti analitičke, grafičke i grafoanalitičke. Bit analitičkih metoda je u tome da se postavljaju jednadžbe ravnoteže u kojima imamo samo jednu nepoznatu silu. Grafičke metode se temelje na istim principima kao i analitičke, odnosno može se reći da su to geometrijske interpretacije jednadžbi ravnoteže.

Ovdje ćemo se zadržati samo na grafičkim metodama; odnosno obradit ćemo grafički postupak određivanja sila u štapovima rešetkastog nosača koji se naziva Culmannov postupak.

### 3.4. Culmannov postupak

Culmannov postupak je grafički postupak određivanja sila u štapovima rešetkastog nosača. Bit samog postupka je u rastavljanju sile na tri pravca koji se ne sijeku u jednoj točki. Zapravo, radi se o primjeni grafičkog uvjeta ravnoteže za četiri sile. Naime, nepoznate su sile u tri štapa dok je poznata rezultanta vanjskih sila koje djeluju na promatrani dio nosača. Dakle, radi se o četiri sile koje moraju biti u ravnoteži. Grafički uvjet ravnoteže za četiri sile formiran je na sljedeći način: četiri sile su u ravnoteži ako rezultanta dviju leži na istom pravcu s rezultantom drugih dviju sila, jednake po veličini ali suprotne po smjeru. Pravac na kojem leže navedene rezultante sila naziva se Culmannovim pravcem. Culmannov postupak određivanja sila u štapovima rešetkastog nosača prikazan je na slici 15. Pomoću verižnog poligona sila određene su reakcije (slika 15.a. i b.). Promatramo lijevi dio nosača, dok je desni dio "odbačen".

Kako vidimo, na promatrani dio nosača djeluju vanjske sile  $A$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ , te sile u presječenim štapovima:  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  kojima "odbačeni" dio djeluje na promatrani dio nosača. Kod grafičkog postupka nije potrebno pretpostavljati pozitivne predznake u štapovima i označiti orijentacije. To ćemo učiniti na kraju postupka i onda označiti orijentacije sila u štapovima, odnosno odrediti njihove predznake.



Slika 15.

Kako vidimo na slici 15.b. rezultantu  $R_1$  vanjskih sila, koje djeluju na promatrani (lijevi) dio nosača, odredili smo pomoću poligona sila. Njen položaj smo odredili pomoću verižnog poligona (slika 15.a.). Iz poligona sila se vidi da je sila  $R_1$  rezultanta sila u zrakama 3 i 4, te će njezin položaj biti određen sjecištem tih zraka u verižnom poligonu (točka C). Naravno, pravac djelovanja rezultante  $R_1$  paralelan je s pravcem te sile iz poligona sila (slika 15.b.) Dakle, na promatrani dio nosača djeluju tri nepoznate sile u presječenim štapovima ( $S_1, S_2$  i  $S_3$ ) i jedna poznata sila  $R_1$ . Tako se došlo do četiri sile koje djeluju na promatrani dio nosača.

Sada su ostvareni uvjeti za primjenu Culmannovog postupka. Prvo je određeno presjecište pravaca djelovanja sila  $R_1$  i  $S_3$  i dobivena je točka D, kroz koju prolazi njihova rezultanta. Preostale dvije sile,  $S_1$  i  $S_2$ , se sijeku u čvoru 3. Dakle, njihova rezultanta prolazi kroz istu tu točku. Kako te dvije rezultante moraju biti u ravnoteži, one moraju ležati na istom pravcu. Spajanjem točaka D i 3 dobiven je pravac na kojem leže rezultante sila  $R_1$  i  $S_3$ , te  $S_1$  i  $S_2$ . Taj pravac se naziva Culmannovim pravcem i na slici je označen slovom K.

Da dobijemo sile u presječenim štapovima potrebno je konstruirati zatvoreni poligon sila. Kako se radi o četiri sile bit će to četverokut.

Kako moramo krenuti od poznate sile, prvo se uravnoteže sile u točki D, odnosno rezultanta  $R_1$  sa silom  $S_3$  i silom na pravcu K (rezultanta  $S_1$  i  $S_2$ ). Tako se dobije trokut  $R_1, S_3$  i K. Nakon toga se sila K, samo sa suprotnim smislom uravnotežuje s preostalim dvjema silama,  $S_1$  i  $S_2$ . Tako se sila K poništava i dobivamo zatvoreni četverokut čije su stranice poznata rezultanta  $R_1$  i tri nepoznate sile u presječenim štapovima (slika 15.c.).

Iz dobivenog zatvorenog četverokuta se mogu očitati veličine sila u štapovima, a smisao sila prenijeti u plan položaja (na štapove). Kako se vidi, sila  $S_3$  je pozitivna (vlačna), dok su sile  $S_1$  i  $S_2$  negativne (tlačne).



## 4. Grafičko određivanje pomaka čvorova

Općenito, djelovanjem opterećenja na rešetkastu konstrukciju dolazi do deformacije elemenata konstrukcije i pomaka u odnosu na početni položaj. Kako se ovdje radi o rešetkastim konstrukcijama, čiji su elementi aksijalno opterećeni štapovi, razumljivo je da će, zbog njihovih deformacija, doći do pomaka čvorova konstrukcije.

Kod praktičnog proračuna rešetkastih konstrukcija potrebno je odrediti pomake pojedinih čvorova nosača, ili liniju pomaka cijelog nosača u određenom pravcu.

Za određivanje pomaka čvorova primjenjuju se dva postupka:

1. Grafički postupak poznat u literaturi kao Williotov plan pomaka,
2. Analitički postupak pomoću relativnih kutova zaokreta štapova u čvoru. Ovaj postupak je poznat pod nazivom postupak "elastičnih težina" ili Mohrova analogija.

Ovdje ćemo se zadržati samo na grafičkom postupku, odnosno Williotovu planu pomaka. Slike u ovom poglavlju preuzete su iz udžbenika [2] i [3].

### 4.1. Williotov plan pomaka

Kako smo već naveli, pod djelovanjem opterećenja na rešetkasti nosač dolazi do deformacija štapova, odnosno promjene njihove duljine. Kako su ti štapovi vezani u čvorove, onda dolazi i do pomaka čvorova rešetkastog nosača. Dakle, određivanje tih pomaka temelji se na crtanju plana pomaka iz poznatih promjena duljine štapova  $\Delta l$  i pomaka susjednih čvorova. Postupak crtanja plana pomaka analogan je postupku crtanja plana brzina iz kinematike.

Prije početka samog postupka, potrebno je odrediti promjene duljine svih štapova rešetkastog nosača.

Ovdje ćemo uzeti u obzir samo promjenu duljine štapa zbog djelovanja uzdužne sile, dok ćemo ostale zanemariti. Dakle, promjena duljine štapa zbog uzdužne sile određena je izrazom:

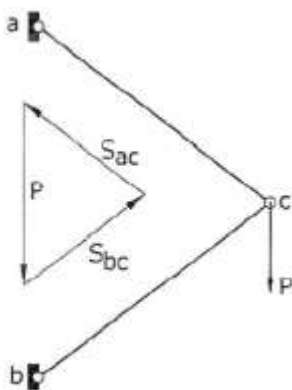
$$\Delta L_i = \frac{S_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$$

Za ilustraciju ovog postupka, početak ćemo s jednostavnim primjerom. Na slici 16. prikazan je najjednostavniji sistem sastavljen od dva štapa i jednog čvora u kojem djeluje sila P. Iz ravnoteže čvora C određuju se veličine sila u štapovima sistema, a sukladno njima i promjene duljina štapova:

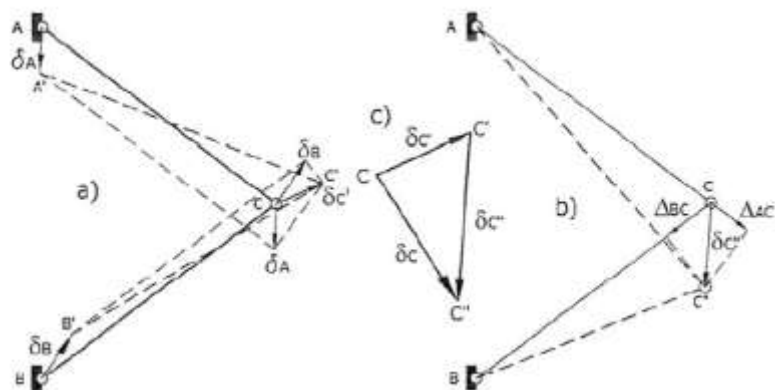
$$\Delta L_{AC} = \frac{S_{AC} \cdot L_{AC}}{E \cdot A_{AC}} \quad \Delta L_{BC} = \frac{S_{BC} \cdot L_{BC}}{E \cdot A_{BC}}$$

Točka A i B mogu biti susjedni čvorovi ili ležajevi kojima su poznati pomaci. U prvom koraku odredit ćemo pomak točke C zbog pomaka točaka A i B. Kako bismo to učinili zamišljamo da je spoj štapova u točki C raskinut, te su oni translacijom pomaknuti u položaje A'C' i B'C'. Međutim, u stvarnosti, štapovi su i dalje zglobno vezani u točki C. Zbog toga je potrebno zarotirati štapove oko njihovih točaka A' i B', kako bismo dobili položaj točke C'.

Vektor točke C ( $\vec{\delta}_C$ ) zbog pomaka točke A ( $\delta_A$ ) i točke B ( $\delta_B$ ) prikazan na slici 17.a.



Slika 16.



Slika 17.

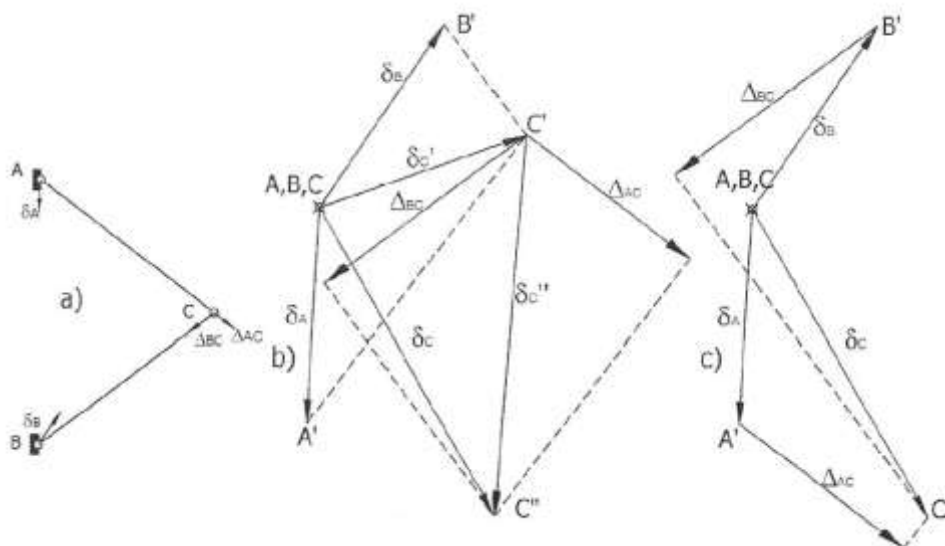
U drugom koraku ćemo odrediti pomak točke C zbog deformacije štapova. Vidimo da je štapa AC vlačni, a BC tlačni. Zato ćemo na pravac  $\overline{AC}$  nanijeti njegovo produljenje  $\Delta L_{AC}$ , a na pravac  $\overline{BC}$  skraćivanje štapa  $\Delta L_{BC}$ . Opet je potrebno štapove zarotirati oko njihovih točaka A, odnosno B, kako bi doveli do poklapanja njihovih krajeva u točki C''. Kako se ovdje radi o malim deformacijama i malim kutovima rotacije, krajevi štapova opisuju vrlo kratke kružne lukove, ti lukovi se zamjenjuju njihovim tangentama. Zbog toga, iz vrhova vektora pomaka, povlačimo okomice na pravce štapova i u njihovom sjecištu dobivamo pomaknuti položaj čvora C u točki C'' (slika 17.b.). Vektor pomaka točke C ( $\vec{\delta}_C$ ) zbog promjene duljine štapa  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  prikazan je na slici 17.b.

U trećem, završnom, koraku određen je ukupni pomak točke C. Kako su pomaci vektori, onda je ukupni pomak točke C ( $\overrightarrow{\delta_C}$ ) jednak vektorskom zbroju pomaka koje smo odredili u prethodnim koracima (slika 17.c.). Dakle:

$$\overrightarrow{\delta_C} = \overrightarrow{\delta_C'} + \overrightarrow{\delta_C''}$$

Kako su promjene duljina štapova i pomaci čvorova vrlo male veličine u odnosu na duljine štapova, razumljivo je da će ovakav postupak na nosaču s većim brojem štapova biti mukotrpan i zamoran, a rezultat nepouzdan. Međutim, postupak određivanja pomaka točke C moguće je provesti neovisno o mjerilu slike nosača. Taj postupak se provodi u znatno većem mjerilu i obliku posebnog plana, čime se izbjegava spomenuta nepouzdanost.

Na slici 18.b. prikazan je postupak određivanja pomaka točke C neovisno o mjerilu slike nosača. Mjerilo za plan pomaka je puno veće od mjerila slike nosača, čime se postiže veća pouzdanost rezultata kao i preglednost samog postupka.



Slika 18.

Prvo se proizvoljno odabere položaj točaka A, B i C. Uobičajeno je da se ova točka naziva pol, odnosno početni položaj, a obilježava se slovom "O". Iz tog početnog položaja nanose se, u odabranom mjerilu, vektori pomaka  $\overrightarrow{\delta_A}$  i  $\overrightarrow{\delta_B}$ . Iz kraja vektora  $\overrightarrow{\delta_A}$  povlači se okomica na pravac AC, a iz kraja vektora  $\overrightarrow{\delta_B}$  okomica na pravac BC. Na sjecištu ovih okomica nalazi se položaj točke C'. Spojnica točaka C i C' je vektor  $\overrightarrow{\delta_C'}$  koji određuje pomake točke C zbog pomaka točaka A i B.

Sada se iz točke C' nanosi vektor  $\overrightarrow{\Delta L_{AC}}$  paralelno pravcu AC i vektor  $\overrightarrow{\Delta L_{BC}}$  paralelno pravcu BC. Ovi vektori predstavljaju unaprijed određene promjene duljina štapova, odnosno

njihova produljenja ili skraćenja. Stoga treba obratiti pozornost na smjer ovih vektora, kako bismo ih ispravno nacrtali u planu sila.

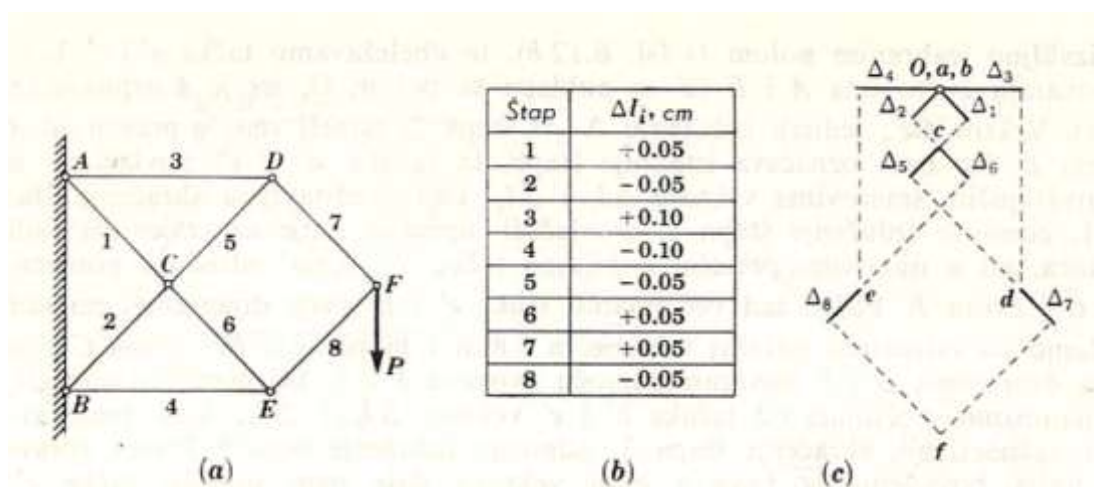
Iz kraja vektora  $\overrightarrow{\Delta L_{AC}}$  povlači se okomica na pravac AC, a iz kraja vektora  $\overrightarrow{\Delta L_{BC}}$  okomica na pravac BC. Na sjecištu ovih okomica nalazi se položaj točke C''. Spojnica točaka C' i C'' je vektor  $\overrightarrow{\delta c''}$  koji određuje pomak točke C zbog promjene duljine štapova.

Spojnica točaka C i C'' je vektor  $\overrightarrow{\delta_c}$  koji određuje ukupni pomak točke C.

Na slici 18.b. prikazan je Williotov plan pomaka za najjednostavniju konstrukciju sa slike 18.a. Na slici 18.c. prikazan je još jedan jednostavniji plan pomaka, bez određivanja položaja točke C', kojem postupak crtanja ovdje nećemo opisivati.

## 4.2. Pomaci konzolnih rešetkastih nosača

Prethodno opisani postupak crtanja plana pomaka možemo primijeniti na rešetkaste nosače. Za primjer, promotrit ćemo konzolni rešetkasti nosač prikazan na slici 19. Pretpostavit ćemo da su promjene duljine štapova prethodno određene, kako je prikazano u tablici na slici 19.b.



Slika 19.

Kako su promjene duljina štapova, kao i pomaci čvorova, vrlo male veličine u odnosu na duljine štapova potrebno je odrediti mjerilo u kojem ćemo crtati plan pomaka.

Počinjemo od pomaka čvora C, koji je štapovima 1 i 2 povezan s nepomičnim čvorovima A i B. Ti čvorovi su nepomični, te se točke a i b poklapaju s polom O. Dakle, polazimo od pola O nanositi vektore  $\Delta_1$  i  $\Delta_2$  paralelno štapovima 1, odnosno 2 pazeći pri tome na predznake tih produljenja. Naime, predznak (+) predstavlja produljenje, a predznak

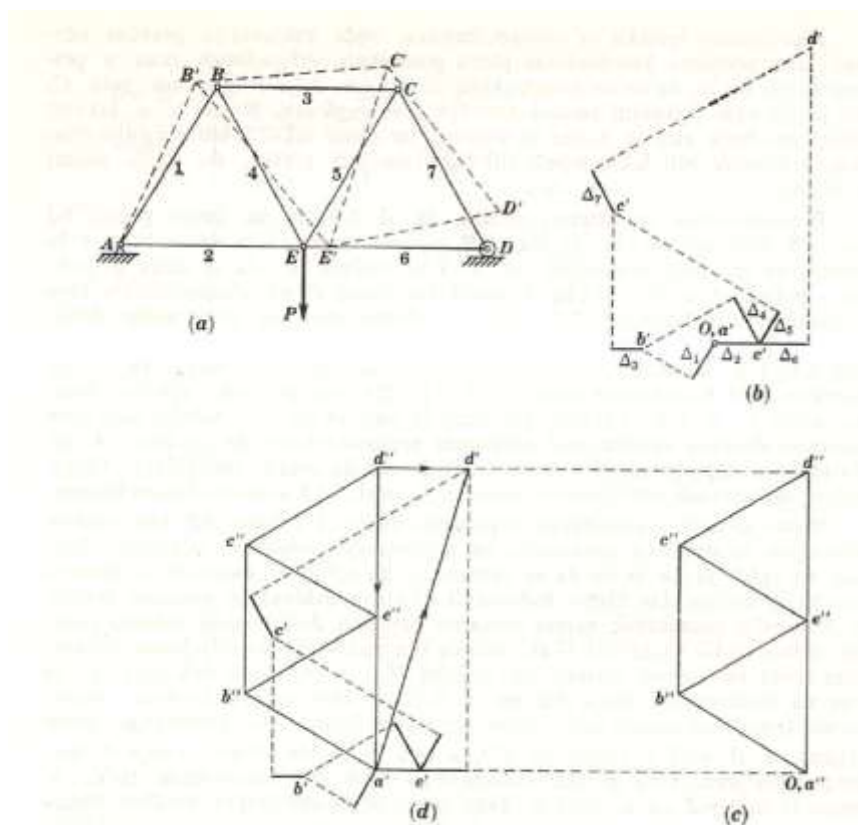
(-) skraćenje štapova. Sada, iz krajeva tih vektora povlače se okomice na te vektore, odnosno na pravce štapova 1 i 2. Sjecište tih okomica određuje točku  $c$ , a vektor  $\vec{O}_c$  određuje pomak čvora C. Kako imamo pomak čvora C, sada možemo odrediti pomake čvorova D i E. No, krenimo redom na čvor D, koji je štapovima 3 i 5 vezan na čvorove A i C. Iz točke "a" nanosimo vektor  $\Delta_3$ , a iz točke "c" vektor  $\Delta_5$ , sukladno njihovim predznacima. Zatim, iz krajeva tih vektora povlače se okomice na te vektore i u njihovom sjecištu dobivamo točku "d". Vektor  $\vec{O}_d$  određuje pomak čvora D.

Postupak se nastavlja, na analogan način, za čvor E i završava na čvoru F. Sada imamo potpun Williotov plan pomaka, prikazan na slici 19.c., iz kojeg se može očitati pomak svakog čvora zadanog nosača. Dakako, pri očitavanju pomaka moramo obratiti pozornost na mjerilo u kojem je plan nacrtan.

### **4.3. Pomaci grednih rešetkastih nosača**

Kod konzolnog rešetkastog nosača, iz prethodnog primjera, plan pomaka smo jednoznačno odredili zbog poznatih pomaka dviju točaka (A i B). No, to nije slučaj kod grednih rešetkastih nosača. Naime, kod rešetkastog nosača oslonjenog kao prosta greda, poznat nam je pomak jedne točke, tj. nepomičnog ležaja i pravac pomaka pomičnog ležaja. Stoga je potrebno uvesti dodatnu pretpostavku, uz koju je moguće nacrtati plan pomaka.

Pokažimo to na primjeru rešetkastog nosača prikazanog na slici 20. Prije samog crtanja plana pomaka, potrebno je odrediti produljenja, odnosno skraćjenja štapova rešetkastog nosača. Ovaj proračun je lako izvesti, pa nećemo ulaziti u detalje tog proračuna, već ćemo pretpostaviti da je to već napravljeno.



Slika 20.

Prije samog crtanja plana odredili smo mjerilo u kojem ćemo ga crtati. Započinjemo od čvora A (nepomični ležaj) i uvodimo dodatnu pretpostavku da štap AE zadržava svoj horizontalni položaj i nakon deformacije. Prema tome, čvor E ima samo horizontalni pomak jednak produljenju  $\Delta_2$  štapa 2.

Kako poznajemo pomake dviju točaka (A i E) sada možemo odrediti pomak čvora B, povezanog za ova dva čvora štapovima 1 i 4. Iz proizvoljno odabrane točke O, kao pola, započinjemo konstruiranje plana pomaka postupajući kao u prethodni primjerima (slika20.b.). Točku  $e'$  dobijemo na način da se iz pola O nanese vektor  $\vec{Oe'}$ , koji je jednak produljenju štapa 2, uz napomenu da je štap AE zadržao svoj horizontalni položaj (dodatna pretpostavka).

Sada iz točaka  $a'$  i  $e'$  crtamo, u odgovarajućim smjerovima, vektore  $\Delta_1$  i  $\Delta_4$  koji predstavljaju skraćenje štapa 1, odnosno produljenje štapa 4. Iz vrhova ovih vektora povlačimo okomice na njihove pravce, te u njihovom sjecištu dobivamo točku  $b'$ . Vektor  $\vec{Ob'}$  određuje pomak čvora B. Kako sada imamo točke  $b'$  i  $e'$ , možemo odrediti položaj točke  $c'$ , odnosno pomak čvora C. Čvor C je štapovima 3 i 5 vezan za čvorove B i E. Stoga ćemo u točkama  $b'$  i  $e'$  nanijeti odgovarajuće vektore  $\Delta_3$  i  $\Delta_5$ , koji predstavljaju skraćenje štapa 3, odnosno produljenje štapa 5. Sjecište okomica iz njihovih vrhova određuje nam točku  $c'$ . Na analogan način dolazimo i do posljednje točke  $d'$  ovog plana pomaka.

Kako vidimo, sada imamo sve potrebne točke plana pomaka ( $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ ,  $d'$  i  $e'$ ). Vektori povučeni iz pola O do ovih točaka predstavljaju nam, i po pravcu i po iznosu, tražene pomake odgovarajućih čvorova rešetke. Nanoseći ih na nosač, u prikladno smanjenom mjerilu, možemo prikazati deformirani oblik rešetkastog nosača, označen isprekidanim linijama na slici 20.a.

Deformirani oblik rešetke ( $A'B'C'D'E'$ ) ne zadovoljava uvjet na ležaju D. Naime, točka D je pokretni ležaj koji se može pomicati samo po horizontalnom pravcu. Međutim, pomak  $DD'$  koji nam daje plan pomaka, nije horizontalan. To je posljedica dodatne pretpostavke da štap AE ostaje horizontalan i nakon deformacije nosača. Zbog toga moramo izvršiti korekciju te netočne pretpostavke da zadovoljimo uvjet na ležaju D.

Kako bismo zadovoljili ovaj uvjet, moramo zaokrenuti deformiranu rešetku oko nepomičnog ležaja A. To zaokretanje se vrši sve dok točka  $D'$  ne dođe na horizontalnu liniju AD. Ovim su zadovoljeni uvjeti na ležajevima nosača, ali zbog zaokretanja deformirane rešetke došlo je do dodatnih pomaka čvorova. Dakle, konačni pomaci čvorova se dobiju kao vektorski zbroj pomaka nastalih zbog zaokretanja rešetke i pomaka iz prvotnog Williotovog plana pomaka (slika 20.b.).

Pomaci, nastali zbog zaokretanja, određuju se na sljedeći način. Već smo napomenuli da su stvarni pomaci čvorova jako mali u odnosu na dužine štapova, odnosno na veličinu nosača. Stoga je deformirani oblik rešetke  $AB'C'D'E'$  jako blizak svom nedeformiranom obliku, te se može uzeti da se čvor  $D'$ , za vrijeme zaokretanja oko točke A, pomiče okomito na pravac AD. Također, isto se može reći i za ostale čvorove rešetke. Dakle, čvor  $B'$  se pomiče okomito na pravac AB, čvor  $C'$  okomito na pravac AC i na kraju čvor  $E'$  na pravac AE. Kako se ovdje radi o rotaciji oko iste točke, jasno je da su veličine tih pomaka upravo proporcionalne radijusima rotacije. Očigledno, traženi pomak točke  $D'$  jednak je vertikalnoj komponenti vektora pomaka  $\overrightarrow{DD'}$ , predstavljenog vektorom  $\overrightarrow{O_{a'}}$  na planu pomaka (slika 20.b.). Na analogan način se određuju odgovarajući pomaci ostalih čvorova kako je prikazano na slici 20.c., u kojoj je uzeto da je vektor  $\overrightarrow{O_{a'}}$  jednak vertikalnoj komponenti vektora  $\overrightarrow{O_{a'}}$  sa slike 20.b. Ostale pomake zbog zaokretanja nosača određujemo ucrtavanjem figure  $Ob''c''d''e''$ , koja je geometrijski slična figuri ABCDE same rešetke, ali zaokrenute za  $90^\circ$  u odnosu na pravi položaj rešetke. Dakle, vektori  $\overrightarrow{b''O''}$ ,  $\overrightarrow{c''O''}$ ,  $\overrightarrow{d''O''}$  i  $\overrightarrow{e''O''}$  predstavljaju pomake čvorova zbog zaokretanja deformirane rešetke. Kako smo spomenuli, vektori su upravo proporcionalni svojim radijusima rotacije i okomiti su na njih. Ovo proizlazi iz geometrijske sličnosti i zaokrenutosti figura za  $90^\circ$ .

Kako bismo pomake od zaokretanja (slika 20.c.) i pomake iz prvobitnog Williotovog plana (slika 20.b.) prikazali kao konačan plan, napravili smo superpoziciju plana sa slike 20.c. na plan sa slike 20.b. tako da se polovi poklapaju, što je prikazano na slici 20.d.

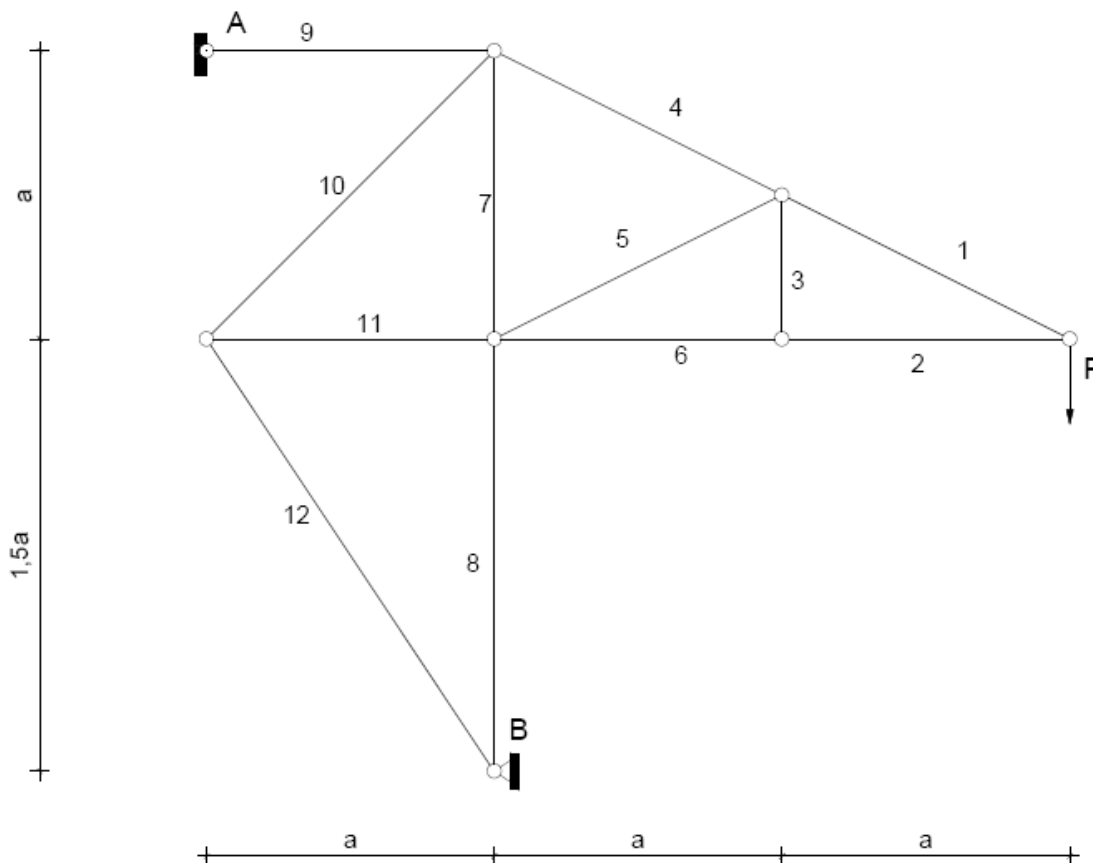
Sada imamo konačne pomake svih čvorova koji su predstavljeni vektorima  $\overrightarrow{b''b'}$ ,  $\overrightarrow{c''c'}$ ,  $\overrightarrow{d''d'}$  i  $\overrightarrow{e''e'}$ .

## 5. Primjeri

### 5.1. Primjer 1.

MJ: 1:100

$P=20 \text{ kN}$   
 $a=4,00 \text{ m}$



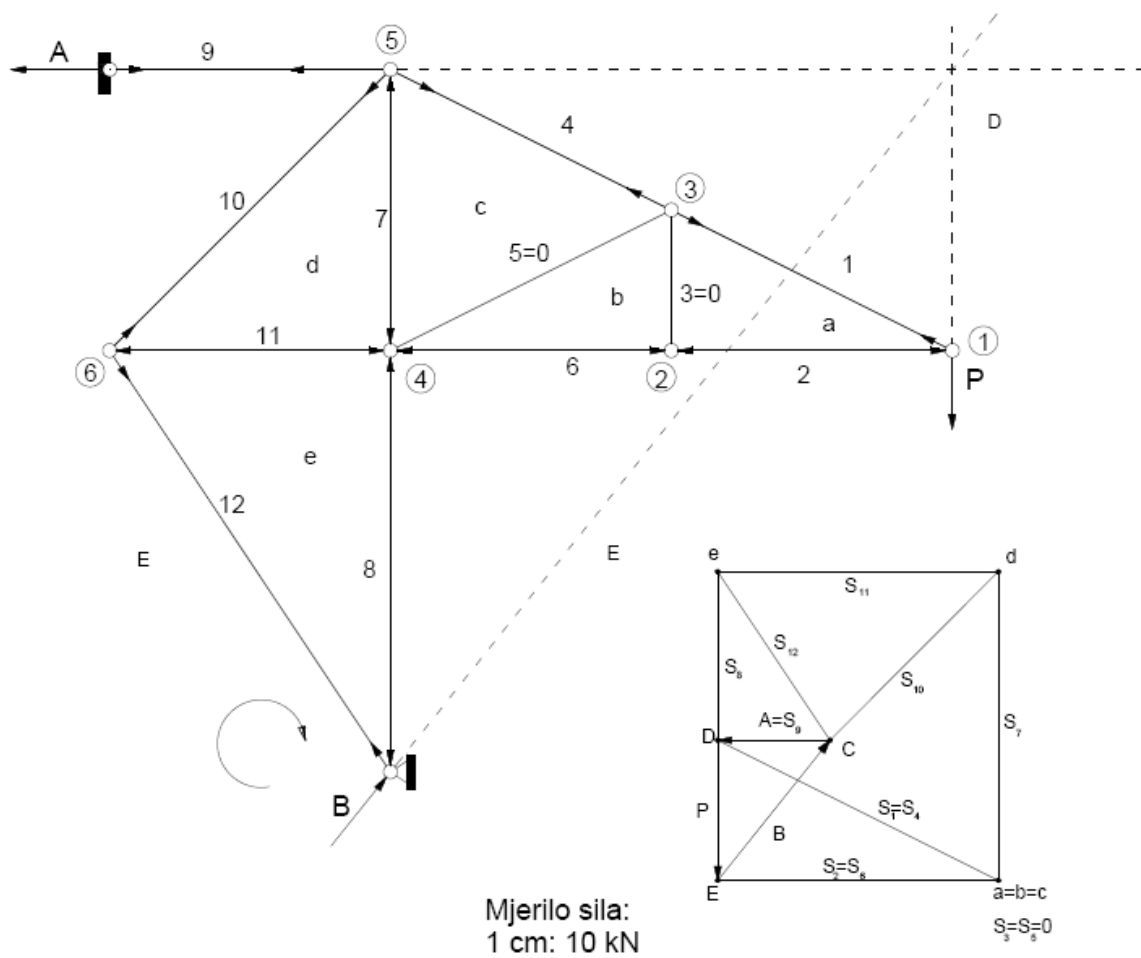
Sile u štapovima su određene analitičkim postupkom, kojeg nećemo prikazivati. Ovaj izračun nam služi za usporedbu rezultata dobivenih grafičkim postupkom:

| Štap | Sila u štapu (kN) |
|------|-------------------|
| 1    | +44,72            |
| 2    | -40,00            |
| 3    | 0,00              |
| 4    | +44,72            |
| 5    | 0,00              |
| 6    | -40,00            |
| 7    | -44,00            |
| 8    | -44,00            |
| 9    | +16,00            |
| 10   | +33,94            |
| 11   | -40,00            |
| 12   | +28,84            |



### 5.1.1. Maxwell-Cremonin plan sila

MJ: 1:100



Očitane reakcije ležajeva:

$$A=16,00 \text{ KN}$$

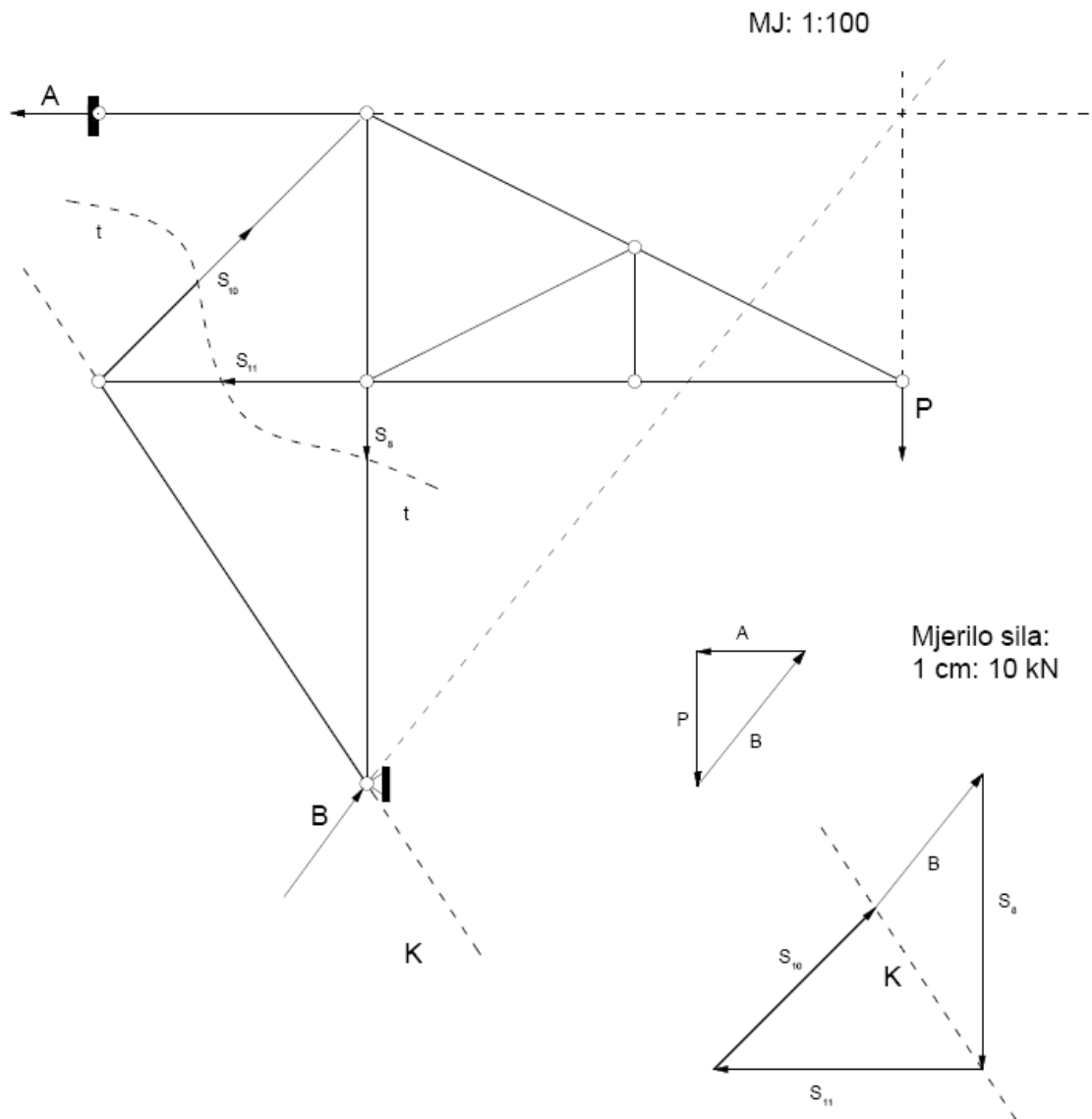
$$B=25,61 \text{ kN}$$

Očitane sile u štapovima:

| <i>Štap</i> | <i>Sila u štapu (kN)</i> |
|-------------|--------------------------|
| 1           | +44,67                   |
| 2           | -39,93                   |
| 3           | 0,00                     |
| 4           | +44,67                   |
| 5           | 0,00                     |
| 6           | -39,93                   |
| 7           | -44,00                   |
| 8           | -44,00                   |
| 9           | +16,00                   |
| 10          | +33,90                   |
| 11          | -39,93                   |
| 12          | +28,84                   |

### 5.1.2. Culmannov postupak

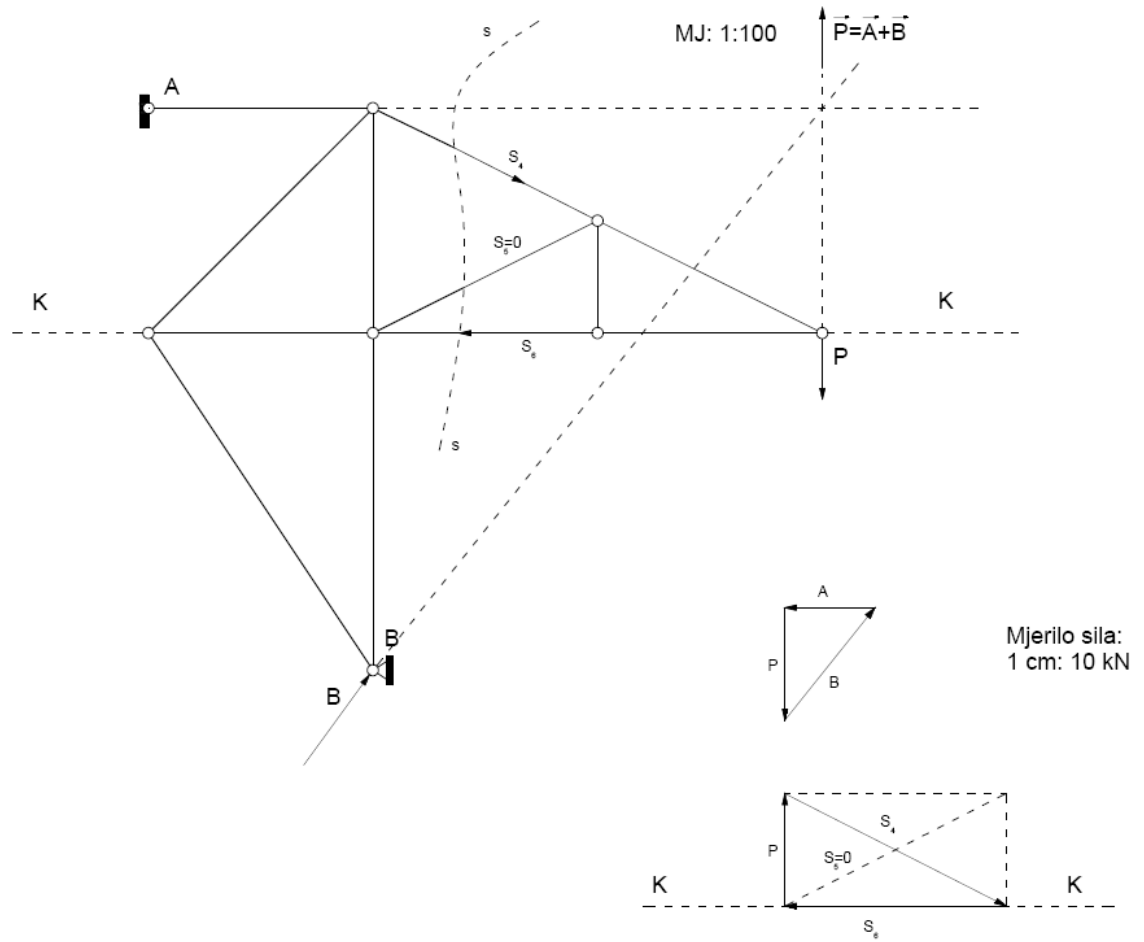
- Prva provjera



Očitane sile u štapovima:

| Štap | Sila u štapu (kN) |
|------|-------------------|
| 8    | 43,98             |
| 10   | 33,94             |
| 11   | 40,00             |

- **Druga provjera**

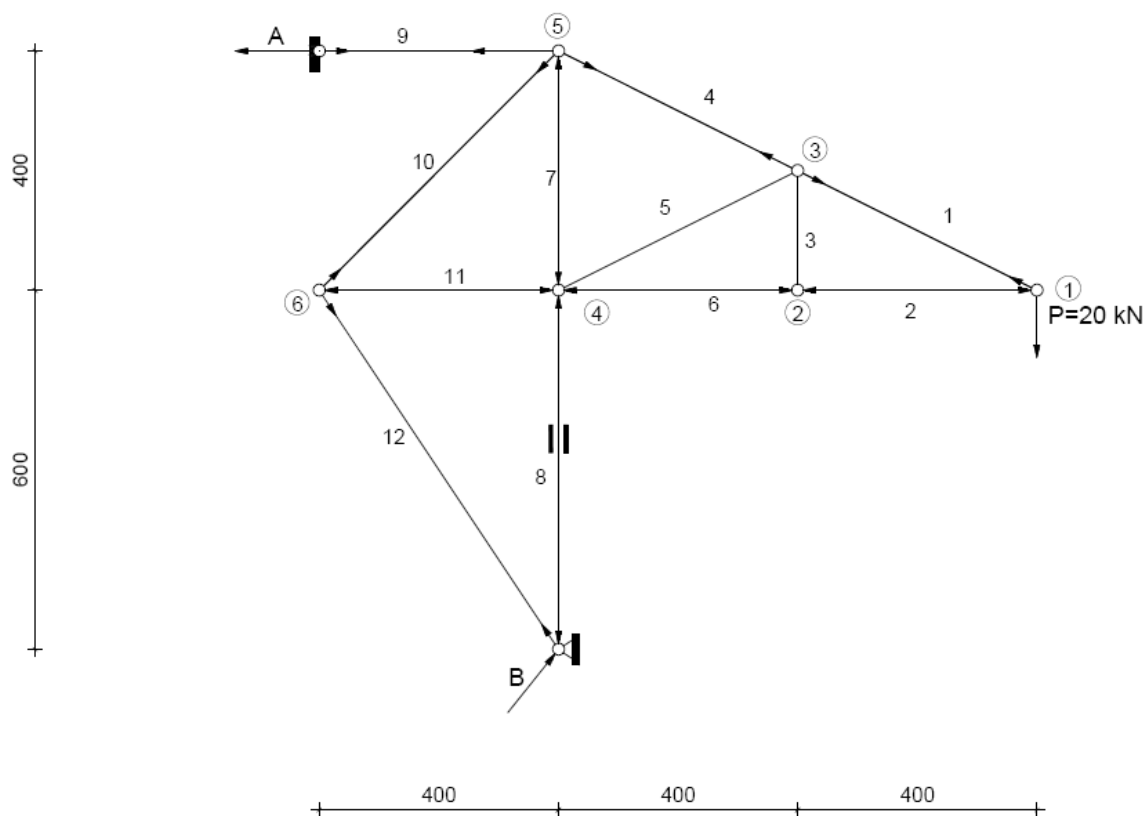


Očitane sile u štapovima:

| Štap | Sila u štapu (kN) |
|------|-------------------|
| 4    | 44,16             |
| 5    | 0,00              |
| 6    | 39,37             |

### 5.1.3. Williotov plan pomaka

MJ 1:100



Pretpostavka je da će štap br. 8 ostati u vertikalnom položaju, bez zaokretanja, te da se samo skraćuje.

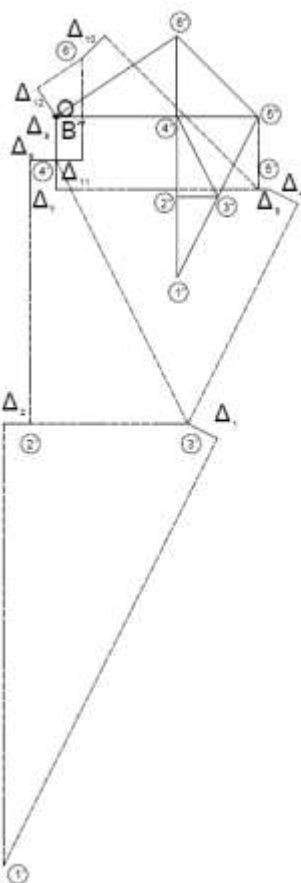
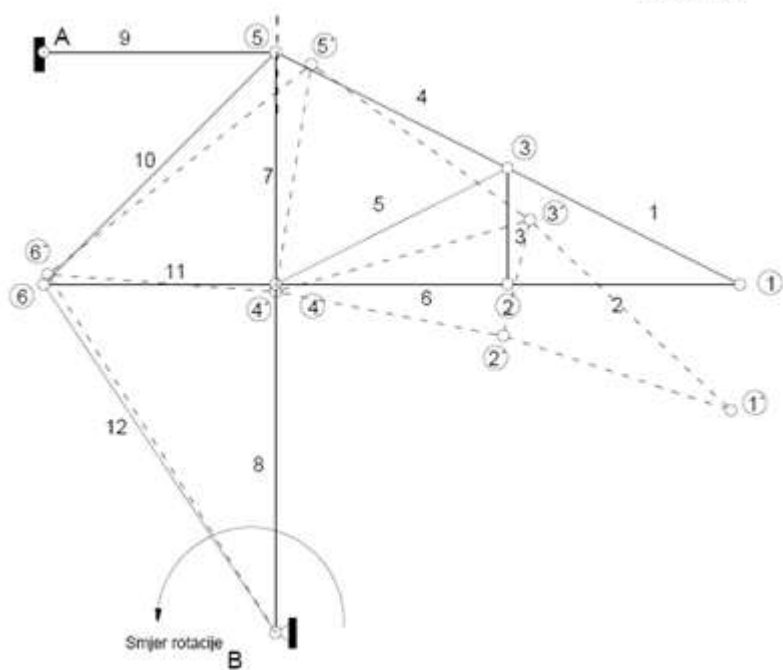
| Štap | Duljina (m) | Sila u štapu (kN) | $\Delta L_i$ (mm) |
|------|-------------|-------------------|-------------------|
| 1    | 4,47        | +44,72            | +0,95             |
| 2    | 4,00        | -40,00            | -0,76             |
| 3    | 2,00        | 0,00              | 0,00              |
| 4    | 4,47        | +44,72            | +0,95             |
| 5    | 4,47        | 0,00              | 0,00              |
| 6    | 4,00        | -40,00            | -0,76             |
| 7    | 4,00        | -44,00            | -0,84             |
| 8    | 6,00        | -44,00            | -1,26             |
| 9    | 4,00        | +16,00            | +0,31             |
| 10   | 5,66        | +33,94            | +0,91             |
| 11   | 4,00        | -40,00            | -0,76             |
| 12   | 7,21        | +28,84            | +0,99             |

$$E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

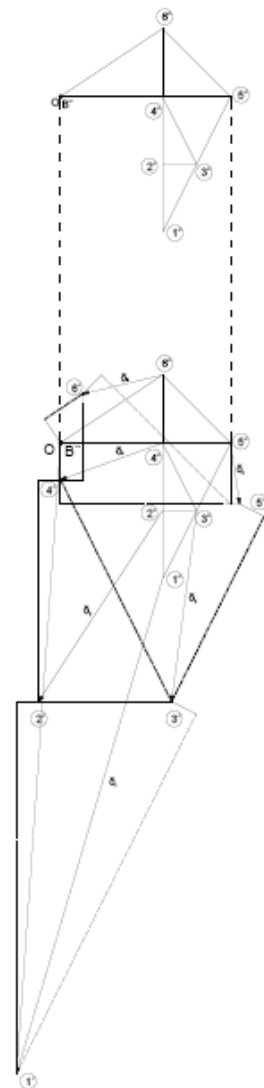
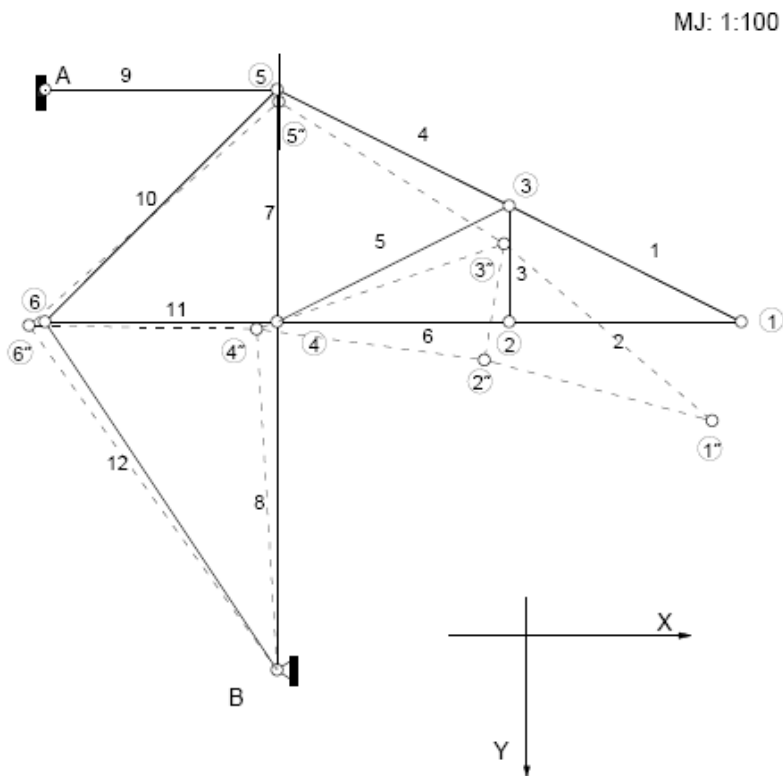
$$A=10^3 \text{ mm}^2$$

$$\Delta L_i = \frac{S_i \cdot L_i}{E \cdot A}$$

MJ: 1:100



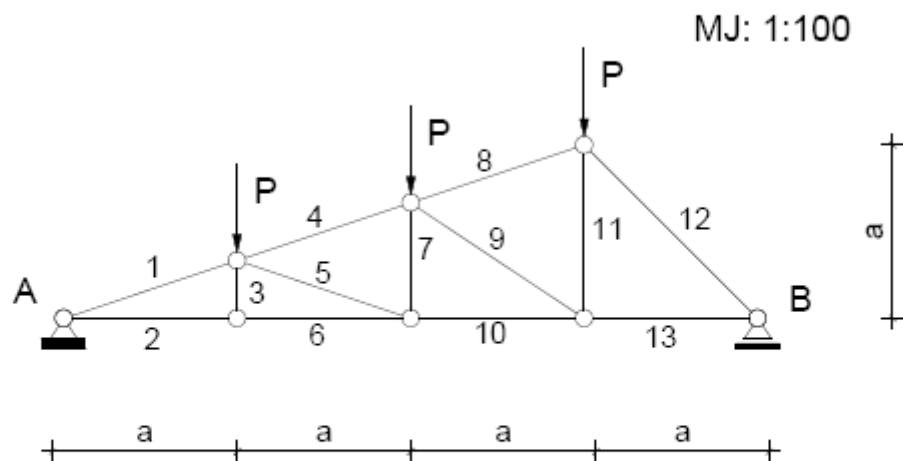
Mjerilo pomaka:  
5:1



Mjerilo pomaka:  
5:1

| Čvor | $\Delta x$ (mm) | $\Delta y$ (mm) | Pomak (mm) |
|------|-----------------|-----------------|------------|
| 1    | -5,03           | +17,05          | 17,78      |
| 2    | -4,27           | +6,58           | 7,85       |
| 3    | -8,64           | +6,58           | 6,64       |
| 4    | -3,51           | +1,26           | 3,73       |
| 5    | +0,30           | +2,10           | 2,12       |
| 6    | -2,75           | +0,65           | 2,83       |

## 5.2. Primjer 2.



$$P=60 \text{ kN}$$

$$a=2,00 \text{ m}$$

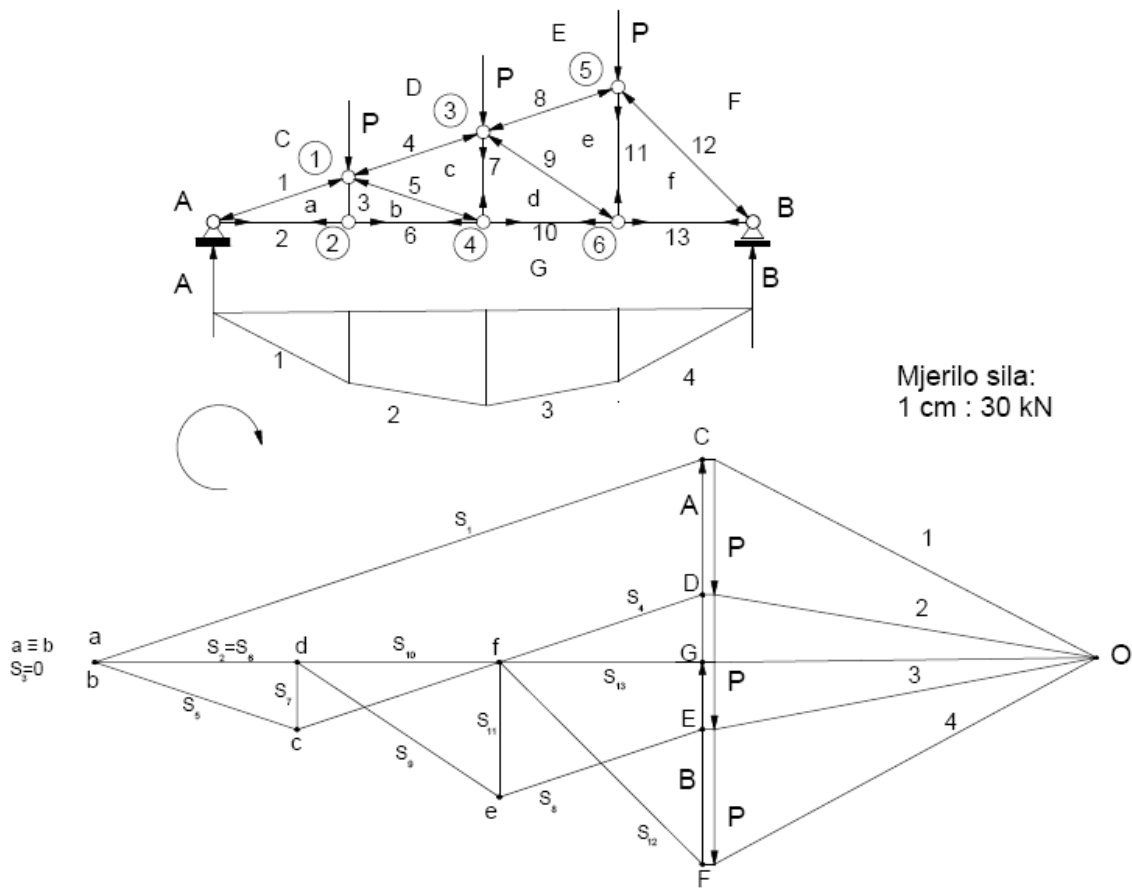
Sile u štapovima su određene analitičkim postupkom, kojeg nećemo prikazivati. Ovaj izračun nam služi za usporedbu rezultata dobivenih grafičkim postupkom:

| Štap | Sila u štapu (kN) |
|------|-------------------|
| 1    | - 284,60          |
| 2    | +270,00           |
| 3    | 0,00              |
| 4    | -189,70           |
| 5    | -94,90            |
| 6    | +270,00           |
| 7    | +30,00            |
| 8    | -94,90            |
| 9    | -108,20           |
| 10   | +180,00           |
| 11   | +60,00            |
| 12   | -127,20           |
| 13   | +90,00            |



### 5.2.1. Maxwell-Cremonin plan sila

MJ: 1:100



Očitane reakcije ležajeva:

A=90,00 KN

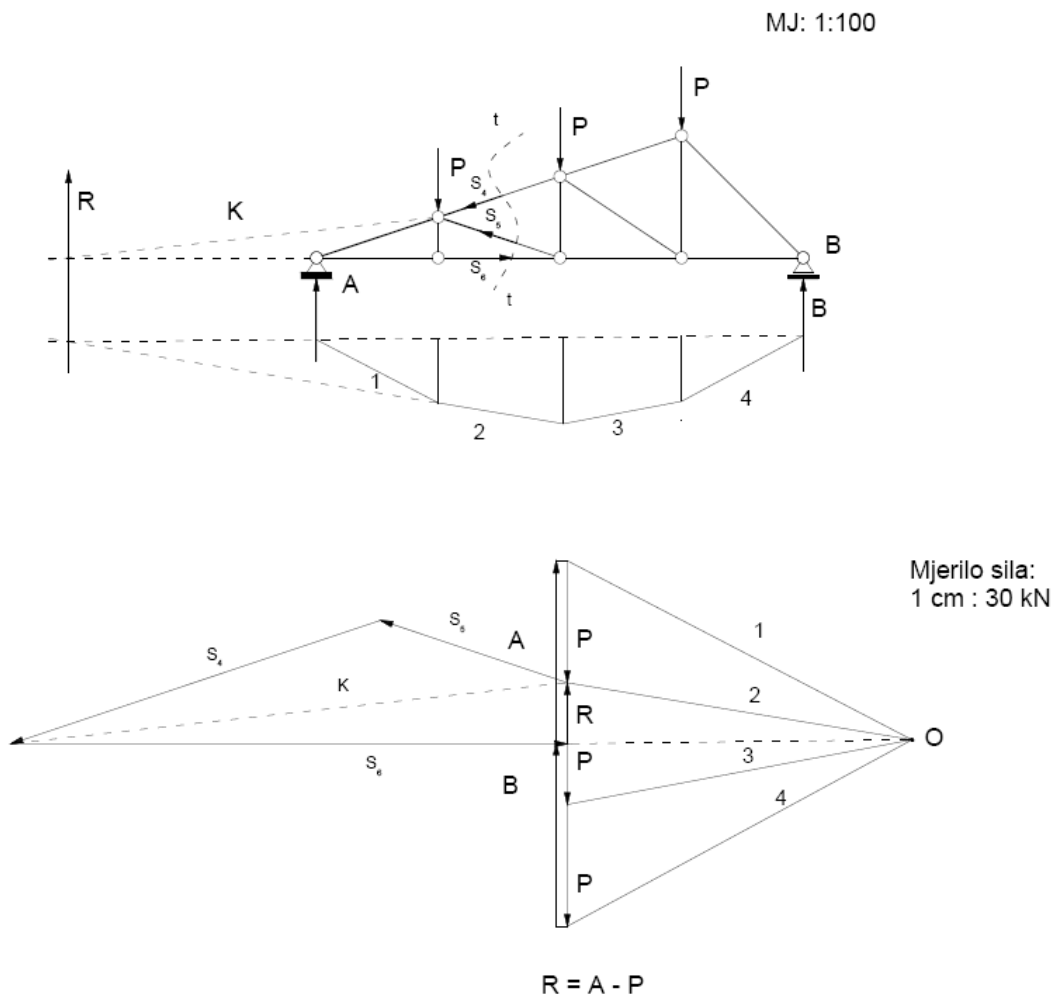
B=90,00 kN

Očitane sile u štapovima:

| <i>Štap</i> | <i>Sila u štapu (kN)</i> |
|-------------|--------------------------|
| 1           | -285,00                  |
| 2           | +270,00                  |
| 3           | 0,00                     |
| 4           | -190,20                  |
| 5           | -94,80                   |
| 6           | +270,00                  |
| 7           | +30,00                   |
| 8           | -95,10                   |
| 9           | -108,30                  |
| 10          | +180,00                  |
| 11          | +60,00                   |
| 12          | -127,50                  |
| 13          | +90,30                   |

## 5.2.2. Culmannov postupak

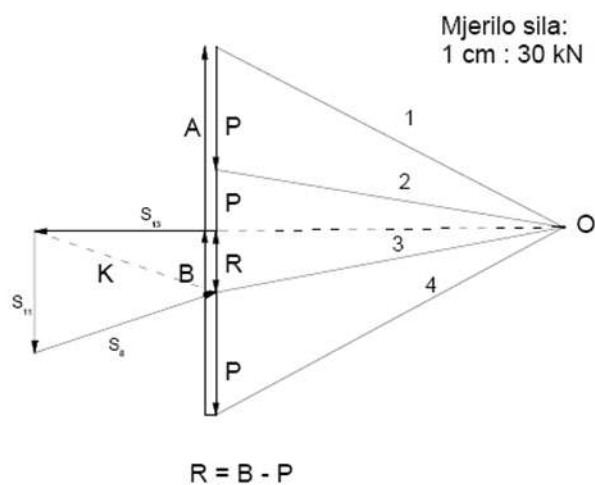
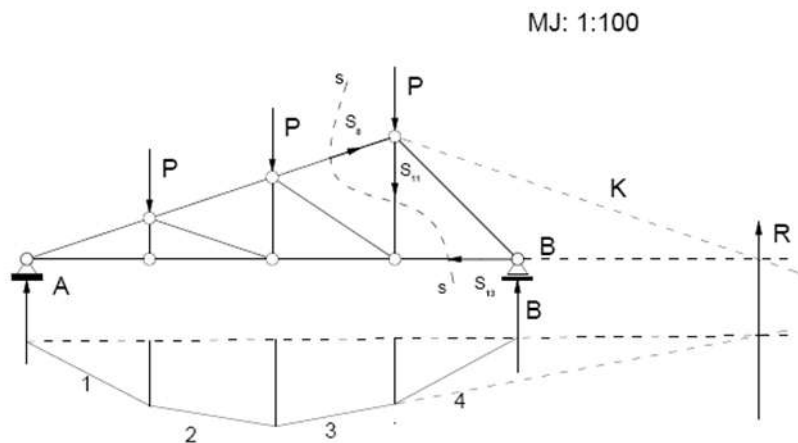
- Prva provjera



Očitane sile u štapovima:

| Štap | Sila u štapu (kN) |
|------|-------------------|
| 4    | 192,30            |
| 5    | 96,90             |
| 6    | 268,80            |

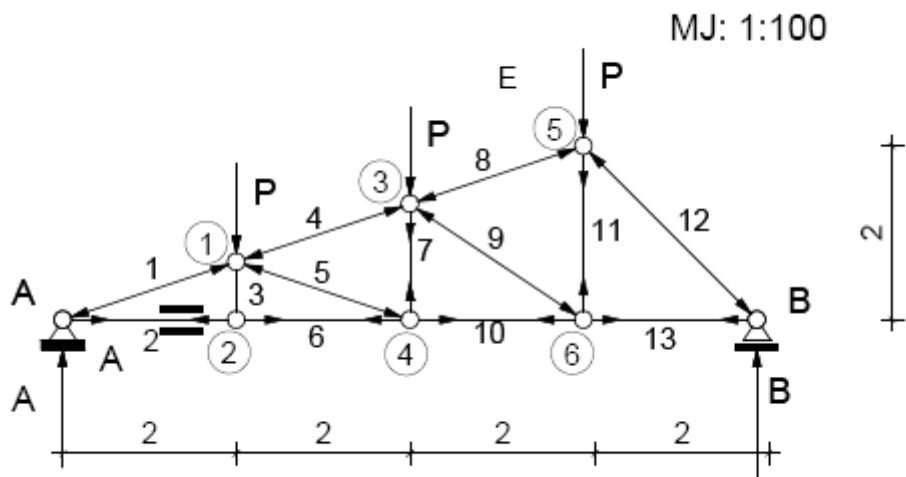
- **Druga provjera**



Očitane sile u štapovima:

| Štap | Sila u štapu (kN) |
|------|-------------------|
| 8    | 93,30             |
| 11   | 59,40             |
| 13   | 88,80             |

### 5.2.3. Williotov plan pomaka



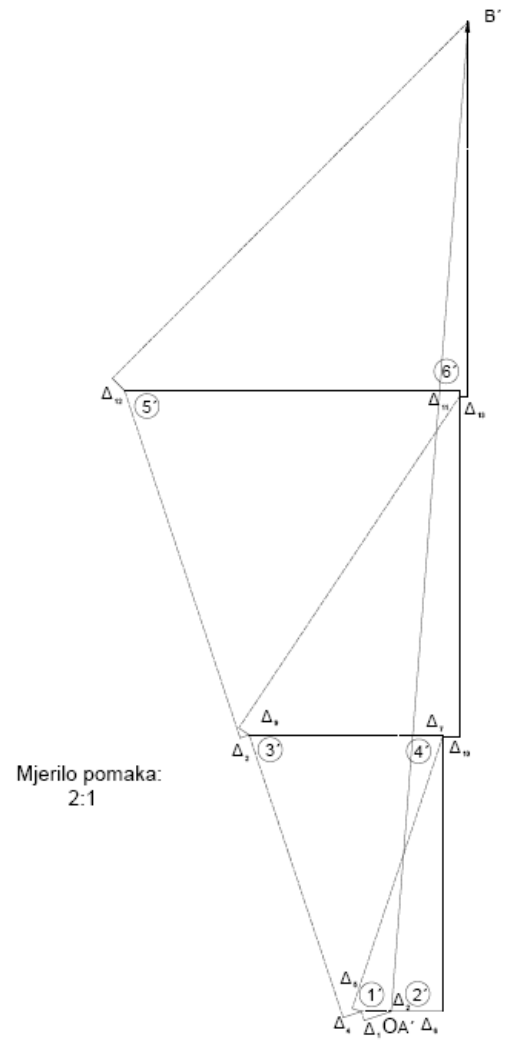
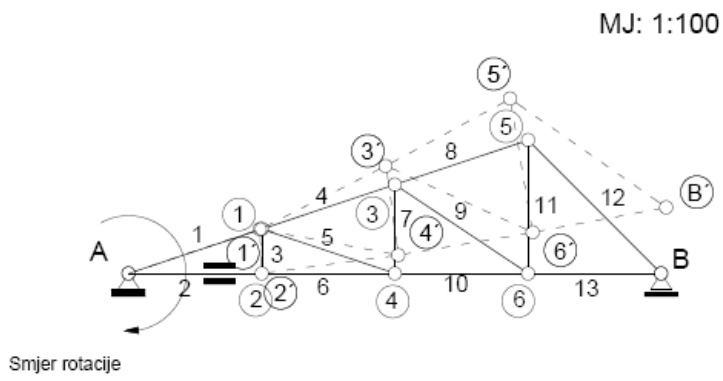
Pretpostavka je da će štap br. 2 ostati u horizontalnom položaju, bez zaokretanja, te da se samo produljuje.

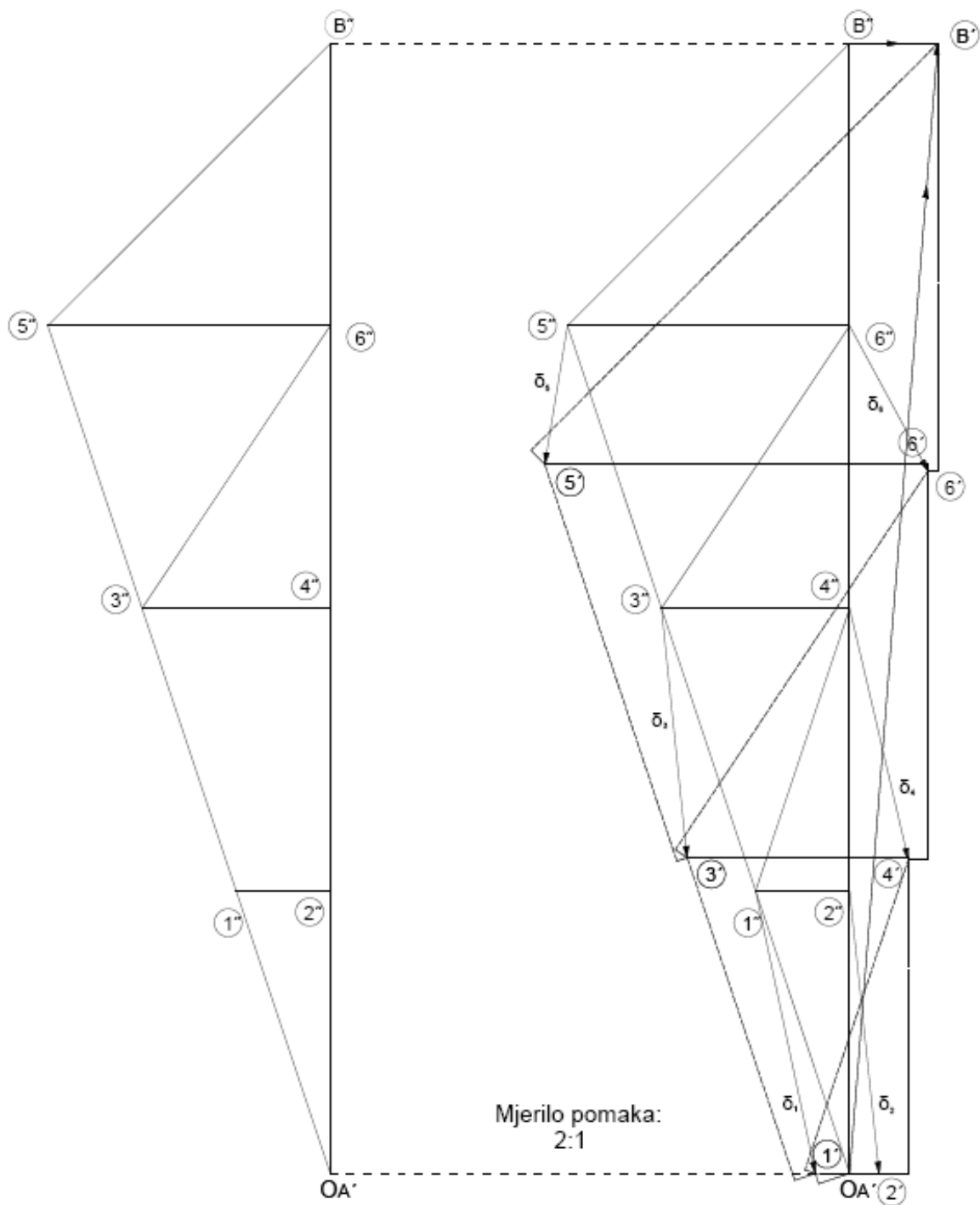
$$E=2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$A=10^3 \text{ mm}^2$$

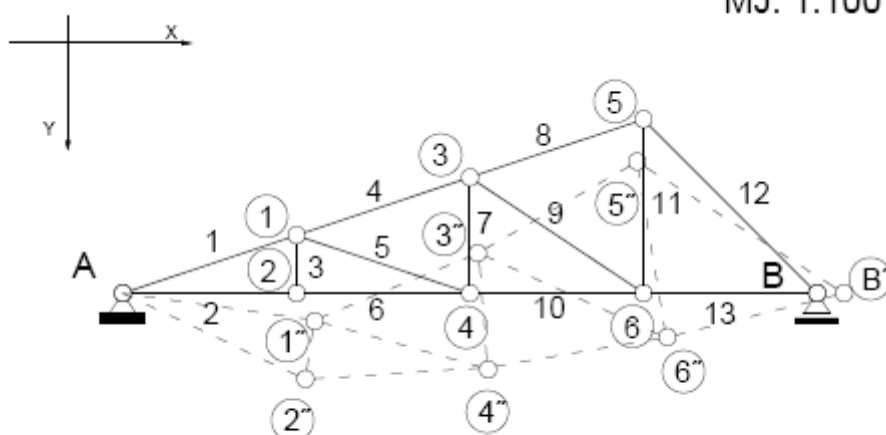
$$\Delta L_i = \frac{S_i \cdot L_i}{E \cdot A}$$

| Štap | Duljina (m) | Sila u štapu (kN) | $\Delta L_i$ (mm) |
|------|-------------|-------------------|-------------------|
| 1    | 2,11        | - 284,60          | -2,86             |
| 2    | 2,00        | +270,00           | +2,57             |
| 3    | 0,67        | 0,00              | 0,00              |
| 4    | 2,11        | -189,70           | -1,91             |
| 5    | 2,11        | -94,90            | -0,95             |
| 6    | 2,00        | +270,00           | +2,57             |
| 7    | 1,33        | +30,00            | +0,19             |
| 8    | 2,11        | -94,90            | -0,95             |
| 9    | 2,40        | -108,20           | -1,24             |
| 10   | 2,00        | +180,00           | +1,71             |
| 11   | 2,00        | +60,00            | +0,57             |
| 12   | 2,83        | -127,20           | -1,71             |
| 13   | 2,00        | +90,00            | +0,86             |





MJ: 1:100



| Čvor | $\Delta x$ (mm) | $\Delta y$ (mm) | Pomak (mm) |
|------|-----------------|-----------------|------------|
| 1    | +5,23           | +24,75          | 24,88      |
| 2    | +2,57           | +24,75          | 25,29      |
| 3    | +2,25           | +21,83          | 21,94      |
| 4    | +5,14           | +22,02          | 22,61      |
| 5    | -1,99           | +12,28          | 12,28      |
| 6    | +6,85           | +14,42          | 14,42      |
| A    | 0,00            | 0,00            | 0,00       |
| B    | +7,71           | 0,00            | 7,71       |



## 6. Zaključak

Iako se danas grafički postupci više ne upotrebljavaju za rješavanje konkretnih zadataka ili proračun konstrukcija, ipak zaslužuju da ih se bolje upozna. U ovom vremenu računala, kada analitički i numerički postupci prevladavaju, zornost grafičkih postupaka nam olakšava i produbljuje razumijevanje nekih statičkih pojmova i zakonitosti. Nedostaci ovih postupaka su u tome što ne daju opća rješenja i primjenjivi su na rješavanje samo statički određenih sistema. No, njihove su prednosti zornost, preglednost, jednostavnost, brzina rješavanja i zadovoljavajuća točnost. Možda, najveća vrijednost ovih postupaka leži u njihovoj edukativnosti, jer nam pružaju mogućnost da najlakše razumijemo odnose sila u konstrukciji kao i ponašanje same konstrukcije.

Za ilustraciju, u ovom smo radu grafičkim postupcima obradili dva primjera. Za potrebe rezultata dobivenih grafičkim postupcima sile u štapovima pojedinih nosača određene su analitičkim postupkom (koji nije prikazan u radu).

Zadaci su riješeni M-C planom sila i na taj način su određene sile u svim štapovima nosača. Culmannovim postupkom su određene sile u štapovima u dva kontrolna presjeka svakog primjera. Usporedbom dobivenih rezultata i rezultata dobivenih analitičkim postupkom možemo zaključiti da primijenjeni grafički postupci daju zadovoljavajuću točnost i da su izvršeni bez pogrešaka u postupku.

Grafičko određivanje pomaka čvorova rešetkastog nosača pokazali smo pomoću Williotovog plana pomaka. Također smo pokazali deformirani oblik rešetkastog nosača pod djelovanjem zadanog opterećenja.

I na kraju valja naglasiti da, pored svega navedenog, rezultati grafičkog postupka u velikoj mjeri ovise o našoj preciznosti crtanja.

## 7.LITERATURA

1. V. Simović: *Građevna statika I*, Građevinski institut Zagreb, 1998.
2. M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005.
3. S.Timošenko & D.H.Young: *Statika inženjerskih konstrukcija*, Građevinska knjiga, Beograd, 1956.
4. V. Andrejev: *Mehanika – I. dio, Statika*, Tehnička knjiga Zagreb, 1976.
5. A. Kiričenko: *Tehnička mehanika I. dio, Statika*, Građevinski institut Zagreb , 1990.