

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**

**PREDDIPLOMSKI STUDIJ**

**Petar Verteš**

**USPOREDBA CROSSOVOG I WERNER-CSONKA  
POSTUPKA**

**ZAVRŠNI RAD**

**Zagreb, rujan 2019.**

---

**SADRŽAJ RADA**

1. Uvod .....	3
2. Crossov postupak.....	4
2.1. Hardy Cross .....	4
2.2. Postupak rješavanja Crossove metode .....	5
2.3. Primjer Crossove metode .....	7
3. Werner-Csonka postupak.....	13
3.1. Otto Werner.....	13
3.2. Pál Csonka .....	13
3.3. Werner-Csonka postupak.....	14
3.4. Primjer Werner-Csonka metode .....	18
4. Usporedba.....	23
5. Zaključak .....	56
6. Literatura .....	60

**POPIS SLIKA**

Slika 2.1 .....	5
Slika 2.2.....	5
Slika 2.3.....	6
Slika 2.4 Momentni dijagram .....	12
Slika 3.1 .....	15
Slika 3.2 Momentni dijagram .....	22
Slika 4.1 Momentni dijagram .....	28
Slika 4.2 Momentni dijagram .....	33
Slika 4.3 Usporedba dijagrama Crossove i Werner-Csonka metode.....	34
Slika 4.4 Momentni dijagram .....	48
Slika 4.5 Momentni dijagram .....	54
Slika 4.6 Usporedba dijagrama Crossove i Werner-Csonka metode.....	55
Slika 5.1 Prvi zadatak .....	56
Slika 5.2 Drugi zadatak.....	56
Slika 5.3 Treći zadatak .....	57

## 1. Uvod

Na predavanjima iz kolegija *Građevna statika 2* učili smo par metoda koje olakšavaju rješavanje statički neodređenih sustava. Jedna od tih metoda je Crossova metoda pomoću koje se s jednostavnošću i lakoćom mogu odrediti dijagrami unutarnjih sila na statički neodređenim sistemima. Također, vrijeme rješavanja zadatka može se znatno smanjiti ukoliko iterativni postupak rješavamo koristeći računalo te izbjegnemo „ručno“ iteriranje koje pri većim sustavima može potrajati.

U ovome završnom radu raspravljat će se o usporedbi Crossovog postupka i Werner-Csonka postupka. Te dvije iterativne metode pripadaju relaksacijskim postupcima pomoću kojih se u koracima dolazi do sve točnijeg rješenja. Prikazat će se ove dvije metode te će se nastojati utvrditi prednosti i mane svakog postupka.

## 2. Crossov postupak

### 2.1. Hardy Cross

Hardy Cross bio je američki građevinski inženjer koji je 1930. godine razvio postupak iterativnog rješavanja sistema jednačbi ravnoteže za konstrukcije bez translatornih pomaka čvorova.

Rođen je 1885. godine u državi Virginiji u SAD-u. Imao je starijeg brata s kojim je pohađao Norfolk akademiju. Zatim je pohađao Hampden-Sydney College. Diplomirao je građevinu na Institutu za tehnologiju u Massachusettsu 1908. godine te se pridružuje (Missouri Pacific Railroad in St. Louis) odjelu za mostove. Nakon godinu dana vraća se na Norfolk Academy. Na Harvardu završava magisterij građevinarstva 1911. godine.

Cross postaje docent građevine na Brown Universityu, na kojem poučava sedam godina. Nakon kratkog povratka u praksu, 1921. godine prihvaća poziciju profesora građevine na University of Illinois. Na sveučilištu Illinois Hardy Cross razvija metodu distribucije momenta. Također, još jedna njegova poznata metoda je metoda rješavanja problema cjevovoda nastalih u kompleksnim vodoopskrbnim sustavima. Napustio je Illinois 1937. godine te postao pročelnik odsjeka za graditeljstvo na Sveučilištu Yale. Odlazi u mirovinu 1953. godine. Umire šest godina kasnije 1959. godine.

Dobitnik je raznih priznanja i nagrada među kojima su: počasni magisterij Sveučilišta Yale, *the Lamme Medal of the American Society for Engineering Education* (1994), *the Wason Medal for Most Meritorius Paper of the American Concrete Institute* (1935) i *the Gold Medal of the Institution of Structural Engineers of Great Britain* (1959).

## 2.2. Postupak rješavanja Crossove metode

Ako je prirast kuta zaokreta  $\Delta\rho_i^{(n_i+1)}$  čvora  $i$  tada je

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = 4k_{\{i,j\}}\Delta\rho_i^{(n_i+1)}.$$

Pri uravnoteženju čvora  $i$  zaokreti svih ostalih čvorova su spriječeni, pa je  $\Delta\rho_{j_i}^{n_{ij}} = 0$

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = -\frac{4k_{(i,j)}}{\sum_{j,i} 4k_{(i,j)}} M_i^{(n_i)}.$$

Zbroj koeficijenata krutosti svih štapova koji se spajaju u čvoru nazivamo rotacijskim koeficijentom krutosti čvora  $i$

$$k_i = \sum_{j,i} 4k_{\{i,j\}}.$$

Razdjelni koeficijent u čvoru  $i$  za štap  $\{i,j_i\}$

$$\mu_{i,j} = \frac{4k_{\{i,j\}}}{k_i} \quad \sum_{j,i} \mu_{i,j} = 1.$$

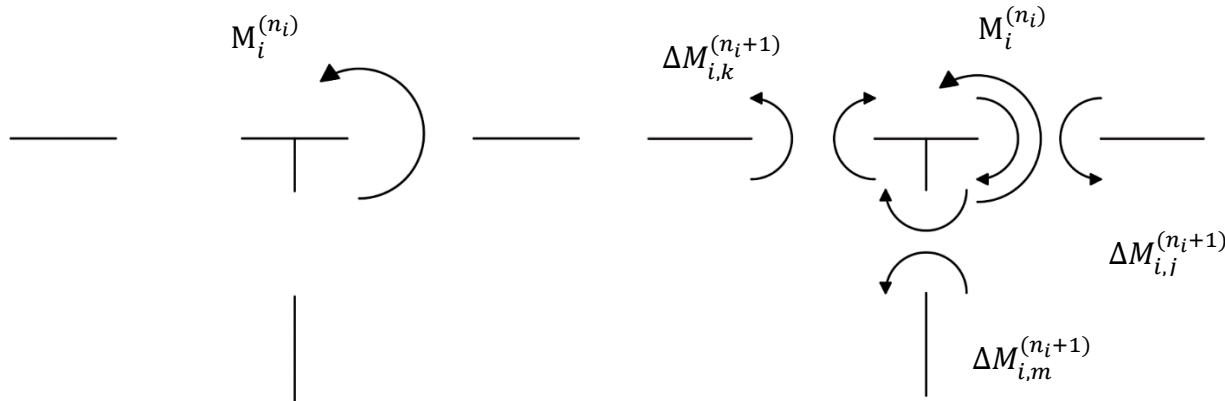
Uvrstimo li razdjelni koeficijent u jednadžbu za prirast kuta zaokreta dobivamo:

$$\Delta M_{i,j}^{(n_i+1)} = \mu_{i,j} M_i^{(n_i)}$$

$$\sum_{j,i} \Delta M_{i,j}^{(n_i+1)} = M_i^{(n_i)}$$

$$\sum_{j,i} \Delta M_{i,j}^{(n_i+1)} - M_i^{(n_i)} = 0.$$

Čvor  $i$  možemo uravnotežiti tako da dodamo moment koji je iste veličine kao rezidualni moment  $M_i^{(n_i)}$ , ali suprotnog predznaka. Dodani moment razdjeljujemo na štapove pomoću razdjelnih koeficijenata elementa koji se spajaju u čvoru koji se uravnotežuje.



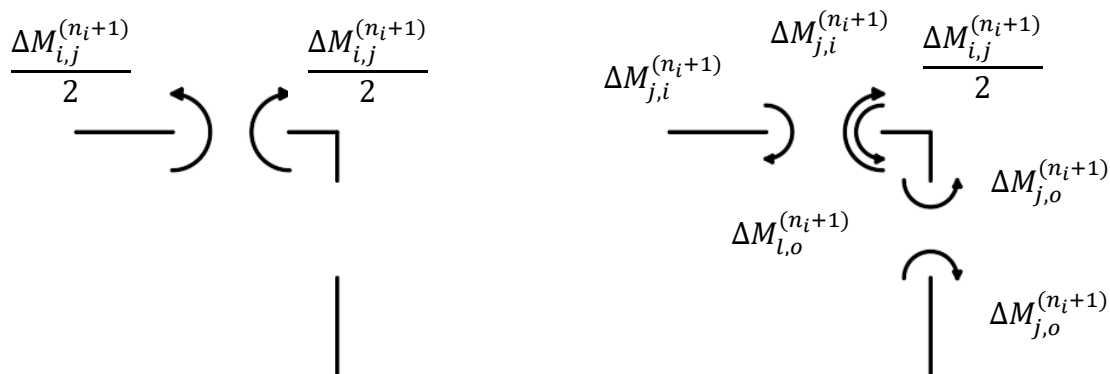
Slika 2.1 Moment u čvoru  $i$

Slika 2.2 Uravnoteženje čvora  $i$

Sada je čvor  $i$  uravnotežen. Polovicu momenta na kraju  $i$  štapa „ $i,j$ “ prenašamo na suprotan kraj  $j$ , jer :

$$\Delta M_{j,i}^{(n_i+1)} = 2k_{\{i,j\}}\Delta\rho_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2}\Delta M_{i,j}^{(n_i+1)}.$$

Vidimo da zbog prisilnog zaokreta kraja  $i$  dobivamo polovični moment kraja  $i$  u kraju  $j$  te zbog toga prijenosni koeficijent iznosi  $1/2$ . Čvor u koji se prebacila polovica momenta nije u ravnoteži te je potrebno ponoviti postupak uravnoteženja čvora s razdjelnim koeficijentima tog čvora.



Slika 2.3 Uravnoteženje čvora  $j$

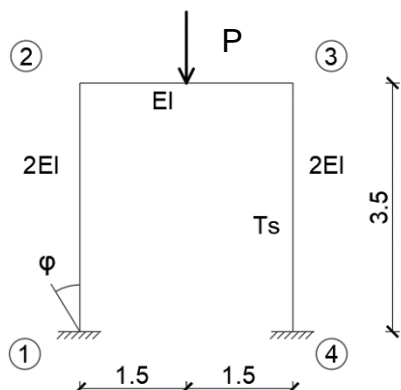
Postupak ponavljamo do željene točnosti, odnosno postupak prekidamo kada nam je neuravnoteženi moment dovoljno mali da ga možemo zanemariti. Crossov postupak upravo je zbog ovog ponavljanja iterativni postupak s kojim dobivamo sve točnije rješenje.

U nekim slučajevima možemo dobiti točno rješenje nakon jednog ponavljanja jer se s druge strane štapa nalazi zglobni ležaj. Čvor se zaokreće za neki prirast kuta te zbog tog zaokreta dolazi do pojave momenta na drugom kraju štapa, ali ako na drugom kraju štapa zglob, tada se ne javlja otpor zaokretanju čvora te je zato moment u zglobu nula.

Konačne vrijednosti momenata dobivamo tako da zbrojimo sve vrijednosti momenata na jednom kraju grede (momenata upetosti, raspodijeljenih i prenesenih momenata).

### 2.3. Primjer Crossove metode

Prikazat ćemo jednostavniji primjer koji je rješiv i Werner-Csonka postupkom.



$$P = 100 \text{ kN}$$

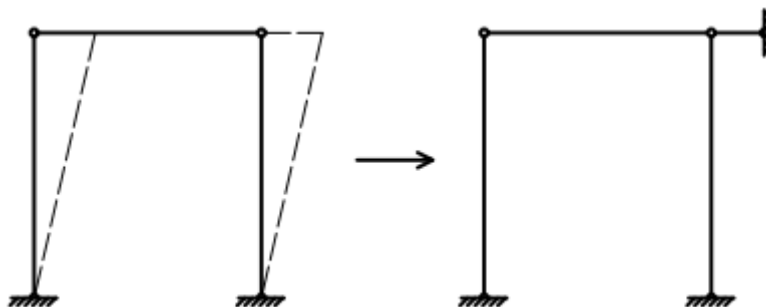
$$\rho_t = 0,0002^\circ$$

$$t_s = 19 \text{ C}^\circ$$

$$\alpha_t = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

$$EI = 90000 \text{ kNM}^2$$

Provjeravamo stupanj slobode jer Crossov postupak vrijedi samo za nepomične sisteme. Zglobnom se shemom vidi da postoji jedan stupanj slobode pa je sustav potrebno pridržati jednom vezom.



U prvom koraku sprječavamo sve zaokrete kao i translacije pa nam se u štapovima javljaju momenti upetosti od vanjskih sila, prisilnih pomaka, kutova zaokreta i temperature.

$$\bar{M}_{12} = 4 \cdot \frac{2EI}{3.5} \cdot \varphi = 4 \cdot \frac{2EI}{3.5} \cdot 0,0002 = 41.14 \text{ kN}$$

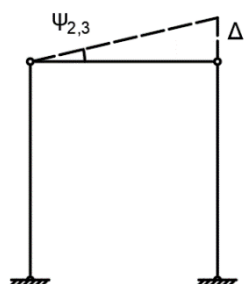
$$\bar{M}_{21} = 2 \cdot \frac{2EI}{3.5} \cdot \varphi = 2 \cdot \frac{2EI}{3.5} \cdot 0,0002 = 20.57 \text{ kN}$$

$$\bar{M}_{23}(P) = \frac{Pl}{8} = \frac{100 \cdot 3}{8} = 37.5 \text{ kN}$$

$$\bar{M}_{32}(P) = -\frac{Pl}{8} = -\frac{100 \cdot 3}{8} = -37.5 \text{ kN}$$

$$\bar{M}_{23}(t_s) = -6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\Delta l}{l} = -6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot h}{l} = -6 \cdot \frac{EI}{3} \cdot \frac{6.65 \cdot 10^{-4}}{3} = -39.9 \text{ kN}$$

$$\bar{M}_{32}(t_s) = -6 \cdot \frac{EI}{l} \cdot \frac{\Delta h}{l} = -39.9 \text{ kN}.$$





Zatim se izračunaju razdjelni koeficijenti:

$$K_{21}^* = 4 \cdot \frac{2EI}{3.5} = \frac{16}{7}EI \qquad \mu_{21} = \frac{\frac{16}{7}EI}{\frac{76}{21}EI} = \frac{12}{19}$$

$$K_{23}^* = 4 \cdot \frac{EI}{3} = \frac{4}{3}EI \qquad \mu_{23} = \frac{\frac{4}{3}EI}{\frac{76}{21}EI} = \frac{7}{19}$$

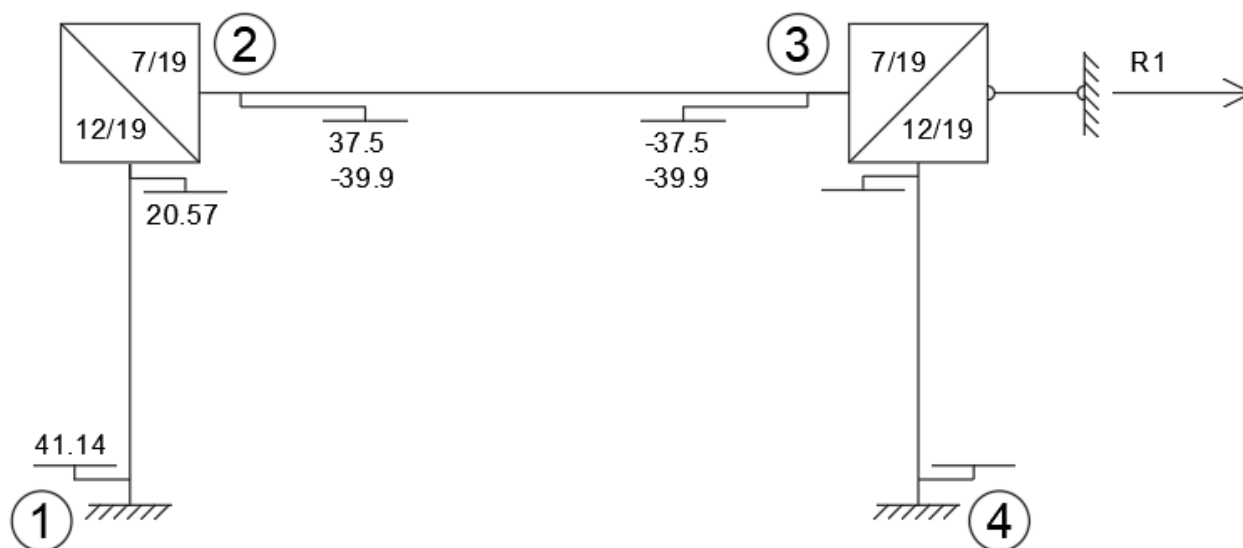
$$\sum K_2 = \frac{16}{7}EI + \frac{4}{3}EI = \frac{76}{21}EI.$$

Zbog simetrije se može zaključiti da su razdjelni koeficijenti za čvor 3 jednaki čvoru 2:

$$\mu_{34} = \frac{12}{19}$$

$$\mu_{32} = \frac{7}{19}$$

Nacrta se shema u kojoj se u kvadrate upisuju razdjelni koeficijenti, a na mjestima krajeva elemenata uvrštavamo pripadne momente upetosti. Općenito, prvo se uravnotežuje čvor koji ima najveći apsolutni rezidualni moment jer se iteracija s time rješava s najmanje koraka. Najveći je moment u čvoru 3, stoga se on prvi uravnotežuje.



Ukupni neuravnoteženi moment uravnotežuje se suprotnom vrijednošću tog momenta i dijeli se s razdjelnim koeficijentima.

U čvoru 3 neuravnoteženi moment je -77.4, pa uravnotežujemo s momentom iznosa +77.4 i dijelimo s razdjelnim koeficijentima. Dobiveni rezultat množimo s razdjelnim koeficijentom te ga prebacujemo na drugu stranu štapa.

$$\boxed{3} \quad -77.4 \rightarrow 77.4 \cdot \frac{7}{19} = 28.52 \div 2 = 14.26$$

$$\cdot \frac{12}{19} = 48.88 \div 2 = 24.44$$

$$\boxed{2} \quad 32.43 \rightarrow -32.43 \cdot \frac{7}{19} = -11.95 \div 2 = -5.97$$

$$\cdot \frac{12}{19} = -20.48 \div 2 = -10.24$$

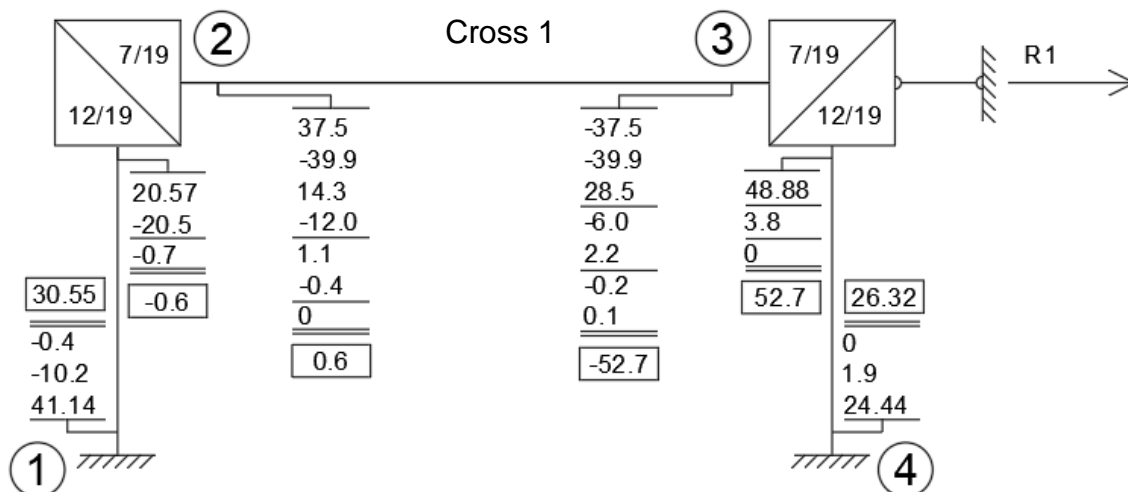
$$\boxed{3} \quad -5.97 \rightarrow 5.97 \cdot \frac{7}{19} = 2.20 \div 2 = 1.1$$

$$\cdot \frac{12}{19} = 3.77 \div 2 = 1.88$$

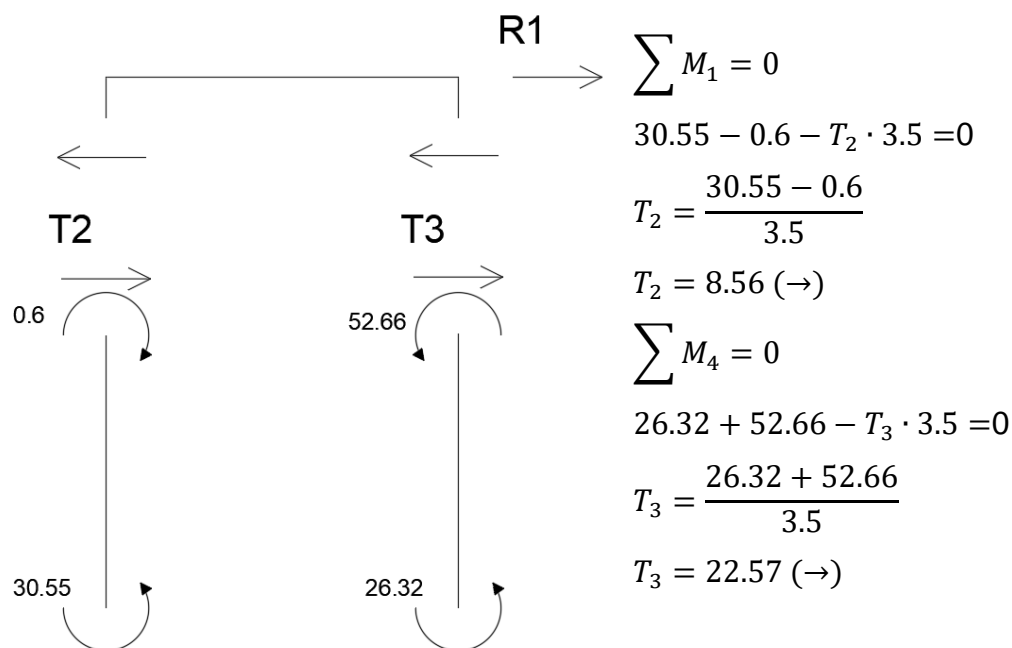
$$\boxed{2} \quad 1.1 \rightarrow -1.1 \cdot 7/19 = -0.41 \div 2 = -0.2$$

$$\cdot 12/19 = -0.69 \div 2 = -0.35$$

Kada je ostatak dovoljno mali da ga možemo zanemariti, onda zbrojimo sve momente na odabranom mjestu. Zbroj krajnjih momenata u čvoru trebao bi biti nula. Ovaj postupak uravnoteženja momenata nastalih od upetosti sistema od sada će se navoditi kao Cross 1. Sljedeći postupak uravnoteženja momenata nastalih otpuštanjem jedne reakcije zvat će se Cross 2. Svako sljedeće otpuštanje reakcije će poprimiti Cross 3, Cross 4 ovisno o broju mogućih otpuštanja reakcija.



Reakcija R1 može se izračunati pomoću poprečnih sila u štapovima.



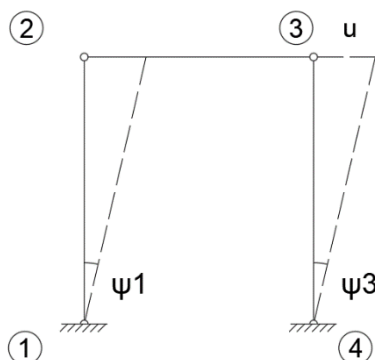
$$\sum X = 0$$

$$R_1 - T_3 - T_2 = 0$$

$$R_1 = T_3 + T_2$$

$$R_1 = 31.13$$

Pošto je sistem pomičan, u drugom dijelu zadatka dopuštamo prethodno spriječene pomake. Pomak izaziva momente koji ovise o veličini pomaka „u“.



$$m_{12} = m_{21} = m_{34} = m_{43} = -6 \cdot \frac{2EI}{3.5} \cdot \frac{-u}{3.5}$$

Budući da pretpostavljamo stvaran pomak, pomaku „u“ odabiremo neku proizvoljnu vrijednost kako bismo dobili vrijednosti momenata od pomaka s kojima je lako računati.

$$u = \frac{100}{EI}$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{34} = m_{43} = 97.96 \text{ kN}$$

Iteracijskim postupkom momenti se uravnotežuju.

$$\boxed{2} \quad 97.96 \rightarrow -97.96 \cdot 7/19 = -36.1 \div 2 = -18.1$$

$$\cdot 12/19 = -61.9 \div 2 = -30.9$$

$$\boxed{3} \quad 79.86 \rightarrow -79.86 \cdot 7/19 = -29.4 \div 2 = -14.7$$

$$\cdot 12/19 = -50.4 \div 2 = -25.2$$

$$\boxed{2} \quad -14.7 \rightarrow 14.7 \cdot 7/19 = -5.4 \div 2 = 2.7$$

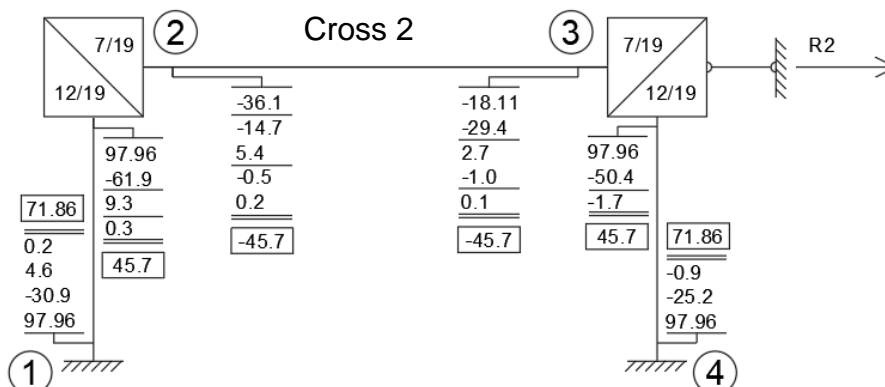
$$\cdot 12/19 = -9.3 \div 2 = 4.6$$

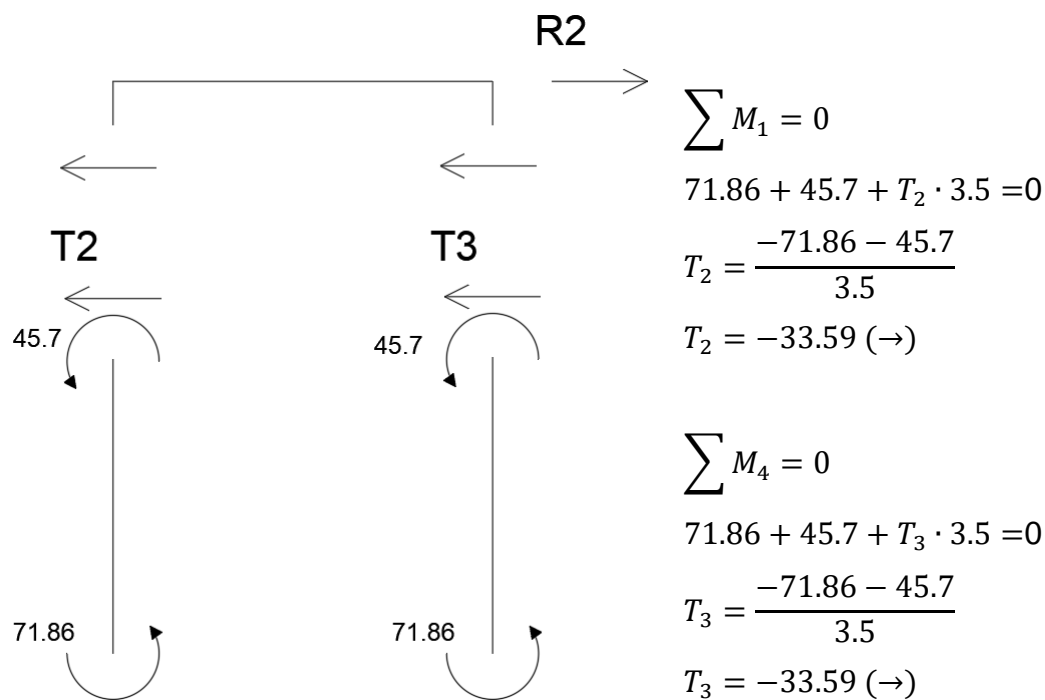
$$\boxed{3} \quad 2.7 \rightarrow -2.7 \cdot 7/19 = -1 \div 2 = -0.5$$

$$\cdot 12/19 = -1.7 \div 2 = -0.9$$

$$\boxed{2} \quad -0.5 \rightarrow 0.5 \cdot 7/19 = 0.2 \div 2 = 0.1$$

$$\cdot 12/19 = 0.3 \div 2 = 0.2$$





$$\sum X = 0$$

$$R_2 - T_3 - T_2 = 0$$

$$R_2 = T_3 + T_2$$

$$R_2 = 67.18$$

Zbroj reakcija u pridržanju mora biti 0, pa slijedi:

$$R_1 + \beta R_2 = 0$$

$$31.13 + \beta \cdot 67.18 = 0$$

$$\beta = -\frac{31.13}{67.18}$$

$$\beta = -0,46338$$

Moment je jednak:  $M = M_{c1} + \beta M_{c2}$

$$M_{12} = 30.55 + \beta \cdot 71.86 = -2.75$$

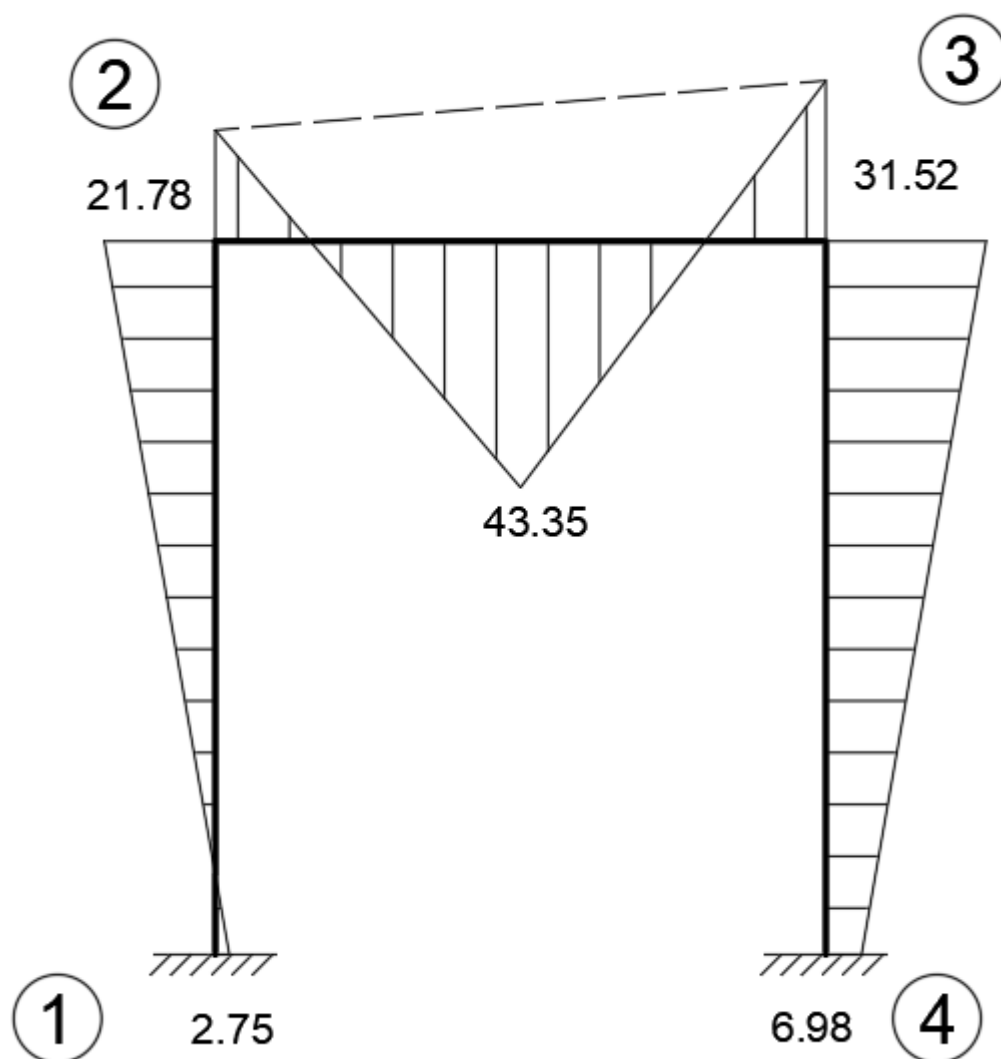
$$M_{21} = -0.6 + \beta \cdot 45.7 = -21.78$$

$$M_{23} = 0.6 + \beta \cdot (-45.7) = 21.78$$

$$M_{32} = -52.7 + \beta \cdot (-45.7) = -31.52$$

$$M_{34} = 52.7 + \beta \cdot 45.7 = 31.52$$

$$M_{43} = 26.32 + \beta \cdot 71.86 = -6.98$$



Slika 2.4 Momentni dijagram

### 3. Werner-Csonka postupak

#### 3.1. Otto Werner

Otto Werner bio je hrvatski inženjer građevinarstva rođen u Rumi u Srijemu 1908. godine. Na Tehničkom fakultetu u Zagrebu diplomirao je 1931., a na istom je i doktorirao deset godina kasnije, 1941. godine. U razdoblju od 1933. do 1936. na spomenutom fakultetu radio je kao asistent na građevinskom odsjeku, potom od 1941. do 1946. u tvornici cementa u Podsusedu, a od 1946. u Arhitektonskom projektnom zavodu PLAN. Kasnije se vraća raditi na Tehnički fakultet, na kojem je 1954. izabran za izvanrednog profesora iz predmeta *Građevna Statika*. Od 1959. godine nadalje tamo radi kao redovni profesor. Werner je svakom svojem projektu pristupao na nov, originalan način, a svi su njegovi radovi bili rezultat konstruktorske prakse. U svom pedagoškom radu najveću je pozornost pridavao primjeni teorijskih znanja. Njegova konstrukcija koja je izvedena na mnogim objektima u Hrvatskoj i u svijetu nosi naziv *Wernerova ljuska*. To je izvorna krovna konstrukcija prikladna za natkrivanje industrijskih hala. Ljuska i rešetkaste dijafragme bez srednjih štapova ispune čine vrlo racionalan konstrukcijski sustav; srednji su štapovi rešetki nepotrebni, jer za simetrično opterećenje u njima nema sila, a pri antimetričnom opterećenju u sredini raspona nema momenta ni uzdužne komponente sile, tako da se luk može smatrati sastavljenim od dva neovisna luka nad polovinama otvora. Osim navedenog djela, Werner je objavio i niz znanstvenih radova, a 1977. godine dobitnik je *Nagrade za životno djelo*. Umro je u Zagrebu 1981. godine.

#### 3.2. Pál Csonka

Pál Csonka bio je mađarski arhitekt, sveučilišni profesor i doktor građevinarstva rođen u Budimpešti 8. srpnja 1896. godine. Nakon završene gimnazije, na Tehničkom Sveučilištu József Nádor 1920. godine stekao je diplomu u arhitekturi. Sudjelovao je na brojnim natjecanjima urbanizma: 1921. osvojio je drugu nagradu na natjecanju za organizaciju otoka Margaret, 1922. za organizaciju mjesta Székesfehérvár, a 1923. Szombathely. Na početku svoje karijere radio je kao voditelj izgradnje, a od 1927. godine bio je neplaćeni pripravnik u laboratoriju na Sveučilištu primijenjenih znanosti. Godine 1928. položio je majstorski graditeljski ispit, a u razdoblju od 1928. do 1936. predavao je matematiku na Sveučilišnom odjelu za arhitekturu. Također je bio i docent na Odjelu za materijale, gdje 1945. postaje pročelnik. Svojevremeno je na fakultetu radio kao privatni profesor, a 1969. godine postao je akademski savjetnik fakulteta. Za svoja je postignuća 1954. godine bio nagrađen *Kossuthovom nagradom*, a dobitnik je *Državne nagrade za postignuća u području građevinarstva*. Csonkino poznato djelo kupola je crkve Taksonyi s eliptičnom strukturom, a Mađarsko udruženje inženjera i arhitekata dodijelilo mu je i nagrade *Czigler* i *Honán*. Umro je u Budimpešti 26. studenog 1987. godine.

### 3.3. Werner-Csonka postupak

Ako bismo Crossovom metodom željeli riješiti okvir s „e“ etaža, morali bismo spriječiti pomake. U dodanim vezama javljaju se reaktivne sile koje ne postoje u izvornom sistemu. Pošto te sile ne postoje u izvornom sistemu potrebno je opteretiti okvir silama istog intenziteta kao i reakcije, ali suprotnog smjera.

Pretpostavka je da uzdužne sile ne mijenjaju duljine greda, pa simetrično stanje opterećenja neće prouzročiti momente savijanja. Momenti nastaju samo zbog antimetričnog opterećenja te je poznato da je pri antimetričnom opterećenju polje pomaka simetrične konstrukcije antimetrično.

U našem su slučaju kutovi zaokreta i vrijednost horizontalnih pomaka oba čvora na jednoj etaži jednaki te je vrijednost vertikalnog pomaka polovišta raspona grede jednaka nuli. Stoga se u tom polovištu nalazi točka infleksije progibne linije u kojoj je zakrivljenost jednaka nuli. U polovištu je i vrijednost momenta savijanja jednaka nuli. Zbog toga je umjesto cijelog sistema moguće promatrati poluokvir.

Rubni uvjet u osi simetrije mora biti pomičan zglobovi ležaj koji sprječava vertikalni pomak, a dopušta zaokretanje jer zamjenjuje točku infleksije u kojoj nema vertikalnog pomaka i moment je jednak nuli. Poluokvir ima udvostručene momente tromosti greda i stupova zbog „preklapanja“ oko osi simetrije. U ostalim slučajevima koeficijenti krutosti stupova se zbrajaju dok se koeficijenti krutosti obostrano upete grede četverostruko zbrajaju s koeficijentom krutosti prepusta. U čvorovima i dalje djeluju iste sile kao u čvorovima okvira. Poluokvir se rješava relaksacijskim postupcima sličnim Crossovom postupku.

Potrebno je izračunati momente na krajevima elementa poluokvira. Pošto su horizontalni pomaci dopušteni, grede poluokvira se transliraju i pritom se ne zaokreću. Stoga se od djelovanja horizontalnih sila javljaju samo momenti na krajevima stupova.

Za stup konstantnog poprečnog presjeka točka infleksije je na polovici visine etaže, a u točki infleksije moment je jednak nuli, pa iz toga proizlazi  $\bar{M}_{i,i-1} = \bar{M}_{i-1,i}$ .

$$T_{i,i-1} = -T_{i-1,i} = T_i.$$

Jednadžba ravnoteže oko kraja  $i-1$  stupa glasi:

$$-T_i \cdot h_i + \bar{M}_{i,i-1} + \bar{M}_{i-1,i} = 0,$$

iz čega slijedi:

$$\bar{M}_{i,i-1} = \bar{M}_{i-1,i} = \frac{1}{2} T_i h_i.$$

Vrijednost  $T$  izračuna se iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na dio poluokvira iznad presjeka kroz stup.

S obzirom da treba uravnotežiti čvor po čvor, potrebno je definirati razdjelne i prijenosne koeficijente koji se razlikuju od Crossove metode jer se horizontalni pomak ne sprječava te je stoga statički sustav stupa i grede različit u odnosu na sustave na početnom okviru.

Grede su u osnovnom sistemu poluokvira jednostrano upete, pa za prirast vrijednosti momenta na upetome kraju zbog zaokreta čvora vrijedi poznati izraz:

$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = 3k_{i,g} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}$$

$k_{i,g}$  je koeficijent krutosti grede poluokvira:

$$k_{i,g} = \frac{E_i(2I_i)}{\frac{l}{2}} = 4 \frac{E_i(2I_i)}{l} = 4k_{\{i_1, i_2\}}.$$

Prirast vrijednosti momenta može se izraziti i pomoću koeficijenta krutosti grede izvornog okvira:

$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = 12k_{\{i_1, i_2\}} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}.$$

Horizontalni pomaci čvorova osnovnoga sistema nisu spriječeni. Za izvod izraza za vrijednosti rotacijske krutosti u stupu možemo zamisliti da na kraju priključenom u čvor stup ima krutu pomičnu vezu koja omogućava pomak okomito na njegovu os (slika 3.1).



Slika 3.1

Veza između prirasta vrijednosti momenta na krajevima i prirasta kuta zaokreta kraja  $i$  dana je izrazima:

$$\begin{aligned} \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} &= k_{\{i-1, i\}} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)} \\ \Delta M_{i-1, i}^{(n_i+1)} &= -k_{\{i-1, i\}} \Delta \varphi_i^{(n_i+1)}. \end{aligned}$$

Pri čemu je  $k_{\{i-1, i\}}$  koeficijent krutosti stupova poluokvira nastalim preklapanjem dva stupa:

$$k_{\{i-1, i\}} = \frac{E_i(2I_i)}{h_i} = 2 \frac{E_i I_i}{h_i} = 2k_{\{i-1, i_1\}}.$$

Ako imamo više različitih stupova potrebno je samo ubrojiti koeficijente krutosti.

Zaokretanjem za kut  $\Delta \varphi_i^{(n_i)}$  uravnotežujemo čvor  $i$  na koji djeluje rezidualni moment s vrijednošću  $M_i^{(n_i)}$ :

$$\begin{aligned} -\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} + M_i^{(n_i)} &= 0 \\ (3k_{i,g} + k_{\{i-1, i\}} + k_{\{i, i+1\}}) \Delta \varphi_i^{(n_i+1)} &= M_i^{(n_i)} \\ \Delta \varphi_i^{(n_i+1)} &= \frac{M_i^{(n_i)}}{k_i^W}, \end{aligned}$$

gdje je krutost čvora:

$$k_i^W = 3k_{i,g} + k_{\{i-1, i\}} + k_{\{i, i+1\}}.$$



Dobiveni izraz za prirast kuta  $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$  uvrsti se u izraze za vrijednosti momenata na krajevima grede i stupa:

$$\begin{aligned}\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} &= \frac{3k_{i,g}}{k_i^W} M_i^{(n_i)} = \mu_{i,g} M_i^{(n_i)} \\ \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} &= \frac{k_{\{i-1,i\}}}{k_i^W} M_i^{(n_i)} = \mu_{i,i-1} M_i^{(n_i)} \\ \Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} &= \frac{k_{\{i,i+1\}}}{k_i^W} M_i^{(n_i)} = \mu_{i,i+1} M_i^{(n_i)}.\end{aligned}$$

Razdjelni koeficijenti za čvor  $i$  su:

$$\begin{aligned}\mu_{i,g} &= \frac{3k_{i,g}}{k_i^W} \\ \mu_{i,i-1} &= \frac{k_{\{i-1,i\}}}{k_i^W} \\ \mu_{i,i+1} &= \frac{k_{\{i,i+1\}}}{k_i^W}.\end{aligned}$$

Izražavanjem razdjelnih koeficijenata pomoću koeficijenata krutosti grede i stupova izvornog okvira dobiva se:

$$\begin{aligned}k_i^W &= 12k_{\{i_1,i_2\}} + 2k_{\{i_1-1,i_1\}} + 2k_{\{i_1,i_1+1\}} \\ \mu_{i,g} &= \frac{12k_{\{i_1,i_2\}}}{k_i^W} \\ \mu_{i,i-1} &= \frac{2k_{\{i_1-1,i_1\}}}{k_i^W} \\ \mu_{i,i+1} &= \frac{2k_{\{i_1,i_1+1\}}}{k_i^W}.\end{aligned}$$

Prije spomenuti izraz:

$$\begin{aligned}\Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} &= k_{\{i-1,i\}} \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} \\ \Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)} &= -k_{\{i-1,i\}} \Delta\varphi_i^{(n_i+1)},\end{aligned}$$

pokazuje da je  $\Delta M_{i-1,i}^{(n_i+1)} = -\Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)}$ , pa je prijenosni koeficijent -1. S tim razdjelnim i prijenosnim koeficijentom proračun se dalje provodi kao i u Crossovom postupku.

Zbroj momenata na krajevima jednog stupa nazivamo momentom etaže. Njegova je vrijednost:

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i+1)}.$$

Iz jednadžbe ravnoteže momenta oko dna stupa dobivamo:

$$\begin{aligned}-T_i \cdot h_i + M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i+1)} &= -T_i \cdot h_i + M_{e,i}^{(n_i+1)} = 0 \\ M_{e,i}^{(n_i+1)} &= T_i \cdot h_i,\end{aligned}$$

što znači da vrijednost momenata etaža tijekom proračuna moraju ostati konstantne.

Budući da je poluokvir nastao preklapanjem polovica izvornog okvira, ukupne momente s poluokvira potrebno je pri vraćanju na okvir raspoloviti:

$$M_{i_1, i_2} = M_{i_2, i_1} = \frac{1}{2} M_{i, g}$$

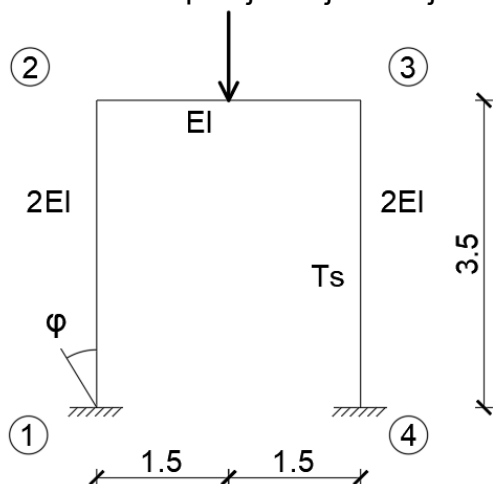
$$M_{i_1, i_1-1} = M_{i_2, i_2-1} = \frac{1}{2} M_{i, i-1}$$

$$M_{i_1, i_1+1} = M_{i_2, i_2+1} = \frac{1}{2} M_{i, i+1}.$$

Ovi izrazi vrijede za sisteme okvira u kojem se preklapaju dva stupa istih karakteristika koeficijenta krutosti i grede koja ih spaja.

### 3.4. Primjer Werner-Csonka metode

Rješavamo isti primjer koji smo rješavali i prethodnom metodom.



$$P = 100 \text{ kN}$$

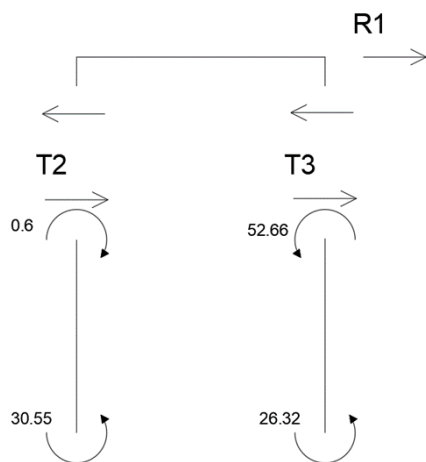
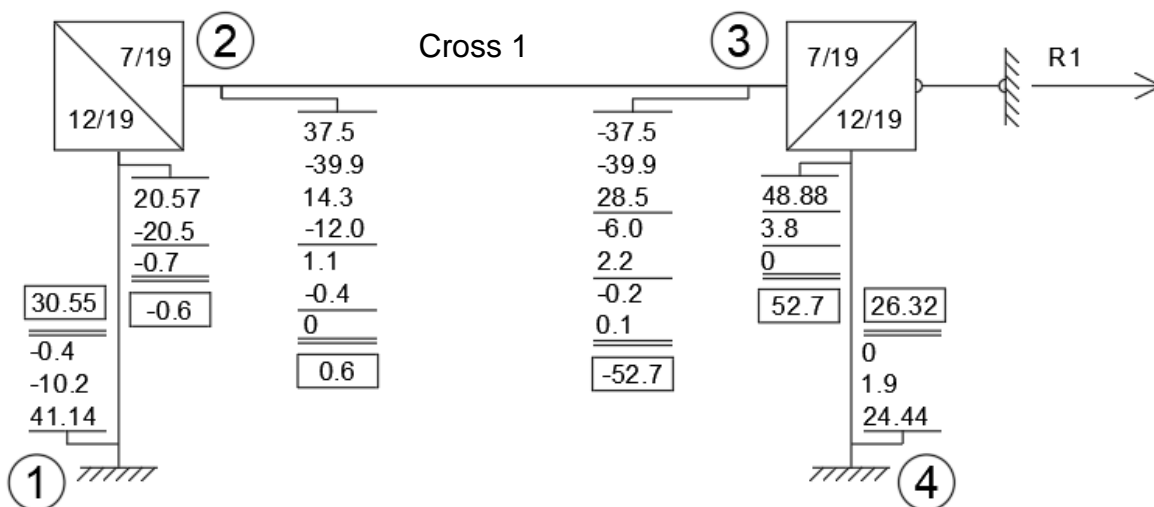
$$\rho_t = 0,0002^\circ$$

$$t_s = 19 \text{ C}^\circ$$

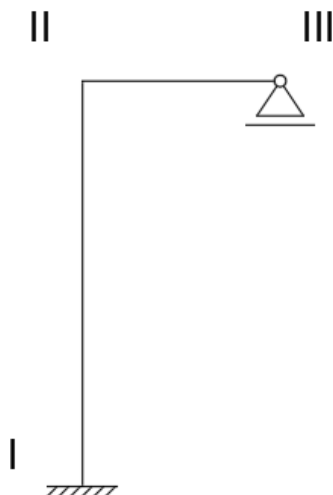
$$\alpha_t = 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

$$EI = 90000 \text{ kNM}^2$$

Pri rješavanju zadatka Werner-Csonkinom metodom, tijekom rješavanja zadatka Crossovim postupkom jednak je do uravnoteženja momenata upetosti početnog sistema odnosno do prvog Crossa. U skladu s tim dobivamo momente savijanja od vanjskog opterećenja na krajevima elemenata okvira sa spriječenim translatorskim pomakom:



$$R_1 = 31.13$$



Nosač pretvaramo u poluokvir. Razdjelni koeficijenti su:

$$K_{I,II} = K_{1,2} + K_{3,4} = \frac{2EI}{3.5} + \frac{2EI}{3.5} = \frac{8}{7}EI$$

$$K_{II,III} = 4 \cdot K_{2,3} = \frac{4}{3}EI$$

$$K_{II,I}^* = 1 \cdot K_{I,II} = \frac{8}{7}EI$$

$$\mu_{II,I} = \frac{\frac{8}{7}}{\frac{36}{7}} = \frac{2}{9}$$

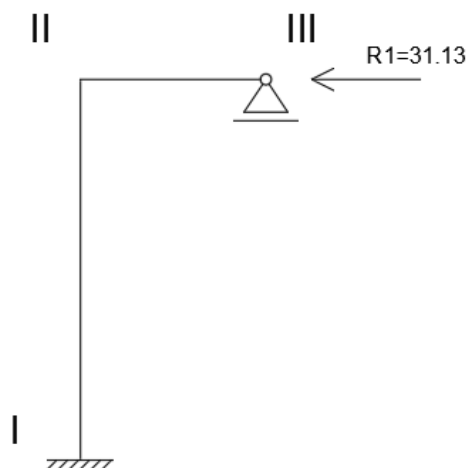
$$K_{II,III}^* = 3 \cdot K_{II,III} = 4EI$$

$$\mu_{II,III} = \frac{4}{\frac{36}{7}} = \frac{7}{9}$$

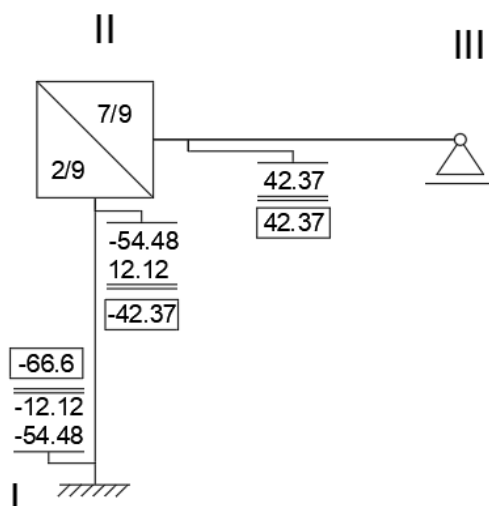
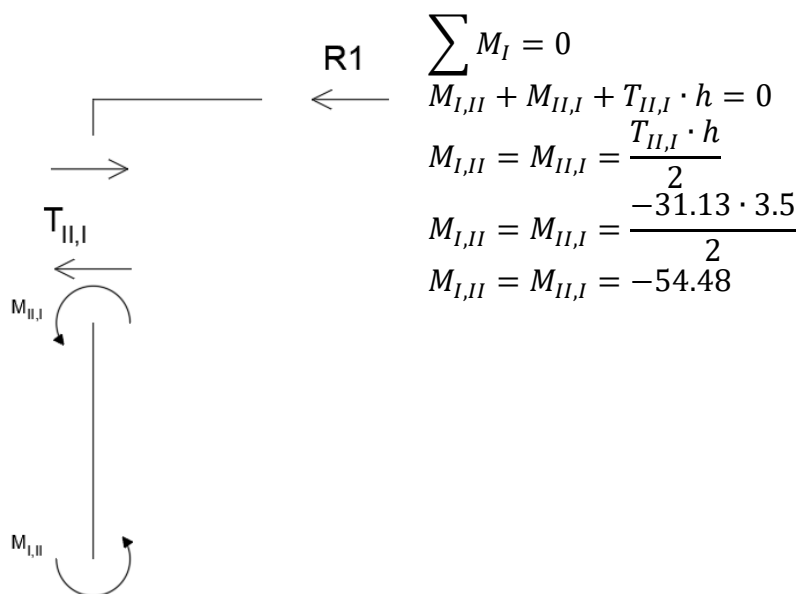
$$\sum K_{II}^* = \frac{8}{7}EI + 4EI = \frac{36}{7}EI$$

Vidljivo je da je razdjelni koeficijent grede poluokvira znatno veći od koeficijenta stupa te će prilikom uravnoteženja čvora preuzeti veći dio rezidualnog momenta. Postupak će se zbog toga brzo konvergirati, odnosno bit će manji broj iteracijskih koraka u odnosu na Crossov postupak.

Poluokvir se opterećuje reakcijom iz prve iteracije, ali onom suprotnog smjera.



Izračunaju se vrijednosti momenata na stupu preko poprečnih sila koje izaziva reakcija, uz pretpostavku da je točka infleksije na sredini stupa:



$$\boxed{II} \quad -54.48 \rightarrow 54.48 \cdot 2/9 = 12.12 \cdot -1 = -12.12$$

$$\quad \quad \quad \cdot 7/9 = 42.37$$

Potrebno je vratiti momente poluokvira na početni sustav:

$$M_{I,II} = M_{12} + M_{43}$$

$$M_{12} = -66.6 \cdot \frac{2K_{12}}{2K_{12} + 2K_{43}} = -66.6 \cdot \frac{1}{2} = -33.3.$$

Zbog istih krutosti greda i stupova momenti su jednaki, to jest svakom stupu ide pola momenta, što u slučajevima kada nemamo jednake koeficijente krutosti stupova ne mora biti tako.

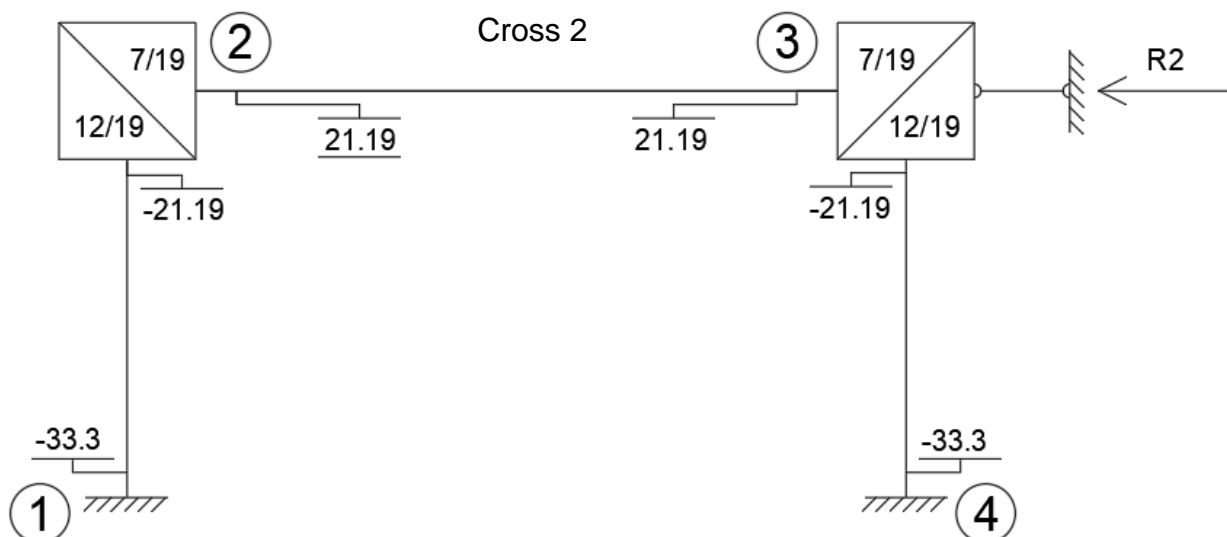
$$M_{43} = -66.6 \cdot \frac{2K_{43}}{2K_{12} + 2K_{43}} = -66.6 \cdot \frac{1}{2} = -33.3$$

$$M_{21} = -42.37 \cdot \frac{2K_{21}}{2K_{21} + 2K_{34}} = -42.37 \cdot \frac{1}{2} = -21.19$$

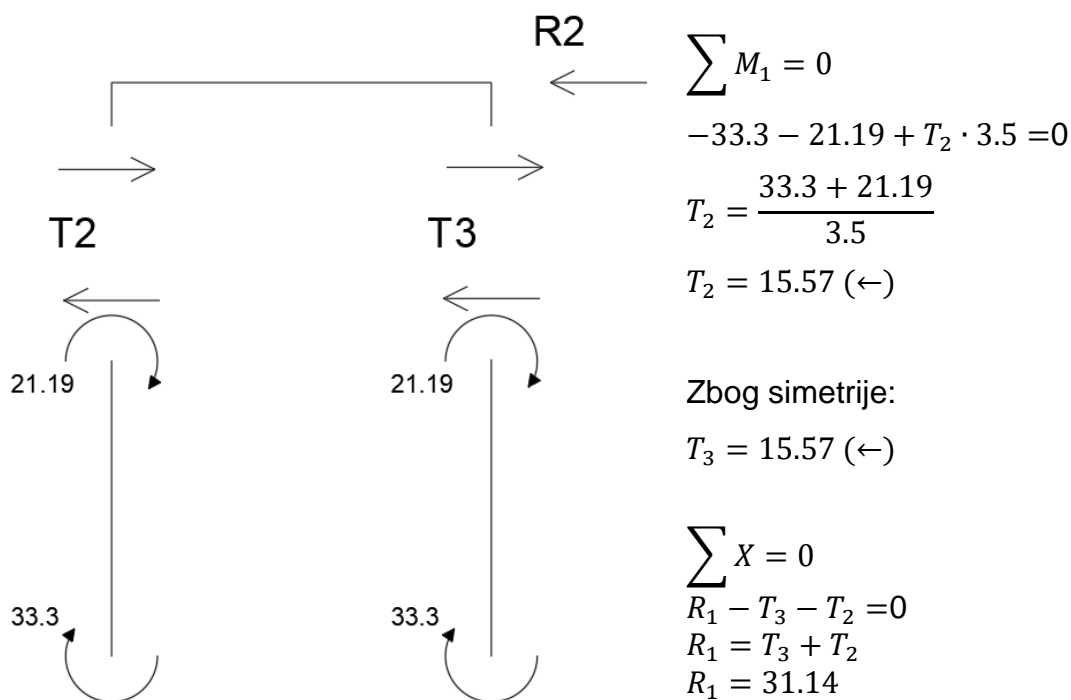
$$M_{34} = -42.37 \cdot \frac{2K_{34}}{2K_{21} + 2K_{34}} = -42.37 \cdot \frac{1}{2} = -21,19$$

$$M_{23} = 42.37 \cdot \frac{2K_{23}}{2K_{23} + 2K_{32}} = 42.37 \cdot \frac{1}{2} = 21,19$$

$$M_{32} = 42.37 \cdot \frac{2K_{32}}{2K_{23} + 2K_{32}} = 42.37 \cdot \frac{1}{2} = 21,19$$



Sustav je u ravnoteži zbog simetričnosti, odnosno koeficijenti stupova su isti stoga je samo potrebno izračunati reakciju. Kada bi imali različite krutosti stupova ili prepuste uz gredu tada sustav ne bi bio u ravnoteži te bi trebali uravnotežiti sustav.



$$\alpha = \frac{31.14 \cdot 3.5}{31.14 \cdot 3.5} = 1$$

$$\Delta T = 0$$

$$M_{12} = 30.55 + \alpha \cdot (-33.3) = -2.75$$

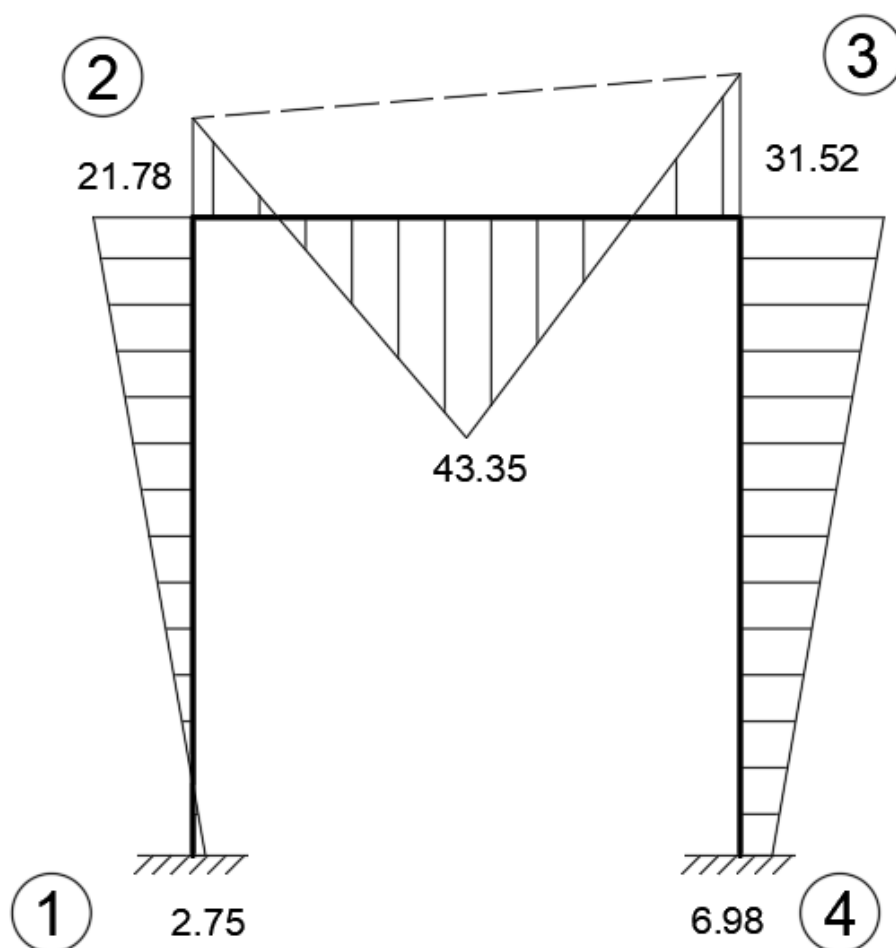
$$M_{12} = -0.6 + \alpha \cdot (-21.19) = -21.78$$

$$M_{12} = 0.6 + \alpha \cdot (21.19) = 21.78$$

$$M_{12} = -52.7 + \alpha \cdot (21.19) = -31.52$$

$$M_{12} = 52.7 + \alpha \cdot (-21.19) = 31.52$$

$$M_{12} = 26.32 + \alpha \cdot (-33.3) = -6.98$$

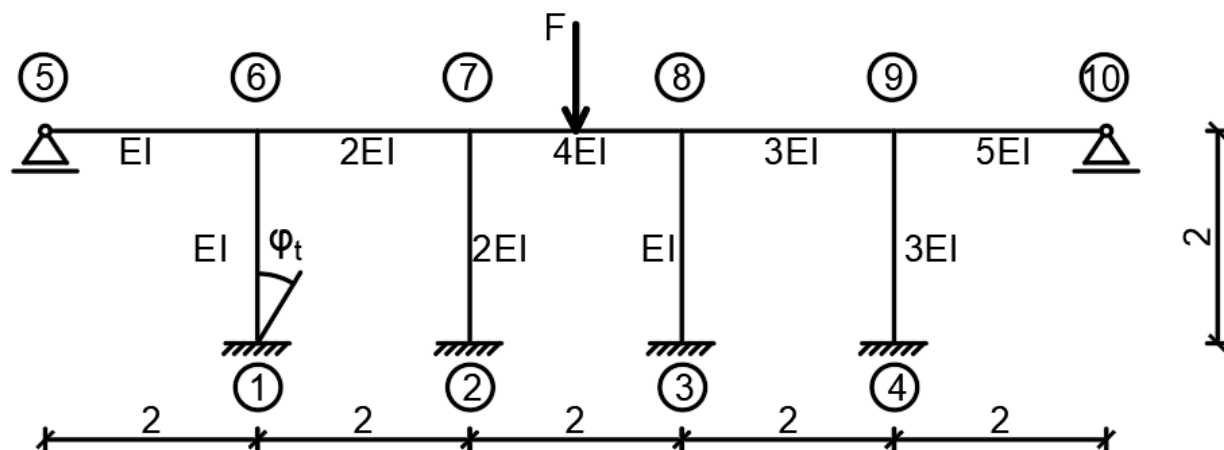


Slika 3.2 Momentni dijagram

## 4. Usporedba

U nastavku će se usporediti rješavanje par zadatka dvjema metodama. Pri izračunu će se koristiti računalni program „Sage“ koji znatno skraćuje vrijeme računanja uravnoteženja čvorova. Prvi zadatak je zadan tako da bude jednostavan i da se na njemu proba vidjeti prednost Werner-Csonka metode. Drugi zadatak će biti kompliciraniji.

Rješavamo zadatak najprije Crossovom metodom.

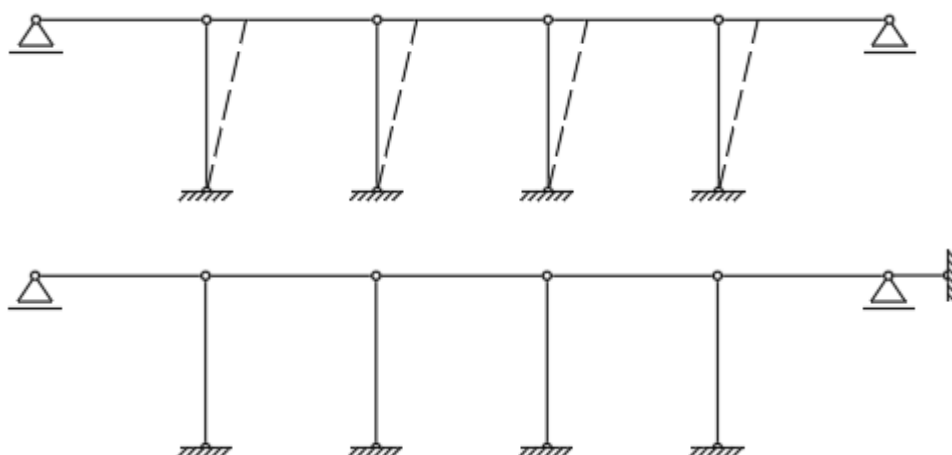


Zglobnom shemom vidimo da sustav ima jedan stupanj slobode te ga je potrebno pridržati jednom vezom.

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$\rho_t = 0,0002^\circ$$

$$EI = 70000 \text{ kNm}^2$$



Koeficijenti krutosti štapova:

$$K_{1,6} = \frac{1}{2}EI$$

$$K_{2,7} = EI$$

$$K_{3,8} = \frac{1}{2}EI$$

$$K_{4,9} = \frac{3}{2}EI$$



$$K_{5,6} = \frac{1}{2}EI$$

$$K_{6,7} = EI$$

$$K_{7,8} = 2EI$$

$$K_{8,9} = \frac{3}{2}EI$$

$$K_{9,10} = \frac{5}{2}EI$$

Razdjelni koeficijenti čvorova:

$$K_{61}^* = 4 \cdot \frac{EI}{2} = 2EI$$

$$\mu_{61} = \frac{4}{15}$$

$$K_{65}^* = 3 \cdot \frac{EI}{2} = \frac{3}{2}EI$$

$$\mu_{65} = \frac{1}{5}$$

$$K_{67}^* = 4 \cdot EI = 4EI$$

$$\mu_{67} = \frac{8}{15}$$

$$\sum K_6 = 7,5 EI$$

$$K_{72}^* = 4EI$$

$$\mu_{72} = \frac{4}{4}$$

$$K_{76}^* = 4EI$$

$$\mu_{76} = \frac{1}{4}$$

$$K_{78}^* = 8EI$$

$$\mu_{78} = \frac{2}{4}$$

$$\sum K_7 = 16 EI$$

$$K_{83}^* = 2EI$$

$$\mu_{83} = \frac{1}{8}$$

$$K_{87}^* = 8EI$$

$$\mu_{87} = \frac{4}{8}$$

$$K_{89}^* = 6EI$$

$$\mu_{89} = \frac{3}{8}$$

$$\sum K_8 = 16 EI$$

$$K_{94}^* = 6EI$$

$$\mu_{94} = \frac{4}{13}$$

$$K_{98}^* = 6EI$$

$$\mu_{98} = \frac{4}{13}$$

$$K_{9,10}^* = \frac{15}{2}EI$$

$$\mu_{9,10} = \frac{5}{13}$$

$$\sum K_9 = 19.5 EI$$

Momenti upetosti:

$$\bar{M}_{16} = 4 \cdot \frac{1}{2}EI \cdot (-0,0002) = -28kNm$$

$$\bar{M}_{61} = 2 \cdot \frac{1}{2} EI \cdot (-0,0002) = -14 kNm$$

$$\bar{M}_{78} = \frac{Pl}{8} = \frac{100 \cdot 2}{8} = 25 kNm$$

$$\bar{M}_{87} = -\frac{Pl}{8} = -\frac{100 \cdot 2}{8} = -25 kNm$$

Izračunate podatke uvrstimo u Sage:

distr\_f = { (6, 1): 4/15, (6, 5): 1/5, (6, 7): 8/15, (7, 2): 1/4, (7, 6): 1/4, (7, 8): 2/4, (8, 3): 1/8, (8, 7): 4/8, (8, 9): 3/8, (9, 4): 4/13, (9, 8): 4/13, (9, 10): 5/13 }

# prijenosni koeficijent:

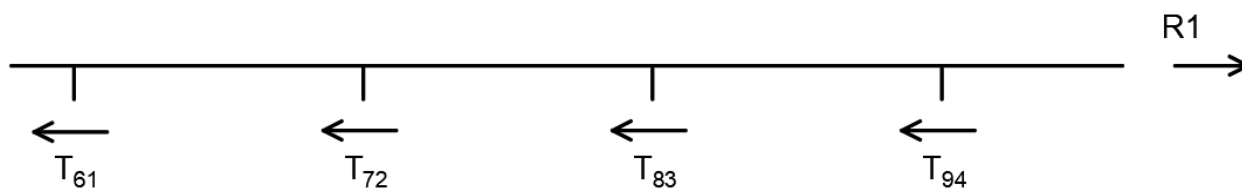
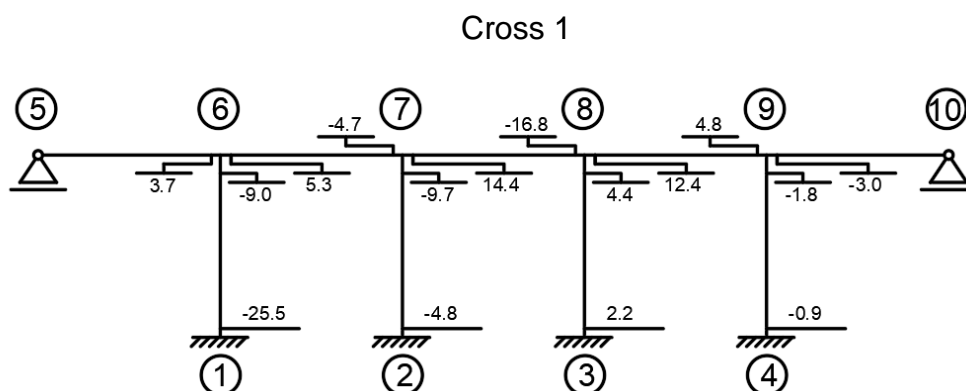
co\_f = { (6, 1): 1/2, (6, 5): 0, (6, 7): 1/2, (7, 2): 1/2, (7, 6): 1/2, (7, 8): 1/2, (8, 3): 1/2, (8, 7): 1/2, (8, 9): 1/2, (9, 4): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 10): 0 }

# momenti upetosti:

mom\_fe = { (1, 6): -28, (6, 1): -14, (7, 8): 25, (8, 7): -25 }

Iteriranjem pomoću Sage-a u 10 koraka [7, 8, 6, 7, 9, 8, 6, 7, 8, 6] dobivamo sljedeće momente:

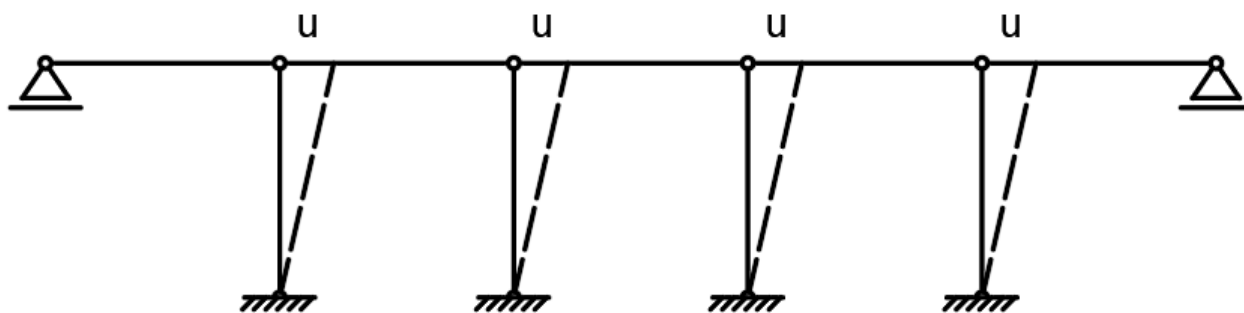
(1, 6) : -25.5  
 (2, 7) : -4.8  
 (3, 8) : 2.2  
 (4, 9) : -0.90  
 (5, 6) : 0.00  
 (6, 1) : -9.0  
 (6, 5) : 3.7  
 (6, 7) : 5.3  
 (7, 2) : -9.7  
 (7, 6) : -4.7  
 (7, 8) : 14.4  
 (8, 3) : 4.4  
 (8, 7) : -16.8  
 (8, 9) : 12.4  
 (9, 4) : -1.8  
 (9, 8) : 4.8  
 (9, 10) : -3.0  
 (10, 9) : 0.00



$$R_1 = T_{61} + T_{72} + T_{83} + T_{94} = \frac{-25.5-9}{2} + \frac{-9.7-4.8}{2} + \frac{4.4+2.2}{2} + \frac{-1.8-0.9}{2} =$$

$$R_1 = -22.55 (\leftarrow)$$

U sljedećem koraku dopuštaju se pomaci.



$$u = 0.01$$

$$M_{16} = M_{61} = M_{38} = M_{83} = -6 \cdot \frac{1}{2} EI \cdot \frac{-0.01}{2} = 1050$$

$$M_{27} = M_{72} = -6 \cdot EI \cdot \frac{-0.01}{2} = 2100$$

$$M_{49} = M_{94} = -6 \cdot \frac{3}{2} EI \cdot \frac{-0.01}{2} = 3150$$

U Sage uvrstimo:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/28, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 3/4, (11,9): 1/4 }

# prijenosni koeficijent:

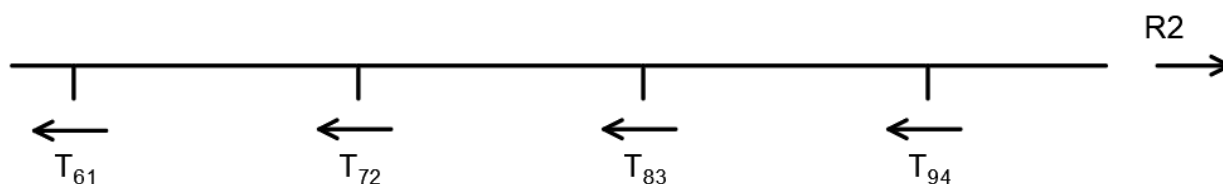
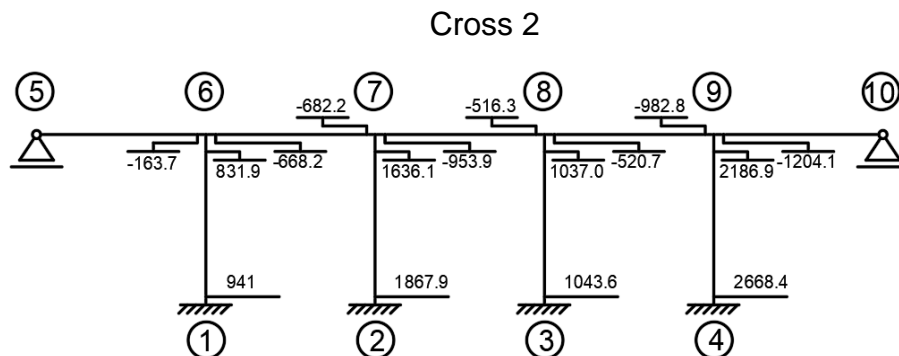
co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# momenti upetosti:

mom\_fe = { (8, 10): 900 , (10, 8): 900 , (9, 11): 450 , (11, 9): 450 }

Iteriranjem pomoću Sage-a u 16 koraka [9, 7, 6, 7, 8, 6, 7, 9, 8, 6, 7, 9, 8, 6, 7, 9] dobivamo sljedeće momente:

(1, 4): 8.7  
 (2, 5): 14.5  
 (3, 4): 0.00  
 (4, 1): 17.3  
 (4, 3): 38.9  
 (4, 5): 18.2  
 (4, 8): -74.4  
 (5, 2): 28.9  
 (5, 4): 17.2  
 (5, 6): 16.3  
 (5, 9): -62.4  
 (6, 5): 0.00  
 (7, 8): 0.00  
 (8, 4): -226.7  
 (8, 7): -126.4  
 (8, 9): -179.4  
 (8, 10): 532.5  
 (9, 5): -190.2  
 (9, 8): -169.1  
 (9, 11): 359.3  
 (10, 8): 354.6  
 (10, 11): -354.6  
 (11, 9): 347.9  
 (11, 10): -347.9



$$R_2 = T_{61} + T_{72} + T_{83} + T_{94}$$

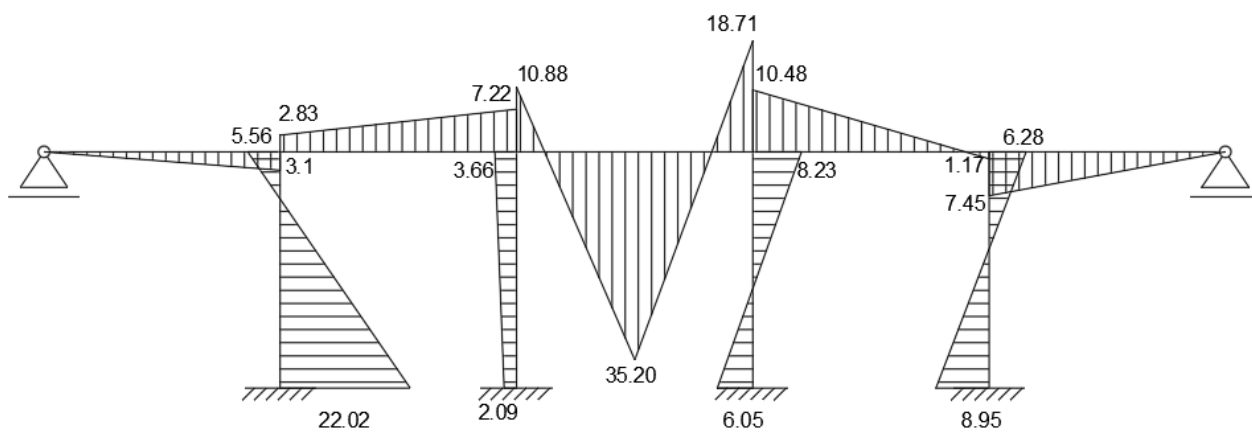
$$R_2 = \frac{941 + 831.9}{2} + \frac{1636.1 + 1867.9}{2} + \frac{1037 + 1043.6}{2} + \frac{2186.9 + 2668.4}{2}$$

$$R_2 = 6106.4 (\rightarrow)$$

$$-22.55 + 6106.4 \cdot \beta_1 = 0$$

$$\beta_1 = \frac{22.55}{6106.4} = 3.69315 \cdot 10^{-3}$$

Krajnji momentni dijagram:

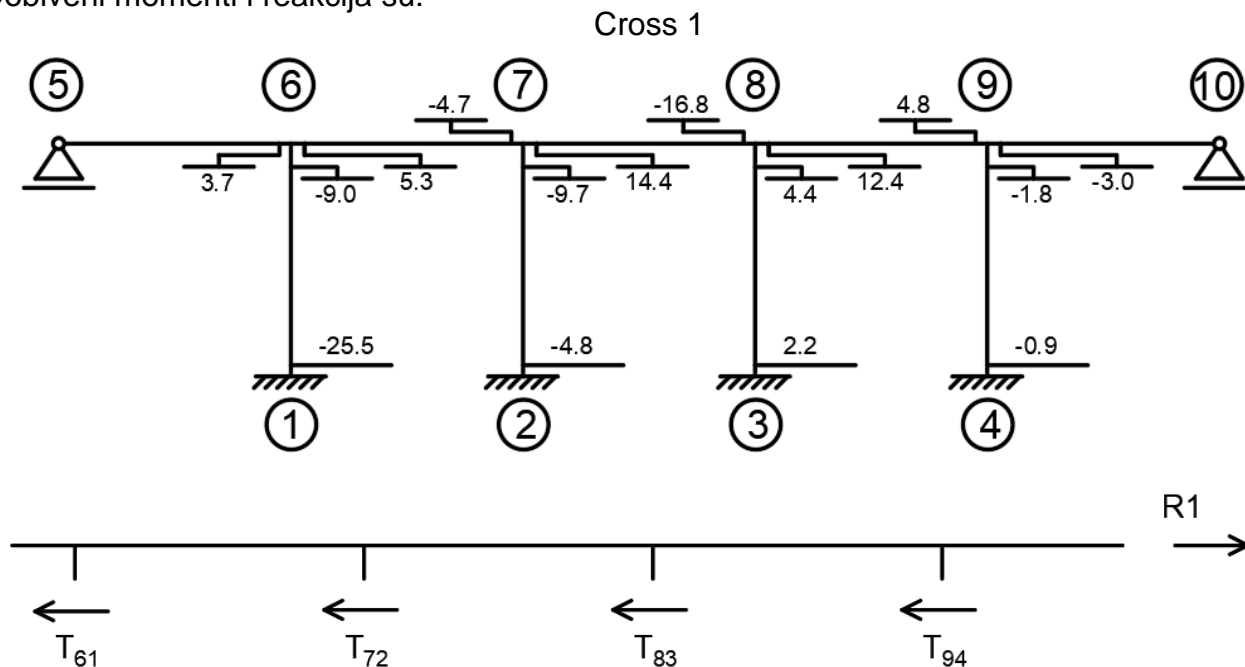


Slika 4.1 Momentni dijagram

Rješavamo isti zadatak Werner-Csonka metodom:

Kao što je rečeno, tijekom rješavanja zadatka Werner-Csonka metodom jednak je tijeku rješavanja Crossovim postupkom do uravnoteženja momenata upetosti početnog sistema odnosno do Cross 1.

Dobiveni momenti i reakcija su:



$$R_1 = T_{61} + T_{72} + T_{83} + T_{94} = \frac{-25.5 - 9}{2} + \frac{-9.7 - 4.8}{2} + \frac{4.4 + 2.2}{2} + \frac{-1.8 - 0.9}{2} =$$

$$R_1 = -22.55 (\leftarrow)$$

„Preklopimo“ početni sustav u poluokvir, stoga su koeficijenti krutosti:

$$K_{I,II} = \frac{7}{2}EI$$

$$K_{II,III} = 4 \cdot (K_{67} + K_{78} + K_{89}) + K_{56} + K_{9,10}$$

$$K_{II,III} = 4 \cdot \left( EI + 2EI + \frac{3}{2}EI \right) + \frac{5}{2}EI + \frac{1}{2}EI$$

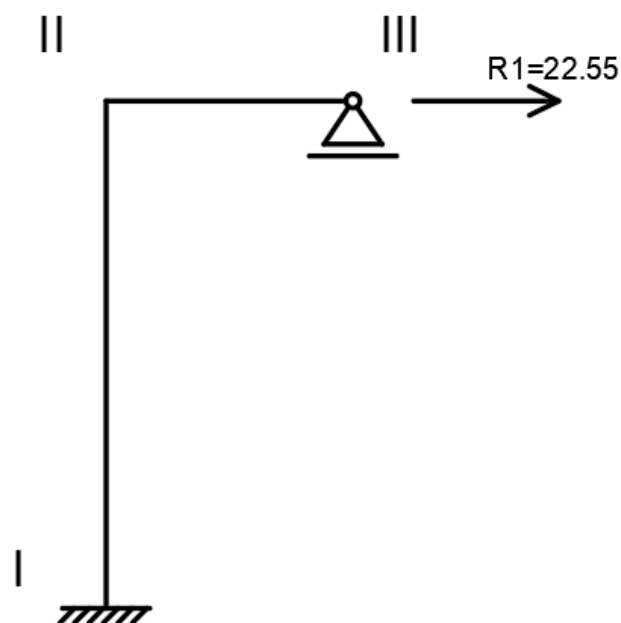
$$K_{II,III} = 21EI$$

Razdjelni koeficijenti:

$$K_{II,I}^* = \frac{7}{2}EI$$

$$K_{II,III}^* = 3 \cdot 21EI = 63EI$$

$$\sum K_{II} = 66.5EI$$



$$\mu_{61} = \frac{1}{19}$$

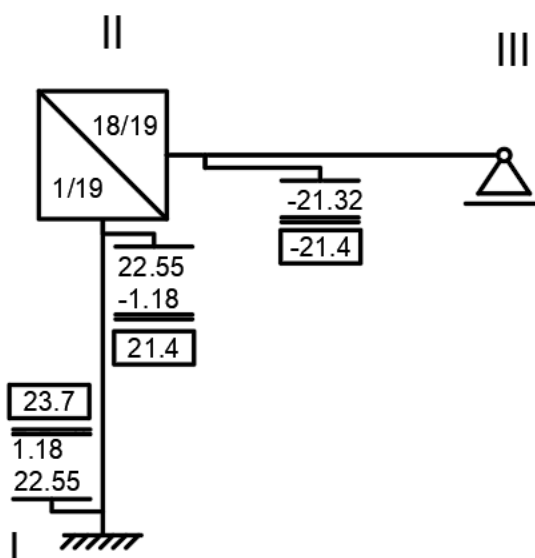
$$\mu_{61} = \frac{18}{19}$$

Razdjelni koeficijent grede znatno je veći od razdjelnog koeficijenta stupa što znači da bi prilikom iteracije s više katova puno momenta otpalo na gredu što uzrokuje manji broj koraka iteracije.

Moment nastao reakcijom:

$$M_{I,II} = M_{II,I} = \frac{22.55 \cdot 2}{2} = 22.55$$

Primjetno je da je cijeli početni sustav prešao u jednu gredu i jedan stup koji sadrži jedan čvor. Kada se uravnotežuje moment u čvoru, s jednim se korakom dolazi do uravnoteženja čvora. Moment koji prenosimo, prenosi se u ležaje, a ne u čvorove što znači da je sustav u potpunosti uravnotežen jednim korakom.



Vraćamo momente s poluokvira na početni sustav.

$$M_{I,II} = M_{16} + M_{27} + M_{38} + M_{49}$$

$$M_{16} = 23.7 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2} EI}{2 \cdot \frac{1}{2} EI + 2 \cdot 1EI + 2 \cdot \frac{1}{2} EI + 2 \cdot \frac{3}{2} EI} = 3.39$$

$$M_{27} = 23.7 \cdot \frac{2 \cdot 1EI}{2 \cdot \frac{1}{2} EI + 2 \cdot 1EI + 2 \cdot \frac{1}{2} EI + 2 \cdot \frac{3}{2} EI} = 6.77$$

$$M_{38} = 3.39$$

$$M_{49} = 10.16$$

$$M_{II,I} = M_{61} + M_{72} + M_{83} + M_{94}$$

$$M_{61} = 3.06$$

$$M_{72} = 6.11$$

$$M_{83} = 3.06$$

$$M_{94} = 9.17$$

$$M_{II,III} = M_{65} + M_{67} + M_{76} + M_{78} + M_{87} + M_{89} + M_{98} + M_{9,10}$$

$$M_{65} = -21.4 \cdot \frac{3 \cdot \frac{1}{2} EI}{3 \cdot \frac{1}{2} EI + 6 \cdot EI + 6 \cdot EI + 6 \cdot 2EI + 6 \cdot 2EI + 6 \cdot \frac{3}{2} EI + 6 \cdot \frac{3}{2} EI + 3 \cdot \frac{5}{2} EI}$$

$$M_{65} = -0.51$$

$$M_{67} = -2.04$$

$$M_{76} = -2.04$$

$$M_{78} = -4.08$$

$$M_{87} = -4.08$$

$$M_{89} = -3.06$$

$$M_{98} = -3.06$$

$$M_{9,10} = -2.55$$

U Sage uvrštavamo:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/21, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 3/4, (11,9): 1/4 }

# prijenosni koeficijent:

co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

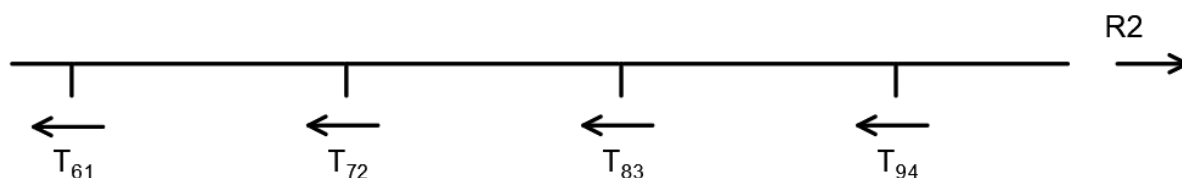
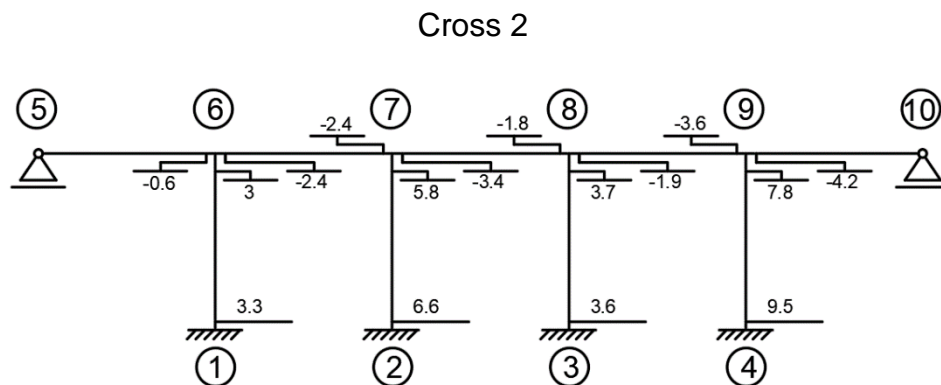
# momenti upetosti:

mom\_fe = { (1, 4): 51.47, (2, 5): 102.93, (4, 1): 35.43, (5, 2): 70.87, (4, 8): 37.25, (5, 9): 37.25, (8, 4): 41, (9, 5): 41, (8, 10): 63.46, (9, 11): 31.73, (10, 8): 57.07, (11, 9): 28.53, (4, 5): -35.44, (5, 4): -35.44, (4, 3): -70.88, (5, 6): -35.44, (8, 9): -66.45, (9, 8): -66.45, (8, 7): -44.3, (10, 11): -42.8, (11, 10): -42.8 }



Iteriranjem pomoću Sage-a u 6 koraka [8, 9, 7, 8, 6, 9] dobivamo sljedeće momente:

(1, 4): [51.5]  
 (2, 5): [102.9]  
 (3, 4): []  
 (4, 1): [35.4]  
 (4, 3): [-70.9]  
 (4, 5): [-35.4]  
 (4, 8): [37.3]  
 (5, 2): [70.9]  
 (5, 4): [-35.4]  
 (5, 6): [-35.4]  
 (5, 9): [37.2]  
 (6, 5): []  
 (7, 8): []  
 (8, 4): [41]  
 (8, 7): [-44.3]  
 (8, 9): [-66.5]  
 (8, 10): [63.5]  
 (9, 5): [41]  
 (9, 8): [-66.4]  
 (9, 11): [31.7]  
 (10, 8): [57.1]  
 (10, 11): [-42.8]  
 (11, 9): [28.5]  
 (11, 10): [-42.8]



$$R_2 = T_{61} + T_{72} + T_{83} + T_{94} = \frac{3.3 + 3}{2} + \frac{6.6 + 5.8}{2} + \frac{3.7 + 3.6}{2} + \frac{9.5 + 7.8}{2} =$$

$$R_2 = 21.65 (\rightarrow)$$

$$\alpha = \frac{22.5 \cdot 2}{21.65 \cdot 2} = 1.03926097$$

$$\Delta T = 22.5 - 21.65 = 0.85$$

$$M = M_{r1} + \alpha M_{r2}$$

$$M_{16} = -22.07$$

$$M_{27} = 2.06$$

$$M_{38} = 5.94$$

$$M_{49} = 8.97$$

$$M_{61} = -5.88$$

$$M_{65} = 3.08$$

$$M_{67} = 2.81$$

$$M_{72} = -3.67$$

$$M_{76} = -29.64$$

$$M_{78} = 10.87$$

$$M_{83} = 8.25$$

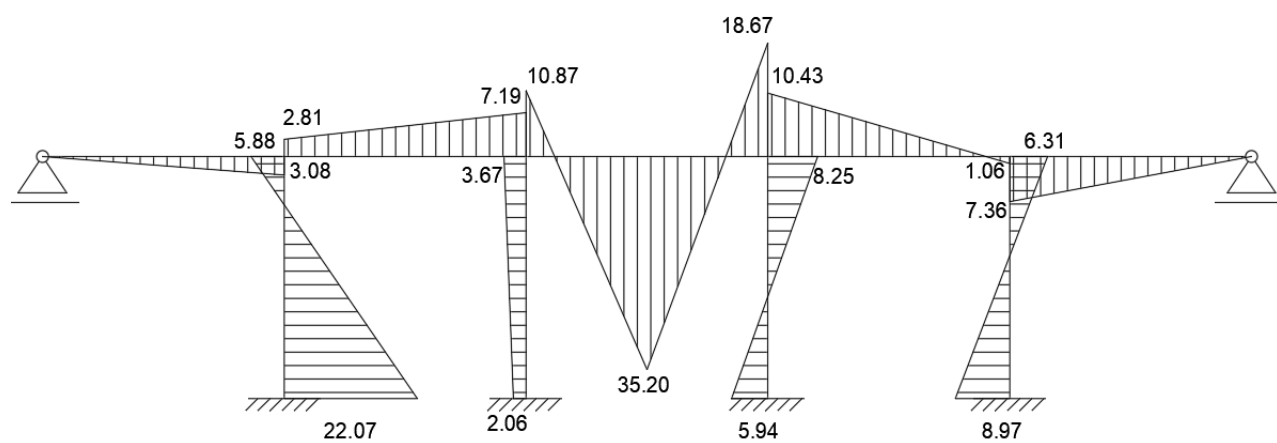
$$M_{87} = -18.67$$

$$M_{89} = 10.43$$

$$M_{94} = 6.31$$

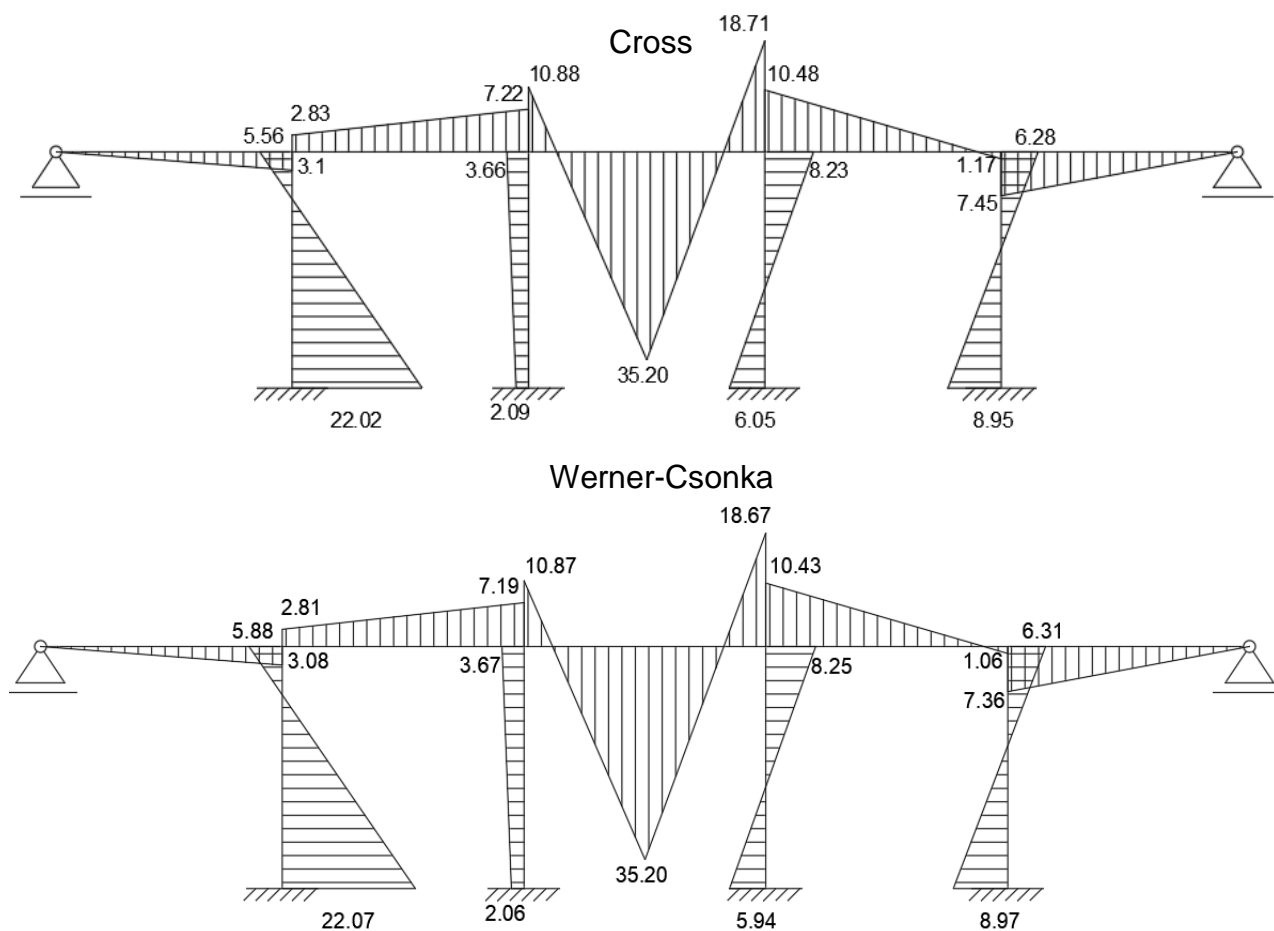
$$M_{98} = 1.06$$

$$M_{9,10} = -7.36$$

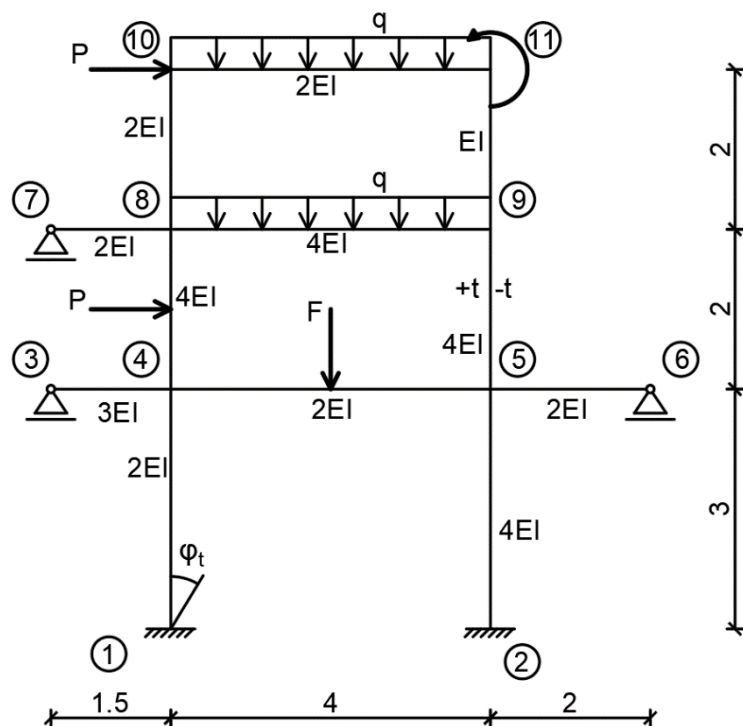


Slika 4.2 Momentni dijagram

Vidljivo je da se rešavanjem zadatka s navedenim metodama dobivaju isti rezultati s malim odstupanjima.

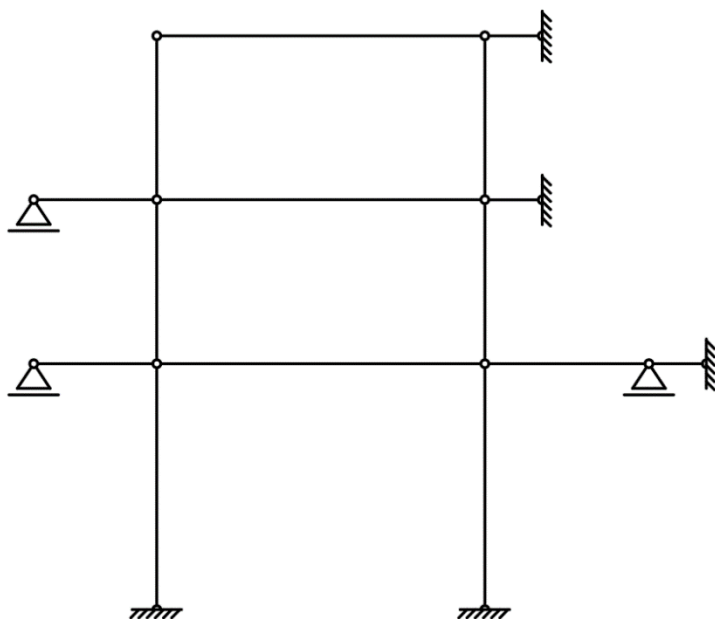


Slika 4.3 Usporedba dijagrama Crossove i Werner-Csonka metode



- M=50 kNm
- P=80 kN
- F=60 kN
- $\rho=0.0002$  m
- q=10 kN/m
- $\alpha_t=10^{-5}k^{-1}$
- t=15 °C     $\Delta t = 30$
- EI=70000 kNm<sup>2</sup>
- b $\times$ h=0.35 $\times$ 0.4
- E=3.75 · 10<sup>7</sup> kN/m<sup>2</sup>

Potrebna su 3 pridržanja da bi sustav bio nepomičan.



Koeficijenti krutosti su:

$$K_{1,4} = \frac{2}{3}EI$$

$$K_{2,5} = \frac{4}{3}EI$$

$$K_{3,4} = 2EI$$

$$K_{4,5} = \frac{1}{2}EI$$

$$K_{5,6} = EI$$

$$K_{4,8} = 2EI$$

$$K_{5,9} = 2EI$$

$$K_{7,8} = \frac{4}{3}EI$$

$$K_{8,9} = EI$$

$$K_{8,10} = EI$$

$$K_{9,11} = \frac{1}{2}EI$$

$$K_{10,11} = \frac{1}{2}EI$$

Momenti upetosti:

$$\bar{M}_{14} = 4 \cdot \frac{2}{3}EI \cdot (-0,0002) = -37.33kNm$$

$$\bar{M}_{61} = 2 \cdot \frac{2}{3}EI \cdot (-0,0002) = -18.67kNm$$

$$\bar{M}_{45} = \frac{Fl}{8} = \frac{60 \cdot 4}{8} = 30 kNm$$

$$\bar{M}_{54} = -\frac{Fl}{8} = -\frac{60 \cdot 4}{8} = -30 kNm$$

$$\bar{M}_{48} = \frac{pl}{8} = \frac{80 \cdot 2}{8} = 20 kNm$$

$$\bar{M}_{84} = -\frac{pl}{8} = -\frac{80 \cdot 2}{8} = -20 kNm$$

$$\bar{M}_{59} = -10^{-5} \cdot \frac{30}{0.4} 70000 = -52.5$$

$$\bar{M}_{95} = 52.5$$

$$\bar{M}_{89} = \frac{10 \cdot 4^2}{12} = 13.33$$

$$\bar{M}_{98} = -\frac{10 \cdot 4^2}{12} = -13.33$$

$$\bar{M}_{9,11} = \frac{10 \cdot 4^2}{12} = 13.33$$

$$\bar{M}_{11,9} = -\frac{10 \cdot 4^2}{12} = -13.33$$

Razdjelni koeficijenti čvorova:

$$K_{43}^* = 6EI \quad \mu_{43} = \frac{9}{28}$$

$$K_{41}^* = \frac{8}{3}EI \quad \mu_{41} = \frac{1}{7}$$

$$K_{45}^* = 2EI \quad \mu_{45} = \frac{3}{28}$$

$$K_{48}^* = 8EI \quad \mu_{48} = \frac{3}{7}$$

$$\sum K_4 = \frac{56}{3}EI$$

$$K_{54}^* = 2EI \quad \mu_{54} = \frac{6}{55}$$

$$K_{52}^* = \frac{16}{3}EI \quad \mu_{52} = \frac{16}{55}$$

$$K_{56}^* = 3EI \quad \mu_{56} = \frac{9}{55}$$

$$K_{59}^* = 8EI \quad \mu_{59} = \frac{24}{55}$$

$$\sum K_5 = \frac{55}{3}EI$$

$$K_{87}^* = 4EI \quad \mu_{87} = \frac{1}{5}$$

$$K_{84}^* = 8EI \quad \mu_{84} = \frac{2}{5}$$

$$K_{89}^* = 4EI \quad \mu_{89} = \frac{1}{5}$$

$$K_{8,10}^* = 4EI \quad \mu_{8,10} = \frac{1}{5}$$

$$\sum K_8 = 20EI$$

$$K_{98}^* = 4EI \quad \mu_{98} = \frac{2}{7}$$

$$K_{95}^* = 8EI \quad \mu_{95} = \frac{4}{7}$$

$$K_{9,11}^* = 2EI \quad \mu_{9,11} = \frac{1}{7}$$

$$\sum K_9 = 14EI$$

$$K_{10,8}^* = 2EI \quad \mu_{10,8} = \frac{1}{2}$$

$$K_{10,11}^* = 2EI \quad \mu_{10,11} = \frac{1}{2}$$

$$\sum K_{10} = 6EI$$

U Sage uvrštavamo:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/28, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# prijenosni koeficijent:

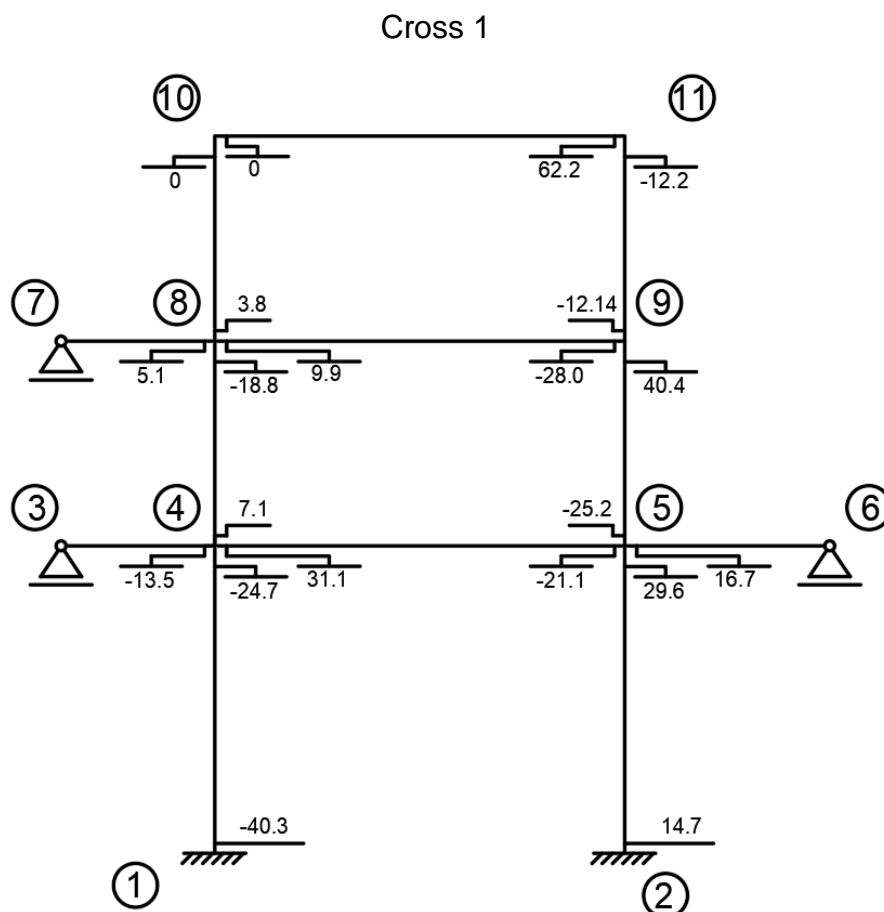
co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# momenti upetosti:

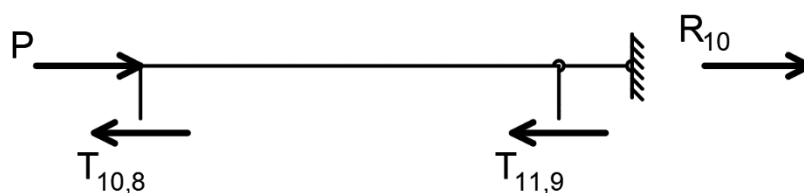
mom\_fe = { (1, 4): -37.33, (4, 1): -18.67, (4, 5): 30, (5, 4): -30.0, (4, 8): 20, (8, 4): -20.0, (5, 9): -52.5, (9, 5): 52.5, (8, 9): 13.33, (9, 8): -13.33, (10, 11): 13.33, (11, 10): 36.67 }

Iteriranjem u 16 koraka [5, 9, 4, 8, 11, 5, 4, 10, 8, 9, 5, 11, 10, 4, 8, 9] dobivamo sljedeće momente:

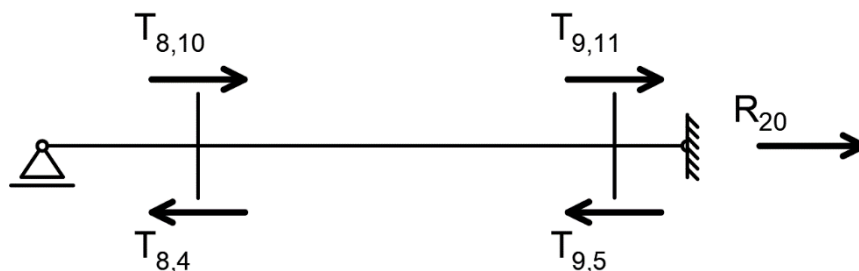
(1, 4): -40.3  
 (2, 5): 14.7  
 (3, 4): 0.00  
 (4, 1): -24.7  
 (4, 3): -13.5  
 (4, 5): 31.1  
 (4, 8): 7.1  
 (5, 2): 29.6  
 (5, 4): -21.1  
 (5, 6): 16.7  
 (5, 9): -25.2  
 (6, 5): 0.00  
 (7, 8): 0.00  
 (8, 4): -18.8  
 (8, 7): 5.1  
 (8, 9): 9.9  
 (8, 10): 3.8  
 (9, 5): 40.4  
 (9, 8): -28.0  
 (9, 11): -12.4  
 (10, 8): 0.00  
 (10, 11): 0.00  
 (11, 9): -12.2  
 (11, 10): 12.2+50



Računaju se reakcije u pridržanjima.

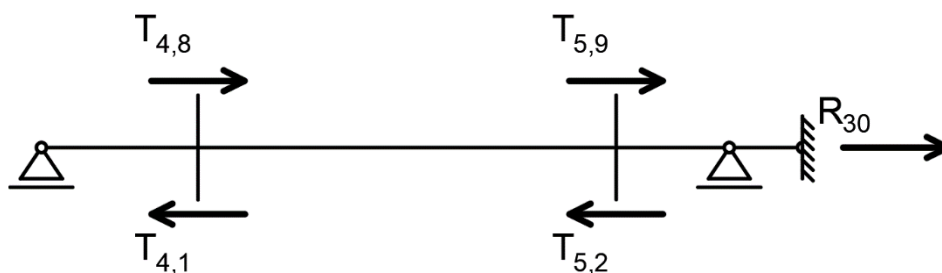


$$R_{10} = T_{10,8} + T_{11,9} - P = \frac{3.8}{2} + \frac{-12.2 - 12.4}{2} - 80 = -90.4 (\leftarrow)$$



$$R_{20} = T_{84} + T_{95} + T_{8,10} + T_{9,11} = \frac{7.1 - 18.8 - 80}{2} + \frac{40.4 - 25.2}{2} - \frac{3.8}{2} - \frac{-12.2 - 12.4}{2}$$

$$R_{20} = -40.15 (\leftarrow)$$



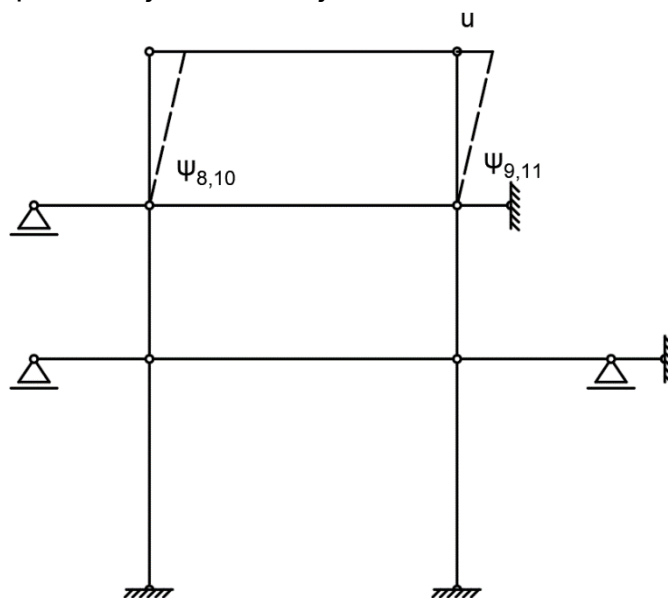
$$R_{30} = T_{41} + T_{52} + T_{48} + T_{59} = \frac{-40.3 - 24.7}{3} + \frac{29.6 + 14.7}{3} - \frac{7.1 - 18.8 + 80}{2} - \frac{40.4 - 25.2}{2}$$

$$R_{30} = -48.65 (\leftarrow)$$



## Cross 2

U sljedećem koraku otpuštamo jednu reakciju te računamo momente od pomaka.



$$u = \frac{300}{EI}$$

$$M_{8,10} = M_{10,8} = -6 \cdot EI \cdot \frac{-150}{EI} = 900$$

$$M_{9,11} = M_{11,9} = -6 \cdot \frac{1}{2} EI \cdot \frac{-150}{EI} = 450$$

U Sage uvrštavamo:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/28, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# prijenosni koeficijent:

co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

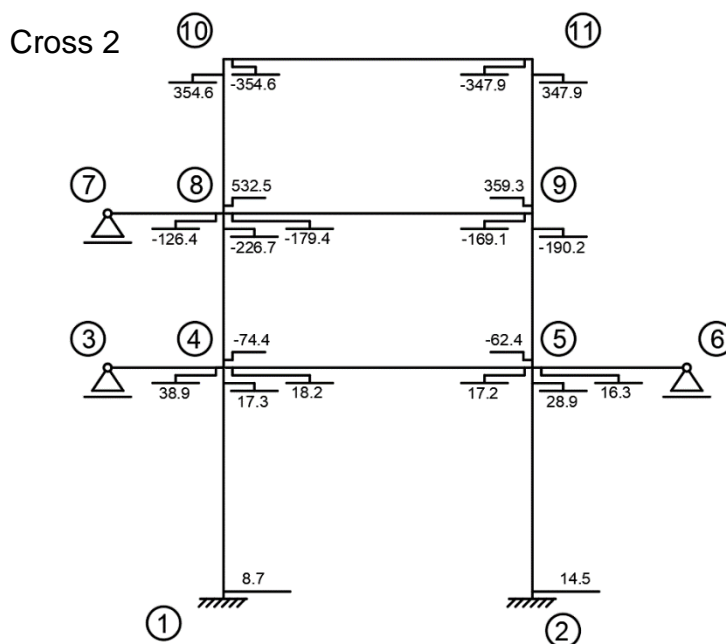
# momenti upetosti:

mom\_fe = { (8, 10): 900 , (10, 8): 900 , (9, 11): 450 , (11, 9): 450 }

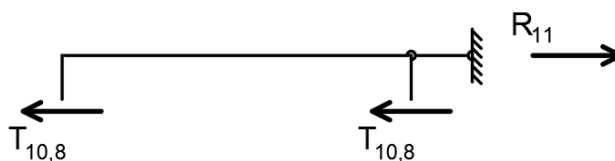
Iteracijom u 20 koraka [8, 10, 9, 11, 8, 4, 5, 10, 8, 11, 9, 10, 4, 5, 8, 11, 10, 4, 8, 9] dobivamo sljedeće momente :

(1, 4) : 8.7  
 (2, 5) : 14.5  
 (3, 4) : 0.00  
 (4, 1) : 17.3  
 (4, 3) : 38.9

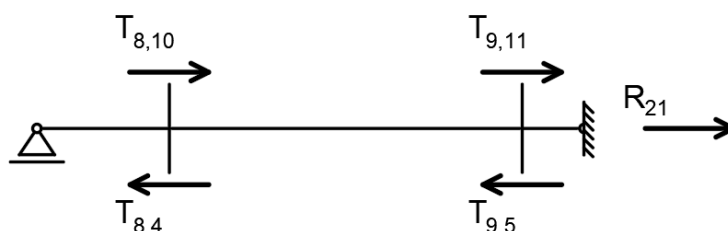
(4, 5): 18.2  
 (4, 8): -74.4  
 (5, 2): 28.9  
 (5, 4): 17.2  
 (5, 6): 16.3  
 (5, 9): -62.4  
 (6, 5): 0.00  
 (7, 8): 0.00  
 (8, 4): -226.7  
 (8, 7): -126.4  
 (8, 9): -179.4  
 (8, 10): 532.5  
 (9, 5): -190.2  
 (9, 8): -169.1  
 (9, 11): 359.3  
 (10, 8): 354.6  
 (10, 11): -354.6  
 (11, 9): 347.9  
 (11, 10): -347.9



Računaju se reakcije u pridržanjima.

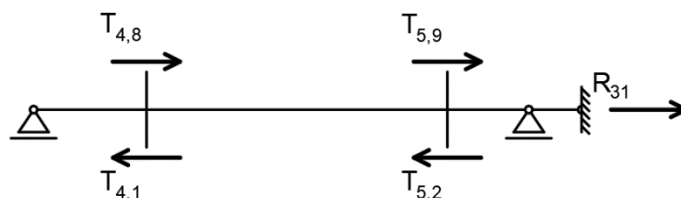


$$R_{11} = T_{10,8} + T_{11,9} = \frac{354.6 + 532.5}{2} + \frac{347.9 + 359.3}{2} = 797.15 (\rightarrow)$$



$$R_{21} = T_{84} + T_{95} + T_{8,10} + T_{9,11} = \frac{-226.7 - 74.4}{2} + \frac{-62.4 - 190.2}{2} - \frac{354.6 + 532.5}{2} - \frac{347.9 + 359.3}{2}$$

$$R_{21} = -1074 (\leftarrow)$$

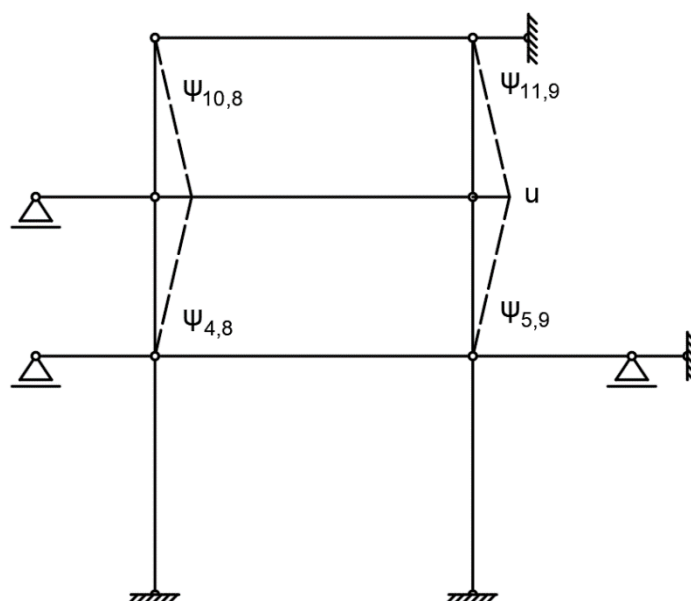


$$R_{31} = T_{41} + T_{52} + T_{48} + T_{59} = \frac{8.7 + 17.3}{3} + \frac{28.9 + 14.5}{3} - \frac{-226.7 - 74.4}{2} - \frac{-62.4 - 190.2}{2}$$

$$R_{31} = 299.98 (\rightarrow)$$

## Cross 3

U sljedećem koraku otpuštamo sljedeću reakciju.



$$u = \frac{300}{EI}$$

$$M_{48} = M_{84} = M_{59} = M_{95} = -6 \cdot EI \cdot \frac{-150}{EI} = 1800$$

$$M_{8,10} = M_{10,8} = -6 \cdot EI \cdot \frac{150}{EI} = -900$$

$$M_{9,11} = M_{11,9} = -6 \cdot \frac{1}{2} EI \cdot \frac{150}{EI} = -450$$

U Sage uvrštavamo:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/21, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 3/4, (11,9): 1/4 }

# prijenosni koeficijent:

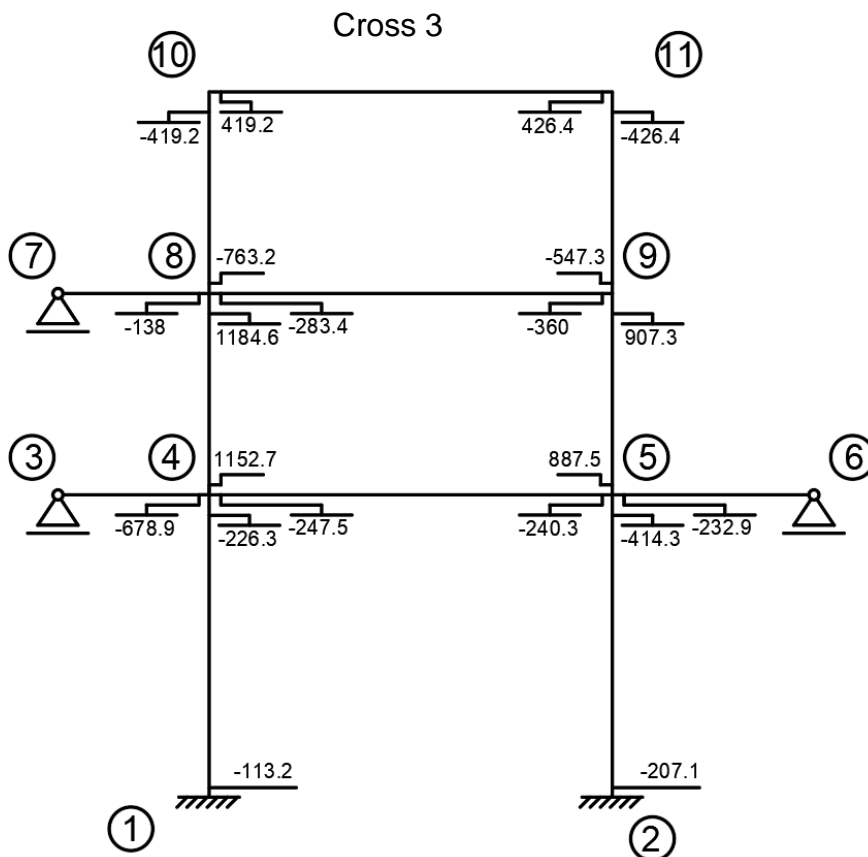
co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# momenti upetosti:

mom\_fe = { (4, 8): 1800 , (8, 4): 1800 , (5, 9): 1800 , (9, 5): 1800 , (8, 10): -900 , (10, 8): -900 , (9, 11): -450 , (11, 9): -450 }

Iteracijom u 25 koraka [5, 4, 9, 10, 8, 11, 5, 4, 10, 9, 11, 5, 10, 8, 9, 4, 5, 11, 10, 8, 9, 4, 11, 10, 8] dobivamo sljedeće momente:

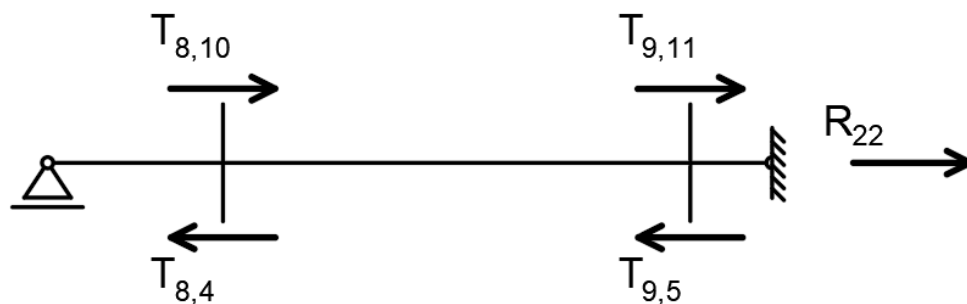
(1, 4): -113.2  
 (2, 5): -207.1  
 (3, 4): 0.00  
 (4, 1): -226.3  
 (4, 3): -678.9  
 (4, 5): -247.5  
 (4, 8): 1152.7  
 (5, 2): -414.3  
 (5, 4): -240.3  
 (5, 6): -232.9  
 (5, 9): 887.5  
 (6, 5): 0.00  
 (7, 8): 0.00  
 (8, 4): 1184.6  
 (8, 7): -138.0  
 (8, 9): -283.4  
 (8, 10): -763.2  
 (9, 5): 907.3  
 (9, 8): -360.0  
 (9, 11): -547.3  
 (10, 8): -419.2  
 (10, 11): 419.2  
 (11, 9): -426.4  
 (11, 10): 426.4



Računaju se reakcije u pridržanjima.

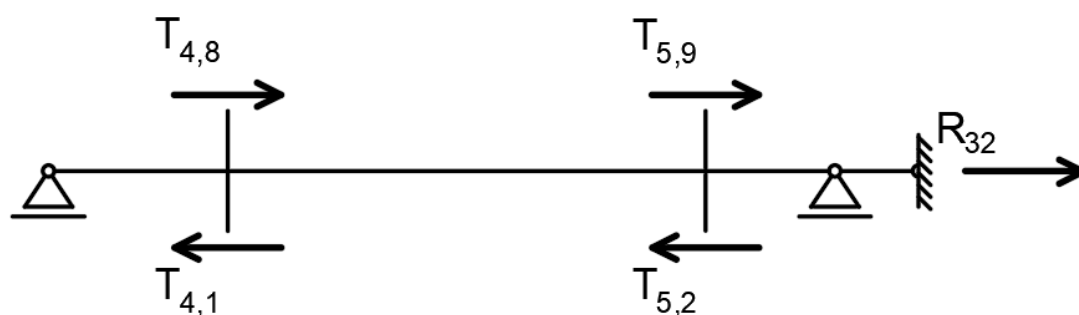


$$R_{12} = T_{10,8} + T_{11,9} = \frac{-419.2 - 763.2}{2} + \frac{-426.4 - 547.3}{2} = -1078.05 (\leftarrow)$$



$$R_{22} = T_{84} + T_{95} + T_{8,10} + T_{9,11} = \frac{1184.6 + 1152.7}{2} + \frac{907.3 + 887.5}{2} - \frac{-419.2 - 763.2}{2} - \frac{-426.4 - 547.3}{2}$$

$$R_{22} = 3144.1 (\rightarrow)$$

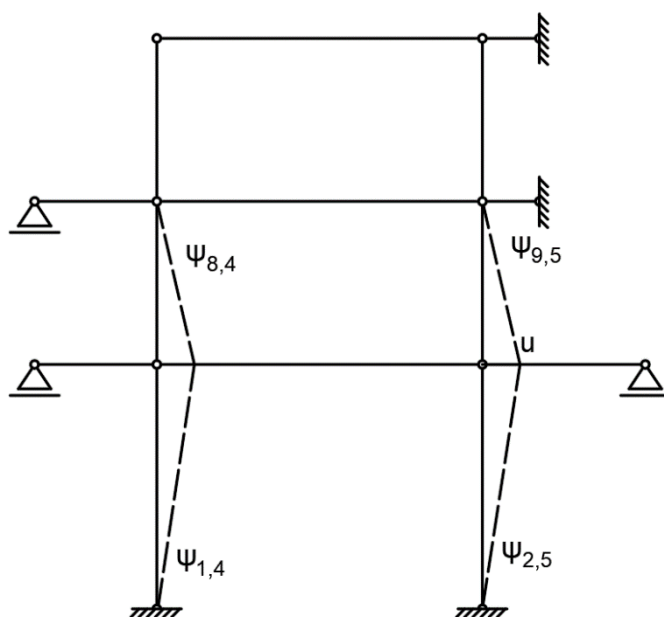


$$R_{32} = T_{41} + T_{52} + T_{48} + T_{59} = \frac{-113.2 - 226.3}{3} + \frac{-414.3 - 207.1}{3} - \frac{1184.6 + 1152.7}{2} - \frac{907.3 + 887.5}{2}$$

$$R_{32} = -2386.35 (\leftarrow)$$

## Cross 4

U sljedećem koraku otpuštamo sljedeću reakciju.



$$u = \frac{300}{EI}$$

$$M_{14} = M_{41} = -6 \cdot \frac{2}{3} EI \cdot \frac{-100}{EI} = 400$$

$$M_{25} = M_{52} = -6 \cdot \frac{4}{3} EI \cdot \frac{-100}{EI} = 800$$

$$M_{48} = M_{84} = -6 \cdot 2EI \cdot \frac{150}{EI} = -1800$$

$$M_{59} = M_{95} = -6 \cdot 2EI \cdot \frac{150}{EI} = -1800$$

U Sage uvrštavamo:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/21, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# prijenosni koeficijent:

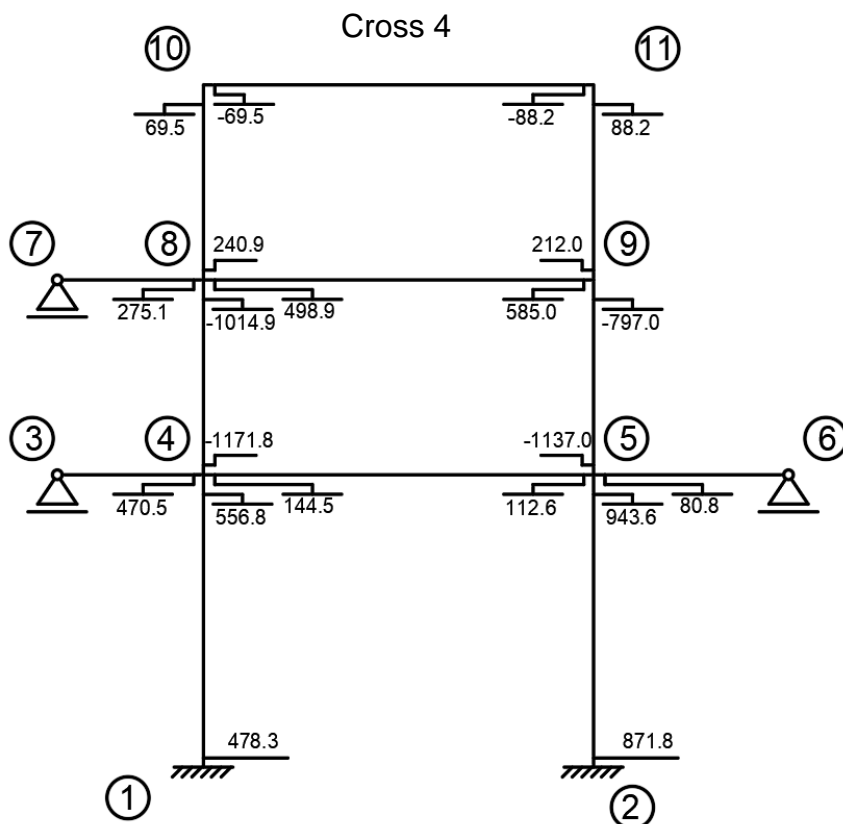
co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# momenti upetosti:

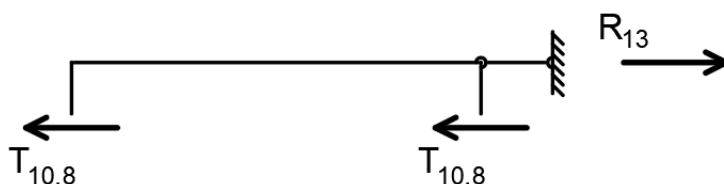
mom\_fe = { (1, 4): 400 , (4, 1): 400, (2, 5): 800, (5, 2): 800, (4, 8): -1800, (8, 4): -1800, (5, 9): -1800, (9, 5): -1800 }

Iteracijom u 26 koraka [9, 8, 4, 5, 9, 8, 10, 11, 5, 8, 10, 9, 8, 4, 11, 5, 10, 9, 8, 11, 5, 4, 10, 9, 8, 5] dobivamo sljedeće momente:

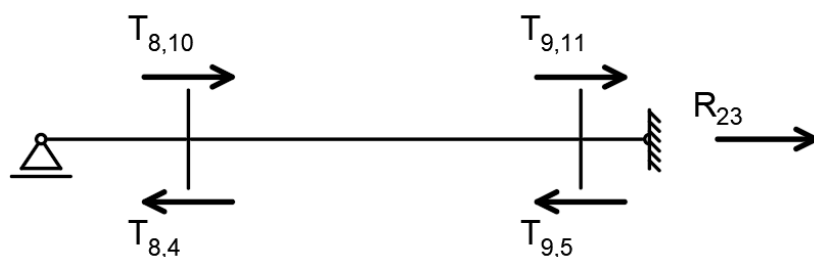
(1, 4): 478.3  
 (2, 5): 871.8  
 (3, 4): 0.00  
 (4, 1): 556.8  
 (4, 3): 470.5  
 (4, 5): 144.5  
 (4, 8): -1171.8  
 (5, 2): 943.6  
 (5, 4): 112.6  
 (5, 6): 80.8  
 (5, 9): -1137.0  
 (6, 5): 0.00  
 (7, 8): 0.00  
 (8, 4): -1014.9  
 (8, 7): 275.1  
 (8, 9): 498.9  
 (8, 10): 240.9  
 (9, 5): -797.0  
 (9, 8): 585.0  
 (9, 11): 212.0  
 (10, 8): 69.5  
 (10, 11): -69.5  
 (11, 9): 88.2  
 (11, 10): -88.2



Računaju se reakcije u pridržanjima.

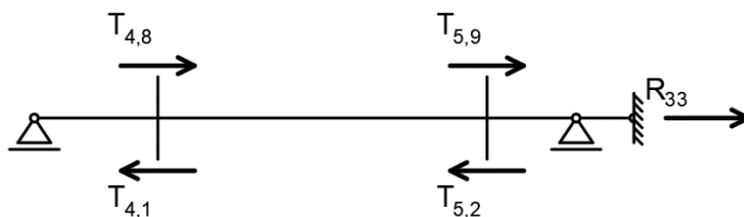


$$R_{13} = T_{10,8} + T_{11,9} = \frac{69.5 + 240.9}{2} + \frac{88.2 + 212}{2} = 305.3 (\rightarrow)$$



$$R_{23} = T_{84} + T_{95} + T_{8,10} + T_{9,11} = \frac{-1014.9 - 1171.8}{2} + \frac{-797 - 1137}{2} - \frac{69.5 + 240.9}{2} + \frac{88.2 + 212}{2}$$

$$R_{23} = -1799.15 (\leftarrow)$$



$$R_{33} = T_{41} + T_{52} + T_{48} + T_{59} = \frac{478.3 + 556.8}{3} + \frac{943.6 + 871.8}{3} - \frac{-1014.9 - 1171.8}{2} - \frac{-797 - 1137}{2}$$

$$R_{33} = 3011.52 (\rightarrow)$$

Sustav jednažbi:

$$R_{10} + R_{11}\beta_1 + R_{12}\beta_2 + R_{13}\beta_3 = 0$$

$$R_{20} + R_{21}\beta_1 + R_{22}\beta_2 + R_{23}\beta_3 = 0$$

$$R_{30} + R_{31}\beta_1 + R_{32}\beta_2 + R_{33}\beta_3 = 0$$

$$797.15\beta_1 - 1078.05\beta_2 + 305.3\beta_3 = 90.4$$

$$-1074\beta_1 + 3144.1\beta_2 - 1799.15\beta_3 = 40.15$$

$$299.98\beta_1 - 2386.35\beta_2 + 3011.52\beta_3 = 48.65$$

$$\beta_1 = 0,3595530731$$

$$\beta_2 = 0,227495413$$

$$\beta_3 = 0,1606008247$$

Dobiveni krajnji momenti:

$$M_{14} = 13.89$$

$$M_{84} = 6.18$$

$$M_{25} = 112.82$$

$$M_{87} = -27.56$$

$$M_{34} = 0$$

$$M_{89} = -38.95$$

$$M_{41} = 19.46$$

$$M_{8,10} = 60.33$$

$$M_{43} = -78.39$$

$$M_{95} = 50.41$$

$$M_{45} = 4.55$$

$$M_{98} = -76.74$$

$$M_{48} = 54.38$$

$$M_{9,11} = 26.33$$

$$M_{52} = 97.29$$

$$M_{10,8} = 43.29$$

$$M_{54} = -51.5$$

$$M_{10,11} = -43.29$$

$$M_{56} = -17.45$$

$$M_{11,9} = 30.05$$

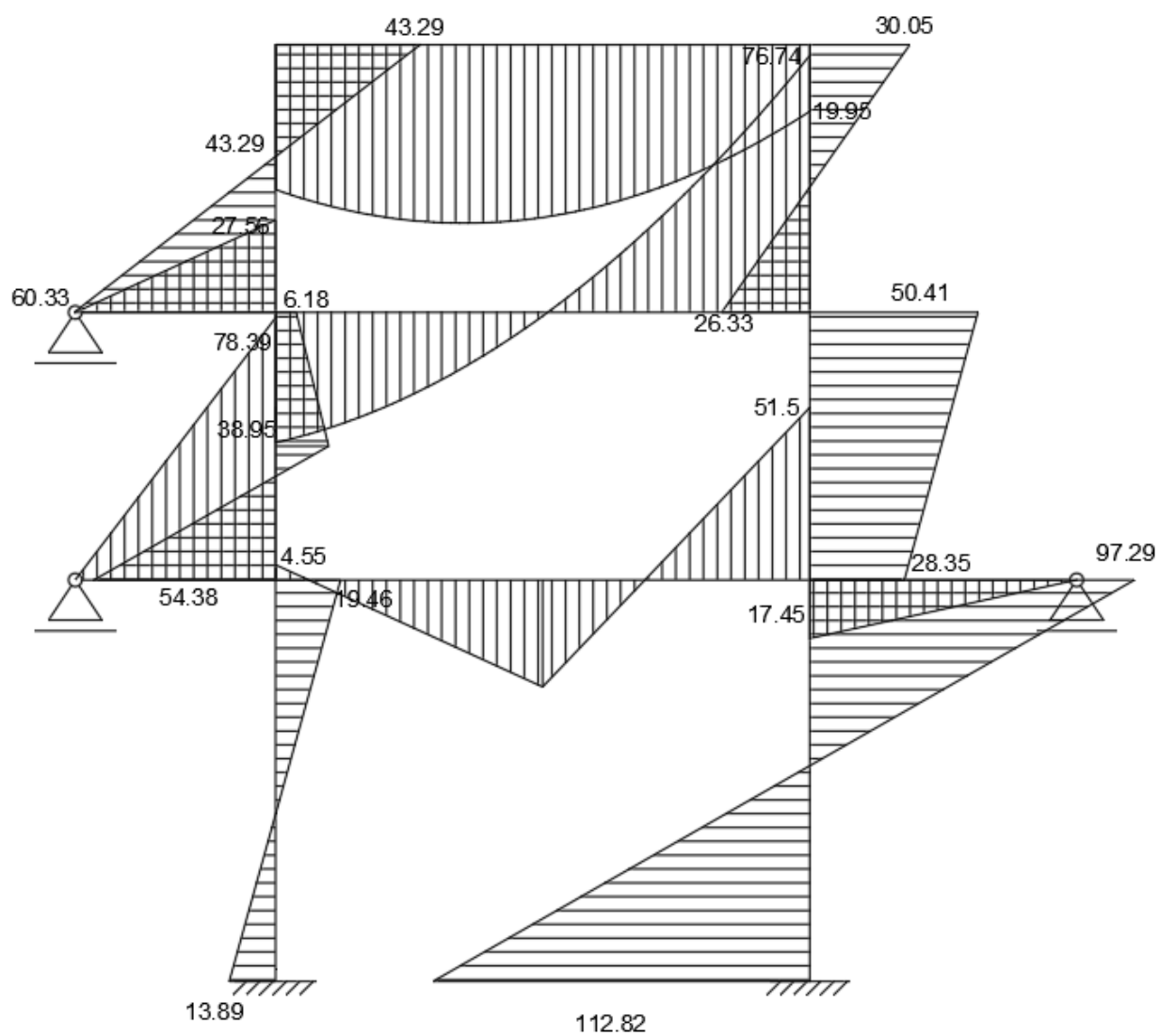
$$M_{59} = -28.35$$

$$M_{11,10} = 19.95$$

$$M_{65} = 0$$

$$M_{78} = 0$$

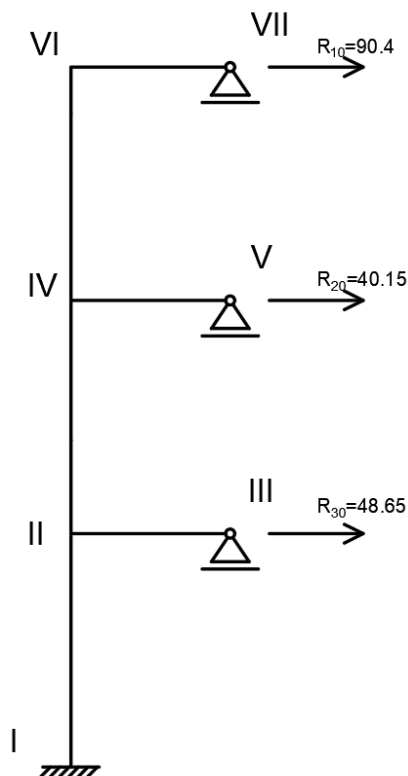




Slika 4.4 Momentni dijagram

## Rješavanje zadatka pomoću Werner-Csonka metode

Kao što je rečeno, tijekom rješavanja zadatka Werner-Csonka metodom jednak je tijeku rješavanja Crossovim postupkom do uravnoteženja momenata upetosti početnog sistema odnosno do Cross 1. Poluokvir je opterećen reakcijama prvog Crossa samo suprotnog smjera.



Koeficijenti krutosti poluokvira:

$$K_{I,II} = K_{14} + K_{25} = \frac{2}{3}EI + \frac{4}{3}EI = 2EI$$

$$K_{II,IV} = K_{48} + K_{59} = 2EI + 2EI = 4EI$$

$$K_{IV,VI} = K_{8,10} + K_{9,11} = EI + \frac{1}{2}EI = \frac{3}{2}EI$$

$$K_{II,III} = 4K_{45} + K_{34} + K_{56} = 5EI$$

$$K_{IV,V} = 4K_{89} + K_{78} = \frac{16}{3}EI$$

$$K_{VI,VII} = 4K_{10,11} = 2EI$$

Razdjelni koeficijenti:

$$K_{II,I}^* = 2EI$$

$$\mu_{II,I} = \frac{2}{21}$$

$$K_{II,III}^* = 15EI$$

$$\mu_{II,III} = \frac{5}{7}$$

$$K_{II,IV}^* = 4EI$$

$$\mu_{II,IV} = \frac{4}{21}$$

$$\sum K_{II} = 21 EI$$

$$K_{IV,II}^* = 4EI$$

$$\mu_{IV,II} = \frac{8}{43}$$

$$K_{IV,V}^* = 16EI$$

$$\mu_{IV,V} = \frac{32}{43}$$

$$K_{IV,VI}^* = \frac{3}{2}EI$$

$$\mu_{IV,VI} = \frac{3}{43}$$

$$\sum K_{IV} = \frac{43}{2} EI$$

$$K_{VI,IV}^* = \frac{3}{2}EI$$


$$\mu_{VI,IV} = \frac{1}{5}$$

$$K_{VI,VII}^* = 6EI$$

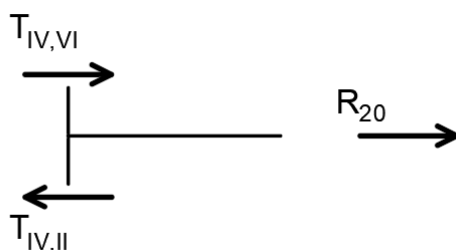
$$\mu_{VI,VII} = \frac{4}{5}$$

$$\sum K_{VI} = \frac{15}{2} EI$$

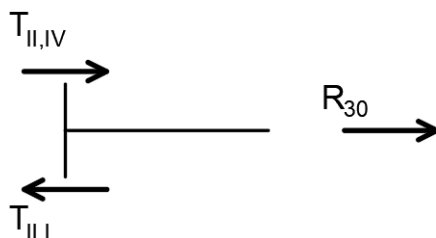
Momenti u stupovima:



$$M_{IV,VI} = M_{VI,VI} = \frac{90.4 \cdot 2}{2} = 90.4$$



$$M_{IV,VI} = M_{VI,VI} = \frac{130.55 \cdot 2}{2} = 130.55$$



$$M_{IV,VI} = M_{VI,VI} = \frac{179.2 \cdot 3}{2} = 268.8$$

U Sage se uvrste sljedeći parametri:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (2, 1): 2/21, (2, 3): 5/7, (2, 4): 4/21, (4, 2): 8/43, (4, 5): 32/43, (4, 6): 3/43, (6, 4): 1/5, (6, 7): 4/5 }

# prijenosni koeficijent:

co\_f = { (2, 1): -1, (2, 3): 0, (2, 4): -1, (4, 2): -1, (4, 5): 0, (4, 6): -1, (6, 4): -1, (6, 7): 0 }

# momenti upetosti:

mom\_fe = { (2, 1): 268.8, (1, 2): 268.8, (2, 4): 130.55, (4, 2): 130.55, (4, 6): 90.4, (6, 4): 90.4 }

Iteracijom u 9 koraka [2, 4, 6, 2, 4, 2, 6, 4, 2] dobivamo sljedeće momente:

$$(1, 2) : 312.7$$

$$(2, 1) : 224.9$$

$$(2, 3) : -329.4$$

$$(2, 4) : 104.4$$

$$(3, 2) : 0.00$$

$$(4, 2) : 156.7$$

$$(4, 5) : -246.6$$

$$(4, 6) : 90.0$$

$$(5, 4) : 0.00$$

$$(6, 4) : 90.8$$

$$(6, 7) : -90.7$$

$$(7, 6) : 0.00$$

Momente vraćamo na početni sustav:

$$M_{I,II} = M_{14} + M_{25}$$

$$M_{14} = 312.7 \cdot \frac{2 \frac{2}{3} EI}{2 \frac{2}{3} EI + 2 \frac{4}{3} EI} = 104.23$$

$$M_{25} = 208.47$$

$$M_{II,I} = M_{41} + M_{52}$$

$$M_{41} = 74.96$$

$$M_{52} = 149.93$$

$$M_{II,IV} = M_{48} + M_{59}$$

$$M_{48} = 104.4 \cdot \frac{4 \cdot 2EI}{4 \cdot 2EI + 4 \cdot 2EI} = 52.2$$

$$M_{59} = 52.2$$

$$M_{IV,II} = M_{84} + M_{95}$$

$$M_{84} = 78.35$$

$$M_{95} = 78.35$$

$$M_{IV,VI} = M_{8,10} + M_{9,11}$$

$$M_{8,10} = 90 \cdot \frac{6EI}{6EI + 6 \frac{1}{2} EI} = 60$$

$$M_{95} = 30$$

$$M_{VI,IV} = M_{10,8} + M_{11,9}$$

$$M_{10,8} = 90.6 \cdot \frac{6EI}{6EI + 6 \frac{1}{2}EI} = 60.53$$

$$M_{11,9} = 30.27$$

$$M_{II,III} = M_{45} + M_{54} + M_{43} + M_{56}$$

$$M_{45} = -329.3 \cdot \frac{6 \frac{1}{2}EI}{6 \frac{1}{2}EI + 6 \frac{1}{2}EI + 3 \cdot 2EI + 3EI} = -49.34$$

$$M_{54} = -49.34$$

$$M_{43} = -98.68$$

$$M_{56} = -49.34$$

$$M_{IV,V} = M_{89} + M_{98} + M_{87}$$

$$M_{89} = -246.7 \cdot \frac{6EI}{6EI + 6EI + 3 \frac{4}{3}EI} = -92.68$$

$$M_{98} = -92.68$$

$$M_{87} = -61.67$$

$$M_{VI,VII} = M_{10,11} + M_{11,10}$$

$$M_{10,11} = -45.4$$

$$M_{11,10} = -45.4$$

Izračunate momente uvrstimo u Sage da možemo uravnotežiti Cross 2:

# razdjelni koeficijenti:

distr\_f = { (4, 3): 9/21, (4, 1): 1/7, (4, 5): 3/28, (4, 8): 3/7, (5, 4): 6/55, (5, 2): 16/55, (5, 6): 9/55, (5, 9): 24/55, (8, 7): 1/5, (8, 4): 2/5, (8, 9): 1/5, (8, 10): 1/5, (9, 8): 2/7, (9, 5): 4/7, (9, 11): 1/7, (10, 8): 2/3, (10, 11): 1/3, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# prijenosni koeficijent:

co\_f = { (4, 3): 0, (4, 1): 1/2, (4, 5): 1/2, (4, 8): 1/2, (5, 4): 1/2, (5, 2): 1/2, (5, 6): 0, (5, 9): 1/2, (8, 7): 0, (8, 4): 1/2, (8, 9): 1/2, (8, 10): 1/2, (9, 8): 1/2, (9, 5): 1/2, (9, 11): 1/2, (10, 8): 1/2, (10, 11): 1/2, (11, 10): 1/2, (11,9): 1/2 }

# momenti upetosti:

mom\_fe = { (1, 4): 104.23 , (2, 5): 208.47 , (4, 1): 74.97 , (5, 2): 149.93 , (4, 8): 52.2 , (5, 9): 52.2 , (8, 4): 78.35 , (9, 5): 78.35 , (8, 10): 60 , (9, 11): 30 , (10, 8): 60.53, (11, 9): 30.26 , (4, 5): -49.34 , (5, 4): -49.34 , (4, 3): -98.68 , (5, 6): -49.34 , (8, 9): -92.51 , (9, 8): -92.51 , (8, 7): -61.67 , (10, 11): -45.4 , (11, 10): -45.4 }

Iteracijom u 14 koraka [5, 4, 10, 11, 8, 10, 4, 8, 9, 11, 5, 4, 10, 9] dobivamo sljedeće momente:

$$(1, 4) : 105.8$$

$$(2, 5) : 193.2$$

$$(3, 4) : 0.00$$

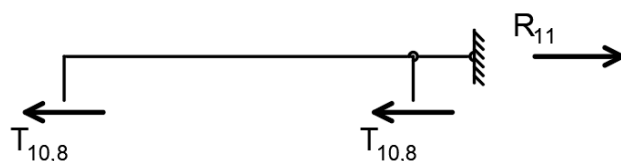
$$(4, 1) : 78.3$$

$$(4, 3) : -88.9$$

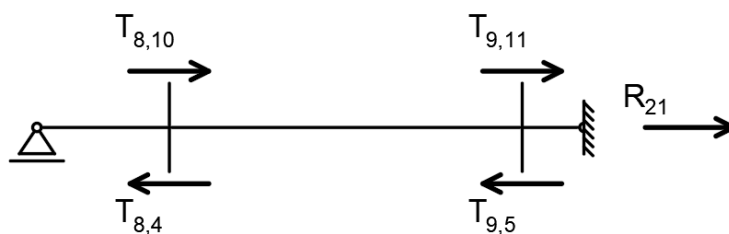
$$(4, 5) : -52.7$$

(4, 8) : 63.3  
 (5, 2) : 119.2  
 (5, 4) : -59.5  
 (5, 6) : -66.5  
 (5, 9) : 6.8  
 (6, 5) : 0.00  
 (7, 8) : 0.00  
 (8, 4) : 90.7  
 (8, 7) : -58.0  
 (8, 9) : -88.4  
 (8, 10) : 55.7  
 (9, 5) : 57.1  
 (9, 8) : -89.8  
 (9, 11) : 32.7  
 (10, 8) : 46.3  
 (10, 11) : -46.3  
 (11, 9) : 35.2  
 (11, 10) : -35.2

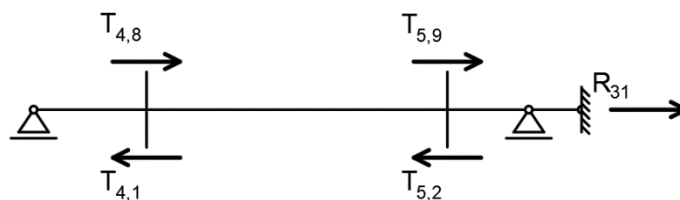
Računaju se reakcije u pridrzanjima.



$$R_{11} = T_{10,8} + T_{11,9} = 84.95(\rightarrow)$$



$$R_{21} = T_{84} + T_{95} + T_{8,10} + T_{9,11} = 38.65(\rightarrow)$$



$$R_{31} = T_{41} + T_{52} + T_{48} + T_{59} = 48.03(\rightarrow)$$

$$\alpha = 1.040354894$$

Dobiveni krajnji momenti:

$$M_{14} = 15.88$$

$$M_{84} = 34.26$$

$$M_{25} = 115.82$$

$$M_{87} = -39.74$$

$$M_{34} = 0$$

$$M_{89} = -58.14$$

$$M_{41} = 17.33$$

$$M_{8,10} = 63.62$$

$$M_{43} = -71.76$$

$$M_{95} = 73.90$$

$$M_{45} = -4.16$$

$$M_{98} = -96.66$$

$$M_{48} = 58.60$$

$$M_{9,11} = 22.76$$

$$M_{52} = 91.61$$

$$M_{10,8} = 45.15$$

$$M_{54} = -60.53$$

$$M_{10,11} = -45.15$$

$$M_{56} = -26.78$$

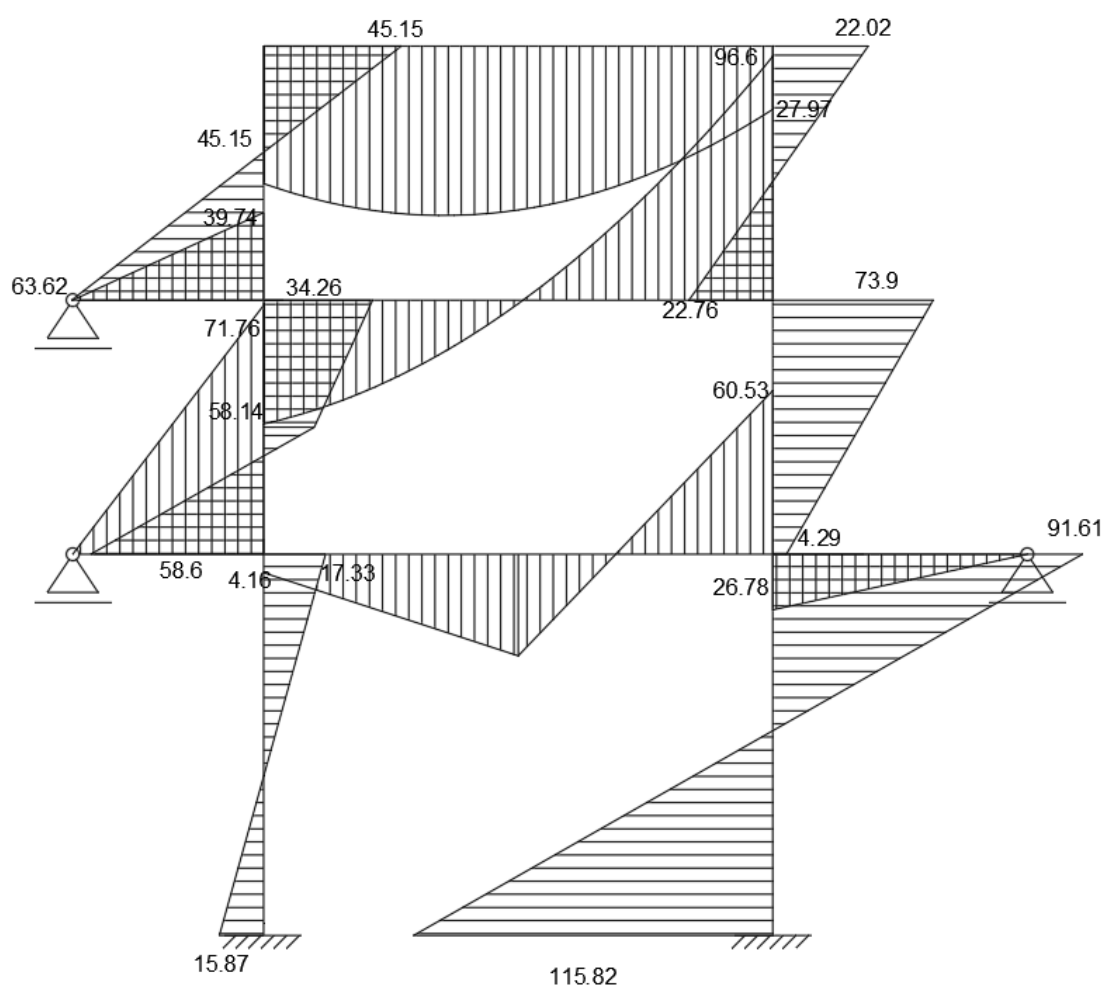
$$M_{11,9} = 22.02$$

$$M_{59} = -4.29$$

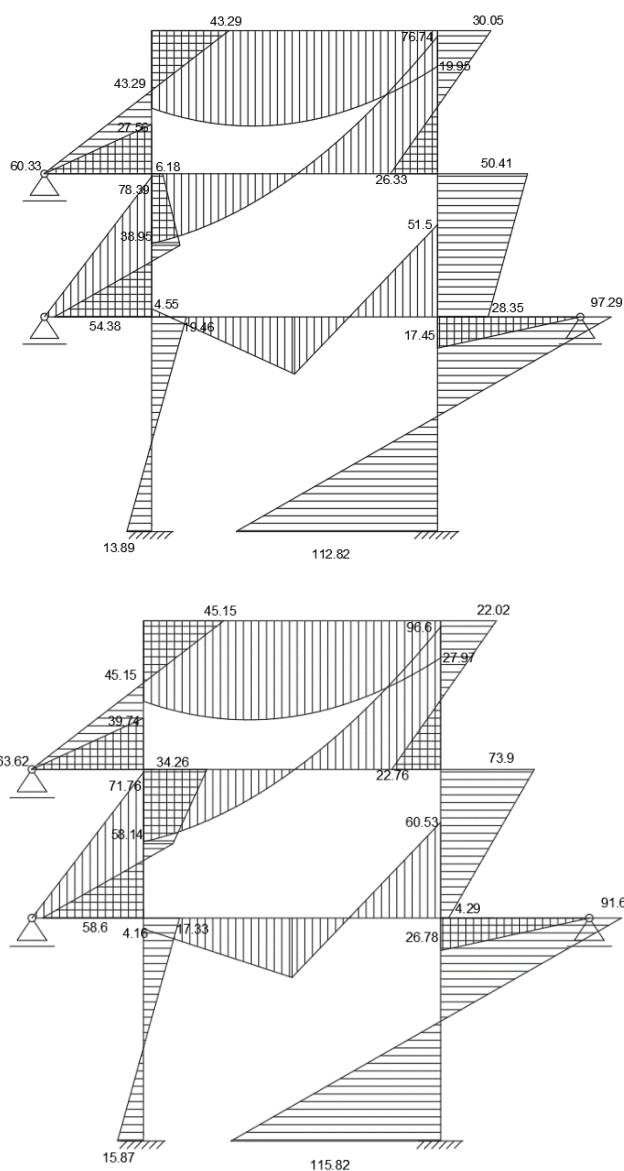
$$M_{11,10} = 19.95$$

$$M_{65} = 0$$

$$M_{78} = 0$$



Slika 4.5 Momentni dijagram



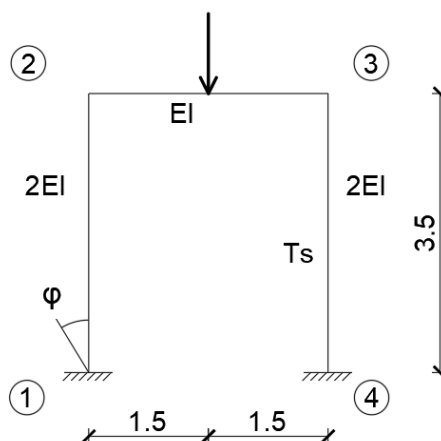
*Slika 4.6 Usporedba dijagrama Crossove i Werner-Csonka metode*

Momentni dijagrami poklapaju se uz odstupanja. Zbog složenosti zadatka, količine podataka, krivog zaokruživanja i pogrešnog unosa podataka nastale su male greške koje su prihvatljive jer su momentni u određenim točkama istog predznaka.



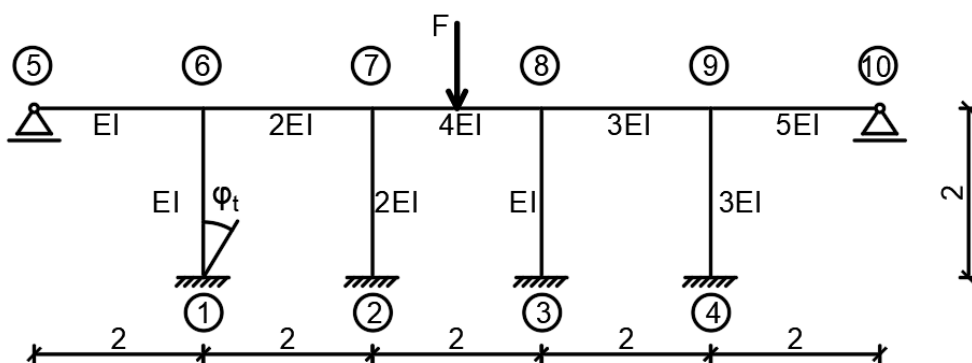
## 5. Zaključak

Kroz primjere rješavanja metoda riješen je jednostavniji primjer. Možemo zaključiti da je Crossova metoda pri jednostavnijim zadacima direktnija i brža. Werner-Csonka postupak koristi sličnu iteraciju kao i Crossova ali zahtijeva više rada zbog potrebnog računanja dodatnih koeficijenta krutosti i razdjelnih koeficijenta. Kod Werner-Csonka metode također smo dva puta računali iteracijski postupak (Cross 1 i Cross 2) i još smo dodatno morali računati postupak uravnoteženja na poluokviru. Kod Crossove metode bilo je potrebno samo dva postupka uravnoteženja momenta.



Slika 5.1 Prvi zadatak

Rješavanje sljedećeg zadatka koji je zadan tako da bi mogao ukazati na prednost Werner-Csonka metode ukazuje da je Crossova metoda direktnija i jednostavnija jer se do rješenja



Slika 5.2 Drugi zadatak

dolazi višestrukim ponavljanjem sličnog postupka, ali je zbog ponavljanja zamornija za rješavanje.

Također se može vidjeti da je za uravnoteženje čvorova Crossovom metodom potrebno oko 20 koraka da se dođe do rješenja što ručnim računanjem može potrajati. Kod većih sistema, uravnoteženje momenata računanjem bez računalnog programa može znatno potrajati i postoji mogućnost grešaka zbog količine informacija o kojima treba voditi računa. Stoga se

preporučuje korištenje računalnih programa kako bi se ubrzalo računanje te smanjila mogućnost pogrešaka.

Kada se jednom izračunaju razdjelni koeficijenti čvorova, koristi ih se pri svakom sljedećem uravnoteženju dok je pri Werner-Csonka metodi potrebno računati koeficijente krutosti i razdjelne koeficijente početnog sustava i poluokvira.

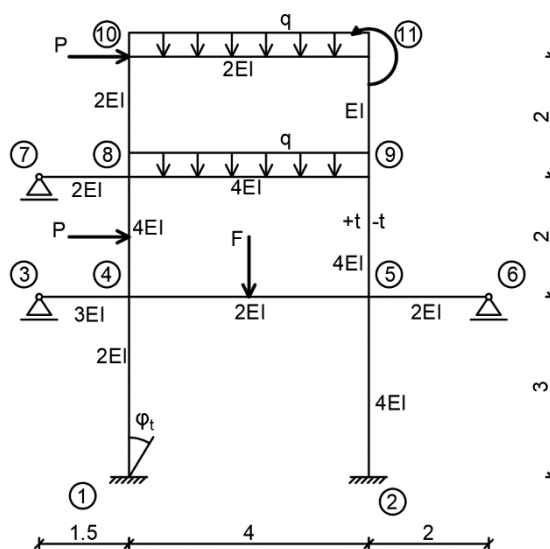
Korištenjem Werner-Csonka metode smanjuje se broj koraka iteracije. Preklapanjem poluokvira razdjelni koeficijent grede znatno je veći od stupa. Zbog toga se moment pri uravnoteženju sistema brzo gubi jer većina momenta otpada na gredu, a preostali moment se dijeli na stupove. Na ovom se primjeru može vidjeti da se pri uravnoteženju, broj koraka iteracije smanjuje na jedan korak. Da bismo uravnotežili poluokvir moramo izračunati razdjelne koeficijente čvorova poluokvira. Uravnoteženi poluokvir zatim moramo vratiti na početni sustav te ga ponovno uravnotežiti. Ovo uravnoteženje dobiveno je u šest koraka dok je korištenjem Crossove metode bilo potrebno deset i šesnaest koraka. Ako zanemarimo vrijeme potrebno za računanje novih razdjelnih koeficijenata i vraćanja momenata, potrebno vrijeme za uravnoteženje sistema bez računala se smanjilo.

Pri Werner-Csonka metodi potrebno je voditi računa o predznaku dobivenih reakcija. Ako razlike vrijednosti neuravnoteženih horizontalnih sila nemaju iste predznake, potrebno je ponoviti izračun.

Također, primjenom Werner-Csonka postupka nije moguće riješiti sve zadatke. Sustavi koji imaju stupove različitih ležaja ili različitih visina ne mogu se riješiti tom metodom. Takve je sustave potrebno rješavati Crossovom metodom.

Ako riješimo zadatak jednom metodom možemo ga brzo provjeriti drugom metodom jer su razdjelni koeficijenti početnog sistema, momenti upetosti od vanjskih opterećenja i prvi postupak uravnoteženja jednaki. Drugim riječima, prvi dio zadatka je jednak te je samo potrebno izračunati drugi dio zadatka koji se brže izračuna kada već imamo izračunate razdjelne koeficijente i koeficijente krutosti sistema.

Rješavanjem većeg zadatka može se primijetiti prednost Crossove metode. Zbog pogreške u predznaku momenta ili neke sile potrebno je u ostatku zadatka promijeniti rezultate vezane uz taj moment ili sile. Kod Crossove metode treba se promijeniti samo postupak iteracije odnosno taj Cross ovisno radi li se o Crossu 1, Crossu 2 itd. Dobivaju se drugačiji momenti



Slika 5.3 Treći zadatak

te samim time drugačija reakcija koja utječe samo na krajnje momente sustava, a ne na ostale korake zadatka. Kod Werner-Csonka metode potrebno je proračunati cijeli zadatak jer je sila koja se unosi u poluokvir promijenjena pa je promijenjena i sljedeća reakcija tog sistema itd. Korištenjem Werner-Csonka postupka, dijelovi zadatka su međusobno povezani, dok su u Crossovom postupku dijelovi zadatka odvojeni i neovisni.

Rješavanjem većeg zadatka Crossovom metodom se primjeti ponavljanje sličnih postupaka što ima prednosti i mane kao što je prije spomenuto. Ako bi imali još jednu ili dvije reakcije produljilo bi se vrijeme računanja zadatka na već dugotrajno vrijeme rješavanja ovog zadatka.

Werner-Csonka metoda ubrzava rješavanje zadatka jer se ubrzo dolazi do rješenja. Pri računanju postoji rizik pogreško što u slučaju Werner-Csonka metode znači da je potrebno ispravljati cijeli zadatak. Postoji mogućnost da razlika reakcija bude različitih predznaka što znači da moramo ponoviti postupak. U tom slučaju Werner-Csonka metoda može znatno potrajati odnosno njome se teže dolazi do rješenja. Postoji mogućnost da je u nekom od koraka pogreška koja nam daje različite predznake razlike reakcija te nas ona tjera na ponavljanje postupka dok s točnim rješenjem to ne bi bilo potrebno

**Završna riječ:**

Ovim radom zaključeno je da je pri manjim zadacima Crossova metoda brža i jednostavnija od Werner-Csonkine metode jer radimo jednak broj koraka iteracije samo što u Werner-Csonka metodi moramo odraditi dodatne korake.

Ako rješavamo kompliciraniji zadatak brža metoda je Werner-Csonka uz rizik pogreške i rizik ponavljanja postupka. Crossova metoda je dugotrajnija i zamornija, ali rješavanje pomoću računala dovodi do rutine te samim time do mogućnosti rješenja bez greške. Ako se greška primijetiti jednostavnije se može popraviti Crossovom metodom.

Crossovu metodu možemo koristiti za sve sisteme, dok je Werner-Csonka metodu potrebno provjeriti je su li stupovi jednaki i je su li ležajni uvjeti jer u suprotnome zadatak nije rješiv tom metodom.

Obje metode znatno skraćuju računanje većih sustava u odnosu na ostale metode koje se koriste za računanje statički neodređenih sustava.

## 6. Literatura

Anđelić, M. (2005), Građevna statika II, Zagreb: Građevinski Fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Fresl, K. (2017), Građevna statika 2., Zagreb: Građevinski Fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Wikipedija 2019 Dostupno na: <https://en.wikipedia...> [19.rujna 2019.]

Wikipedija 2019 Dostupno na: <https://hu.wikipedia.org...> [19.rujna 2019.]

Hrvatska enciklopedija Dostupno na: <http://www.enciklopedija...> [19.rujna 2019.]