

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

KONSTRUKCIJE OD UŽADI

ZAVRŠNI RAD

Student: Kristina Gabrić, 0082043829

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, rujan 2014.

Zahvala:

„Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Krešimiru Freslu, dipl. ing. građ., na predloženoj temi, stručnoj pomoći i savjetima tijekom izrade završnog rada.“

SADRŽAJ

1. Uvod.....	1
2. Karakteristike konstrukcija od užadi.....	2
2.1. Užad i svojstva užadi.....	2
2.2. Vrste užadi.....	2
2.3. Mreže užadi.....	5
2.4. Glavne karakteristike konstrukcija od užadi.....	7
3. Nalaženje oblika.....	8
3.1. Fizikalni i numerički modeli.....	8
3.2. Ravnoteža čvora.....	10
3.3. Minimalna mreža kabela.....	12
4. Metoda gustoća sila.....	14
4.1. Opis metode.....	14
5. Iteracijska primjena metode.....	16
5.1. Iteracijska primjena metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža.....	16
5.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja.....	18
6. Utjecaj opterećenja.....	19
6.1. Utjecaj opterećenja na ravnotežu čvora.....	20
7. Primjena metode gustoća sila.....	22
8. Zaključak.....	34
9. Literatura.....	35

1. UVOD

Jedna od poznatih konstruktorskih tvrdnji kaže: „*za učinkovite konstrukcije koristite se vlakom prije nego tlakom, a obojim prije negoli savijanjem*“ [6]. Tom tvrdnjom koristila su se i nomadska plemena u dalekoj prošlosti kako bi izgradili svoje nastambe, koje su prije svega trebale biti jednostavne za montažu i demontažu, te transport s jednog mjesta na drugo. Njihovi šatori sklopljeni su od užadi koja je sidrena na štapove postavljene u sredini i oko rubova. Preko toga složeni su trokutasti oblici životinjske kože koji prihvaćaju vanjsko opterećenje, te ga prenose na užad, stupove i konačno u tlo. Te nastambe smatramo prvim začecima konstrukcija od užadi.

Iako su konstrukcije od užadi korištene od davnina, vrlo malo se znalo o njihovom oblikovanju i ponašanju. Jedna od najznačajnijih osoba na tom području bio je Frei Otto, utemeljitelj Instituta za lagane konstrukcije Sveučilišta u Stuttgartu. Uvođenjem fizikalnog modela u postupku pronalaženja oblika doprinio je razvoju vlačnih konstrukcija. Njegova najpoznatija djela su krov Njemačkog paviljona na svjetskoj izložbi Expo u Montrealu 1967. godine, te krov Olimpijskog stadiona u Münchenu iz 1972.

U ovom radu detaljnije ćemo se pozabaviti glavnim karakteristikama konstrukcija od užadi, pronalaženjem njihova oblika, tj. određivanjem ravnotežnog položaja, utjecajem opterećenja, te jednom od metoda nalaženja oblika vlačnih konstrukcija- metodom gustoća sila. Na samom kraju prikazat ćemo iteracijsku primjenu te metode.

2. KARAKTERISTIKE KONSTRUKCIJA OD UŽADI

Konstrukcije od užadi su konstrukcije koje se sastoje od kombinacije užadi, najčešće prekrivene tkaninom, te su usidrene u temelje ili u potpurnu konstrukciju.

2.1. Užad i svojstva užadi

Uže je gipki element kojem je jedna dimenzija (duljina) puno veća od ostale dvije. Karakteriziraju ga mala fleksijska i poprečna krutost, što znači da ne može prenositi poprečne sile niti momente savijanja. Prenosi isključivo centričnu vlačnu silu. Prednost užeta je što do njegovog sloma dolazi samo u slučaju kada vlačna naprezanja u najslabijem poprečnom presjeku prekorače vrijednost čvrstoće na vlak. To omogućava da se element stanji onoliko koliko to vlačna čvrstoća materijala dopusti uzevši, naravno, u obzir koeficijent sigurnosti. Time dobivamo lakšu konstrukciju.

2.2. Vrste užadi

Najmanji osnovni element svakog užeta je čelična žica, najčešće kružnog poprečnog presjeka promjera 3-8 mm.

Na tržištu postoji mnogo vrsta kabela koji se upotrebljavaju za izradu vlačnih konstrukcija. No, možemo ih svrstati u tri osnovne skupine, a to su: spiralni snopovi (eng. *spiral strands*), kabeli unutar krutog omotača (eng. *full locked cables*) i žičana užad (eng. *structural wire rope*).

- **Spiralni snopovi**

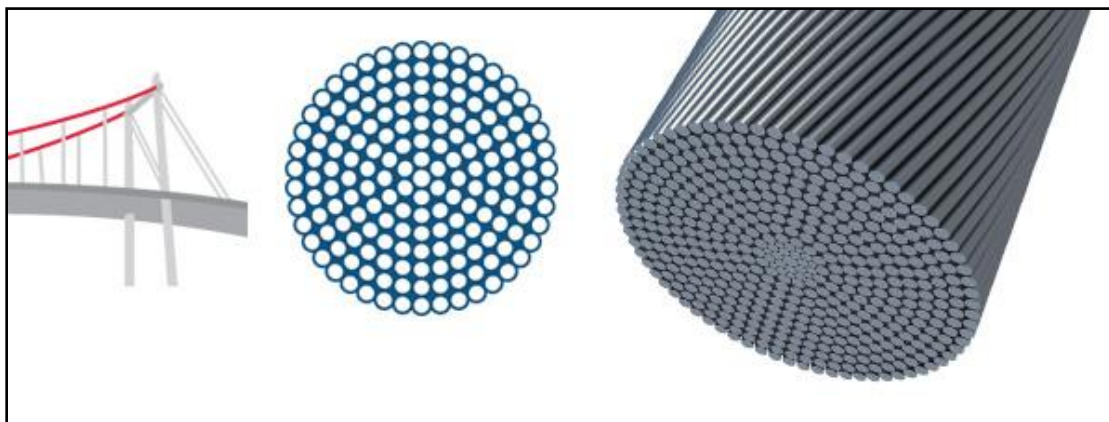
Ova vrsta kabela sastoji se od ravne čelične žice oko koje se namota sloj od šest žica, a u svaki idući sloj ide šest žica više nego u prethodni. Broj snopova u kabelu varira od 7 do 91, a promjer žica kreće se od 6 do 71 mm. Modul elastičnosti doseže vrijednost između 145 i 170 GPa, a normalna čvrstoća pucanja između $1\,770\text{ kN/mm}^2$ i $1\,860\text{ kN/mm}^2$.

Glavne vrste spiralnih snopova su:

- snop s jednim ili dva sloja žica omotanih oko jezgre,
- snop s dva sloja žica istog promjera i popunjujućim slojem (Filler),

- snop s dva sloja žica s različitim polumjerima u zadnjem vanjskom sloju,
- snop s više slojeva (kombinirani),
- žičana užad s čeličnom jezgrom.

Spiralni snopovi primjenjuju se na mjestima gdje je potreban vrlo fleksibilan kabel, uglavnom kao pokretna užad u dizalima, rubni kabeli membrane, ograde balkona, pješačkih staza i mostova.



Slika 1. Spiralni snopovi: primjena i poprečni presjek

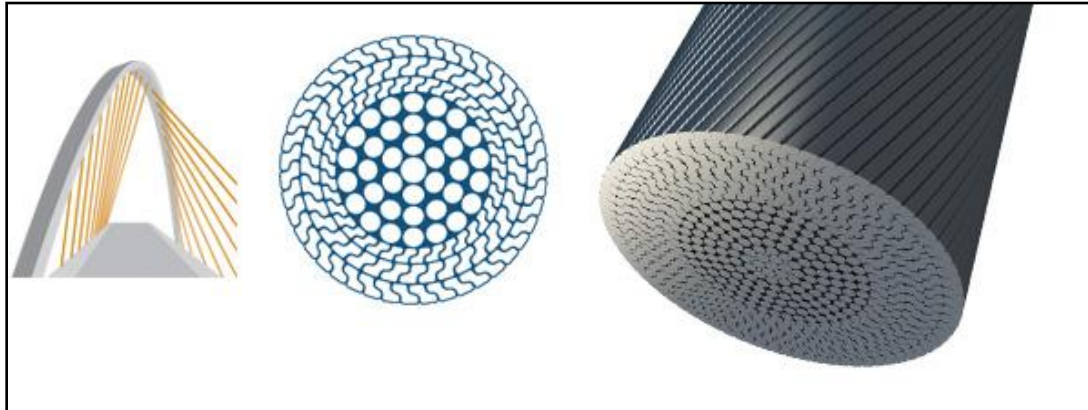
- **Kabeli unutar krutog omotača**

Jezgru ove vrste kabela čini nekoliko slojeva okrugle žice oko koje je namotan vanjski sloj sačinjen od žica Z-oblika. Zbog svog posebnog oblika vanjski sloj čini kompaktnu, glatku površinu koja onemogućava prodor štetnih tvari u kabel i time povećava njegovu trajnost.

Neke od glavnih prednosti ovog tipa su:

- visok modul elastičnosti ($E=160-180$ GPa),
- visoka otpornost na površinski tlak,
- dobra zaštita od korozije zbog zatvorene površine.

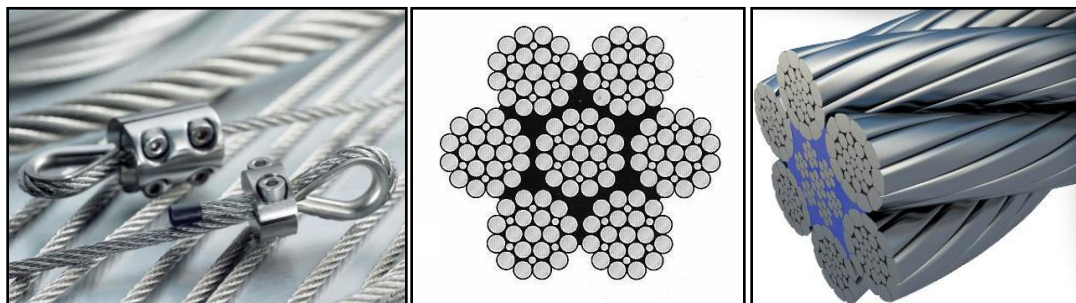
Najčešće se upotrebljavaju kod mostova.



Slika 2. Kabeli unutar krutog omotača: primjena i poprečni presjek

- **Žičana užad**

Užad ima niži modul elastičnosti (100 kN/mm^2), manju otpornost na koroziju, te je podložnija oštećenju. Promjer se kreće između 20 mm i 124 mm. Upotrebljava se za rubne kabele u vlačnim membranama.



Slika 3. Žičana užad: primjena i poprečni presjek

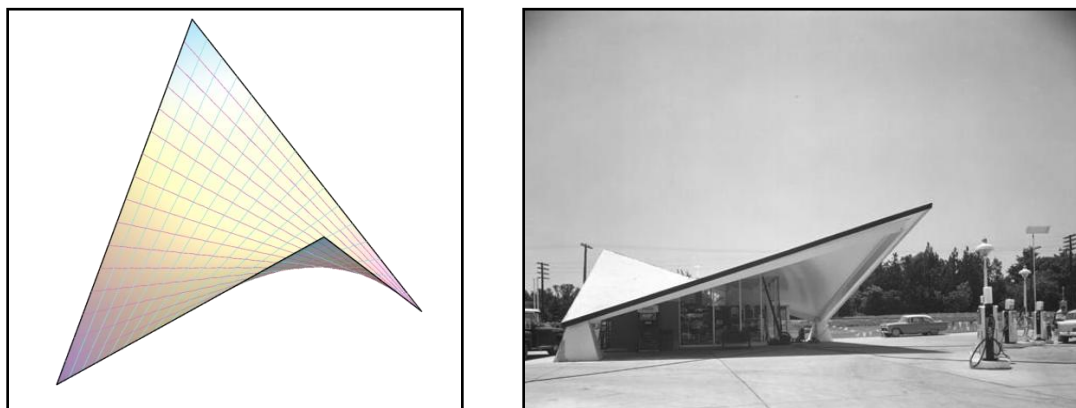
2.3. Mreže užadi

Razlikujemo tri osnovna načina spajanja užadi u mreže, a to su:

- **Pravčaste mreže**

Sam naziv nam govori da se takve mreže sastoje od užadi čija os je pravac. Osi užeta su izvodnice neke pravčaste plohe.

Takve mreže su ujedno i geodetske, jer svako uže leži na najkraćoj spojnici svojih krajnjih točaka. Posebnost ovog tipa mreža je u tome što do gubitka prednapona ne može doći zbog djelovanja poprečnog opterećenja. U tom slučaju uže će se samo produljiti i još više nategnuti. Do gubitka prednapona može doći samo u slučaju relaksacije užadi zbog puzanja i plastičnih deformacija ili zbog popuštanja ležajnih sidara.



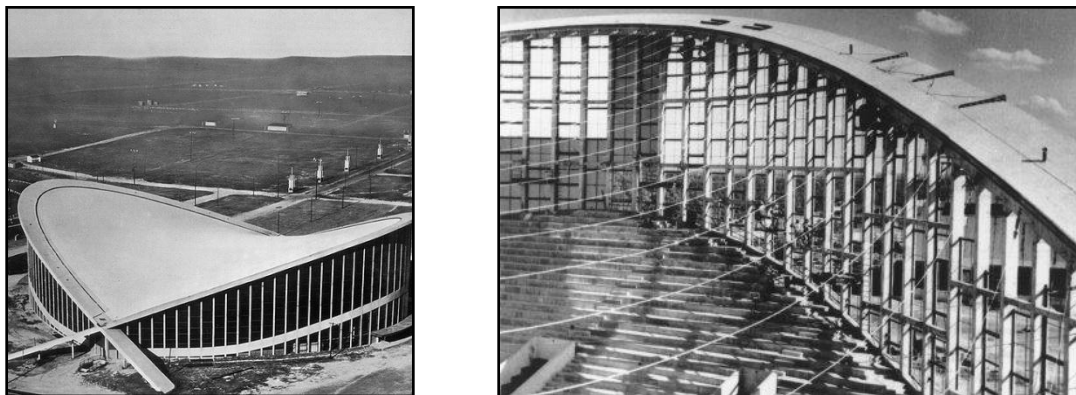
Slika 4. Primjer pravčaste mreže: lijevo- hipar, desno- izvedena konstrukcija

- **Regularne mreže**

Regularne mreže sastoje se od dviju familija užadi koje se međusobno sijeku i čine sedlastu ili antiklastičnu plohu. Jedna familija užadi je konkavna, a druga je konveksna.

Pod djelovanjem vanjskog opterećenja u smjeru gravitacije sile u konkavnoj (nosivoj) užadi će se povećati, dok će se sile u konveksnoj (prednaponskoj) užadi smanjiti. U slučaju djelovanja vjetra užad će zamijeniti uloge.

Razlikujemo dvije vrste regularnih mreža, a to su: mreže s krutim rubovima i mreže s rubnim kabelima.

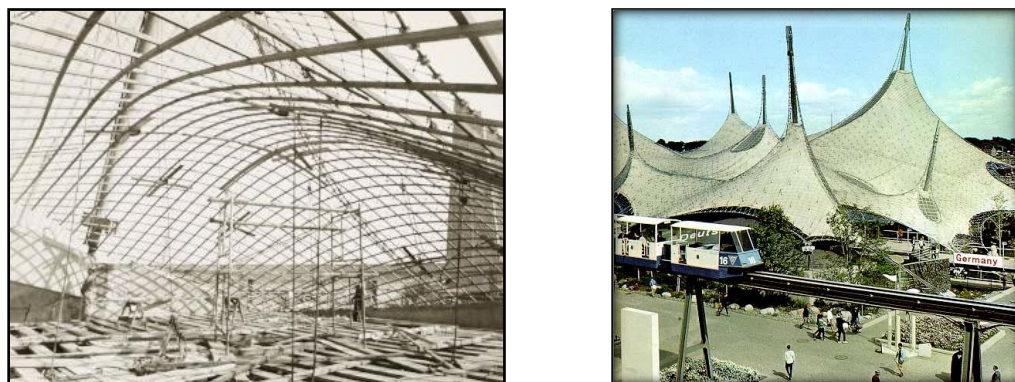


Slika 5. Primjer regularne mreže- Raleigh Arena, Sjeverna Karolina

- **Neregularne mreže**

Neregularne mreže su mreže koje su sačinjene od više familija užadi ili od mreža kod kojih je užad kompleksnije složena.

Posebnost ovih mreža je u tome što isto uže na jednom dijelu mreže može biti konkavno, a na drugom konveksno što znači da može mijenjati zakrivljenost. Također, užad možemo prekinuti u nekom čvoru, te umetnuti neki kruti element unutar mreže.



Slika 6. Primjer neregularne mreže: Njemački paviljon u Montrealu na svjetskoj izložbi Expo 1967.

2.4. Glavne karakteristike konstrukcija od užadi

Konstrukcije od užadi su vlačne konstrukcije koje opterećenja prenose isključivo centričnom vlačnom silom. Budući da se vlačni elementi mogu opterećivati sve do granice vlačne čvrstoće materijala, jedna od karakteristika je potpuna iskorištenost materijala. Posljedica toga je mala, gotovo zanemariva vrijednost vlastite težine.

Vlačne konstrukcije zahtijevaju minimalno četiri ležajne točke od kojih jedna mora biti izvan ravnine koju čine ostale tri. Na taj se način formira sedlasta ili antiklastična ploha (ploha negativne Gaussove zakrivljenosti). Sedlasta ploha sačinjena je od elemenata suprotne zakrivljenosti koji konstrukciji osiguravaju otpornost na utjecaj vjetra ili pokretnog opterećenja. Prilikom djelovanja vertikalnog opterećenja u smjeru gravitacije u užadi konkavnog oblika vlačne sile se povećavaju, a u užadi konveksnog oblika se smanjuju, dok prilikom djelovanja vjetra užad mijenja uloge. Upravo ta dvostruka zakrivljenost vlačnim konstrukcijama daje stabilnost i nosivost.

Projektiranje konstrukcija od užadi uvelike se razlikuje od projektiranja tradicionalnih konstrukcija od betona, čelika i opeke. Razlog leži u tome što su nam kod tradicionalnih konstrukcija oblik i okvirne dimenzije unaprijed poznate, te proračunom samo provjeravamo nosivost zadanih elemenata, dok kod konstrukcija od užadi to nije slučaj. Zbog male vlastite težine takve konstrukcije nosivost ostvaruju prednapinjanjem i pravilnim oblikovanjem, te prilikom projektiranja u obzir trebamo uzeti međuovisnost oblika i unutarnjih sila. Postupak nalaženja oblika nije nimalo lagan i jednostavan zadatak. No, nešto više o tome i o metodama nalaženja oblika govorit ćemo u nastavku.

Također, pri proračunu konstrukcija od užadi trebamo uzeti u obzir i geometrijsku nelinearnost, jer su pomaci toliko veliki da ih ne smijemo zanemariti.

Danas se konstrukcije od užadi, zbog svoje vitkosti i elegancije, lake montaže, jednostavnosti transporta konstrukcijskih elemenata i dobre uklopljenosti u okolni prostor, upotrebljavaju za natkrivanje velikih površina, kao što su stadioni, sportske dvorane, izložbeni prostori i sl.

3. NALAŽENJE OBLIKA

Oblikovanje konstrukcija od užadi razlikuje se od onoga kod tradicionalnih konstrukcija od betona, čelika i opeke u tome što nam oblik i okvirne dimenzije nisu unaprijed poznate, već ih trebamo pronaći.

Oblikovanje se sastoji od tri osnovna koraka:

- nalaženja oblika,
- geometrijski nelinearnog statičkog proračuna i
- krojenja kabela.

U ovom radu detaljnije ćemo se pozabaviti nalaženjem oblika.

Nalaženje oblika (eng. *form-finding*) smatra se jednom od najbitnijih točaka u projektiranju vlačnih konstrukcija. Definira se kao postupak određivanja ravnotežnog oblika koji će zadovoljiti potrebe arhitekata i inženjera u pogledu funkcionalnosti, stabilnosti i estetike.

Oblik konstrukcija od užadi možemo pronaći na dva načina: fizikalnim modelom i numeričkim modelom.

3.1. Fizikalni i numerički modeli

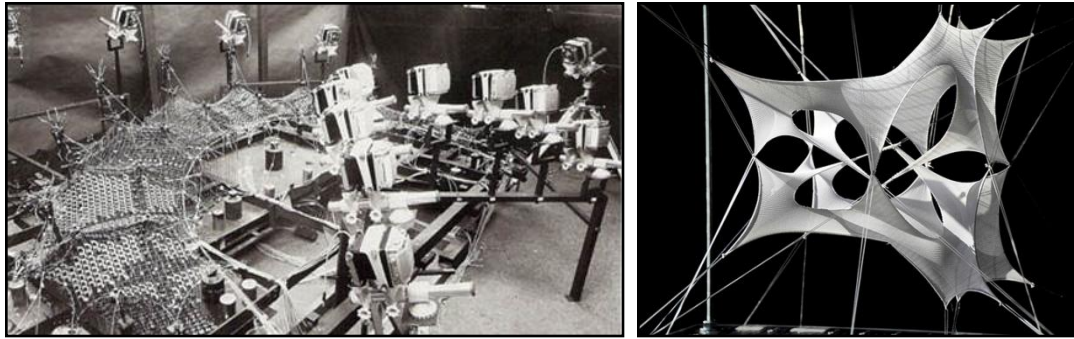
- **Fizikalni model**

Veliku ulogu u korištenju fizikalnih modela kao metode u nalaženju oblika konstrukcija od užadi imao je Frei Otto. U to vrijeme, to je bio jedini način za određivanje početnog ravnotežnog položaja, pa se većina istraživanja Instituta za lagane konstrukcije u Stuttgartu temeljila upravo na fizikalnim modelima, posebno na modelu opne od sapunice.

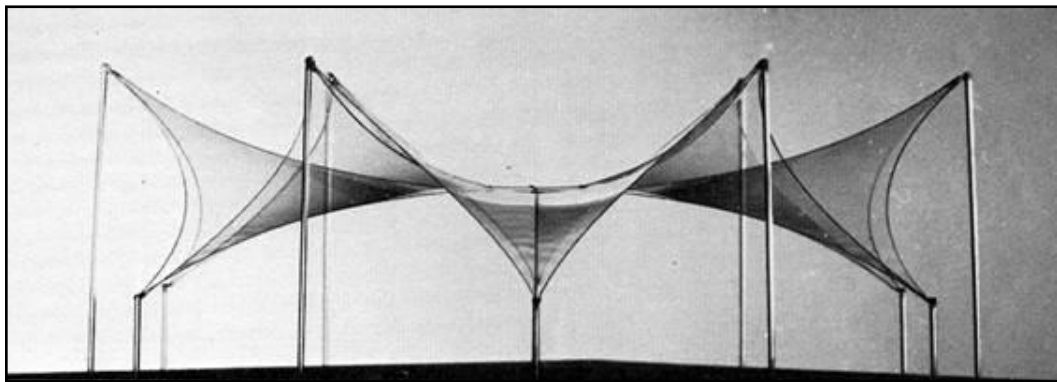
Opna od sapunice je primjer stabilne minimalne plohe, jer između zadanih rubnih uvjeta zauzima ravnotežni položaj, tj. položaj u kojem ima minimalnu potencijalnu energiju. Osim sapunice u izradi fizikalnih modela koristili su se različitim materijalima (tkaninom, žicom, spajalicama i sl.).

Ubrzo su se fizikalni modeli pokazali kao nedovoljni za određivanje oblika. Bilo je nemoguće točno i precizno odrediti koordinate točaka plohe, a može se pokazati da su vlačne sile u kabelima osjetljive i na najmanje pogreške u duljini kabela.

Danas se fizikalnim modelim koristimo za vizualizaciju sve složenijih vlačnih konstrukcija, te kao pomoć pri kontroli rezultata dobivenih proračunom.



Slika 7. Fizikalni model od žica i spajalica (lijevo) i fizikalni model od tkanine (desno)



Slika 8. Fizikalni model od sapunice

- **Numerički model**

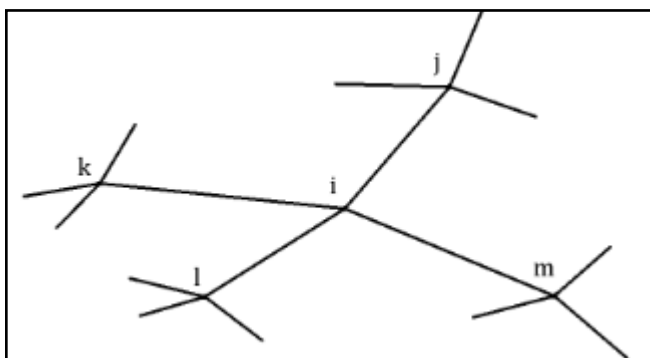
Nakon što su fizikalni modeli pokazali svoju nepreciznost, 50-tih godina prošlog stoljeća započinje razvoj kompjutorskih programa koji su značajno unaprijedili postupak određivanja oblika i potrebnih prednaponskih sila.

Prvi kompjutorski program napravljen je za potrebe Olimpijskog stadiona u Münchenu 1972. godine. Za određivanje duljine kabela koristio se metodom najmanjih kvadrata. Danas vrlo jednostavna procedura, u to je vrijeme upotrebljavala svu kompjutorsku memoriju. S vremenom su numerički modeli i kompjutorski programi napredovali, te nam omogućuju sve složenije i nevjerojatnije oblike.

3.2. Ravnoteža čvora

Jednadžbe ravnoteže čvorova čine osnovni korak u nalaženju oblika konstrukcija od užadi. Prilikom formiranja sustava jednadžbi ravnoteže čvorova uvodimo neke pretpostavke:

- elementi između čvorova su ravni i međusobno su zglobno spojeni,
- elementi preuzimaju samo vlak,
- zanemaruje se vlastita težina kabela,
- nema vanjskog opterećenja,
- topologija mreže nam je unaprijed poznata.



Slika 9. Čvor i sa susjednim čvorovima i priključenim štapovima

Za svaki slobodni čvor i možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže koje glase: zbrojevi projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenima u i -ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži.

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \beta_{i,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \gamma_{i,j} = 0, \quad (1)$$

gdje su: - $S_{i,j}$ vrijednosti sila u štapu i,j ,

- $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ i γ_{ij} kutovi između koordinatnih osi i osi štapa,

$$\cos\alpha_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}}, \quad \cos\beta_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}}, \quad \cos\gamma_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}}, \quad (2)$$

pri čemu je:

$$l_{i,j} = l(x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3)$$

duljina štapa (i,j).

Uvrstimo li (2) i (3) u (1) dobit ćemo sustav nelinearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Dobiveni sustav jednadžbi sastoji se od tri jednadžbe ravnoteže svakog čvora mreže. Čvorove mreže možemo podijeliti na ležajne i slobodne čvorove. Koordinate ležajnih čvorova u analizu ulaze kao ulazni podaci, dok su koordinate slobodnih čvorova rješenja sustava.

Ako je n broj slobodnih čvorova, a m broj elemenata, tada možemo napisati $3n$ jednadžbi sa $3n+m$ nepoznanica. Broj nepoznanica je uvijek za m veći od broja jednadžbi, pa je sustav nemoguće jednoznačno riješiti. Dakle, kako bismo dobili jednak broj jednadžbi i nepoznanica, trebamo primjeniti jedno od pravila pomoću kojeg ćemo eliminirati sile u štapovima kao nepoznanice.

Postoje četiri pravila pomoću kojih je to izvedivo, a to su:

- **Kvazilaplaceovo pravilo:**
-unaprijed su zadane uravnotežene projekcije sila u svim štapovima na ravninu xy ;
- **Pravilo gustoće sila:**
-zadaju se omjeri između iznosa sila i duljina svakog štapa;
- **Poopćeno pravilo minimalne mreže (pravilo „geodetske mreže“):**
-zadani su iznosi sila u svim štapovima;
- **Kombinirano pravilo:**
-u nekim štapovima zadani su iznosi sila, a u ostalim štapovima duljine.

3.3. Minimalna mreža kabela

Ako ukupnu duljinu kabela označimo sa L , dobit ćemo da je:

$$L = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (5)$$

Izjednačimo li njezine derivacije po koordinatama slobodnih čvorova s nulom dobivamo sustav od $3n$ jednažbi sa $3n$ nepoznanica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} &= \sum_{j=1}^n \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

Pomnožimo li sustav sa $S = S_{i,j}$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial L}{\partial x_i} &= S \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ S \frac{\partial L}{\partial y_i} &= S \sum_{j=1}^n \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ S \frac{\partial L}{\partial z_i} &= S \sum_{j=1}^n \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

Rješavanjem gornjeg sustava, uz uvjet da su sile u svim kabelima jednake, dobit ćemo oblik mreže kod kojeg je zbroj duljina kabela manji od zbroja duljina kabela u bilo kojem drugom položaju. Takve mreže nazivamo **minimalnim ili geodetskim mrežama**.

Ako bi smo pri rješavanju sustava zadali da su sile u kabelima različite, ali jednake duž pojedinog kabela, dobili bi smo **poopćenu minimalnu mrežu kabela**.

Budući da je gornji sustav jednadžbi nelinearan, morat ćemo primijeniti neku od metoda rješavanja. U ovom radu detaljnije ćemo opisati metodu gustoća sila, te iteracijsku primjenu navedene metode.

4. METODA GUSTOĆE SILA

4.1. Opis metode

Metoda gustoće sila po prvi puta se spominje 1971. godine u članku „*Einide Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen*“ autora H. J. Scheka i K. Linkwiza. Godinu dana poslije metoda se primjenjuje za potrebe proračuna Olimpijskog stadiona u Munchenu. Do tada korišteni fizikalni modeli nisu bili dovoljni za tako opsežan projekt, pa je napravljen prvi računalni program temeljen na metodi gustoće sila.

Ideja metode je nelinearan sustav jednadžbi pretvoriti u linearan tako da zadamo omjer vlačne sile u štapu $S_{i,j}$ i njegove duljine $l_{i,j}$. Zadani omjer nazivamo „gustoća sile“:

$$q_{i,j} = S_{i,j} / l_{i,j}. \quad (8)$$

Iz toga slijedi:

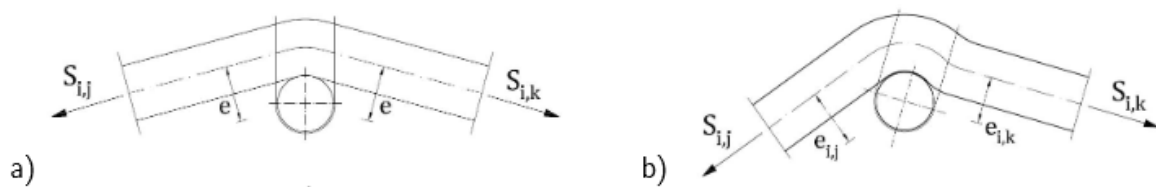
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}} \cdot (x_j - x_i) &= 0, & \rightarrow & \sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (x_j - x_i) = 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}} \cdot (y_j - y_i) &= 0, & \rightarrow & \sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (y_j - y_i) = 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{S_{i,j}}{l_{i,j}} \cdot (z_j - z_i) &= 0. & \rightarrow & \sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (z_j - z_i) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Gore navedeni sustav jednadžbi iz nelinearnog prelazi u linearan, te rješavanjem sustava dobivamo koordinate slobodnih čvorova. Poznavanjem koordinata čvorova mreže lako možemo izračunati duljine elemenata, a potom i sile u štapovima.

U svakom čvoru mreže mora biti zadovoljen sljedeći uvjet:

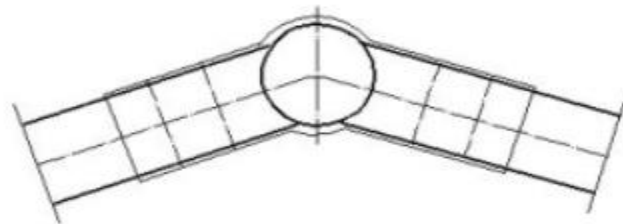
$$S_{i,j} \cdot e_i = S_{i,k} \cdot e_k \quad (10)$$

Ako to nije slučaj, doći će do zaokretanja čvora. Čvor će se zaokrenuti kako bi se krak veće sile smanjio i time doveo do ravnoteže momenata sile $S_{i,j}$ i $S_{i,k}$ u odnosu na os poprečnog kabela.



Slika 10. Izobličenje čvora

Jedno od rješenja izobličavanja čvorova je centriranje čvorova posebno oblikovanim detaljima.



Slika 11. Centriranje čvora

5. ITERACIJSKA PRIMJENA METODE

5.1. Iteracijska primjena metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža

U članku [7] autori opisuju „iteracijski postupak pomoću kojeg izračunavaju mreže s jednoliko raspodijeljenim vlačnim silama“, dakle, postupak kojim se dobivaju mreže minimalne duljine.

U k -tom koraku iteracije gustoću sila u štapu (i, j) računamo prema izrazu:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}, \quad (11)$$

gdje su:

- $q_{i,j}^{(k-1)}$ gustoća sile u prethodnom koraku,
- $S_{i,j}^{(k-1)}$ vrijednost sile izračunate u prethodnom koraku,
- \bar{S} tražena vrijednost sile.

Taj izraz možemo objasniti na sljedeći način:

Ako pretpostavimo da je sila $S_{i,j}^{(k-1)}$, sila izračunata u $(k-1)$ -om koraku iteracije, različita od tražene vrijednosti \bar{S} , tada ćemo vrijednost sile \bar{S} dobiti množenjem sile $S_{i,j}^{(k-1)}$ s koeficijentom, $s_{i,j}^{(k)}$ odnosno $\bar{S} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)}$.

Nakon što smo u k -tom koraku izračunali koordinate čvorova i duljinu $l_{i,j}^{(k)}$, vrijednost sile bit će

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k)}. \quad (12)$$

Ako se duljina štapova nije promijenila, tj. ako vrijedi

$$l_{i,j}^{(k)} = l_{i,j}^{(k-1)}, \quad (13)$$

vrijedit će i

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}. \quad (14)$$

Ako je k tome $S_{i,j}^{(k)}$, tražena vrijednost sile onda je i

$$S_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^k \cdot S_{i,j}^{(k-1)} = s_{i,j}^k \cdot q_{i,j}^{(k-1)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}. \quad (15)$$

Usporedbom s izrazom (14) dobivamo da je:

$$q_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^k \cdot q_{i,j}^{(k-1)}. \quad (16)$$

Prema tome, ako se duljina štapova ne mijenja, gustoća sile iz izraza (11) odmah daje traženu vrijednost sile. No, promjenom gustoća sila mijenja se i ravnotežna konfiguracija, a samim time mijenju se i duljine štapova. Prema tome, potreban je iteracijski postupak kojim ćemo se postupno približavati traženoj vrijednosti sile.

Opisani postupak možemo i dodatno proširiti: zadavanjem različitih sila u različitim štapovima povećavamo broj mogućih oblika mreže užadi, a gustoću sile u štapu (i, j) u k -tom koraku iteracije računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}, \quad (17)$$

pri čemu je $\bar{S}_{i,j}$ zahtijevana vrijednost sile u tom štapu, koja se može razlikovati od vrijednosti sila u drugim štapovima. No, želimo li oblikovati prirodnu poopcenu minimalnu mrežu, moramo zadati jednake sile u svim štapovima pojedinog kabela.

Ako u gornji izraz uvrstimo $q_{i,j}/S_{i,j} = 1/l_{i,j}$, dobit ćemo još jedan izraz za gustoću sile:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}}. \quad (18)$$

5.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja

Kinematička ograničenja uvodimo u situacijama kada dva ili više čvorova „otkližu“ u jednu točku, tj. u situacijama u kojima se javlja preveliko klizanje kabela. To se najčešće događa u rubnim kabelima i to neovisno o silama u njima. Kinematičkim ograničenjima osiguravamo zahtijevane duljine štapova.

To ćemo ostvariti na sljedeći način:

Propisanu duljinu $\bar{l}_{i,j}$ štapa (i, j) osigurat ćemo tako da gustoću sile u njemu računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}. \quad (19)$$

Uz uvjet da su sile nepromijenjene, $S_{i,j}^{(k)} = S_{i,j}^{(k-1)}$ i da je gustoća sile obrnuto proporcionalna duljini štapova dobivamo $q_{i,j}^{(k)} / q_{i,j}^{(k-1)} = \bar{l}_{i,j}^{(k-1)} / \bar{l}_{i,j}^{(k)}$. Iz toga slijedi da je koeficijent kojim trebamo pomnožiti gustoću sile iz prethodnog koraka $\bar{l}_{i,j}^{(k-1)} / \bar{l}_{i,j}^{(k)}$, te iz

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{l}_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}^{(k)}} \quad (20)$$

i $S_{i,j} = q_{i,j} \cdot \bar{l}_{i,j}$ dobivamo izraz (19).

Opisana iteracijska primjena metode gustoća sila ima brojne prednosti. Jedna od njih je da ne treba pretpostavljati početnu aproksimaciju rješenja, jer su sustavi jednadžbi linearni, pa se mogu rješavati direktnim postupcima. Postupak je vrlo brz, te je dobivena mreža u svakom koraku ove metode u ravnoteži, što nije slučaj kod ostalih iteracijskih metoda kod kojih je samo konačno rješenje uravnoteženo.

6. UTJECAJ OPTEREĆENJA

Opterećenja koja ulaze u analizu vlačnih konstrukcija, a samim time i u analizu konstrukcija od užadi, sastoje se od stalnih, promjenjivih i izvanrednih djelovanja. Djelovanja koja djeluju na mrežu užadi ne razlikuju se od onih koja djeluju na tradicionalne, krute konstrukcije od betona, čelika, kamena ili drva. No, kod konstrukcija od užadi vrlo važno je što točnije odrediti raspodjelu opterećenja, jer su takve konstrukcije jako osjetljive na nejednoliko raspodijeljena opterećenja. Međutim, to nije nimalo lak zadatak, jer specifičan izgled i složeni geometrijski oblici, te mala težina i veliki rasponi dodatno otežavaju taj zadatak.

Vlastita težina i sile prednapinjanja spadaju u stalna djelovanja. Vlastita težina mreže kabela iznosi oko $0,1 \text{ kN/m}^2$, te zbog toga neće imati veliki utjecaj na ponašanje konstrukcije. Znatno veći utjecaj na oblik mreže i ponašanje konstrukcije imat će sile prednapona. Do gubitka prednapona dolazi zbog relaksacije kabela ili proklizavanja kabela na mjestu sidrenja što dovodi do nestabilnosti konstrukcije, te pojave vitoperenja olabavljenih dijelova na vjetru. Takva pojava je nedopustiva, osim ako se ne radi o privremenim objektima.

Dominantno promjenjivo opterećenje je vjetar. Zbog male težine mreže vjetra ima najznačajniju ulogu u analizi opterećenja, a zbog složenih oblika mreže pritisak vjetra svojom jačinom i smjerom varira po površini. Koeficijent pritiska vjetra ovisi o obliku, veličini, ploštini, brzini i smjeru vjetra, te ga se, zbog složenih međudjelovanja navedenih parametara, treba ispitati na modelu u vjetrovnom tunelu.

Također, osim vjetra u promjenjivo opterećenje ubrajamo i snijeg. U propisima ne postoje smjernice koje bi nam pomogle u određivanju opterećenja snijegom, te je zbog toga potrebno provesti ispitivanja u vjetrovnom tunelu.

U izvanredna djelovanja ubrajamo potres. Pomoću analiza metodom konačnih elemenata dokazano je da mreže kabela imaju dug period vibracije. Uz to, potporna konstrukcija je mnogo kruća od mreže kabela. Prema tome, više frekvencije potresa pojačat će se potpornom konstrukcijom, dok će se niže frekvencije znatno reducirati do trenutka kada dođu do mreže kabela.

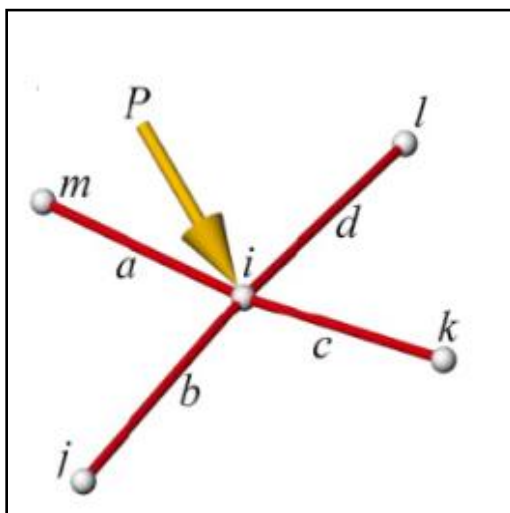
Temperaturne promjene ne uzimaju se u obzir kao opterećenja, jer do sada nisu pokazale značajnije utjecaje na ponašanje konstrukcija.

6.1. Utjecaj opterećenja na ravnotežu čvora

Prilikom formiranja sustava jednadžbi ravnoteže čvorova na koje djeluje vanjsko opterećenje (koncentrirana sila P) vrijede sljedeće pretpostavke:

- elementi između čvorova su ravni i međusobno su zglibno spojeni,
- elementi preuzimaju samo vlak,
- zanemaruje se vlastita težina kabela,
- topologija mreže nam je unaprijed poznata.

Razlika u odnosu na neopterećeni čvor je što će se s desne strane znaka jednakosti, umjesto nule, nalaziti odgovarajuća komponenta sile P .



Slika 12. Čvor i sa susjednim čvorovima, priključenim štapovima i koncentriranom silom P

Za svaki slobodni čvor i možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže koje glase:

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = P_x, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \beta_{i,j} = P_y, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \gamma_{i,j} = P_z, \quad (21)$$

gdje su: - $S_{i,j}$ vrijednosti sila u štapu i,j ,

- $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ kutovi između koordinatnih osi i osi štapa,

- P_x, P_y, P_z komponente sile P

$$\cos\alpha_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}}, \quad \cos\beta_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}}, \quad \cos\gamma_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}}, \quad (22)$$

pri čemu je:

$$l_{i,j} = l(x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (23)$$

duljina štapa (i, j).

Uvrstimo li (22) i (23) u (21) dobit ćemo sustav nelinearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= P_x, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= P_y, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} &= P_z. \end{aligned} \quad (24)$$

U točki 7 na primjeru šesterokutne mreže detaljnije ćemo prikazati utjecaj vanjskog opterećenja.

7. PRIMJENA METODE GUSTOĆA SILA

Postupci nalaženja oblika provedeni su u simboličkom programskom paketu Sage.

Promatramo šesterokutnu mrežu koja se sastoji od 59 čvorova i 20 kabela. Unutarnji kabeli međusobno su okomiti i postavljeni na razmaku od 2,0 m. Mreža ima šest ležajnih čvorova, od kojih tri leže u istoj ravnini, a tri izvan nje. Elementi (štapovi) su definirani presjecištima čvorova i ima ih 112.

Funkcijom *make_nodes* (*nnds*, *nd1*, *d*) zadajemo koordinate čvorova. Prvi član u zagradi predstavlja broj čvorova koje želimo generirati, drugi koordinate prvog čvora, a treći korak po osima koordinatnog sustava.

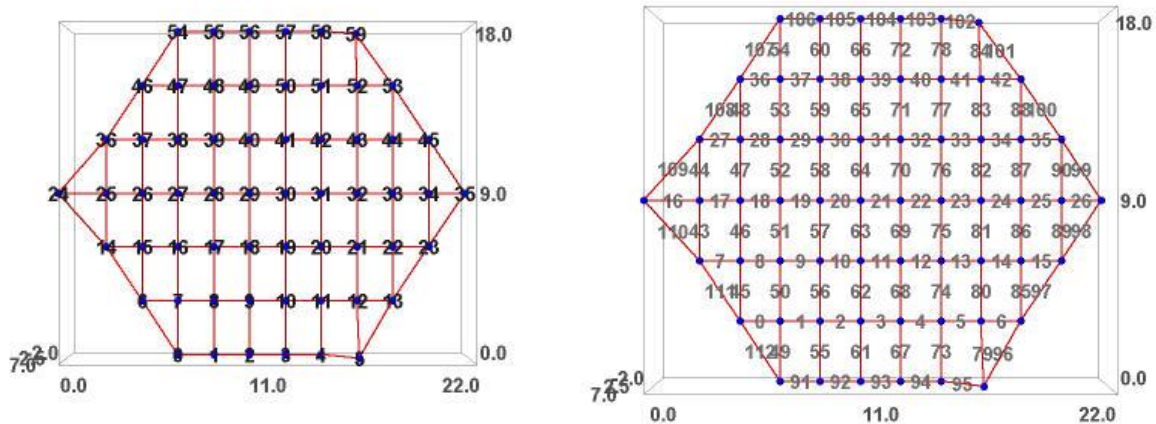
```
nds = make_nodes (6, [6., 0., 0.], [2., 0., 0.])
nds.extend (make_nodes (8, [4., 3., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (10, [2., 6., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (12, [0., 9., 0.], [2., 0., 0.]))....
itd.
nds[5] = [16., 0., 3.]
nds[24] = [0., 9., 7.]
nds[59] = [16., 18., -2.]
```

Nakon definiranja čvorova, funkcijom *cable* (*nd1*, *nnds*, *step=1*) povezujemo ih u kabele, a kabele nakon toga dijelimo na elemente pomoću funkcije *make_elements_on_cables* (*cbls*).

```
cbls = [cable (6, 8, 1)]
cbls.append (cable (14, 10, 1))
cbls.append (cable (24, 12, 1))
cbls.append (cable (36, 10, 1))
cbls.append (cable (46, 8, 1)).... itd.
```

Ležajni čvorovi su *supps* = [0, 5, 24, 35, 54, 59,], a rubni kabeli su *bnd_cbls* = [15, 16, 17, 18, 19, 20].

Na slici 13. prikazana je mreža s označenim čvorovima i štapovima.

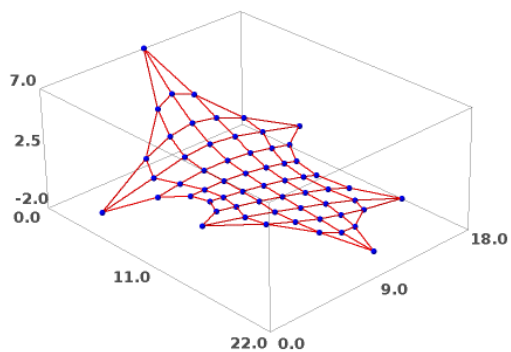


Slika 13.

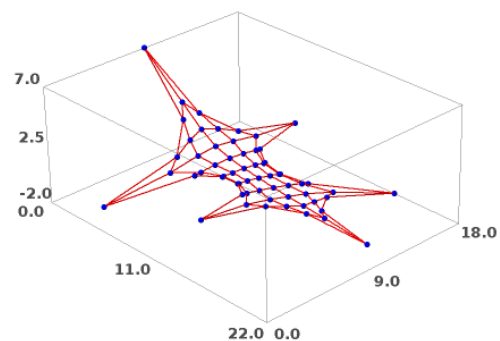
Funkcijom $qs = make_force_densities(len(els))$ i $qs = set_value_on_cables(10., bnd_cbls, tcei, qs)$ na unutarnjim i na rubnim kabelima zadajemo različite vrijednosti gustoća sila.

Na slici 14. prikazani su različiti oblici mreža ovisno o zadanim gustoćama sila u unutarnjim i rubnim kabelima: a) gustoća sila u unutarnjim i rubnim kabelima = 1,

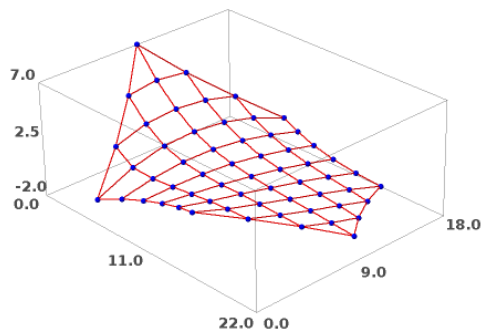
- b) u unutarnjim = 10, u rubnim = 1,
- c) u unutarnjim = 1, u rubnim = 10,
- d) u unutarnjim = 1, u rubnim = 100.



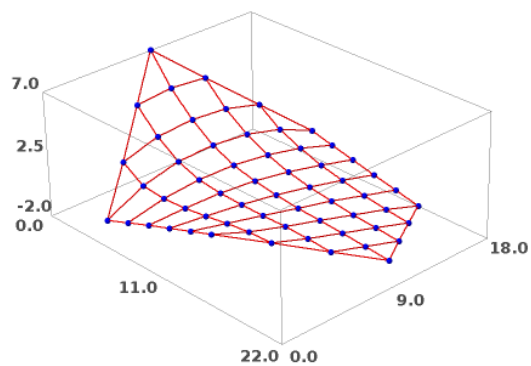
a)



b)



c)



d)

Slika 14.

Iz priloženog vidimo da će se mreža b) „skupiti“, a mreže c) i d) „proširiti“ u odnosu na mrežu a) gdje je iznos gustoća sila u unutaranjim i rubnim kabelima jednak i iznosi 1.

Nakon što smo zadali gustoću sila u unutarnjim i rubnim kabelima (slika 14.c), funkcijom $nc = FDM(nds, els, supps, qs)$ provodimo proračun. Iz poznatih koordinata čvorova dobivamo duljine štapova, a iz izraza $f=ql$ dobivamo sile u štapovima.

```
l = list_of_element_lengths (els, nc)
f = list_of_element_forces (l, qs)
```

```
f
[2.10597067206556, 1.97126575479807, 1.98075953171200,
1.99105591105083,
1.99567784442090, 1.97499276571652, 1.89358988906727,
2.50608918424629,
2.20267015401751, 2.03112581209156, 1.98165732091000,
1.97163235281406,
1.96739801756293, 1.95688610002705, 1.94420595252055,
1.96842504073007.....,
21.6624483531423,
20.9501927630617, 20.7568497468097, 21.0123835628332,
21.7511411232211,
38.9456844392552, 37.3440979625513, 36.2148173210261,
35.4688995725089,
36.6053635602225, 38.1946230917547, 21.4244544816784,
20.6872898798181,
20.3775800404441, 20.4450548095486, 20.9121406711928,
43.7366087548197,
42.7358027290694, 42.6325232020004, 42.5796266092957,
42.7002040698215,
43.8189937474299]
```

```
max (f_int), min (f_int)
(3.46312264574332, 1.89358988906727)
```

```
max (f_bnd), min (f_bnd)
(43.8189937474299, 20.3775800404441)
```

Nakon zadavanja sila u unutarnjim štapovima $iefs = [1. \text{ for } i \text{ in } ieis]$ i rubnim $befs = [10. \text{ for } i \text{ in } beis]$, ponavljamo proračun metodom gustoća sila 5 puta s izjednačavanjem sila u štapovima. Pomoću funkcije $nc, f = multistepFDM(nds, els, supps, qs, eifs, [], 5)$ pokrećemo iterativni postupak određivanja ravnotežnog položaja, te dobivamo:

```
max (f_int), min (f_int)
(1.02389681733739, 0.975165082087529)
```

```
max (f_bnd), min (f_bnd)
(10.2483012453664, 9.78323835485393)
```

Na rubnim kabelima zadajemo duljine štapova:

```
[ (91, 2.32562970176712), (92, 2.03018235182397), (93,
1.93984020672600),
(94, 2.00885074867285), (95, 2.24892540474470), (96,
4.32202123771217),
(97, 3.62444598970971), (98, 3.34727359487037), (99,
3.25950505002628),
(100, 3.55353620796146), (101, 4.25780321093788), (102,
2.24233846121649), (103, 2.01196159413757), (104,
1.92920081811269),
(105, 1.97209796603054), (106, 2.15436617746815), (107,
4.53759831390246), (108, 4.12467766315118), (109,
4.31084581195846),
(110, 4.29357537755467), (111, 4.09597144675166), (112,
4.58419823042423) ]
```

i ponavljamo proračun 10 puta sa zadanim silama u unutarnjim štapovima i duljinama rubnih štapova: $nc, f = multistepFDM(nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 10)$.

```
max (f_int), min (f_int)
(1.00633277262325, 0.993609166625502)
```

```
max (f_bnd), min (f_bnd)
(40.7211915787660, 19.2400310518184)
```

Proračun ponavljamo do zadovoljenja zadanih točnosti:

- 1.e-4 sile, 1.e-2 duljine:

nc, f = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 1.e-4, 1.e-2, 1000)

```
steps: 424
maximal force error: 0.0000996543351191592
maximal length error: 0.00167383100550111
```

- 1.e-4 sile, 1.e-3 duljine:

nc, f = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 1.e-4, 1.e-3, 1000)

```
steps: 469
maximal force error: 0.0000605197231301480
maximal length error: 0.000995668003521466
```

- 1.e-4 sile, 1.e-4 duljine:

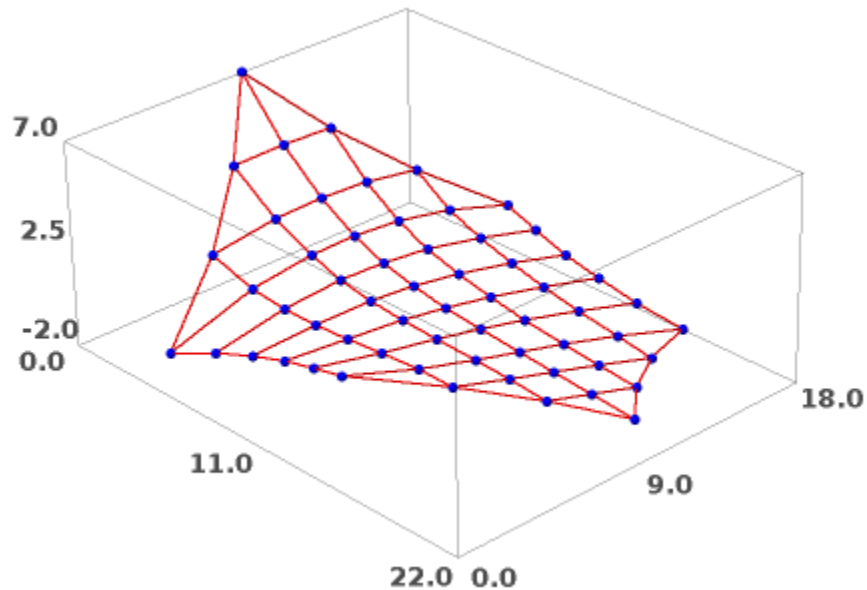
nc, f = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 1.e-4, 1.e-4, 1000)

```
steps: 662
maximal force error: 6.18965927512427e-6
maximal length error: 0.0000997899475638775
```

```
max (f_int), min (f_int)
(1.00000356872640, 0.999993810340725)
```

```
max (f_bnd), min (f_bnd)
(10.6163020459354, 9.64946279168868)
```

```
plot3d_mesh (nc.rows(), els)
```



Slika 15.

Zadane duljine štapova rubnih kabela - srednje vrijednosti duljina nakon 5 koraka FDM-a:

```
bels
```

```
[2.32562970176712, 2.03018235182397, 1.93984020672600,  
2.00885074867285,  
2.24892540474470, 4.32202123771217, 3.62444598970971,  
3.34727359487037,  
3.25950505002628, 3.55353620796146, 4.25780321093788,  
2.24233846121649,  
2.01196159413757, 1.92920081811269, 1.97209796603054,  
2.15436617746815,  
4.53759831390246, 4.12467766315118, 4.31084581195846,  
4.29357537755467,  
4.09597144675166, 4.58419823042423]
```

```
le1 = mean (bels[0:5])  
le2 = mean (bels[5:8])  
le3 = mean (bels[8:11])  
le4 = mean (bels[11:16])  
le5 = mean (bels[16:19])
```

```
le6 = mean (bels[19:22])
le1, le2, le3, le4, le5, le6

(2.11068568274693, 3.76458027409742, 3.69028148964187,
2.06199300339309,
4.32437392967070, 4.32458168491019)

bels2 = [le1]*5 + [le2]*3 + [le3]*3 + [le4]*5 + [le5]*3 +
[le6]*3
beils2 = zip (beis, bels2)
beils2

[(91, 2.11068568274693), (92, 2.11068568274693), (93,
2.11068568274693),
(94, 2.11068568274693), (95, 2.11068568274693), (96,
3.76458027409742),
(97, 3.76458027409742), (98, 3.76458027409742), (99,
3.69028148964187),
(100, 3.69028148964187), (101, 3.69028148964187), (102,
2.06199300339309), (103, 2.06199300339309), (104,
2.06199300339309),
(105, 2.06199300339309), (106, 2.06199300339309), (107,
4.32437392967070), (108, 4.32437392967070), (109,
4.32437392967070),
(110, 4.32458168491019), (111, 4.32458168491019), (112,
4.32458168491019)]

time nc2, f2 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, ieifs,
beils2, 1.e-4, 1.e-3, 1000)

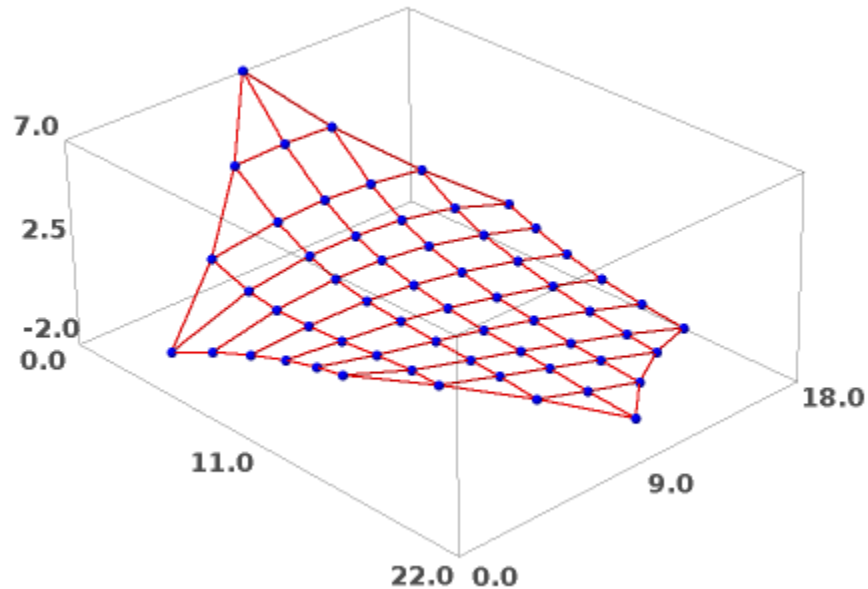
  steps: 462
  maximal force error: 0.0000751832659191543
  maximal length error: 0.000993796253288881
  Time: CPU 34.92 s, Wall: 35.00 s

max (f_int), min (f_int)
(1.00003937570460, 0.999924816734081)

max (f_bnd), min (f_bnd)
(10.9011020594700, 9.36110696178491)
```



```
plt2 = plot3d_mesh (nc2.rows(), els)
```



Slika 16.

Ravnoteža čvora 6:

U čvoru 6 vektorski zbrajamo sile iz štapova. Njihova suma mora biti nula ako je čvor u ravnoteži:

```
v0 = vector (nc2[7] - nc2[6])
v45 = vector (nc2[15] - nc2[6])
v111 = vector (nc2[14] - nc2[6])
v112 = vector (nc2[0] - nc2[6])
v0, v45, v111, v112
```

```
((2.03004955522645, 0.141313012290420, -0.690829985569648,
(0.379830393233644, 3.11458921316050, 0.666446781706024),
(-2.04603919161833, 3.03413990064599, 2.30263068649014),
(1.54807067368455, -3.38829961554252, -2.19489354062841))
```

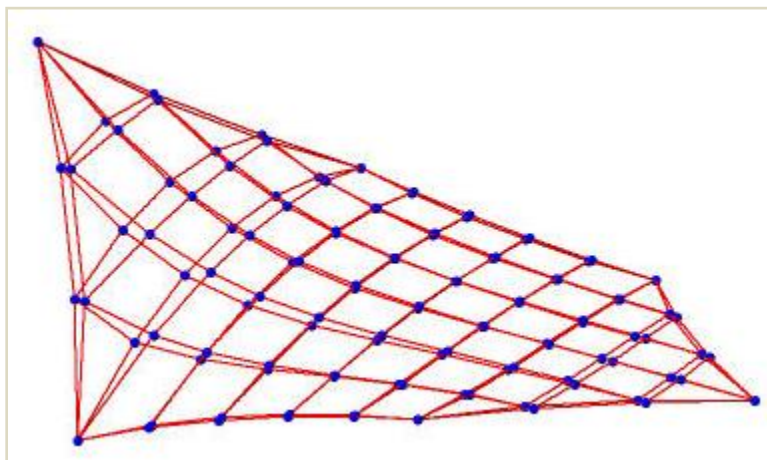
```
f2[0] * v0/norm (v0) + f2[45] * v45/norm (v45) + f2[111] *  
v111/norm (v111) + f2[112] * v112/norm (v112)
```

```
(5.32907051820075e-15, -1.77635683940025e-15,  
-8.88178419700125e-16)
```

Dokazali smo da su sile u čvoru 6 u ravnoteži.

Usporedba mreže dobivene metodom gustoće sila i minimalne mreže:

```
(plt1 + plt2).rotateZ (-pi/8).show (frame = False)
```



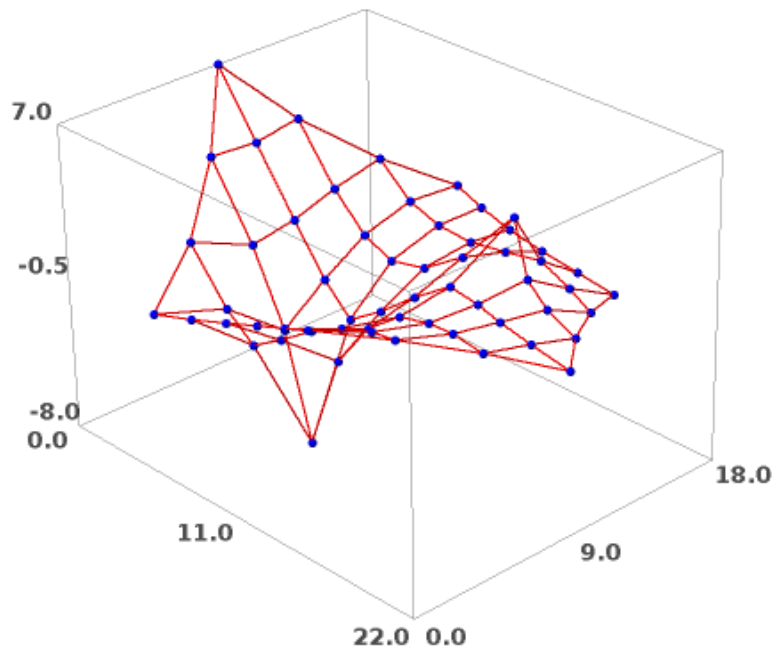
Slika 17.

Utjecaj opterećenja u pojedinim čvorovima:

Funkcijom $ext_fs = [(17, (0., 0., -10.)), (42, (2., 0., 5.))]$ zadajemo vanjske sile u čvorovima 17 i 42.

```
nc_wl2 = FDM_wloads (nc2.rows(), els, supps, qs3, ext_fs)
```

```
plot3d_mesh (nc_wl2.rows(), els)
```

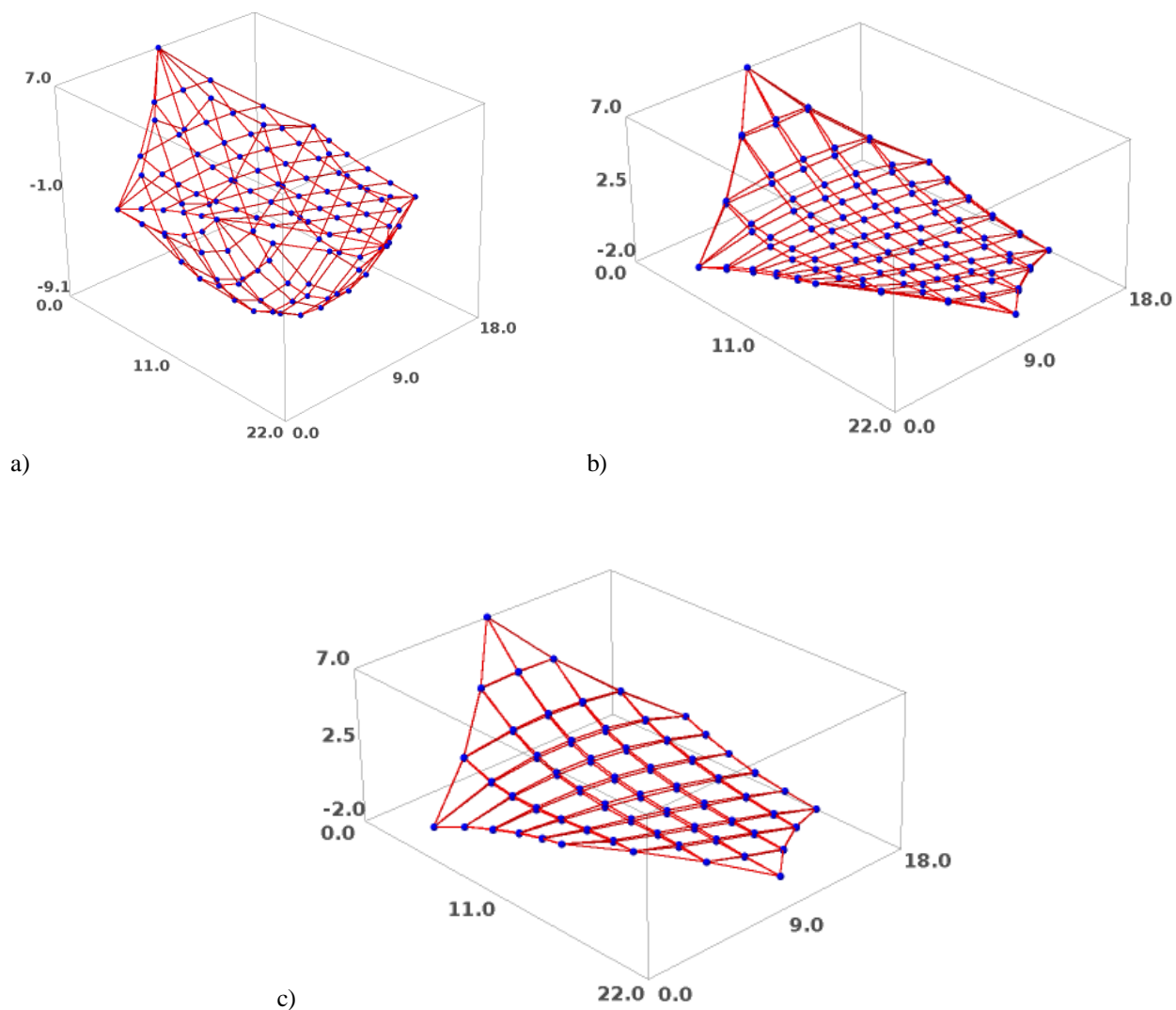


Slika 18.

Potreban je znatno veći iznos sila vanjskog opterećenja, u odnosu na sile prednapona u unutranjim štapovima, kako bi vanjsko opterećenje utjecalo na oblik mreže (slika 18.).

Utjecaj opterećenja u svim slobodnim čvorovima:

Funkcijom $free_nodes = other_nodes(supps, len(nds))$ definiramo slobodne čvorove i pomoću $ext_fs3 = zip(free_nodes, [(0., 0., -1.)]*len(free_nodes))$ zadajemo opterećenje po cijeloj mreži. U ovom primjeru zadat ćemo tri opterećenja različitog intenziteta: 1,0; 0,1 i 0,02; te ćemo dobivene oblike mreža usporediti s mrežom u ravnotežnom položaju.



Slika 19.

Iz priloženog možemo vidjeti da najveće odstupanje od ravnotežnog položaja ima mreža na koju djeluje vanjsko opterećenje iznosa 1,0 (slika 19.a)), a najmanje odstupanje ima mreža na slici 19.c) na koju djeluje opterećenje iznosa 0,02. Zaključujemo da vanjske sile čija je vrijednost puno manja od vrijednosti sila prednapona u štapovima, neće imati znatniji utjecaj na progib mreže niti na njezin konačni oblik.

8. ZAKLJUČAK

Konstrukcije od užadi prenose samo centričnu vlačnu silu i zbog toga se uvelike razlikuje od tradicionalnih, masivnih konstrukcija od betona, čelika i opeke. Glavna razlika konstrukcija od užadi, u odnosu na masivne konstrukcije, je što njezin oblik i okvirne dimenzije nisu unaprijed poznate, već ih trebamo pronaći.

Jedna od metoda nalaženja oblika je metoda gustoće sila. Razvijena je sedamdesetih godina prošlog stoljeća za potrebe Olimpijskog stadiona u Münchenu. Njezina prednost u odnosu na ostale metode je što nelinearan sustav jednadžbi pretvara u linearan. S vremenom se metoda gustoće sila pokazala kao nedovoljna, te se razvijaju brojna proširenja metode koja omogućuju zadavanje dodatnih ograničenja.

U ovom radu detaljnije je prikazana iteracijska primjena metode gustoća sila u kojoj se gustoće sila u nekom koraku računaju pomoću zadanih uvjeta i rezultata dobivenih iz prethodnog koraka. Kako bi se spriječilo klizanje u rubnim kabelima ova proširena metoda omogućava zadavanje kinematičkih ograničenja kojima osiguravamo zahtijevane duljine odabranih štapova.

U posljednjem dijelu rada zadali smo vanjsko opterećenje i promatrali njegov utjecaj na oblik mreže. Pokazali smo da vanjsko opterećenje u obliku koncentrirane sile neće imati znatan utjecaj na promjenu oblika mreže ako su sile prednapona puno veće od iznosa sila vanjskog opterećenja.

9. LITERATURA

- 1) K. Fresl, P. Gidak, R. Vrančić: *Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi*, Građevinar 65(2013)8, str. 707-720
- 2) J. Dvornik, D. Lazarević: *Prednapete gipke konstrukcije od užadi i tkanine*, Građevinar 47(1995)4, str. 185-199.
- 3) R. Vrančić: *Iteracijskaprimjena metode gustoća sila u oblikovanju konstrukcija od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014, rad nagrađen Nagradom Rektora Sveučilišta u Zagrebu
- 4) S. Šajn: *Prednapete konstrukcije od užadi*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2013., završni rad
- 5) P. Gidak: *Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža*, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011., magistarski rad
- 6) W. Addis: *The Art of Structural Engineer*, Elippsis, London, 1994.
- 7) B. Maurin, R. Motro: *Investigation of minimal forms with conjugate gradient method*, International Journal of Solids and Structures, 38 (2001), pp. 2387-2399
- 8) J. Dvornik, D. Lazarević: *Viseće konstrukcije od platna i užadi*, Građevinski godišnjak (1997), Hrvatsko društvo građevinskih inženjera, Zagreb.
- 9) H. J. Schek: *The force density method for form finding and computation of general networks*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3 (1974), pp. 115-134.
- 10) G. Tibert: *Numerical Analysis of Cable Roof Structures*, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1999.