

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

KONSTRUKCIJE OD UŽADI
ZAVRŠNI RAD

Student: Hanna Miličević,0082052674

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Zagreb, rujan 2018.

Sadržaj

1. Uvod	4
1.1. Značajnije izvedene vlačne konstrukcije	6
2. Užad	9
2.1. Mreže užadi	13
2.2. Današnja primjena i razlika u odnosu na tradicionalne konstrukcije	15
3. Traženje oblika konstrukcija od užadi	16
3.1. Ravnoteža slobodnog čvora	18
3.2. Minimalna mreža kabela	23
3.3. Zašto baš minimalne mreže?	24
4. Metoda gustoće sila	25
5. Iteracijska primjena metode	27
5.1. Iteracijska primjena metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža	27
5.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja	29
6. Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi	30
7. Primjer	33
8. Zaključak	42
9. Izvor slika	43
10. Literatura	44

Zahvala :

Na prelazu prve ali važne stepenice u životu želim da zahvalim prof. dr. sc. Krešimiru Freslu, dipl. ing. građ. na svakom strpljenju koje je imao za svoje studente. Hvala na svakoj podršci od prvih koraka na fakultetu do završnog rada . Zadovoljstvo je biti Vaš student ☺

1.Uvod

Nomadski šatori i viseći mostovi su prvi začetci konstrukcija od užadi. Šatori nomadskih plemena sklopljeni su od užadi koja je sidrena na štapove postavljene u sredini i oko rubova. Preko toga složeni su trokutasti oblici životinjske kože koji prihvaćaju vanjsko opterećenje, te ga prenose na užad, stupove i konačno u tlo. Ovakve, vjerovatno najstarije vrste čovjekovih nastambi unatoč skromnom izgledu i dojmu kratkotrajnosti doprinjele su mnogim idejama u budućnosti. Frei Otto, začetnik Instituta za lagane konstrukcije Sveučilišta u Stuttgartu uvođenjem fizikalnog modela u postupku pronalaženja oblika doprinio je razvoju vlačnih konstrukcija. Prva njegova konstrukcija sa većim rasponom, u kojoj je tkanina ovješena o mrežu je Njemački paviljon na Svjetskoj izložbi Expo u Montrealu 1967. godine. Međutim to je omogućilo gomilanje snijega, te se konstrukcija srušila usred snježne oluje. Jedno od najpoznatijih Ottovih dijela su krovništa Olimpijskog stadiona u Münchenu iz 1972.

Prije gotovo 3000 godina u Kini su se gradili viseći mostovi s užadima od bambusa, kasnije je bambus zamjenilo kovano željezo koje je omogućilo mnogo veće raspone. Jedan od prvih takvih mostova je Menai Strait Bridge u Sjevernom Walesu. Užad koja se koristi na mostu sastavljena je od niza šipki međusobno povezanih iglama. Na taj način postignuto je gipko ponašanje užeta, iako njegovi sastavni elementi nisu takvog svojstva. Razvojem čelika dolazi do uporabe užadi 10 puta veće čvrstoće što pridonosi pouzdanosti konstrukcije i odbacivanje potrebe za iglama.

Napretkom teorije konstrukcija i računala koja omogućuju brz i precizan proračun i grafički prikaz, te razvoj čelika, nove spoznaje i iskustva na području projektiranja omogućuju izradu sve laganijih konstrukcija. Pojavom novih tkanina znatno većih čvrstoća kao što su staklena vlakna i poliester prekriveni PVC-om, povećali su se također i rasponi konstrukcija od platna.

U ovom radu ću predstaviti glavne karakteristike konstrukcija od užadi, minimalne i poopćene minimalne mreže, kinematička ograničenja, Newton-Raphsonov postupak te jednu od metoda nalaženja oblika vlačnih konstrukcija-metodu gustoće sila.



Slika 1. Frei Otto: Njemački paviljon na izložbi Expo u Montrealu, 1967.



Slika 2. Frei Otto: Krovništva Olimpijskog kompleksa u Münchenu, 1972.

1.1. Značajnije izvedene vlačne konstrukcije

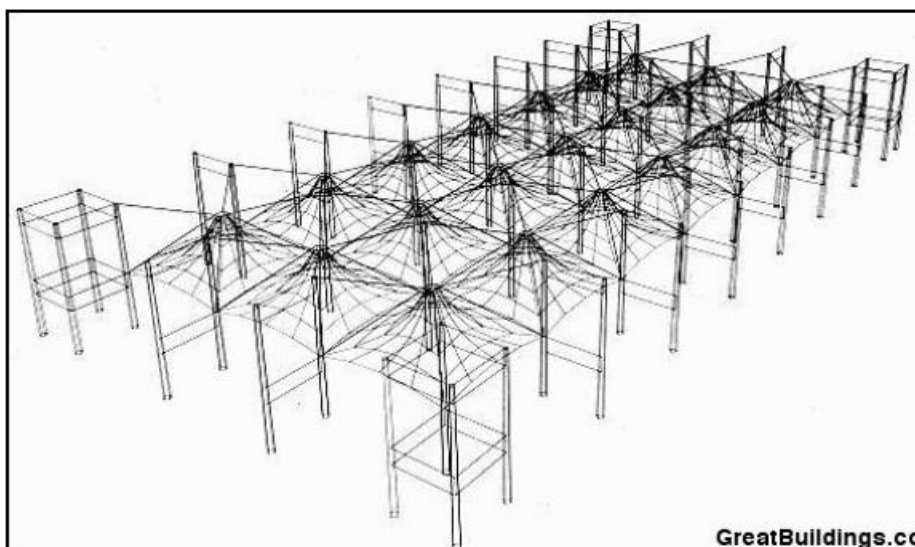
Razvoj vlačnih konstrukcija potaknut je razvojem materijala i tehnika projektiranja. Zadnjih nekoliko desetljeća ubrzano se povećava broj i mjesta primjene vlačnih konstrukcija. Arhitektonske mogućnosti oblika su ograničene potrebom da odabrani oblik mora biti fizikalno moguć i u ravnoteži u neopterećenom i opterećenom stanju. U praksi to znači da se u izvedenoj konstrukciji ne smiju pojaviti mjesta nabora tkanine ili labavih kabela. Za postizanje ovih zahtjeva mora postojati uska suradnja arhitekata i inženjera pogotovo u početnoj fazi određivanja oblika. U sve više slučajeva ove konstrukcije su bolja i efikasnija rješenja od uobičajnih konstrukcija i tehnika građenja. Sa sve boljim poznavanjem ponašanja vlačnih konstrukcija i smanjenjem cijene materijala (tkanina i kabel), povećat će se broj izvedenih konstrukcija, a na taj način i smanjiti troškovi izvođenja.

Kada govorimo o važnim vlačnim konstrukcijama moramo spomenuti krovšte stadiona *King Fahd* u Riyadhu kao krovnu konstrukciju najvećeg raspona od 247m i *Hajj* terminal Internacionalnog aerodroma Jeddah najveću krovnu površinu na svijetu (465000m²). Ovi primjeri dokaz su prihvaćanja vlačnih konstrukcija kao pouzdanih, stalnih konstrukcija. Sve većim razumijevanjem njihova ponašanja vlačne konstrukcije postaju još dostupnije.

Krov Hajj u Jeddahu završen je 1982. godine, a još je i danas najveća krovna površina u svijetu. Svrha konstrukcije je natkriti zadanu tlocrtnu površinu simulirajući šumu u pustinji. Zbog svoje veličine, konstrukcija je postala važan „živi“ model za praćenje pouzdanosti vlačnih membranskih konstrukcija.



Slika 3. Hajj terminal, Internacionalni aerodrom u Jeddahu

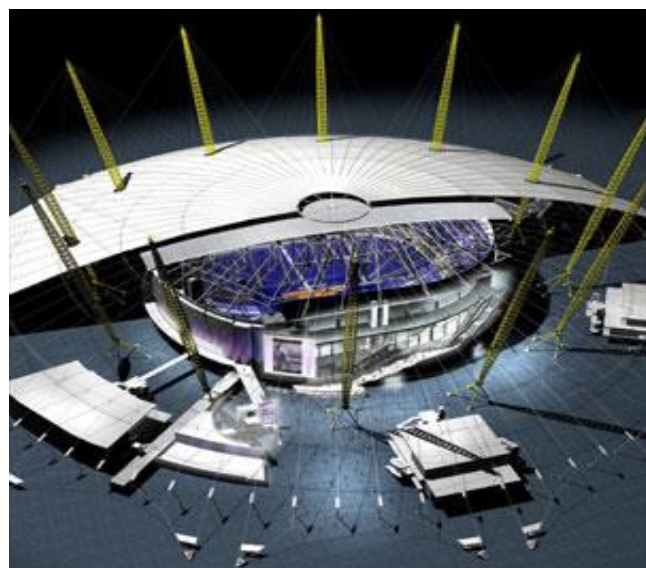


Slika 4. Hajj terminal, Internacionalni aerodrom u Jeddahu
-perspektivni prikaz



Slika 5. Stadion King Fahd, Riyadh

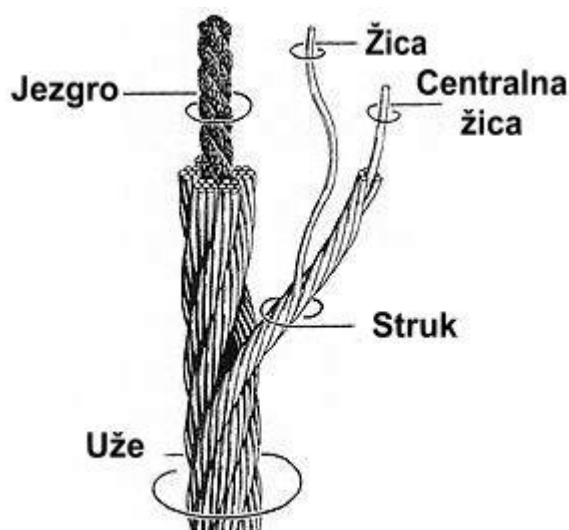
Jako zanimljiva vlačna konstrukcija je Milenijska arena O2 u Londonu. Iako se isprva čini da se radi o pneumatskoj konstrukciji odnosno višeslojnoj konstrukciji ispunjenoj zrakom, nosivu konstrukciju čini vlačno naprezana membrana, a vlačno naprezanje ne postiže se upuhivanjem zraka već brojnim kabelima i stupovima na koje se kabeli prihvaćaju. Konstrukcija nema tipičan sedlasti oblik (negativna Gaussova zakrivljenost, antiklastični oblik) koji vlačnim konstrukcijama daje stabilnost i krutost, već se radi o sinklastičnom obliku (pozitivna Gaussova zakrivljenost). Oblik Milenijske arene diktirao je arhitekt te nije tipična vlačna konstrukcija.



Slika 6. Milenijska arena O2, London

2. Užad

Uže u građevinarstvu i tehnici općenito, savitljiv je ravni (linearni) konstrukcijski dio koji služi za prijenos vlačnih sila, odnosno natezanje, napinjanje, vješanje, povlačenje i drugo. Sastavljeno je od više čeličnih žica velike čvrstoće, koje su u jednostrukoj ili dvostrukoj zavojnici ovijene oko jezgre užeta. Spiralno uže ima oko jezgre omotano nekoliko redova žica koje čine jednostruku zavojnicu. Takvo je uže vrlo čvrsto, ali slabo savitljivo, pa se rabi kao nepokretno (nosiva užad žičara, mostova i slično). Otvorena spiralna užad izrađuje se od žica okrugla presjeka, a zatvorena užad od žica kojima je presjek u obliku slova Z, pa im je površina glatka. Pramenouže sastavljeno je od žica upredenih u dvostruku zavojnicu. Izrađuje se od pramenova načinjenih od više redova žica omotanih oko jezgre. U najjednostavnijim slučajevima postoje dvije familije užadi: konkavna ili ulegnuta užad koja preuzima dominantno gravitacijsko opterećenje i konveksna užad koja služi za stabilizaciju.



Slika 7. Čelično uže

Spiralni snopovi

Ovaj tip čine kabeli koji su sastavljeni na način da se oko jezgre koja se sastoji od ravne čelične žice namota sloj od šest žica, a u svaki sljedeći sloj ide šest žica više nego u prethodni. Moduli elastičnosti ovog tipa kabela kreću se između vrijednosti $E = 145 - 170 \text{ GPa}$. Vrstu snopa određuje način navijanja žica oko jezgre.

Glavne vrste su :

- snop s jednim ili dva sloja žica omotanih oko jezgre,
- snop s dva sloja žica istog promjera i popunjujućim slojem,
- snop s dva sloja žica s različitim polumjerima u zadnjem vanjskom sloju,
- snop s više slojeva (kombinirani),
- žičana užad s čeličnom jezgrom.

Ovaj tip kabela primjenjuje se kada je potreban vrlo fleksibilan kabel, npr. kao rubni kabeli membrane, kabeli kod visećih mostova, stabilizirajući kabeli kod mreža kabela, vlačni elementi u stabilizacijskim vezovima i o sl.



Slika 8. Spiralni snopovi

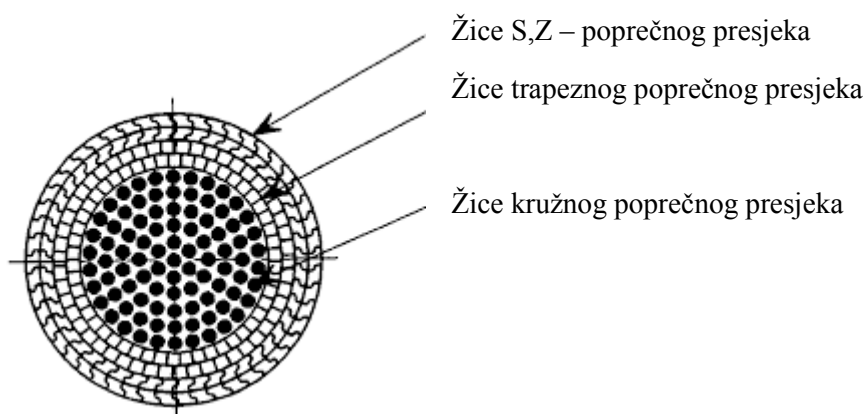
Kabeli unutar krutog omotača

Jezgru ove vrste kabela čini nekoliko slojeva okrugle žice oko koje je namotan vanjski sloj sačinjen od žica Z-oblika. Zbog svog posebnog oblika vanjski sloj čini kompaktnu, glatku površinu koja onemogućava prodor štetnih tvari u kabel i time povećava njegovu trajnost.

Neke od glavnih prednosti ovog tipa su :

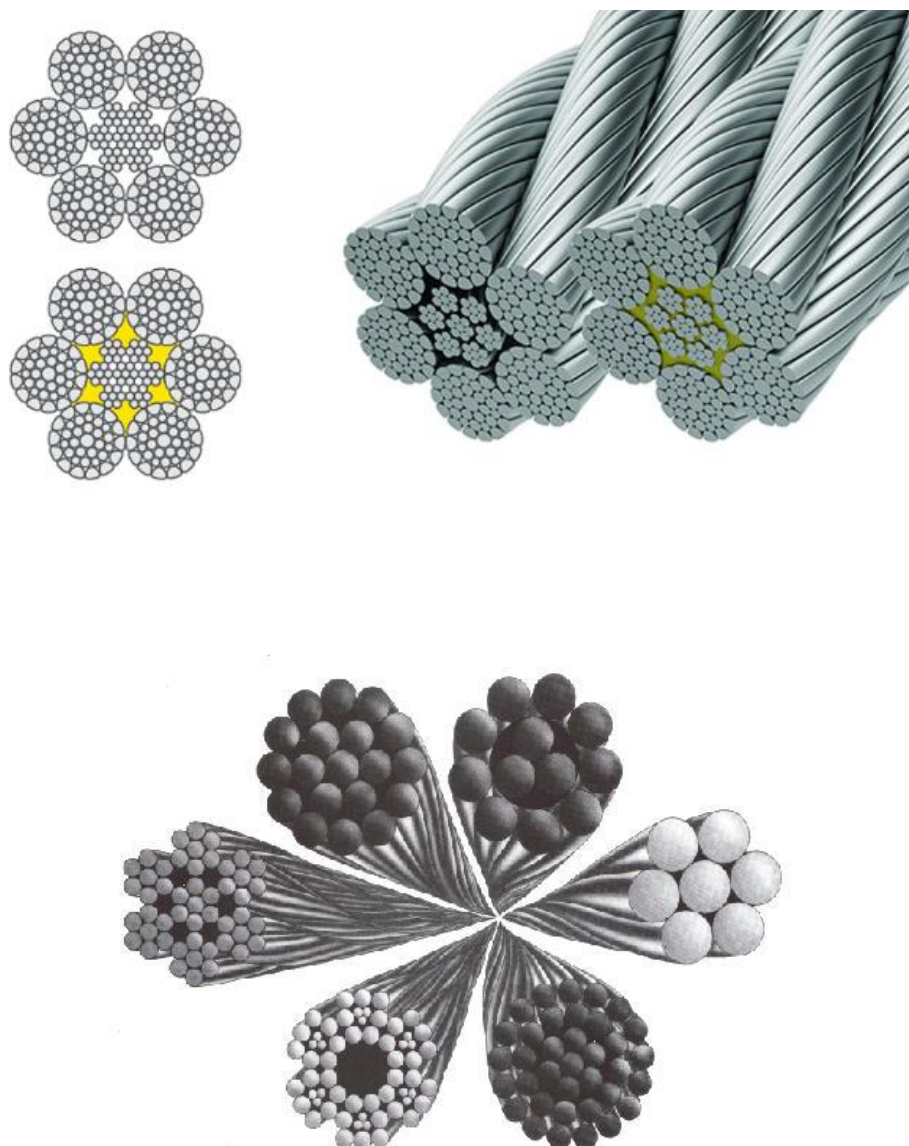
- 1) visok modul elastičnosti ($E= 160-180$ GPa)
- 2) visoka otpornost na površinski tlak
- 3) dobra zaštita od korozije zbog zatvorene površine

Najčešće se upotrebljavaju kod mostova.



Žičana užad

Karakteristike ovog tipa užadi su niski modul elastičnosti, manja otpornost na koroziju te površina koja je podložnija oštećivanju. Uglavnom se koristi samo za specijalne namjene kao što su kabeli dizala, kabeli stepeništa, balkona i pješečkih prolaza. Užad ima niži modul elastičnosti $E=100 \text{ kN/mm}^2$, a promjer se kreće između 20mm i 124mm



Slika 9. Žičana užad

2.1. Mreže užadi

Užad se na različite načine spaja u mreže, a to su :

- **Pravčaste mreže**

Pravčasta mreža je mreža u kojoj svako uže leži na pravcu tj. užad čije su osi pravci na pravčastoj plohi ili prostornoj pravčastoj mreži. Takve mreže su ujedno i geodetske, jer svako uže leži na najkraćoj spojnici svojih krajnjih točaka. Ovakav tip mreže ne zahtijeva postupak nalaženja oblika, jer se on može unaprijed odrediti iz poznatih geometrijskih uvjeta. Karakteristika ovog tipa mreže je u tome što ne može doći do gubitka prednapona zbog poprečnog opterećenja, uže se može samo još produljiti i nategnuti.

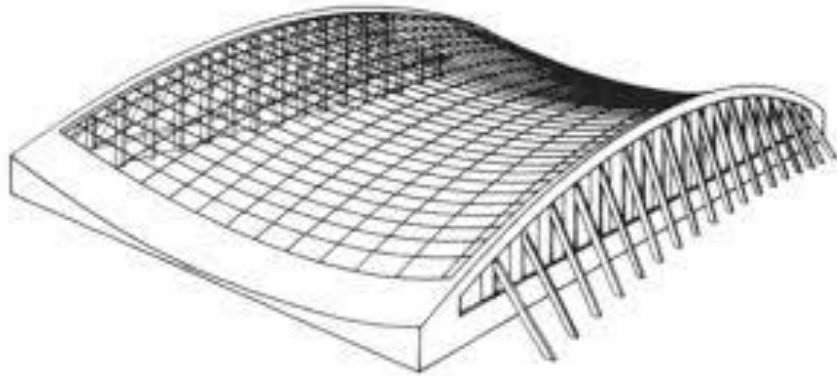
Mlohavost štapova se onemogućava minimalnim prednapinjanjem. Konstrukcije bi tada zbog malih uzdužnih sila i zbog pravčaste geometrije bile još gipkije od ostalih mrežastih konstrukcija, što zbog velike deformacije pokrova i dinamičke osjetljivosti izaziva teškoće u upotrebi. Primjeri ovakvih mreža su hiperbolički paraboloid i rotacijski hiperboloid.



Slika 10. Toranj nuklearnog reaktora (rotacijski hiperboloid)

- **Regularne mreže**

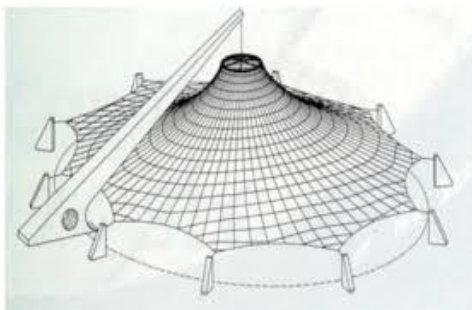
Regularna mreža od užadi je sustav dviju familija užadi, sedlastog oblika. Na mjestima kontakta dviju familija nastaju dvije uravnotežene sile kojima kablovi međusobno djeluju jedan na drugi. Pri djelovanju vertikalnog opterećenja sile se u konkavnoj (nosivoj) užadi povećavaju, dok se u konveksnoj (prednaponskoj) užadi smanjuju. Razlikujemo dvije vrste regularnih mreža, a to su : mreže s krutim rubovima i mreže s rubnim kabelima.



Slika 11. Regularna mreža od užadi

- **Neregularne mreže**

Neregularne mreže su mreže koje su sačinjene od više familija užadi ili od mreža kod kojih je užad kompleksnije složena. Posebnost ovih mreža je u tome što isto uže na jednom dijelu mreže može biti konkavno, a na drugom konveksno što znači da može mijenjati zakrivljenost. Uže se također može prekinuti u nekom čvoru , a može se i umetnuti neki kruti element unutar mreže.



Slika 12. Primjeri neregularnih mreža

2.2. Današnja primjena i razlika u odnosu na tradicionalne konstrukcije

U tehnološkom smislu izvedba vlačnih konstrukcija je brza i svodi se na montažu tvorničkih prefabriciranih elemenata, što uz malu težinu konstrukcije čini gotovo jedinstveno mobilnima. Zbog njihove male specifične mase, primjenjuje ih se za natkrivanje velikih raspona kao što su stadioni, športske dvorane ili izložbeni paviljoni, gdje se zahtjeva da veliki prostor bude neprekinut elementima konstrukcije. Prednapeta užad sastavni je dio ovješanih i visećih mostova, ona je element pomoću kojeg su ostvareni veliki rasponi ti mostova. Svakodnevno se razvijaju novi materijali, boljih karakteristika i veće otpornosti pomoću kojih su vlačne konstrukcije razvijene u prava arhitektonska i projektantska djela. Kao primjer imamo toranj Killesberg u Stuttgartu visine 40,3 m koji služi kao vidikovac, a sastoji se od dvostrukog spiralnog stubišta i platformi koje su obješene na mrežu od 48 kabela. Užad je na vrhu pričvršćena na srednji tlačni jarbol, a oblik formiraju čelični tlačni prsten na vrhu i kružni temelj na dnu gdje je užad usidrena.



Slika 13. Toranj *Killesberg* , Stuttgart

Zbog velike mogućnosti oblikovanja i estetskih vrijednosti ističu se i svojom elegancijom i atraktivnošću. Zakrivljenost vlačnih konstrukcija osigurava otpornost na utjecaj vjetera ili pokretnog opterećenja koje djeluje na plohu konstrukcije. Velika prednost je mogućnost lake montaže i demontaže, reciklaže te transporta. Kod tradicionalne konstrukcije od betona, čelika i drva stabilnost i prijenos sila im omogućuju vlastita težina i krutost, dok je za razliku od njih, težina vlačnih struktura gotovo zanemariva ($0,1 \text{ kN/m}^2$), a materijal od kojih su izrađene je izrazito fleksibilan. Samim tim stabilnost i nosivost moraju se postići na drugačiji način. Elementi koji tvore vlačnu konstrukciju moraju formirati specifični geometrijski oblik i biti pod utjecajem određenih unutarnjih sila.

3. Traženje oblika konstrukcija od užadi

Pod pojmom nalaženja oblika konstrukcije od užadi podrazumijeva se određivanje početne ravnotežne konfiguracije koja obuhvaća njezin geometrijski oblik i razdiobu prednaponskih sila u užadi. Nalaženje oblika smatra se jednom od najbitnijih točaka u projektiranju vlačnih konstrukcija. Do kraja šezdesetih godina prošlog stoljeća jedini je način nalaženja oblika bila izrada fizikalnih modela. Iako su ti modeli vrlo korisni za uvid u ponašanje gipkih konstrukcija, vrlo je teško točno odrediti koordinate pojedinih točaka i vrijednosti unutarnjih sila. Stoga su se vrlo rano počeli razvijati numerički modeli. Razvila su se dva smjera istraživanja koja se bave oblikom konstrukcije: *form-finding* i *optimizacija* konstrukcije. Form-finding se odnosi na vlačne konstrukcije (mreže kabela i membrane), dok se optimizacija oblika može primijeniti na bilo kakvu konstrukciju.

Traženje oblika se sastoji iz dvije faze. Prvo se napravi fizikalni model za zadane rubne uvjete koristeći sapunicu, rastezljivu tkaninu ili rastezljive niti. Kada se dobije oblik koji zadovoljava željene estetske uvjete kreće se u drugu fazu u kojoj se formira numerički model.

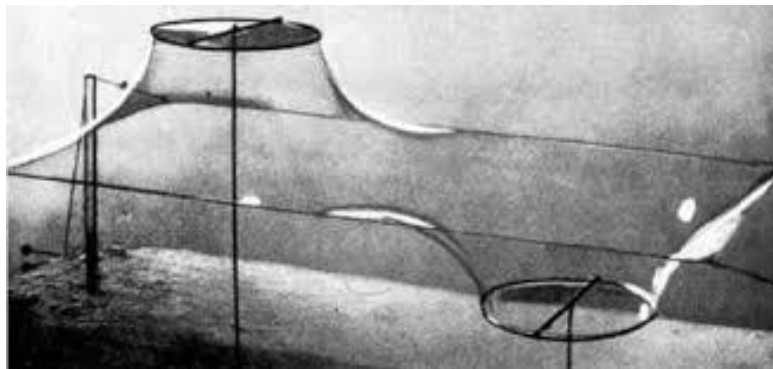
Veliku ulogu u primjeni fizikalnih modela kao metode u nalaženju oblika konstrukcija od užadi imao je Frei Otto. Većina se istraživanja Instituta za lagane konstrukcije u Stuttgartu temeljila upravo na fizikalnim modelima, posebno na modelu opne od sapunice. Opna od sapunice je primjer stabilne minimalne plohe. Osim sapunice u izradi fizikalnih modela koristili su se različitim materijalima (tkaninom, žicom, spajalicama i sl.). Prelazak s fizikalnog modela na stvarnu konstrukciju iznimno je osjetljiv na netočnosti u mjerenju koordinata točaka. Na primjer, pogreška u određivanju duljine kabela može uzrokovati promjenu u predviđenoj veličini sile od čak od 60% .



Slika 14. Fizikalni model od tkanine



Slika 15. Fizikalni model od žica i spajalica



Slika 16. Fizikalni model od sapunice

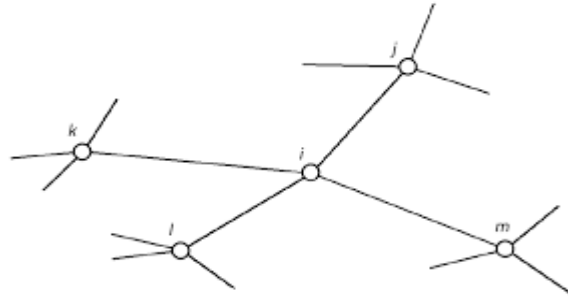
50-tih godina prošlog stoljeća započinje razvoj kompjutorskih programa koji su značajno unaprijedili postupak određivanja oblika i potrebnih prednaponskih sila. Prvi kompjutorski program napravljen je za potrebe Olimpijskog stadiona u Münchenu 1972. godine. Za određivanje duljine kabela koristio se metodom najmanjih kvadrata. S vremenom su kompjutorski programi i numerički modeli napredovali, te nam omogućuju sve složenije i nevjerovatnije oblike. Traženje oblika upotrebom numeričkog modela rezultirat će jednim od sljedećeg:

- Dobivanje optimalnog oblika konstrukcije (stabilna minimalna ploha)
- Dobivanje oblika konstrukcije koja je u stanju statičke ravnoteže, ali naprezanja ne moraju biti ista u svim elementima mreže i svakom smjeru
- Dobivanje oblika koji će aproksimirati stanje potpune statičke ravnoteže

Kompjuterski modeli vlačnih konstrukcija predstavljaju skup numeričkih i grafičkih podataka koji opisuju oblik konstrukcije, naprezanja i deformacije pod određenim opterećenjem. Ti su podaci dobiveni pomoću numeričkih algoritama koji opisuju iterativan proces geometrijskog „namještanja“ vlačne plohe sve dok se ne postigne statička ravnoteža. Pri tome je početni položaj samo pretpostavka oblika, pa je zato potrebna iteracija kojom se dolazi do ravnotežnog položaja. Najčešća numerička metoda koja se primjenjuje je *metoda gustoće sila* koju ćemo kasnije pobliže objasniti.

3.1 Ravnoteža slobodnog čvora

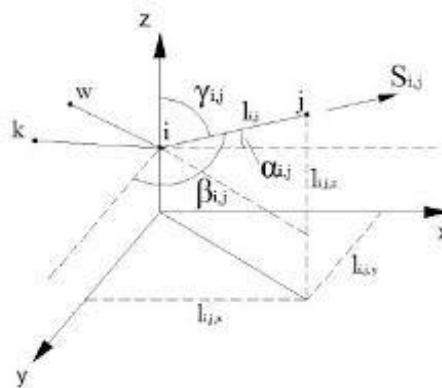
Osnovu postupka nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od užadi čine jednačbe ravnoteže slobodnih čvorova na koje djeluju samo sile prednapinjanja u priključenim štapovima.



Slika 17. Čvor i sa susjednim čvorovima i i priključenim štapovima

Uvjeti ravnoteže i -tog čvora bez vanjskog opterećenja mogu se izraziti na 2 načina:

1. Simetričan zapis u kojem su sve koordinate ravnopravne



Zbroj projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenima u i -ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži :

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n y_{i,j} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n z_{i,j} = 0,$$

gdje je n broj užadi pričvršćenih u i -ti čvor .

Konstrukcije od užadi

Za svaki slobodan čvor i možemo napisati tri jednačbe ravnoteže koje glase: zbrojevi projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenima u i -ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži.

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \beta_{i,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \gamma_{i,j} = 0, \quad (1)$$

gdje su: - $S_{i,j}$ vrijednosti sila u štapu i,j .

$$\cos \alpha_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}}, \quad \cos \beta_{i,j} = \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}}, \quad \cos \gamma_{i,j} = \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}}. \quad (2)$$

Pri čemu je :

$$l_{i,j} = l(x_i, x_j, y_i, y_j, z_i, z_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3)$$

duljina štapa (i,j).

Uvrstimo li (2) i (3) u (1) dobit ćemo sustav nelinearnih jednačbi :

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0.$$

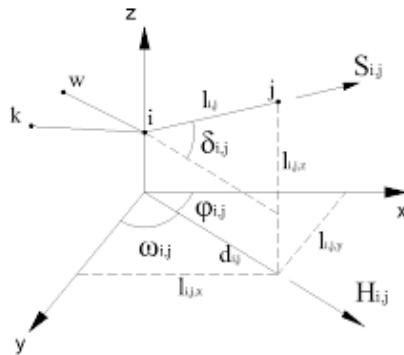
Dobili su konačni oblik zapisa jednačbe i -tog čvora. Konačni oblik određen je trima koordinatama x, y, z svakog čvora u kojemu se sijeku dva kabela, što ukupno čini $3n$ nepoznanica, pri čemu je n broj slobodnih čvorova. Za svaki se čvor mogu napisati 3 uvjeta ravnoteže u kojima se kao nepoznanice pojavljuju još i sile u pripadajućim štapovima. Ako je n broj slobodnih čvorova, a m broj elemenata, tada možemo napisati $3n$ jednačbi sa $3n+m$ nepoznanica. Broj nepoznanica je uvijek za m veći od broja jednačbi, pa je sustav nemoguće jednoznačno riješiti. Dakle, kako bismo dobili jednak broj jednačbi i nepoznanica, trebamo primijeniti jedno od *pravila* pomoću kojeg ćemo eliminirati sile u štapovima kao nepoznanice.

Konstrukcije od užadi

Postoje 4 pravila:

- **Kvazilaplaceovo pravilo:**
Unaprijed su zadane uravnotežene projekcije sila u svim štapovima na ravninu xy ;
- **Pravilo gustoće sila:**
Zadaju se omjeri između iznosa sila i duljina svakog štapa ;
- **Općenito pravilo minimalne mreže (pravilo „geodetske mreže“) :**
Zadani su iznosi sila u svim štapovima
- **Kombinirano pravilo:**
U nekim štapovima zadani su iznosi sila, a u ostalim štapovima duljine.

2. Zapis pomoću projekcija sila i duljina na ravninu xy



Kod ovog načina uvjete ravnoteže i -tog čvora zapisujemo pomoću projekcija sila na ravninu xy :

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \cos \varphi_{i,j} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \cos \omega_{i,j} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \tan \delta_{i,j} = 0 .$$

$\varphi_{i,j}$ i $\omega_{i,j}$ kutovi su što ih projekcije sile $H_{i,j}$ zatvaraju sa osima x i y , a $\delta_{i,j}$ je kut između štapa u prostoru i njegove projekcije na ravninu xy .

Vrijedi da je :

$$\cos \rho_{i,j} = \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}} ,$$

$$\cos \omega_{i,j} = \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}} ,$$

$$\tan \delta_{i,j} = \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}} ,$$

gdje su : $d_{i,j}$ - projekcija štapa i - j na ravninu xy ,

x_i, y_i, z_i - koordinate i -tog čvora u prostoru ,

x_j, y_j, z_j - koordinate j -tog čvora u prostoru.

Konstrukcije od užadi

Sada jednadžbu možemo zapisati:

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}} = 0 .$$

Vrijedi da je $S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = H_{i,j}$,

gdje je $\cos \alpha_{i,j}$ kosinus kuta između štapa u prostoru i njegove projekcije na ravninu xy, koji možemo zapisati i kao $\frac{d_{i,j}}{l_{i,j}}$, pa jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$S_{i,j} \cdot \frac{d_{i,j}}{l_{i,j}} = H_{i,j}$$

Izrazimo silu $S_{i,j}$:

$$S_{i,j} = \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} .$$

Uvrštavanjem tog izraza u jednadžbe ravnoteže u prvom obliku dobivamo,

$$\sum_{j=1}^n \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

što je nakon sređivanja izraza zapravo drugi zapis ravnoteže čvora :

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}} = 0 .$$

3.2. Minimalna mreža kabela

Ako ukupnu duljinu kablova označimo sa L , dobit ćemo da je :

$$L = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} .$$

Izjednačimo li njezine derivacije po koordinatama slobodnih čvorova s nulom dobivamo sustav od $3n$ jednadžbi sa $3n$ nepoznanica :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 .$$

Pomnožimo li sustav sa $S = S_{i,j}$, dobit ćemo:

$$S \frac{\partial L}{\partial x_i} = S \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 ,$$

$$S \frac{\partial L}{\partial y_i} = S \sum_{j=1}^n \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 ,$$

$$S \frac{\partial L}{\partial z_i} = S \sum_{j=1}^n \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 .$$

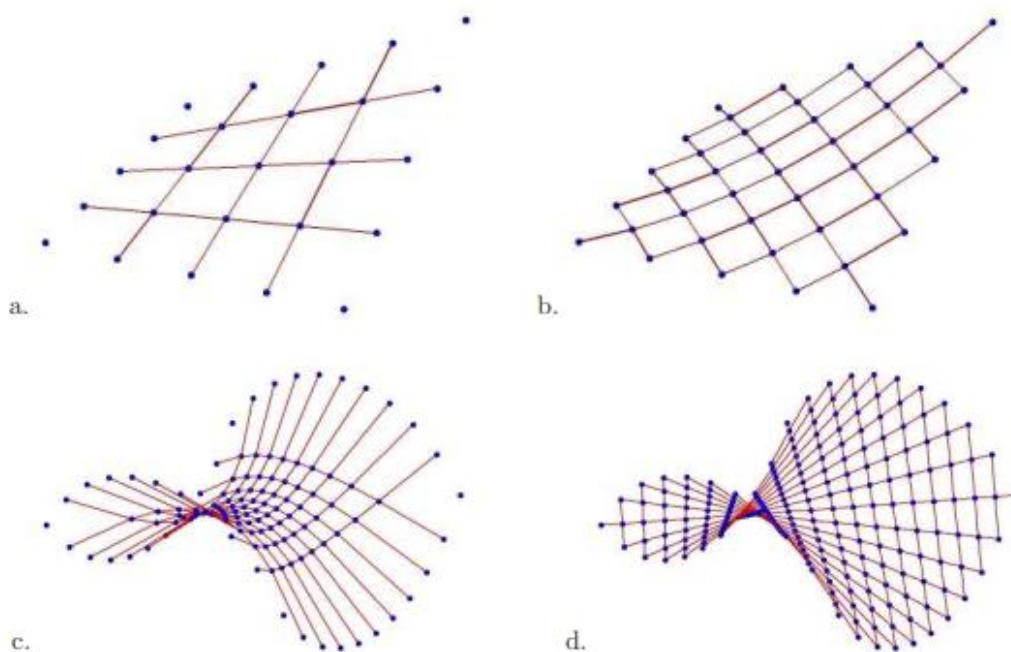
Rješavanjem gornjeg sustava, uz uvjet da su sile u svim kabelima jednake, dobit ćemo oblik mreže kod kojeg je zbroj duljina kabela manji od zbroja duljina kabela u bilo kojem drugom položaju. Takve mreže nazivamo **minimalnim ili geodetskim mrežama**.

Ako bi smo pri rješavanju sustava zadali da su sile u kabelima različite, ali jednake duž pojedinog kabela, dobili bi smo **poopćenu minimalnu mrežu kabela**.

3.3. Zašto baš minimalne mreže?

Postoji nekoliko pogodnosti pri primjeni minimalnih mreža u oblikovanju mreža od užadi. Osnovna svojstva minimalnih mreža su jednake sile u svim kabelima te minimalna duljina kabela. Posljedica toga je da su svi kabeli u mreži duž svoje duljine, ali i međusobno, jednako napregnuti. Dakle, neće postojati kritična mjesta na mreži s ekstremnim naprezanjima gdje bi inače najprije mogli doći do popuštanja, odnosno otkazivanja. Nadalje, zbog toga što je duljina kabela minimalna, bit će potrebno manje materijala.

Uz gore navedeno, valja napomenuti kako kod minimalne mreže oblik mreže ne ovisi o svojstvima materijala kabela, već samo o silama prednapinjanja, odnosno o njihovom omjeru u slučaju popučenih minimalnih mreža.



Slika 18. Primjeri minimalnih mreža

4. Metoda gustoće sila

Metoda gustoće sila objavljena je po prvi put 1971. godine u članku „*Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen*“ autora Hans-Jörga Scheka i Klausa Linkwita. Metoda se temelji na matematičkom triku koji sustav nelinearnih jednažbi pretvara u linearni, a rješenje sustava daje koordinate točaka mreže koja je u ravnoteži. Pri tome nisu potrebne bilo kakve početne koordinate. Jedini potreban podatak prije rješavanja sustava je tzv. gustoća sila svakog elementa.

1972. godine metoda se primjenjuje za potrebe proračuna Olimpijskog stadiona u Münchenu. Mreža krova sastavljena je od 210 km užadi i pokriva površinu od 75000 m². Za proračun takvog opsega dotad korišteni fizikalni modeli nisu bili dovoljni za određivanje oblika, te je napravljen prvi računalni program utemeljen na metodi gustoće sila.

Omjer vlačne sile u štapu $S_{i,j}$ i njegove duljine $l_{i,j}$ nazivamo gustoćom sila

$$q_{i,j} = S_{i,j} / l_{i,j} ,$$

iz toga slijedi da nelinearan sustav jednažbi ravnoteže

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

prelazi u linearan

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) = 0 .$$

Rješavanjem sustava dobivamo koordinate slobodnih čvorova. Poznavanjem koordinata čvorova mreže lako možemo izračunati duljine elemenata, a potom i sile u štapovima.

U svakom čvoru mreže mora biti zadovoljen sljedeći uvjet :

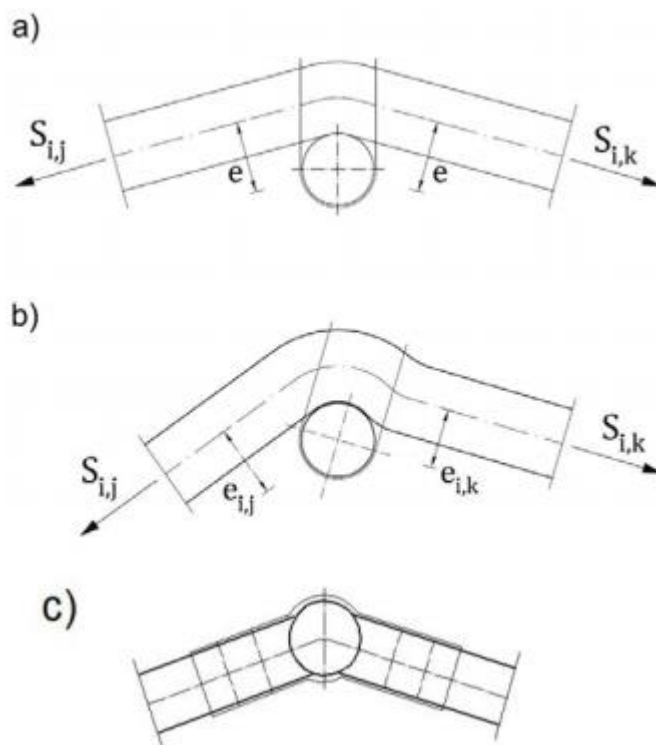
$$S_{i,j} \cdot e_i = S_{i,k} \cdot e_k ,$$

$S_{i,j}$, $S_{i,k}$ - sile u i-tom i k-tom štapu istog užeta

e_i , e_k - krakovi sila $S_{i,j}$ i $S_{i,k}$ u odnosu na središte donjeg kabla

Ako uvjet nije zadovoljen, doći će do zaokretanja čvora. Naime, krak svake sile se povećava ili smanjuje (ovisno o veličini sile) sve dok se ne postigne ravnoteža momenata.

Problem izobličavanja čvorova može se riješiti centriranjem čvorova.



Slika 19 . Mimoilaženje užadi : a) ekscentricitet , b) izobličenje čvora ,
c) centrični spoj

5. Iteracijska primjena metode

5.1 Iteracijska primjena metode gustoća sile na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža

Postupak kojim se dobivaju mreže minimalne duljine.

U k-tom koraku iteracije gustoću sile u štapu (i,j) računamo prema izrazu :

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \cdot \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}} ,$$

gdje su : - $q_{i,j}^{(k-1)}$ gustoća sile u prethodnom koraku

- $S_{i,j}^{(k-1)}$ vrijednost sile izračunate u prethodnom koraku
- \bar{S} tražena vrijednost sile

Predpostavimo da je sila $S_{i,j}^{(k-1)}$, sila izračunata u (k-1)-om koraku iteracije, različita od tražene vrijednosti \bar{S} , tada ćemo vrijednost sile \bar{S} dobiti množenjem sile $S_{i,j}^{(k-1)}$ s koeficijentom, $s_{i,j}^{(k)}$ odnosno $\bar{S} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)}$.

Nakon što smo u k-tom koraku izračunali koordinate čvorova i duljinu $l_{i,j}^{(k)}$, vrijednost sile bit će

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k)} .$$

Ako se duljina štapova nije promijenila, tj. ako vrijedi

$$l_{i,j}^{(k)} = l_{i,j}^{(k-1)},$$

vrijedit će i

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k)} .$$

Ako je k tome $S_{i,j}^{(k)}$, tražena vrijednost sile onda je i

$$S_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot q_{i,j}^{(k-1)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)} .$$

Kad se duljina štapovova ne bi mijenjala, gustoća sile iz izraza bi odmah dala traženu vrijednost sile. No, ravnotežna konfiguracija najčešće se mijenja promjenom gustoća sile, a samim tim se mijenjaju i duljine štapova. Prema tome, potreban je iteracijski postupak kojim ćemo se postupno približavati traženoj vrijednosti sile.

Zadavanjem različitih sila u različitim štapovima povećavamo broj mogućih oblika mreže užadi, a gustoću sile u štapu (i,j) u k-tom koraku iteracije računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \cdot \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}} ,$$

$\bar{S}_{i,j}$ – zahtijevana vrijednost sile u štapu

Vrijednost sile $\bar{S}_{i,j}$ ne mora biti ista kao i sile u ostalim štapovima. No, ako želimo oblikovati poopcenu minimalnu mrežu, moramo paziti da su sile u svim štapovima pojedinog kabla jednake.

Ako u gornji izraz uvrstimo $q_{i,j}/S_{i,j} = 1/l_{i,j}$, dobit ćemo još jedan izraz za gustoću sile :

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}} .$$

5.2. Uvođenje kinematičkih ograničenja

Kinematička ograničenja uvodimo u situacijama kada dva ili više čvorova „otkližu“ u jednu točku, tj. u situacijama u kojima se javlja preveliko klizanje kabela. To se najčešće događa u rubnim kabelima i to neovisno o silama u njima. Kinematičkim ograničenjima osiguravamo zahtijevane duljine štapova.

Propisanu duljinu $\bar{l}_{i,j}$ štapa (i,j) osigurat ćemo tako da gustoću sile u njemu računamo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}.$$

Uz uvjet da su sile nepromijenjene, $S_{i,j}^{(k)} = S_{i,j}^{(k-1)}$, i da je gustoća sile obrnuto proporcionalna

duljini štapova dobivamo $q_{i,j}^{(k)} / q_{i,j}^{(k-1)} = \bar{l}_{i,j}^{(k-1)} / \bar{l}_{i,j}^{(k)}$.

Iz toga slijedi da je koeficijent kojim trebamo pomnožiti gustoću sile iz prethodnog koraka

$\bar{l}_{i,j}^{(k-1)} / \bar{l}_{i,j}^{(k)}$, te iz $q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \cdot \frac{\bar{l}_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}^{(k)}}$ i $S_{i,j} = q_{i,j} \cdot l_{i,j}$ dobivamo izraz

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}.$$

Jedna od prednosti ovog iteracijskog proširenja je to što za razliku od nelinearnih metoda, ovdje nije potrebno pretpostavljati početnu aproksimaciju rješenja, jer su sustavi jednadžbi linearni, pa se mogu rješavati direktnim postupcima te je sam postupak vrlo brz.

Uz to, mreža iz svakog koraka ove metode je u ravnoteži, što nije slučaj kod ostalih iteracijskih metoda kod koji je samo konačno rješenje uravnoteženo.

6. Rješavanje sustava nelinearnih jednažbi

„Kvaziplaceovim pravilom“ i metodom „gustoće sila“ postizemo da nelinearan sustav jednažbi ravnoteže postane linearan, dok kod poopćenog pravila „geodetske mreže“ i „kombiniranog pravila“ sustav jednažbi ravnoteže ostaje nelinearan. Poblize ćemo objasniti Newton-Raphsonovu metodu rješavanja sustava nelinearnih jednažbi.

Newton-Raphsonova metoda je najpoznatija metoda za rješavanje sustava nelinearnih jednažbi. Ako početnu aproksimaciju izaberemo dovoljno blizu rješenja, onda metoda vrlo brzo konvergira prema rješenju sustava jednažbi.

Nažalost, nema garancije da će Newton-Raphsonova metoda uvijek konvergirati, ali ako smo u stanju početnu aproksimaciju rješenja dobro procijeniti, ova metoda će nas vrlo brzo dovesti do pravog rješenja.

Tražimo x za koji je $f(x) = 0$. Ako možemo izračunati vrijednosti funkcije i vrijednosti derivacije funkcije f i ako znamo neki $x^{(k)}$ koji je blizu traženog korijena, možemo nelinearnu funkciju f u okolini točke $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ zamijeniti pravcem najsličnijim toj funkciji – tangentom.

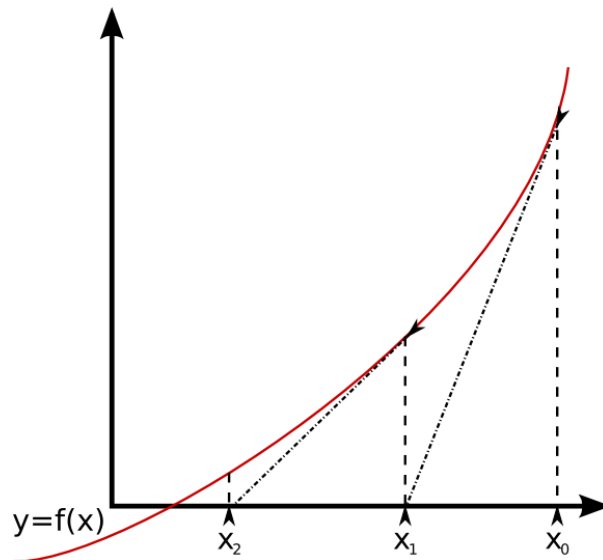
Jednažba tangente je linearna aproksimacija funkcije f u točki $x^{(k)}$:

$$\bar{f}^{(k)}(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}).$$

Zatim tražimo mjesto gdje ta tangenta siječe os x , odnosno nul-točku funkcije $\bar{f}^{(k)}$, na način:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

Ponavljamo postupak više puta dok ne zadovoljimo odabranu točnost.



Sada promatramo sustav nelinearnih jednažbi :

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i=1, \dots, n,$$

odnosno $f(x) = 0$, gdje je $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Najprije izaberemo početnu aproksimaciju $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T$ i svaku od funkcija f_i razvijemo u Taylerov red u okolini $x^{(0)}$, te linearnu aproksimaciju označimo s \tilde{f}_i :

$$\tilde{f}_i(x) = \tilde{f}_i(x^{(0)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^{(0)})}{\partial x_j} \cdot (x_j - x_j^{(0)}), \quad i=1, \dots, n$$

Sada umjesto sustava $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i=1, \dots, n$ rješavamo sustav $\tilde{f}_i(x) = 0, \quad i=1, \dots, n$

što možemo zapisati u matričnom obliku :

$$J^{(0)} \cdot s^{(0)} = -f(x^{(0)}),$$

odnosno :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Nova aproksimacija rješenja tada je :

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s^{(0)}$$

Općenito, dobivamo iterativni postupak :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}, \quad k=0,1,\dots$$

gdje je vektor smjera kretanja $s^{(k)}$ rješenje sustava.

$$\text{Sustav } \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(x^{(0)}) \end{bmatrix} \text{ možemo rješavati iterativno,}$$

koristeći se samo dijagonalnim elementima matrice J. Takva metoda rješavanja poznata je kao Newton-Gauss-Seidelova metoda rješavanja sustava nelinearnih jednačbi :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{f_i(x_i^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, x_n^{(k)})}{\partial_{x_i} f_i(x_i^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, x_n^{(k)})}$$

gdje je

$$\partial_{x_i} f_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} .$$

7. Primjer

Postupci nalaženja oblika provedeni su u simboličkom programskom paketu Sage. Tražimo stalni oblik mreže kabela koji se nalazi u ravnoteži. Mreža se sastoji od 38 [0-37] kabela i 145 [0-144] čvorova. U mreži imamo 4 rubna kabela [30,33,35,36], dok su svi ostali kabela unutarnji. Konstrukcija ima 8 ležajnih čvorova, a to su [0,4,8,68,76,136,140,144]. Koordinate slobodnih čvorova nećemo pretpostavljati, nego ćemo liste koordinata tih čvorova ostaviti prazne.

Čvorovi :

```
nds[0] = [0., 0., 0.]
```

```
nds[4] = [4., 0., 6.]
```

```
nds[8] = [8., 0., 0.]
```

```
nds[68] = [0., 4., 4.]
```

```
nds[76] = [8., 4., 2.]
```

```
nds[136] = [0., 8., 0.]
```

```
nds[140] = [4., 8., 8.]
```

```
nds[144] = [8., 8., 0.]
```

Ležajevi :

```
supps = support_indices (nds)
```

```
supps
```

```
[0, 4, 8, 68, 76, 136, 140, 144]
```

Kabeli :

```
cbcls = [cable (119, 3, 9)]
```

```
cbcls.append (cable (102, 5, 9))
```

```
cbcls.append (cable (85, 7, 9))
```

```
cbcls.append (cable (68, 9, 9))
```

```
cbcls.append (cable (51, 11, 9))
```

```
cbcls.append (cable (34, 13, 9))
```

```
cbcls.append (cable (17, 15, 9))
```

```
cbcls.append (cable (0, 17, 9))
```

```
cbcls.append (cable (1, 15, 9))
```

Konstrukcije od užadi

```
cbls.append (cable (2, 13, 9))
cbls.append (cable (3, 11, 9))
cbls.append (cable (4, 9, 9))
cbls.append (cable (5, 7, 9))
cbls.append (cable (6, 5, 9))
cbls.append (cable (7, 3, 9))
cbls.append (cable (1, 3, 8))
cbls.append (cable (2, 5, 8))
cbls.append (cable (3, 7, 8))
cbls.append (cable (4, 9, 8))
cbls.append (cable (5, 11, 8))
cbls.append (cable (6, 13, 8))
cbls.append (cable (7, 15, 8))
cbls.append (cable (8, 17, 8))
cbls.append (cable (25, 15, 8))
cbls.append (cable (42, 13, 8))
cbls.append (cable (59, 11, 8))
cbls.append (cable (76, 9, 8))
cbls.append (cable (93, 7, 8))
cbls.append (cable (110, 5, 8))
cbls.append (cable (127, 3, 8))
cbls.append (cable (0, 9, 1))
cbls.append (cable (136, 9, 1))
cbls.append (cable (0, 9, 17))
cbls.append (cable (8, 9, 17))
# rubni kabeli:
cbls.append (cable (0, 9, 1))
cbls.append (cable (136, 9, 1))
cbls.append (cable (0, 9, 17))
cbls.append (cable (8, 9, 17))
```

Konstrukcije od užiadi

- 0 : [119, 128, 137]
- 1 : [102, 111, 120, 129, 138]
- 2 : [85, 94, 103, 112, 121, 130, 139]
- 3 : [68, 77, 86, 95, 104, 113, 122, 131, 140]
- 4 : [51, 60, 69, 78, 87, 96, 105, 114, 123, 132, 141]
- 5 : [34, 43, 52, 61, 70, 79, 88, 97, 106, 115, 124, 133, 142]
- 6 : [17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80, 89, 98, 107, 116, 125, 134, 143]
- 7 : [0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144]
- 8 : [1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100, 109, 118, 127]
- 9 : [2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92, 101, 110]
- 10 : [3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93]
- 11 : [4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76]
- 12 : [5, 14, 23, 32, 41, 50, 59]
- 13 : [6, 15, 24, 33, 42]
- 14 : [7, 16, 25]
- 15 : [1, 9, 17]
- 16 : [2, 10, 18, 26, 34]
- 17 : [3, 11, 19, 27, 35, 43, 51]
- 18 : [4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60, 68]
- 19 : [5, 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85]
- 20 : [6, 14, 22, 30, 38, 46, 54, 62, 70, 78, 86, 94, 102]
- 21 : [7, 15, 23, 31, 39, 47, 55, 63, 71, 79, 87, 95, 103, 111, 119]
- 22 : [8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120, 128, 136]
- 23 : [25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 81, 89, 97, 105, 113, 121, 129, 137]
- 24 : [42, 50, 58, 66, 74, 82, 90, 98, 106, 114, 122, 130, 138]
- 25 : [59, 67, 75, 83, 91, 99, 107, 115, 123, 131, 139]
- 26 : [76, 84, 92, 100, 108, 116, 124, 132, 140]
- 27 : [93, 101, 109, 117, 125, 133, 141]
- 28 : [110, 118, 126, 134, 142]
- 29 : [127, 135, 143]
- 30 : [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
- 31 : [136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144]
- 32 : [0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136]
- 33 : [8, 25, 42, 59, 76, 93, 110, 127, 144]
- 34 : [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]
- 35 : [136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144]
- 36 : [0, 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136]
- 37 : [8, 25, 42, 59, 76, 93, 110, 127, 144]

Konstrukcije od užadi

Elementi (štapovi) :

```
els = make_elements_on_cables (cbls)
```

Štapovi na kabelima :

```
tcei = table_of_cable_element_incidences (cbls)
```

```
print_indexed (tcei)
```

```
0 : [0, 1]
1 : [2, 3, 4, 5]
2 : [6, 7, 8, 9, 10, 11]
3 : [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]
4 : [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]
5 : [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]
6 : [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]
7 : [56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70,
71]
8 : [72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85]
9 : [86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97]
10 : [98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107]
Itd.
```

Rubni i unutarnji kabeli :

```
bnd_cbls = [30, 33, 35, 36]
```

```
int_cbls = others (bnd_cbls, all_of (cbls))
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24,
25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 34, 37]
[30, 33, 35, 36]
```

Štapovi na rubnim kabelima :

```
beis = select_elements_on_cables (bnd_cbls, tcei)
```

```
[256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287,
296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311]
```


Konstrukcije od užiadi

Gustoće sila :

Na rubnim kabelima [10] , na unutarnjim kabelima [1]

```
cbl_qs = value_list (len (cbls), 1)
```

```
qs = map_cable_values_to_elements (cbl_qs, tcei)
```

```
cbl_qs = set_value (10, bnd_cbls, cbl_qs)
```

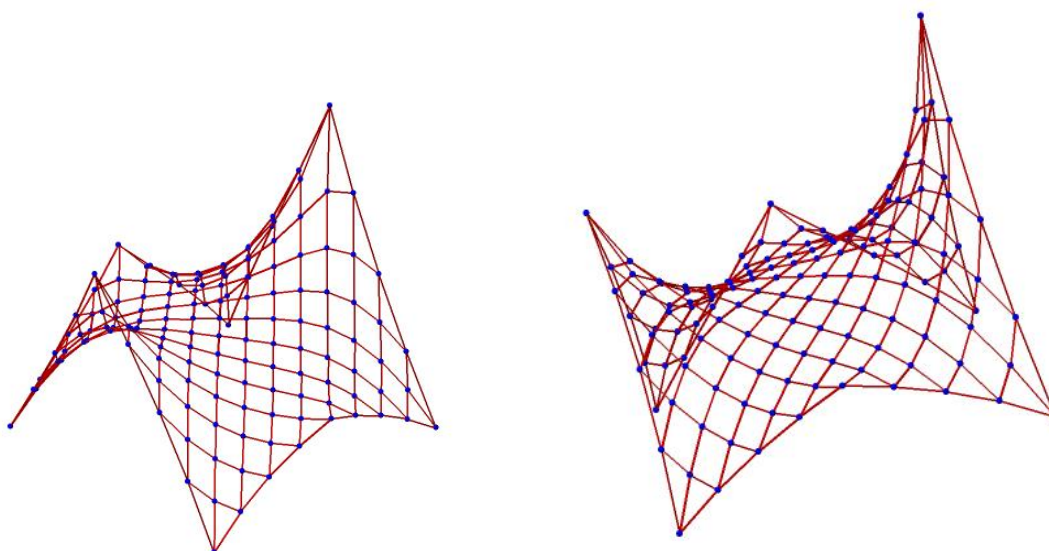
```
qs = map_cable_values_to_elements (cbl_qs, tcei)
```

```
0 :1, 1:1 , 2:1 ,3:1 ,4:1 ,5:1 ,6:1 ,7:1 ,8:1 ,9:1 ,10:1 ,11:1, 12:1  
,13:1 ,14:1 ,15:1 ,16:1 ,17:1 ,18:1 ,19:1 ,20:1 ,21:1 ,22:1 ,23:1  
,24:1 ,25:1 ,26:1 ,27:1 ,28:1 ,29:1 ,30:10 ,31:1 ,32:1 ,33:10 ,34:1  
,35:10 ,36:10 ,37:1
```

Proračun metodom gustoće sila :

```
nc = FDM (nds, els, supps, qs)
```

```
plt0 = plot3d_mesh (list (nc), els)
```



Konstrukcije od užadi

Duljina štapova i sile u štapovima :

```
ll = list_of_element_lengths (els, nc)
```

```
ff = list_of_element_forces (ll, qs)
```

```
cbl_fs = value_list (len (cbls), 1)
```

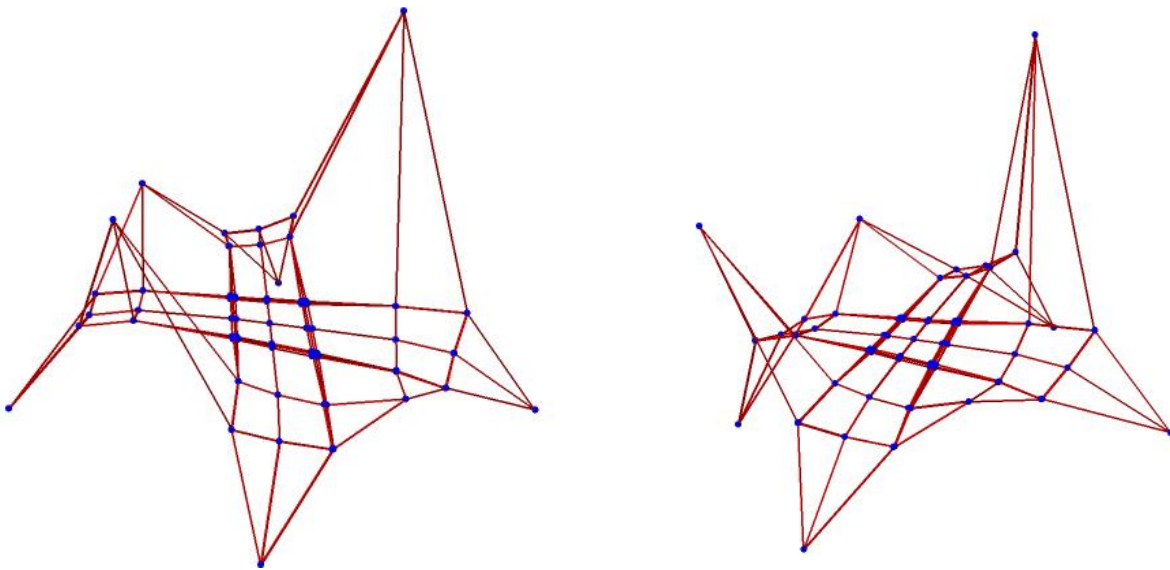
```
cbl_fs = set_value (10, bnd_cbls, cbl_fs)
```

```
fs = map_cable_values_to_elements (cbl_fs, tcei)
```

```
nc1, f1 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, tol_f = 1.e-4)
```

WARNING: maximal number of steps (250) reached!
maximal force error: 0.344513264392

```
plot3d_mesh (list (nc1), els)
```

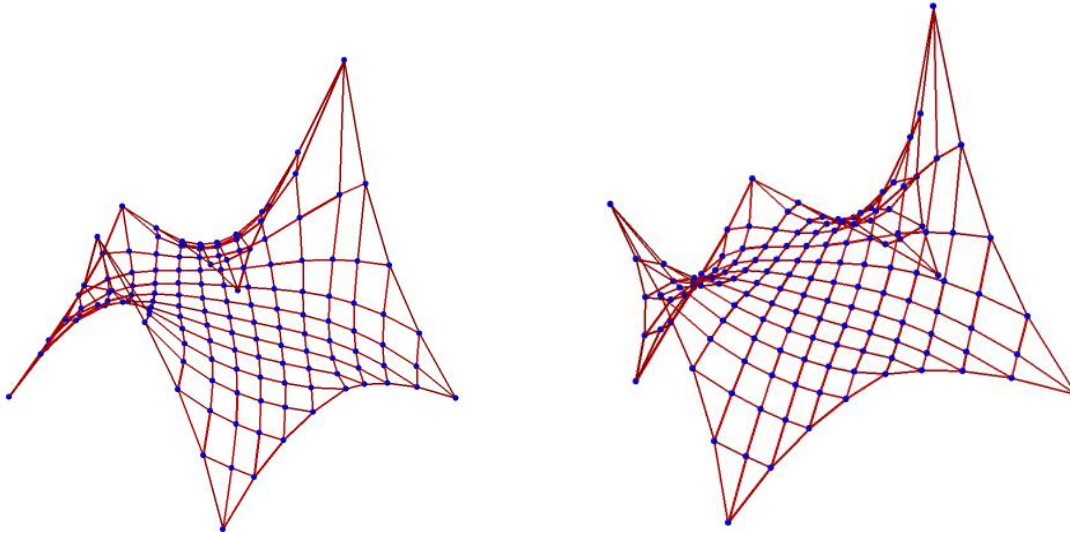


Budući da su zadane sile u svim kabelima, dolazimo do zaključka da ravnotežno stanje ne postoji zbog toga što su unutarnji kabeli otklizali prema rubnim kabelima. Kako bi smo došli do ravnotežnog stanja moramo zadati duljine rubnih kabela koje ćemo kako proračun i pokazuje uzeti nakon tri koraka iteracije. Na sljedećim slikama vidjet ćemo mreže prije i nakon rotacije.

Konstrukcije od užadi

```
nc1, f1, qs1 = multistepFDM (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, steps = 3)
```

```
plt1 = plot3d_mesh (list (nc1), els)
```



```
l1 = list_of_element_lengths (els, nc1)
```

```
bels = get_values (beis, l1)
```

```
length_constraints = element_constraints (beis, bels)
```

```
force_constraints1 = remove_element_constraints (beis, force_constraints)
```

```
nc2, f2 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints1, lcs = length_constraints,  
tol_f = 1.e-4, tol_l = 1.e-3, steps = 1000)
```

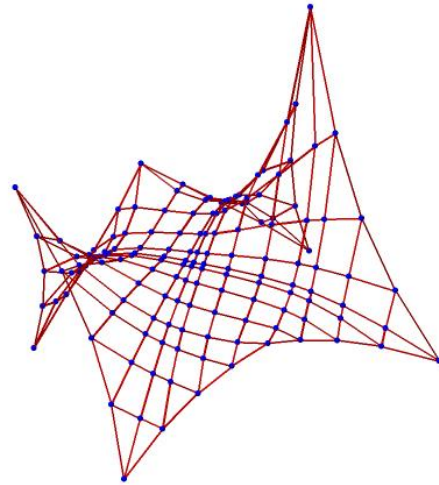
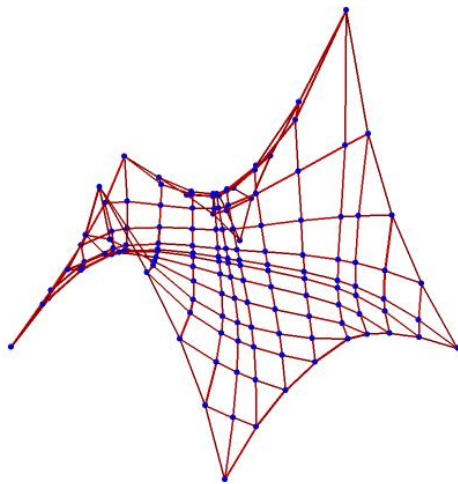
steps: 927

maximal force error: 9.97101818384e-05

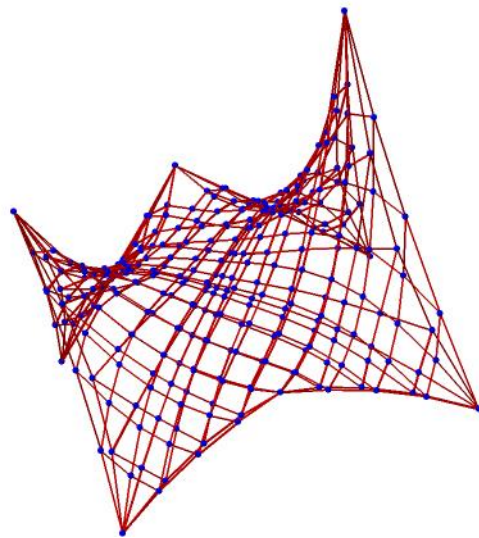
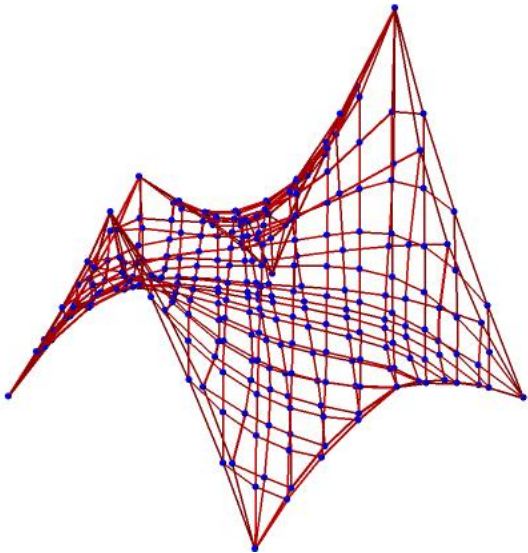
maximal length error: 4.37269439324e-07

Konstrukcije od užadi

```
plt2 = plot3d_mesh (list (nc2), els)
```

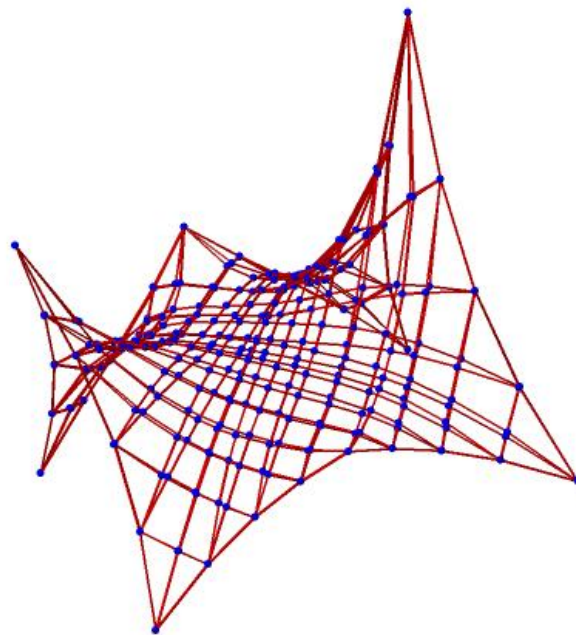
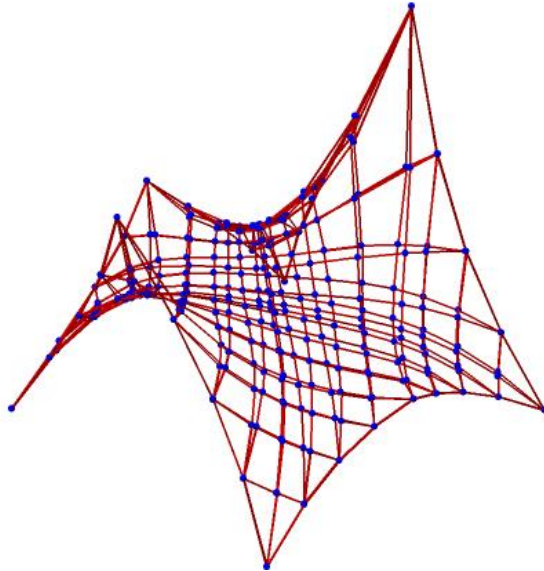


plt0 + plt2



Konstrukcije od užadi

plt1 + plt2



8. Zaključak

Budući da se konstrukcije od užadi bitno razlikuju od tradicionalnih konstrukcija, trebale su se pronaći i nove metode kojima bi se omogućilo njihovo projektiranje, a samim time funkcionalnost i stabilnost. Unatoč davnoj primjeni, intenzivan razvoj konstrukcija od užadi je započeo posljednjih godina razvojem informatičke tehnologije, novim spoznajama u području teorije konstrukcija, te proizvodnji novih sintetičkih materijala izvrsnih mehaničkih i drugih svojstava. Svakodnevno se razvijaju novi materijali, boljih karakteristika i veće otpornosti pomoću kojih su vlačne konstrukcije razvijene u prava arhitektonska i projektantska djela. Specifičnost, koja je proučena u ovom radu, leži u činjenici da se oblik ne može nametnuti, već se mora pronaći kao međuzavisnost raznih parametara. Proces form finding-a, te statičke i dinamičke analize danas je gotovo nezamisliv bez primjene računala, koje omogućuje veće brzine i bolju preciznost, uz uvažavanje svih parametara, vodeći ka optimalnom obliku.

U sve više slučajeva ove konstrukcije su bolja i efikasnija rješenja od uobičajnih konstrukcija i tehnika građenja. Sa sve boljim poznavanjem ponašanja vlačnih konstrukcija i smanjenjem cijene materijala (tkanina i kabel), povećat će se broj izvedenih konstrukcija, a na taj način i smanjiti troškovi izvođenja.

U ovom radu detaljnije je prikazana iteracijska primjena metode gustoća sila u kojoj se gustoće sila u nekom koraku računaju pomoću zadanih uvjeta i rezultata dobivenih iz prethodnog koraka. Kako bi se spriječilo klizanje u rubnim kabelima ova proširena metoda omogućava zadavanje kinematičkih ograničenja kojima osiguravamo zahtijevane duljine odabranih štapova. Mijenjajući geometriju mreže, pridržanja i vrijednosti sila u pojedinim kabelima dobili smo različite oblike ravnotežnog stanja mreže.

9. Izvor slika

Slika 1. Freii Otto : Njemački paviljon na izložbi Expo u Montrealu, 1967. , www.arhitekti.hr

Slika 2. Freii Otto : Krovšte Olimpijskog kompleksa u Münchenu, 1972. , www.gradnja.rs

Slika 3. Hajj terminal, Internacionalni aerodrom u Jedahhu , www.jrarchitects.co.uk

Slika 4. Hajj terminal, perspektivni prikaz , www.jrarchitects.co.uk

Slika 5. Stadion King Fahd, Riyadh, *Magistarski rad „Primjena metode gustoće sila“ –P. Gidak*

Slika 6. Milenijska arena O2, London, *Magistarski rad „Primjena metode gustoće sila“ –P. Gidak*

Slika 7. Čelično uže , www.abarelto.hr

Slika 8. Spiralni snopovi, www.webgradnja.hr

Slika 9. Žičana užad, <https://m.cqd.cz>

Slika 10. Toranj nuklearnog reaktora (rotacijski hiperboloid) , www.izvorienergije.com

Slika 11. Regularna mreža od užadi, *Završni rad „Nalaženje oblika konstrukcija od užadi“ –J. Jolić*

Slika 12. Primjeri neregularnih mreža, *Završni rad „Nalaženje oblika konstrukcija od užadi“ –J. Jolić*

Slika 13. Toranj Killesberg, Stuttgart, www.pinterest.com

Slika 14. Fizikalni model od tkanine, *Završni rad „Konstrukcije od užadi“ – I. Grgić*

Slika 15. Fizikalni model od žica i spajalica, *Završni rad „Konstrukcije od užadi“ – I. Grgić*

Slika 16. Fizikalni model od sapunice, www.hrcak.srce.hr , *Familija ploha Heltocat- I.Kodrnja,E.Šamec*

Slika 17. Čvor i sa susjednim čvorovima i priključenim štapovima, *Građevna statika 2., Predavanja – Krešimir Fresl*

Slika 18. Primjeri minimalnih mreža, *Građevna statika 2., Predavanja – Krešimir Fresl*

Slika 19. Mimoilaženje užadi , *Završni rad „Proširena metoda gustoće sila“ –R. Vrančić*

10. Literatura

- K. Fresl: Građevna statika 2. , *Predavnja* , Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet
- P. Gidak, R.Vrančić: *Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost* str. 145-187
- K. Gabrić: „*Konstrukcije od užadi*“ , Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014., završni rad
- S. Šajn: „*Prednapete konstrukcije od užadi*“ , Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2013., završni rad
- R. Vrančić: „*Iteracijska primjena metode gustoća sila u oblikovanju konstrukcija od užadi*“ , Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014, rad nagrađen Nagradom Rektora Sveučilišta u Zagrebu
- P. Gidak: „*Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža*“ , Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011., magistarski rad
- E. Šamec, K.Fresl, M.Baniček: „*Povećanje učinkovitosti iteracijske primjene metode gustoće sila*“ , Građevinar,69 (2017) 12, str. 1075-1084
- J. Jolić: „*Nalaženje oblika konstrukcija od užadi*“ , Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu,2012., završni rad
- I.Kodrnja, E.Šamec: *Familija ploha Heltocat* , Hrčak - portal znanstvenih časopisa RH
- K. Fresl, P. Gidak, R. Vrančić: *Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi*, Građevinar 65(2013)8, str. 707-720
- Leksikografski zavod Miroslav Krleža , enciklopedija.hr
- J. Dvornik and D. Lazarević, „*Prednapete gipke konstrukcije od platna i užadi,*“ Građevinar 47(1995.), str. 185-199