

Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet

Andrej Sečkar

**METODA JEDINIČNE SILE**  
(ZAVRŠNI RAD)

Zagreb, 2010.

# Sadržaj

1. Uvod.....	3
2. Iskaz teorema o virtualnim silama .....	4
2.1. Pojam rada .....	4
2.2. Zakon održanja energije .....	7
2.3. Bernoulli-Eulerova teorija savijanja .....	8
2.3.1. Odnos pomaka i deformacija za Bernoulli-Eulerovu gredu .....	9
2.3.2. Geometrijski/kinematički rubni uvjeti za Bernoulli-Eulerovu gredu .....	10
2.4. Teorem o virtualnim silama.....	11
3. Metoda jedinične sile .....	13
3.1. Pomaci uzrokovani vanjskim silama .....	13
3.2. Pomaci uzrokovani temperaturom.....	15
4. Postupci izračunavanja integrala.....	17
4.1. Trapezno pravilo.....	18
4.2. Simpsonovo pravilo .....	19
4.3. Gaussova kvadratura.....	22
4.4. Vereščaginov teorem .....	26
4.4.1. Dokaz Vereščaginova teorema .....	27
4.5. Primjeri numeričkih integracija .....	28
4.5.1. Koncentrirani moment .....	28
4.5.2. Koncentrirana sila .....	32
4.5.3. Jednoliko distribuirano opterećenje .....	34
4.5.4. Trokutasto distribuirano opterećenje .....	37
5. Primjena metode jedinične sile u metodi sila.....	41
5.1. Metoda sila .....	41
6. Primjer .....	44
7. Zaključak.....	67
8. Literatura .....	68

## 1. Uvod

Cilj rada je proučiti metodu jedinične sile i pokazati gdje se ona i kako najčešće primjenjuje. Također će biti prikazani i objašnjeni neki postupci numeričkih integracija, potrebni za rješavanje problema metodom jedinične sile.

Metoda jedinične sile najčešću primjenu ima kod izračunavanja pomaka proizvoljnih točaka po proizvoljnom pravcu statički određene konstrukcije, ali je također i osnova za rješavanje statički neodređenih sustava metodom sila, gdje nije moguće samo iz uvjeta ravnoteže odrediti sile u vanjskim vezama i unutarnje sile, jer je broj jednažbi ravnoteže manji od broja nepoznatih veličina potrebnih za izračunavanje unutarnjih sila.

## 2. Iskaz teorema o virtualnim silama

U ovom dijelu bit će objašnjen pojam rada i teorija savijanja Bernoulli-Eulerove grede na kojima će dalje biti prikazani teorem o virtualnim silama na kojem se temelji metoda jedinične sile i metoda sila.

### 2.1. Pojam rada

Da bismo mogli iskazati teorem o virtualnim silama, prvo je potrebno definirati pojam rada. Za silu koja djeluje na nekom putu kažemo da vrši rad. Prema tome, rad je ovisan o iznosu komponente sile na pravcu puta i o prijeđenom putu.

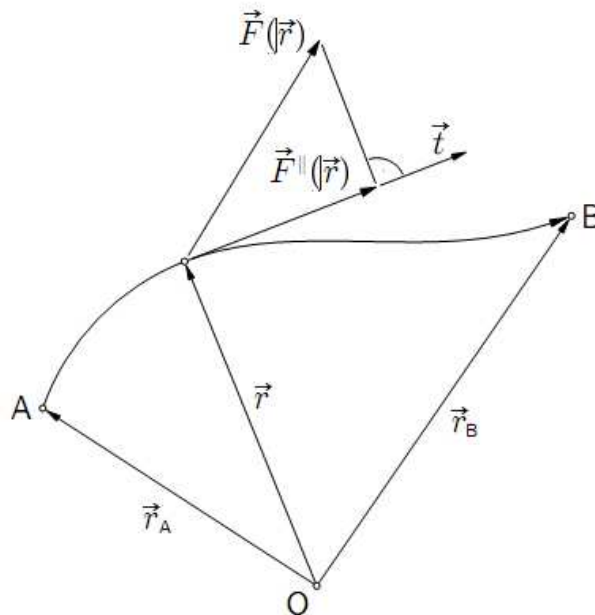
Sila duž puta može mijenjati i vrijednost i pravac djelovanja, pa je prikazujemo vektorskom funkcijom položaja

$$\vec{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}^3,$$

$$\vec{F} : (x, y, z) \rightarrow \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\vec{i} + F_y(x, y, z)\vec{j} + F_z(x, y, z)\vec{k};$$

poistovjetimo li točku  $(x, y, z)$  s njezinim radijvektorom  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , možemo kraće napisati :

$$\vec{F} : \vec{r} \rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\vec{i} + F_y(\vec{r})\vec{j} + F_z(\vec{r})\vec{k}.$$



Slika 2.1.

Rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\widehat{AB}$ , od točke A do točke B, po definiciji je skalarna veličina čija je vrijednost jednaka vrijednosti krivuljnog integrala

$$\mathfrak{W}_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} [F_x(\vec{r})dx + F_y(\vec{r})dy + F_z(\vec{r})dz].$$

U nekoj točki  $\vec{r}$  puta  $\widehat{AB}$ , rad vrši samo komponenta  $\vec{F}^{\parallel}(\vec{r})$  sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na pravcu puta (slika 2.1.). U najjednostavnijem slučaju, kada je put pravac, a sila konstantna po iznosu i po pravcu djelovanja, rad je jednak umnošku vrijednosti sile i duljine prevaljena puta. Infinitesimalni rad, koji će konstantna sila, jednaka sili  $\vec{F}(\vec{r})$ , izvršiti pri neizmjereno malom pomaku  $d\vec{r}$  po tangenti na krivulju puta, bit će:

$$\overline{d\mathfrak{W}}(\vec{r}, d\vec{r}) = \|\vec{F}^{\parallel}(\vec{r})\| \|d\vec{r}\|.$$

Komponenta  $\vec{F}^{\parallel}(\vec{r})$  jednaka je ortogonalnoj projekciji sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na pravac puta, a vrijednost te projekcije jednaka je skalarnom produktu vektora sile i jediničnog vektora  $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|}$  tangente na krivulju  $\widehat{AB}$  u točki  $\vec{r}$ . Prema tome,

$$\overline{d\mathfrak{W}}(\vec{r}, d\vec{r}) = \left[ \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} \right] \|d\vec{r}\| = [\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}] \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

a rad na putu  $\widehat{AB}$  dobivamo integriranjem takvih infinitesimalnih radova po cijelom tom putu:

$$\mathfrak{W}_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \overline{d\mathfrak{W}}(\vec{r}, d\vec{r}).$$

Kako bi se izbjeglo računanje krivuljnog integrala, put na kojem sila djeluje može se opisati parametarski zadanim lukom krivulje. U kartezijevom koordinatnom sustavu funkcije

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

određuju gibanje točke, pa je time određen i put, koji u vektorskom zapisu glasi:

$$\vec{r} : s \rightarrow \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}, \quad s \in [s_A, s_B].$$

Vektori  $\vec{r}(s_A) = \vec{r}_A$  i  $\vec{r}(s_B) = \vec{r}_B$  određuju početnu i krajnju točku puta, A i B. Smisao u kome točka  $\vec{r}(s)$  prolazi lukom kada  $s$  raste od vrijednosti  $s_A$  do  $s_B$  određuje pozitivnu orijentaciju luka.

Vektor

$$\vec{r}'(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k},$$

čija orijentacija odgovara orijentaciji luka, određuje tangentu na krivulju u točki  $\vec{r}(s)$ , a jedinični vektor te tangente je

$$\vec{t}'(s) = \frac{\vec{r}'(s)}{\|\vec{r}'(s)\|}.$$

Za infinitezimalni rad sile  $\vec{F}(\vec{r})$  na putu  $d\vec{r}$  sada dobivamo

$$\begin{aligned} \overline{d\mathfrak{W}}(s, ds) &= \|\vec{F}(\vec{r}(s))\| \|d\vec{r}(s)\| = [\vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{t}(s)] [\|\vec{r}'(s)\| ds] \\ &= \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot [\|\vec{r}'(s)\| \vec{t}(s) ds] = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot [\vec{r}'(s) ds] \\ &= [\vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}'(s)] ds, \end{aligned}$$

pa rad sile  $\vec{F}$  na putu  $\widehat{AB}$  možemo izračunati pomoću integrala:

$$\mathfrak{W}_{\widehat{AB}} = \int_{s_A}^{s_B} [F_x(\vec{r}(s))x'(s) + F_y(\vec{r}(s))y'(s) + F_z(\vec{r}(s))z'(s)] ds.$$

Sile možemo podijeliti na konzervativne i disipativne. Disipativne sile su sile kod kojih energija pri vršenju rada izlazi iz promatranog sustava, što je najčešće uzrokovano trenjem između čestica i oslobađanjem toplinske energije.

Konzervativne sile su sile kod kojih pri vršenju rada energija ostaje u promatranom sistemu. Kod njih rad ne ovisi o putu koji je sila prešla između početne i krajnje točke, već samo o položaju tih točaka.

U matematičkoj analizi, krivuljni integral je neovisan o putu integracije ako i samo ako je njegov integrand potpuni diferencijal neke funkcije.

Neka je  $\vec{F}(\vec{r})$  sila, a  $U(x, y, z)$  neka skalarna funkcija. Da bi sila  $\vec{F}(\vec{r})$  bila konzervativna, mora vrijediti da je

$$\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \vec{F}(\vec{r}) \rightarrow F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Sila je konzervativna i ako je njeno polje bezvrtložno:

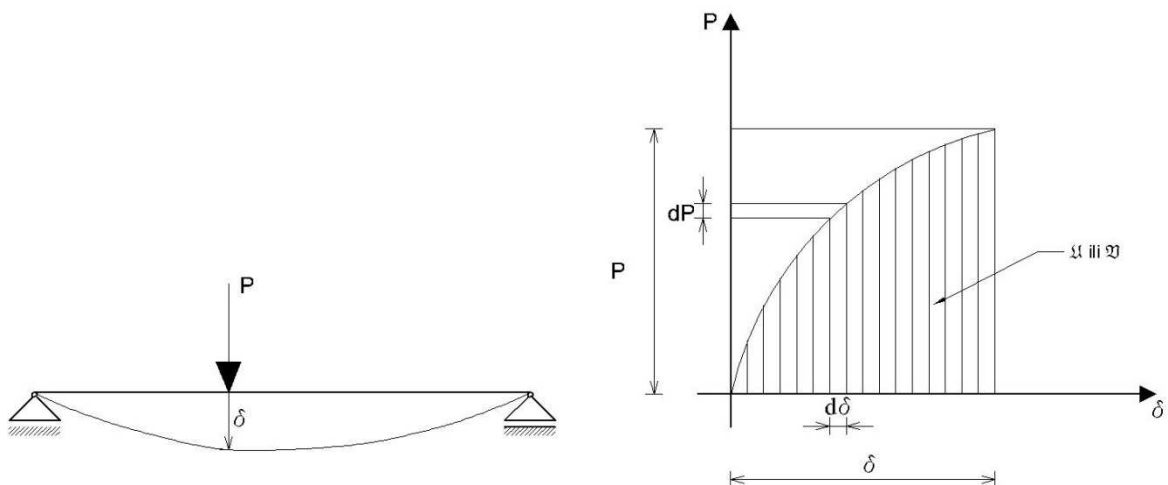
$$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x(\vec{r}) & F_y(\vec{r}) & F_z(\vec{r}) \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0},$$

a može se pokazati i da je sila konzervativna ako je njen rad na bilo kojoj zatvorenoj krivulji C jednak nuli:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

## 2.2. Zakon održanja energije

Pretpostavlja se da sile djeluju bez dinamičkih utjecaja. Prema tome, može se zanemariti promjena kinetičke energije, a promjena toplinske energije pri elastičnoj deformaciji tijela je zanemariva, pa možemo zaključiti da je pri statičkom opterećenju elastičnog tijela promjena potencijalne energije vanjskih sila jednaka prirastu potencijalne energije deformacije tijela.



Slika 2.2

Pri statičkom opterećenju elastičnog tijela, vanjske sile vrše pozitivan rad na pomacima točaka u kojima djeluju. Potencijalna energija deformacije  $U$  jednaka je radu vanjskih sila  $\mathcal{W}$ , tj.  $U = \mathcal{W}$ . Unutarnje sile koje vrše rad na deformacijama odupiru se pomacima tih točaka, tj.

nastoje spriječiti deformaciju tijela, pa je njihov rad negativan, a potencijalna energija deformacije  $U$  jednaka je negativnom radu unutarnjih sila  $\mathfrak{U}$ ,  $U = -\mathfrak{U}$ .

Pri rasterećenju elastičnog tijela, unutarnje sile vraćaju tijelo u prvobitan oblik i položaj na račun potencijalne energije deformacije, pa je sad njihov rad  $\mathfrak{U}$  pozitivan dok je rad vanjskih sila  $\mathfrak{V}$  negativan. Ako usvojimo pretpostavku da su sile konzervativne i da se energija ne gubi, rasterećenjem tijela se u potpunosti vraća rad obavljen pri opterećenju.

A usporedimo li izraze

$$U = \mathfrak{V}$$

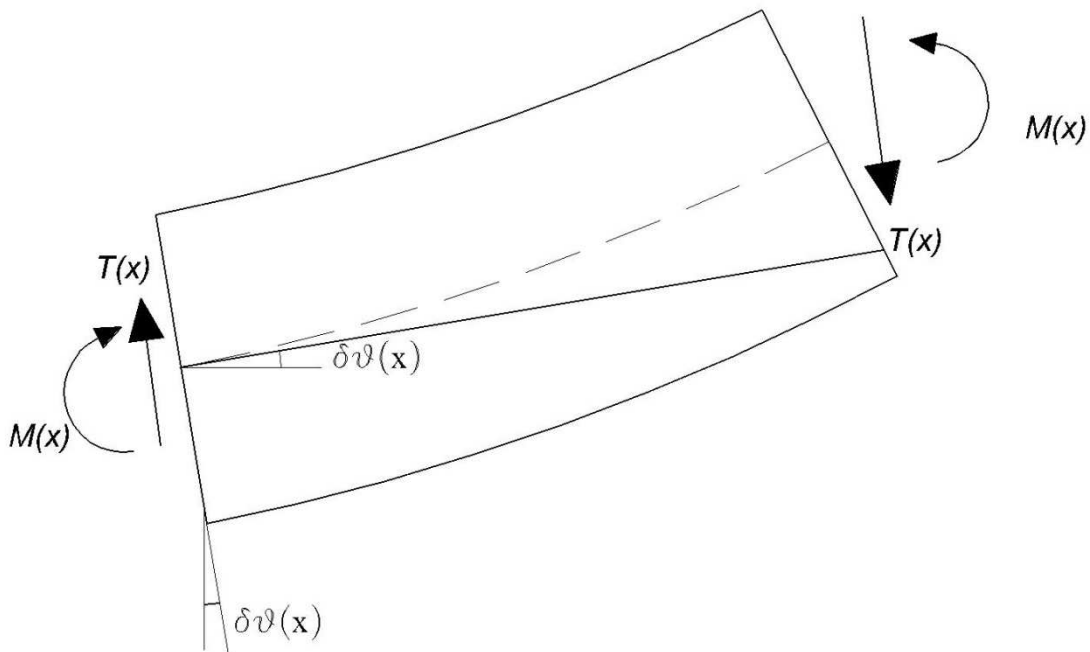
i

$$U = -\mathfrak{U}$$

zaključujemo da je  $\mathfrak{V} + \mathfrak{U} = 0$ , što je u biti zakon o održanju energije koji kaže da je pri opterećenju elastičnog tijela, rad vanjskih sila jednak negativnom radu unutarnjih sila.

### 2.3. Bernoulli-Eulerova teorija savijanja

Za Bernoulli-Eulerovu gredu vrijedi hipoteza ravnih poprečnih presjeka. Pretpostavlja se da pri savijanju elementa poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na savijenu os štapa, tako da su kutevi zaokreta ravnina poprečnih presjeka  $\partial\vartheta$  jednaki kutevima zaokreta tangenata na os  $x$   $\partial\varphi$ ,  $\partial\vartheta = \partial\varphi$ .

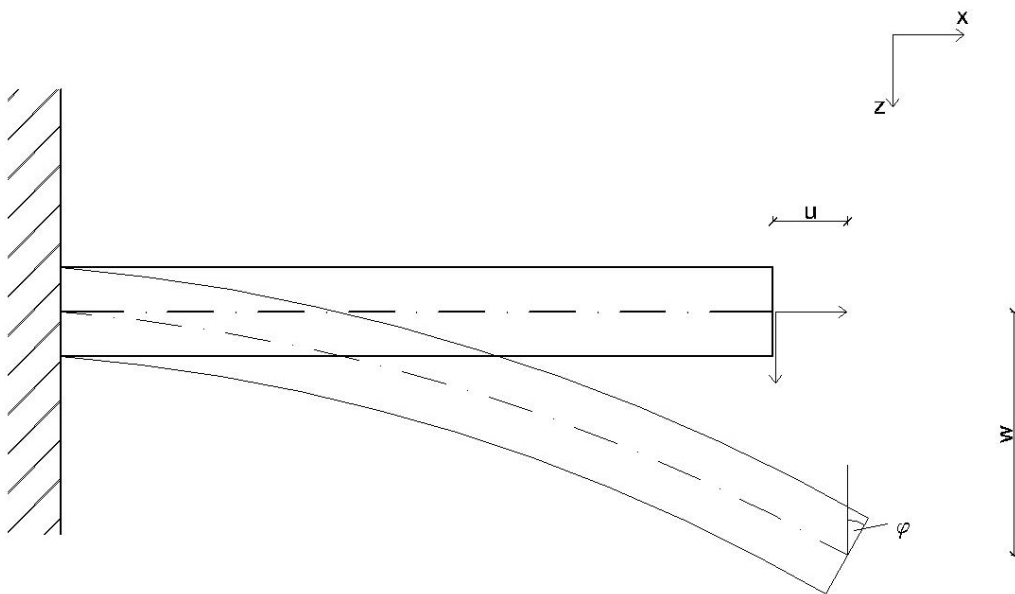


Slika 2.3



Za Bernoulli-Eulerovu gredu iz uvjeta  $\partial\vartheta = \partial\varphi$  neposredno slijedi da ne dolazi do klizanja ravnina poprečnih presjeka, tj. kut zbog klizanja ravnine poprečnih presjeka  $\partial\gamma = 0$ . Kako znamo da rad ovisi o duljini pređenog puta i komponenti sile koja djeluje na tom putu, možemo zaključiti da je unutarnji rad poprečnih sila jednak nuli.

### 2.3.1. Odnos pomaka i deformacija za Bernoulli-Eulerovu gredu



Slika 2.4

Vektor pomaka točke na elementu danom na slici 2.4 je  $\vec{u}(x) = u(x)\vec{i} + w(x)\vec{k}$ , pri čemu je  $u(x)$  funkcija pomaka u smjeru osi  $x$ , a  $w(x)$  funkcija pomaka u smjeru osi  $z$ , tj. progib.

Uzdužna deformacija elementa u smjeru osi  $x$  tada će biti

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = u'(x).$$

Iz geometrije prikazane na slici vidimo da vrijedi da je  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dw}{dx}$ , a kako su u području elastičnih deformacija progibi elemenata obično jako mali u odnosu na raspon, s dovoljnom točnošću možemo tvrditi da vrijedi  $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$ .

Tako sa dovoljno velikom točnošću dobivamo da je kut zaokreta ravnine poprečnog presjeka  $\varphi(x)$  jednak derivaciji progiba po varijabli  $x$

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx}.$$

Sad, iz matematike znamo da je zakrivljenost krivulje  $\kappa$  određena izrazom

$$\kappa = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

a ako se ograničimo na progibe koji su mnogo manji od raspona, tada je  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$ , te ga u gornjem izazu možemo zanemariti. Uzevši u obzir orijentaciju kuta, izraz za zakrivljenost elementa će glasiti

$$\kappa(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -w''(x).$$

### 2.3.2. Geometrijski/kinematički rubni uvjeti za Bernoulli-Eulerovu gredu

Da bi tijelo u ravnini bilo nepomično, potrebno je zadovoljiti barem tri uvjeta. Od ta tri uvjeta barem jedan mora biti za uzdužni smjer

$$u(0) = \bar{u}(0)$$

ili

$$u(l) = \bar{u}(l).$$

Drugim riječima, u barem jednoj točki grede mora biti spriječena translacija u smjeru osi  $x$ .

U poprečnom smjeru potrebna su još dva uvjeta

$$\begin{array}{ll}
 w(0) = \bar{w}(0) & w'(0) = -\bar{\varphi}_0 \\
 \text{ili} & \text{ili} \\
 w(l) = \bar{w}(l), & w'(l) = -\bar{\varphi}_l.
 \end{array}$$

Od ta dva uvjeta nužno je da barem u jednoj točki grede bude spriječena translacija u smjeru osi  $z$ , a drugi uvjet može biti spriječena translacija u smjeru osi  $z$  u još jednoj točki ili spriječen zaokret u istoj ili nekoj drugoj točki.

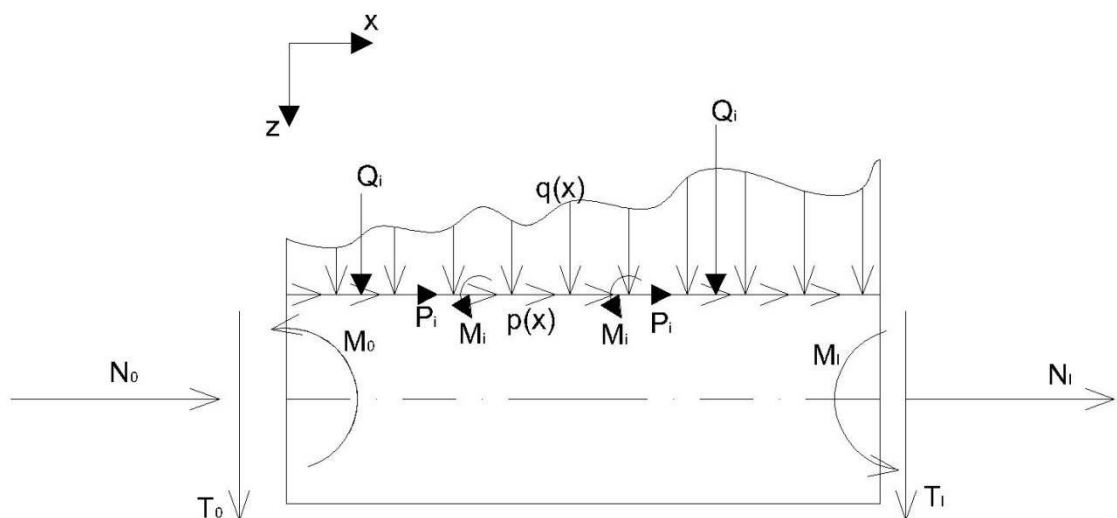
## 2.4. Teorem o virtualnim silama

Virtualne sile su bilo koji, pa i zamišljeni skup međusobno uravnoteženih vanjskih aktivnih i reaktivnih te unutarnjih sila.

Teorem o virtualnim silama glasi:

Ako polja pomaka i deformacija konstrukcije zadovoljavaju sve kinematičke odnose onda je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka jednak radu unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja.

I obratno, ako je rad po volji odabranih vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka jednak radu unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnih prirastima tih polja, polja pomaka i deformacija konstrukcije zadovoljavaju sve kinematičke odnose.



Slika 2.5

Za Bernoulli-Eulerovu gredu, jednakost radova virtualnih sila bit će

$$\begin{aligned} & \delta N_0 u(0) + \delta N_l u(l) + \delta T_0 w(0) + \delta T_l w(l) + \delta \bar{M}_0 \varphi(0) + \delta \bar{M}_l \varphi(l) + \\ & + \sum_i \delta P_i u(x_i) + \sum_i \delta Q_i w(x_i) + \sum_i \delta \bar{M}_i \varphi(x_i) + \\ & + \int_0^l [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx = \\ & = \int_0^l [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx. \end{aligned}$$

Lijeva strana jednakosti izražava rad vanjskih virtualnih sila na stvarnim poljima pomaka, dok desna strana jednakosti izražava rad unutarnjih virtualnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja.

Iz jednadžbe možemo vidjeti da je za Bernoulli-Eulerovu gredu rad unutarnjih virtualnih posmičnih sila zanemaren, što je u skladu s ranije navedenom pretpostavkom da posmične sile na Bernoulli-Eulerovoj gredi ne vrše rad.

### 3. Metoda jedinične sile

Koristeći princip virtualnih sila može se odrediti pomak bilo koje točke po proizvoljnom pravcu na statički određenom nosaču.

Za određivanje pomaka može se uzeti sila proizvoljnog intenziteta, jer o njoj ne ovisi veličina pomaka, ali radi jednostavnosti najčešće se odabire jedinična sila, pa otuda i ime metode.

#### 3.1. Pomaci uzrokovani vanjskim silama

Počnimo sa izrazom za jednakost virtualnih radova na Bernoulli-Eulerovoj gredi:

$$\begin{aligned} & \delta N_0 u(0) + \delta N_l u(l) + \delta T_0 w(0) + \delta T_l w(l) + \delta \bar{M}_0 \varphi(0) + \delta \bar{M}_l \varphi(l) + \\ & + \sum_i \delta P_i u(x_i) + \sum_i \delta Q_i w(x_i) + \sum_i \delta \bar{M}_i \varphi(x_i) + \\ & + \int_0^l [\delta p(x) u(x) + \delta q(x) w(x)] dx = \\ & = \int_0^l [\delta N(x) \varepsilon(x) + \delta M(x) \kappa(x)] dx. \end{aligned}$$

U gornjem izrazu ćemo zanemariti rad distribuiranih sila. U proizvoljnoj točki na gredi neka djeluje jedinična sila  $\delta F_1$ , a  $d^{\parallel}$  je projekcija pomaka hvatišta sile  $\delta F_1$  na pravac njezina djelovanja.

Uvedemo li još i oznake

$$\delta M(x) = m_1(x), \quad \delta N(x) = n_1(x),$$

bit će

$$\begin{aligned} & \delta N_0 \bar{u}(0) + \delta N_l \bar{u}(l) + \delta T_0 \bar{w}(0) + \delta T_l \bar{w}(l) + \delta \bar{M}_0 \bar{\varphi}(0) + \delta \bar{M}_l \bar{\varphi}(l) + \\ & + \delta F_1 d^{\parallel} = \\ & = \int_0^l [n_1(x) \varepsilon(x) + m_1(x) \kappa(x)] dx. \end{aligned}$$

Prebacimo li sad rad svih vanjskih sila osim rada jedinične sile na desnu stranu,

$$\begin{aligned} \delta F_1 d^{\parallel} = & \int_0^l [n_1(x) \varepsilon(x) + m_1(x) \kappa(x)] dx - \\ & - [\delta N_0 \bar{u}(0) + \delta N_l \bar{u}(l) + \delta T_0 \bar{w}(0) + \delta T_l \bar{w}(l) + \delta \bar{M}_0 \bar{\varphi}(0) + \delta \bar{M}_l \bar{\varphi}(l)], \end{aligned}$$

i uvrstimo iznos jedinične sile, dobivamo da je projekcija pomaka hvatišta sile  $\delta F_1$  na pravac njezina djelovanja

$$d^{\parallel} = \int_0^l [n_1(x) \varepsilon(x) + m_1(x) \kappa(x)] dx - \\ - [\delta N_0 \bar{u}(0) + \delta N_l \bar{u}(l) + \delta T_0 \bar{w}(0) + \delta T_l \bar{w}(l) + \delta \bar{M}_0 \bar{\varphi}(0) + \delta \bar{M}_l \bar{\varphi}(l)].$$

Ako dalje u tu jednadžbu uvrstimo odnose sila i deformacijskih veličina, koji glase

$$\varepsilon(x) = \frac{N(x)}{EA(x)} \quad \kappa(x) = \frac{M(x)}{EI(x)},$$

gornja će jednadžba glasiti

$$d^{\parallel} = \int_0^l \left[ n_1(x) \frac{N(x)}{EA(x)} + m_1(x) \frac{M(x)}{EI(x)} \right] dx - \\ - [\delta N_0 \bar{u}(0) + \delta N_l \bar{u}(l) + \delta T_0 \bar{w}(0) + \delta T_l \bar{w}(l) + \delta \bar{M}_0 \bar{\varphi}(0) + \delta \bar{M}_l \bar{\varphi}(l)].$$

Analogno tome, zadamo li u proizvoljnoj točki jedinični moment  $\delta \bar{M}_1 = 1$  dobit ćemo kut zaokreta te točke,  $\varphi$ .

$$\varphi = \int_0^l \left[ n_1(x) \frac{N(x)}{EA(x)} + m_1(x) \frac{M(x)}{EI(x)} \right] dx - \\ - [\delta N_0 \bar{u}(0) + \delta N_l \bar{u}(l) + \delta T_0 \bar{w}(0) + \delta T_l \bar{w}(l) + \delta \bar{M}_0 \bar{\varphi}(0) + \delta \bar{M}_l \bar{\varphi}(l)].$$



Slika 3.2

Promotrimo li izraz

$$[\delta N_0 \bar{u}(0) + \delta N_l \bar{u}(l) + \delta T_0 \bar{w}(0) + \delta T_l \bar{w}(l) + \delta \bar{M}_0 \bar{\varphi}(0) + \delta \bar{M}_l \bar{\varphi}(l)],$$

možemo vidjeti da je on uvijek jednak nuli. Ako su spriječeni pomaci kao što je to na kraju 0 konzole na slici 3.2, tada su  $\bar{u}(0)$ ,  $\bar{w}(0)$  i  $\bar{\varphi}(0)$  jednaki nuli, a na kraju  $l$  su sile  $\delta N_l$ ,  $\delta T_l$  i  $\delta \bar{M}_l$  jednake nuli. Analogno bi vrijedilo i da su u točki  $l$  spriječeni pomaci, a u točki 0 sile jednake nuli.

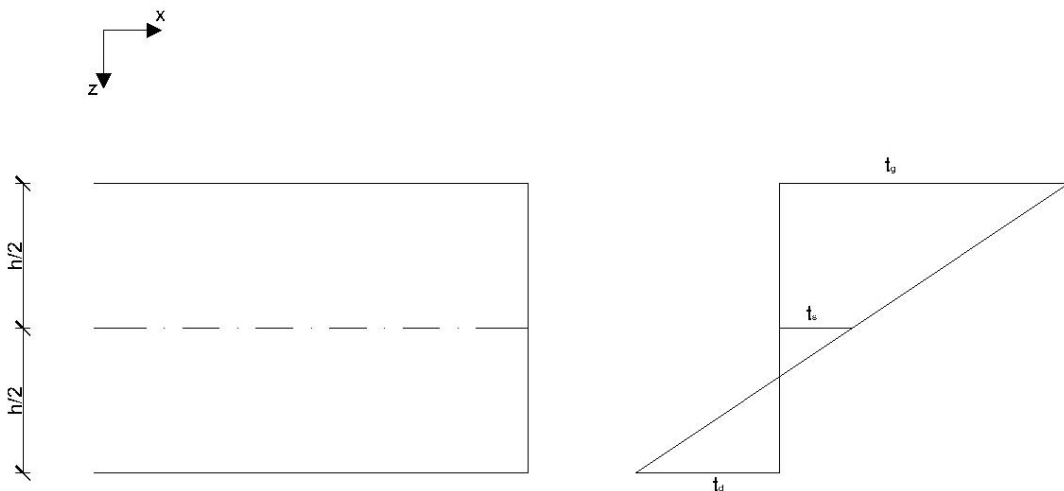
Ukratko, ideja je da u točki u kojoj želimo odrediti pomak, nanesimo jediničnu silu u smjeru u kojem tražimo pomak. Ako tražimo kut zaokreta poprečnog presjeka nanijet ćemo jedinični moment.

Želimo li pronaći relativni pomak dviju točaka na pravcu koji prolazi kroz te točke, u tim točkama nanijet ćemo dvije jedinične kolinearne sile suprotne orijentacije, a ako tražimo relativni kut zaokreta dvaju pravaca, nanijet ćemo dva jedinična momenta suprotnog smisla vrtnje.

Ako je izračunati pomak pozitivan, tada je stvarni pomak te točke orijentiran isto kao i jedinična sila, a ako je negativan tada je orijentiran suprotno.

### 3.2. Pomaci uzrokovani temperaturom

Pomaci na konstrukciji osim djelovanjem vanjskih sila mogu nastati i zbog utjecaja temperature.



Slika 3.3.

Pretpostavimo da je temperatura na gornjem dijelu elementa promijeni za  $t_g$ , temperatura na donjem dijelu elementa za  $t_d$ , gdje je  $t_g > t_d$ . Po visini elementa temperatura se mijenja po linearnom zakonu. Zbog povećanja (smanjenja) temperature dolazi do produljenja (skraćanja) elementa, a kako je  $t_g > t_d$  dolazi i do zakrivljenja elementa.

Produljenje elementa izazvano promjenom temperature bit će

$$\varepsilon(x) = \alpha_t t_s,$$

gdje je  $\alpha_t$  koeficijent linearnog toplinskog rastezanja materijala, a  $t_s = \frac{t_d + t_g}{2}$  srednja temperatura u polovištu visine poprečnog presjeka.

Zakrivljenost elementa uzrokovana nejednolikom raspodjelom temperature po visini poprečnog presjeka bit će

$$\kappa(x) = \alpha_t \frac{\Delta t}{h},$$

gdje je  $\Delta t = t_d - t_g$  razlika temperature, a  $h$  visina elementa.

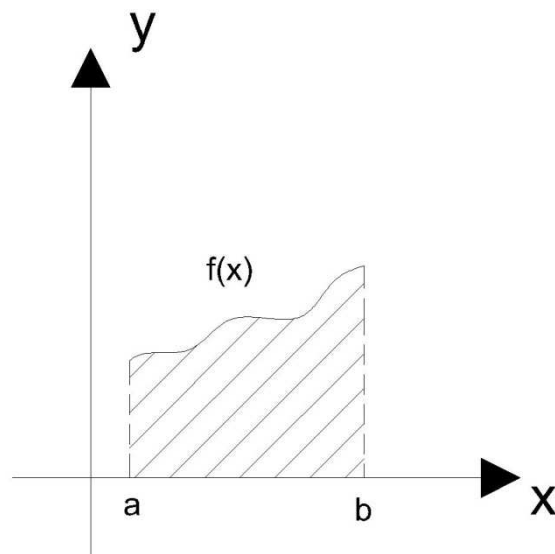
Uvrstimo li utjecaj temperature u izraz za izračunavanje pomaka točke, dobit ćemo

$$d^{\parallel} = \int_0^l n_1(x) \left[ \frac{N(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx + \int_0^l m_1(x) \left[ \frac{M(x)}{EI(x)} + \alpha \frac{\Delta t}{h} \right] dx.$$



## 4. Postupci izračunavanja integrala

Integral  $\int_a^b f(x)dx$  predstavlja površinu koju funkcija  $f(x)$  zatvara s koordinatnom osi  $x$  na intervalu od  $a$  do  $b$ . Prema tome, integral možemo približno izračunati tako da interval  $[a,b]$  podijelimo na više manjih odsječaka i zbrojimo površine ispod funkcije na svakom odsječku.



Slika 4.1

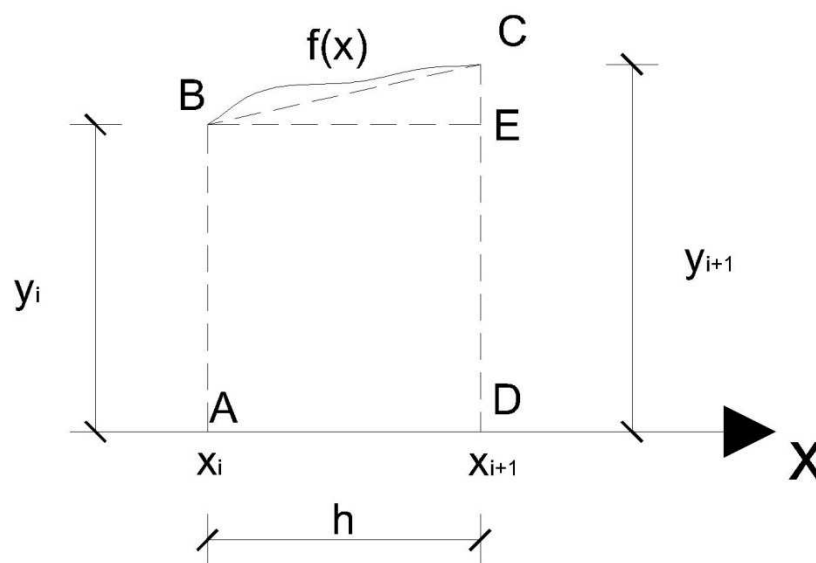
Po načinu na koji određujemo odsječke, postupke integriranja možemo svrstati u dvije grupe:

- Postupke kod kojih su intervali odabrani unaprijed. Pri tom se vodi računa o tome da se s njima lagano računa i najčešće su jednaki. Takve tehnike su primjere za „ručno“ računanje integrala. U ovu skupinu ubrajamo trapezno pravilo i Simpsonovo pravilo.
- Postupke kod kojih se prvo odredi broj intervala i zatim se za taj broj određuju intervali koji će dati najveću točnost. U ovu skupinu spada Gaussova kvadratura.

## 4.1. Trapezno pravilo

Želimo izračunati površinu iscrtkanog lika, tzv. „krivuljnog trapeza“ na slici 4.1.

Prvo interval  $[a, b]$  podijelimo na  $n$  jednakih odsječaka, svaki duljine  $h = \frac{b-a}{n}$ . Jedan takav odsječak prikazan je na slici 4.2. Površina ispod funkcije  $f(x)$  na tom odsječku dana je integralom  $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$ .



Slika 4.2

Ako je odsječak  $h$  dovoljno malen, tada tu površinu možemo aproksimirati površinom trapeza ABCD. Površina pravokutnika ABDE je  $y_i \cdot h$ , a površina trokuta BCE je  $\frac{1}{2}h(y_{i+1} - y_i)$ .

Površina krivuljnog trapeza tada je jednaka sumi površina trokuta i pravokutnika,

$$I_i = \frac{1}{2}h(y_i + y_{i+1}).$$

Kako znamo da je  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$  za  $a < c < b$ , ukupnu površinu ispod funkcije

$f(x)$  možemo prikazati kao sumu svih trapeza na intervalu  $[a, b]$ ,

$$I = I_h \approx \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n).$$

Trapezno pravilo je najjednostavnije pravilo za računanje integrala, ali također ima i najveću pogrešku zbog aproksimacije. Ta greška se smanjuje što je podjela na intervale finija, tj. što su intervali manji.

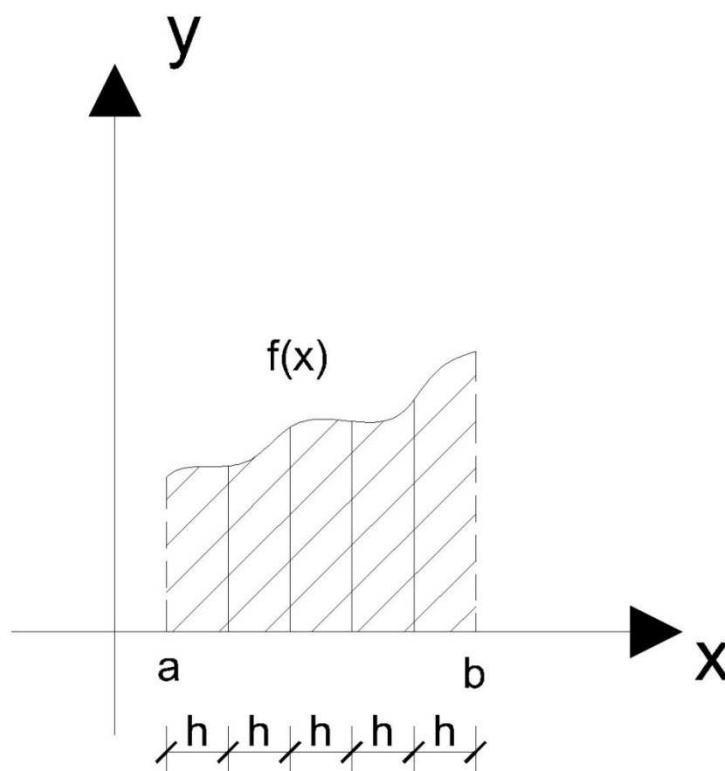
Trapezno pravilo daje točnu formulu za računanje površina ispod funkcija koji su polinomi prvog stupnja, tj. ispod pravaca.

## 4.2. Simpsonovo pravilo

Na sličan način kojim smo došli do trapeznog pravila možemo doći do još jednog pravila za računanje integrala, Simpsonovog pravila.

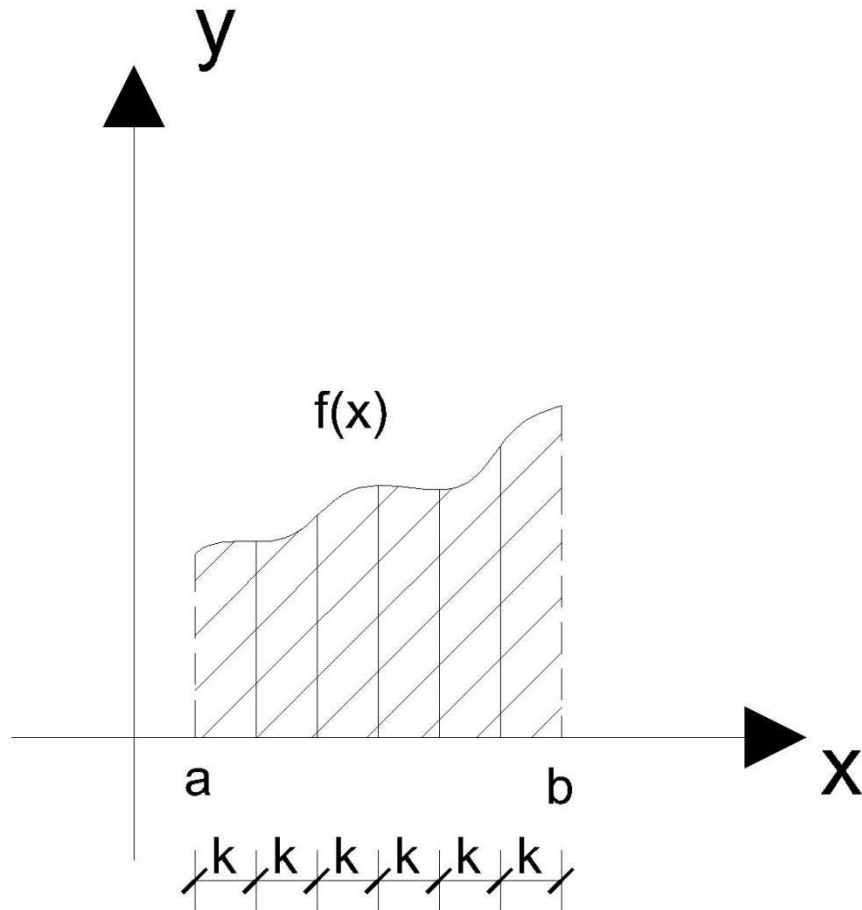
Temeljna ideja je ista, ali dok kod trapeznog pravila površinu ispod krivulje aproksimiramo trapezom, kod Simpsonovog pravila ju aproksimiramo površinom ispod kvadratne funkcije. Ali kako bi dokazivanje Simpsonove fomule tim načinom bilo mukotrпно, ovdje će se pokazati neformalniji način kojim se može doći do Simpsonovog pravila.

Interval  $[a, b]$  možemo podijeliti na  $n$  odsječaka, pri čemu je duljina svakog odsječka  $h = \frac{b-a}{n}$ , kao što je prikazano na slici 4.3. Približna vrijednost integrala je  $I_h$ .



Slika 4.3

Tu istu funkciju zatim podijelimo u  $m$  odsječaka, gdje je  $m \neq n$ , kao što je prikazano na slici 4.4. Duljina odsječka je  $k = \frac{b-a}{m}$ . Približna je vrijednost integrala sada  $I_k$ .



Slika 4.4

Može se pokazati da su rezultati integracije funkcije  $f(x)$  dani formulama:

$$I = I_h + Ch^2$$

$$I = I_k + Ck^2,$$

gdje je  $C = -\frac{b-a}{12} y''(\xi)$ ,  $a < \xi < b$ .

Ako je druga derivacija od  $y$  konstanta, može se uzeti da je  $C$  isto konstanta.

Oduzmemo li izraze za  $I$ , dobit ćemo izraz za  $C$ , pa uvrštavanje u prvi izraz za  $I$  daje da je integral funkcije  $f(x)$  jednak

$$I = I_h + \frac{I_h - I_k}{\frac{k^2}{h^2} - 1}.$$

Neka je sada  $k = 2h$  i  $m = \frac{n}{2}$ . Tada su

$$I_h = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$I_k = h(y_0 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-2} + y_n).$$

Uvrstimo li te  $I_h$  i  $I_k$  u gornji izraz, slijedi da je

$$I = I_h + \frac{I_h - I_k}{\frac{k^2}{h^2} - 1} =$$

$$= h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

$$+ h\left(\frac{1}{6}y_0 + \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \dots + \frac{1}{3}y_{n-2} + \frac{1}{3}y_{n-1} + \frac{1}{6}y_n\right)$$

$$+ h\left(-\frac{1}{3}y_0 - \frac{2}{3}y_2 - \dots - \frac{2}{3}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_n\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{3}y_0 + \frac{4}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \dots + \frac{2}{3}y_{n-2} + \frac{4}{3}y_{n-1} + \frac{1}{6}y_n\right)$$

$$I \approx I_s = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{n-4} + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Gornji se izraz zove Simpsonovo pravilo.

Kako u Simpsonovom pravilu krivulju zamjenjujemo kvadratnom funkcijom očekivali bismo da će dati točne rezultate samo za polinome drugog stupnja ili niže, ali zapravo daje točne rezultate i za polinome trećeg stupnja. To je posljedica podjele funkcije na intervale  $h$  i  $k$ . Ako promatramo te intervale u paru, ta dva intervala možemo zamisliti kao jedan dvostruki interval, tako da umjesto u dvije točke integrand kod Simpsonovog pravila promatramo u tri točke na dvostrukom intervalu.

Simpsonovo pravilo sa  $n$  točaka daje istu točnost kao i trapezno pravilo sa  $2n$  točaka, te zahtijeva dvostruko manje posla.

### 4.3. Gaussova kvadratura

Kod Simpsonovog i trapeznog pravila intervale smo odabirali po volji tako da budu jednaki i da integracija bude što lakša.

Kod Gaussove kvadrature intervali se odabiru tako da daju što veću točnost integracije pri čemu ne moraju biti jednaki.

Primjenom trapeznog pravila smo s pomoću dvije vrijednosti funkcije točnu vrijednost integrala dobili samo za linearnu funkciju. Gaussovim postupkom, uz pravilan izbor točaka u kojima računamo vrijednosti funkcije, dobivamo točnu vrijednost integrala za polinom trećeg stupnja.

Prvo promijenimo granice integracije od  $a$  do  $b$  na  $-1$  do  $+1$  kako bi se pojednostavnila analiza. Definirat ćemo novu varijablu

$$u = \frac{2x - (b + a)}{b - a}$$

tako da je

$$x = \frac{1}{2}(b - a)u + \frac{1}{2}(b + a).$$

Integral  $I = \int_a^b f(x)dx$  tako postaje

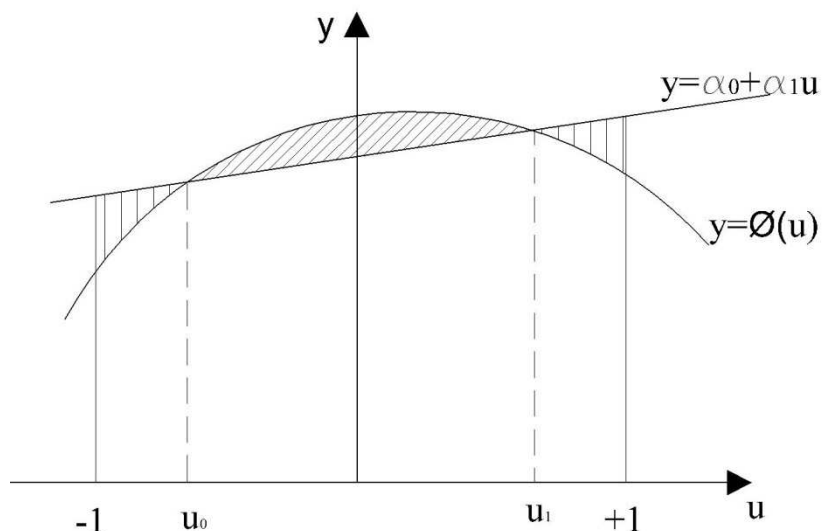
$$I = \int_{-1}^{+1} \phi(u)du,$$

gdje je

$$\phi(u) = \frac{1}{2}(b - a) \cdot f \left[ \frac{1}{2}(b - a)u + \frac{1}{2}(b + a) \right].$$

Na promatranom intervalu, funkciju ćemo aproksimirati pravcem  $y = \alpha_0 + \alpha_1 u$  takvim da vrijedi

$$\int_{-1}^{+1} (\alpha_0 + \alpha_1 u)du = \int_{-1}^{+1} \phi(u)du.$$



Slika 4.5

Integral  $\int_{-1}^{+1} (\alpha_0 + \alpha_1 u) du$  je trapez prikazan na slici 4.5. Površina tog trapeza bit će jednaka površini ispod krivulje  $y = \phi(u)$  ako je površina koso šrafirana jednaka površini koja je šrafirana vertikalnim crtama, pa ćemo tako odabrati pravac kojim aproksimiramo krivulju. Površina ispod krivulje bit će jednaka

$$I_G = A_0 \phi(u_0) + A_1 \phi(u_1),$$

gdje su  $A_0, A_1, u_0$  i  $u_1$  odabrani tako da su koso šrafirana i vertikalno šrafirana površina jednake.

Imamo četiri parametra, pa možemo pretpostaviti da ćemo točnu vrijednost dobiti za polinom trećeg stupnja

$$\phi(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3,$$

što dalje možemo napisati kao

$$\phi(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + (u - u_0)(u - u_1)(\beta_0 + \beta_1 u).$$

Ako želimo da parametri  $a_0$  i  $a_1$  zadovoljavaju uvjet  $\int_{-1}^{+1} (\alpha_0 + \alpha_1 u) du = \int_{-1}^{+1} \phi(u) du$ , tada  $u_0$  i  $u_1$  moraju biti odabrani tako da

$$\int_{-1}^{+1} (u - u_0)(u - u_1)(\beta_0 + \beta_1 u) du = 0,$$

što zahtijeva da vrijedi

$$\int_{-1}^{+1} (u - u_0)(u - u_1) du = 0$$
$$\int_{-1}^{+1} u(u - u_0)(u - u_1) du = 0,$$

tj. poslije integracije

$$\frac{2}{3} + 2u_0u_1 = 0$$
$$u_0 + u_1 = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$u_1 = -u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sada kada imamo  $u_0$  i  $u_1$ , trebamo još samo naći  $A_0$  i  $A_1$ .

Uvrstimo li  $u_1 = -u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  u izraz za površinu ispod krivulje, dobit ćemo

$$I_G = A_0\phi(u_0) + A_1\phi(u_1)$$
$$= A_0(\alpha_0 + \alpha_1u_0) + A_1(\alpha_0 + \alpha_1u_1)$$
$$= \alpha_0(A_0 + A_1) - \frac{\alpha_1}{\sqrt{3}}(A_0 - A_1).$$

Kako  $I_G$  mora biti jednak  $\int_{-1}^{+1} (\alpha_0 + \alpha_1u) du = 2\alpha_0$  za svaki  $\alpha_0$  i  $\alpha_1$ ,

$$A_0 + A_1 = 2$$
$$A_0 - A_1 = 0,$$

pa slijedi da je

$$A_0 = A_1 = 1.$$

Izraz za površinu ispod krivulje tada postaje

$$I_G = \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Izraz gore nazivamo Gausovim pravilom ili Gaussovom kvadraturom za dvije točke. Gornja formula za koju su korištene dvije točke daje točan rezultat za integraciju polinoma trećeg stupnja. Primjenom više točaka mogu se dobiti i formule za polinome višeg stupnja.



Općenito, za  $n$  točaka dobije se točna formula za polinom stupnja  $2n-1$ .

Gaussova kvadratura sa  $n$  točaka daje istu točnost kao i Simpsonovo pravilo sa  $2n$  točaka.

	$u$	$A$
n=2	$\pm 0,57735\ 02692$	1,00000 00000
n=3	$\pm 0,77456\ 66692$	0,55555 55556
	0,00000 00000	0,88888 88889
n=4	$\pm 0,86113\ 63116$	0,34785 48451
	$\pm 0,33998\ 10436$	0,65214 51549
n=5	$\pm 0,90617\ 98459$	0,23692 68851
	$\pm 0,53846\ 93101$	0,47862 86705
	0,00000 00000	0,56888 88889
n=6	$\pm 0,93246\ 95142$	0,17132 44924
	$\pm 0,66120\ 93865$	0,36076 15730
	$\pm 0,23861\ 91861$	0,46791 39346

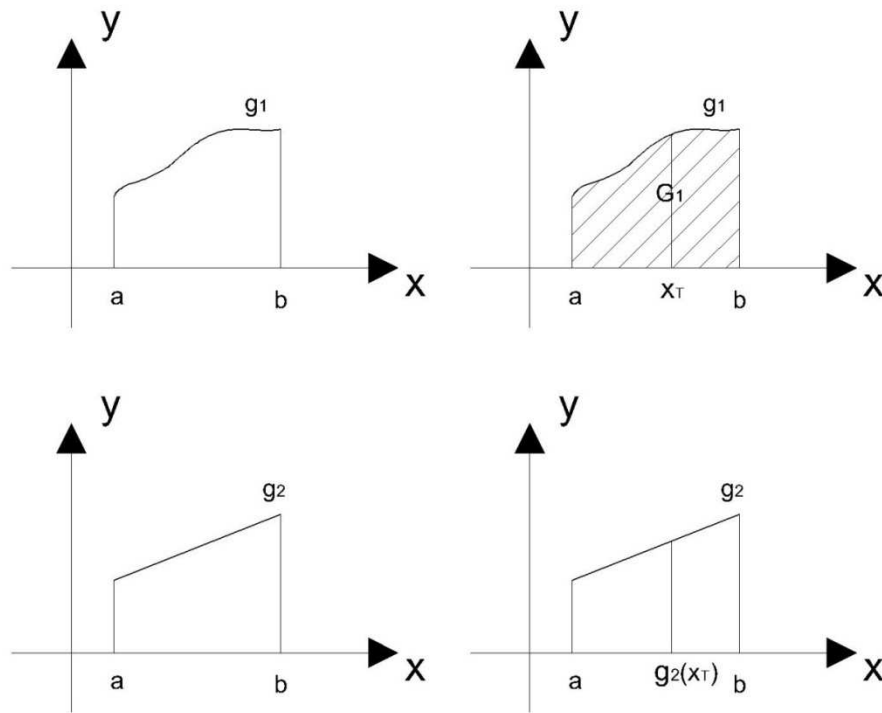
*Tablica 4.1 Apscise i koeficijenti Gaussove kvadrature*

#### 4.4 Vereščaginov teorem

Neka je  $g_1(x)$  linearna ili nelinearna funkcija, a  $G_1$  površina ispod funkcije  $g_1(x)$ .

$x_T$  je apscisa težišta lika  $G_1$ .

$g_2(x)$  je linearna funkcija, a  $g_2(x_T)$  vrijednost funkcije u apscisi težišta lika  $G_1$ .



Slika 4.6

Vereščaginov teorem kaže da integral umnoška funkcija  $g_1(x)$  i  $g_2(x)$  možemo izračunati tako da pomnožimo površinu lika  $G_1$  ispod funkcije  $g_1(x)$  s iznosom funkcije  $g_2(x)$  u apscisi težišta lika  $G_1$ :

$$I_{1,2} = \int_a^b g_1(x) g_2(x) dx = G_1(x) \cdot g_2(x_T).$$

Pri tome je nužno da je funkcija  $g_2(x)$  linearna.

Ovaj način izračunavanja integrala prvi je pokazao A. N. Vereščagin 1925. godine.

#### 4.4.1. Dokaz Vereščaginova teorema

Krenimo od izraza za integral umnoška funkcija  $g_1(x)$  i  $g_2(x)$

$$I_{1,2} = \int_a^b g_1(x) g_2(x) dx.$$

Linearnu funkciju kojom je određen dijagram unutarnjih sila zbog jediničnog opterećenja možemo zamijeniti jednadžbom pravca

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \int_a^b g_1(x) (kx + m) dx \\ &= \int_a^b (g_1(x) kx + g_1(x) m) dx. \end{aligned}$$

$k$  i  $m$  su konstante, pa možemo dalje raspisati

$$I_{1,2} = k \int_a^b x g_1(x) dx + m \int_a^b g_1(x) dx.$$

Integral  $\int_a^b x g_1(x) dx$  je statički moment oko osi  $y$  koji na temelju Varignonova teorema

možemo napisati kao  $x_T G_1$ , gdje je  $x_T$  apscisa težišta lika  $G_1$ :

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= k x_T G_1 + m G_1 \\ &= (kx_T + m) \cdot G_1. \end{aligned}$$

$(kx_T + m)$  je vrijednost funkcije  $g_2(x)$  u apscisi težišta  $x_T$ , pa je

$$I_{1,2} = g_2(x_T) \cdot G_1.$$

Izraz gore je poznat kao Vereščaginov teorem.

U slučaju da se promatrana konstrukcija sastoji od ravnih štapova, izračunavanje vrijednosti integrala za pomake može se znatno pojednostavniti.

Dijagrami unutarnjih sila od jediničnog opterećenja tada su uvijek određeni pravcima, dok su dijagrami unutarnjih sila od zadanog opterećenja određeni proizvoljnim krivuljama. Tada umjesto mukotrpe integracije po cijeloj konstrukciji, pomake možemo značajno jednostavnije izračunati primjenom Vereščaginova teorema.

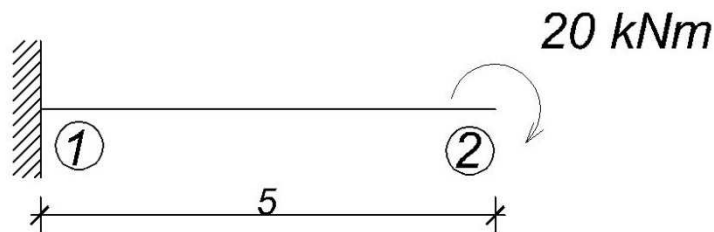
## 4.5. Primjeri numeričkih integracija

Kako bismo vidjeli razlike u točnosti između metoda numeričkih integracija, na primjeru konzole pokazat ćemo za četiri različite vrste opterećenja, koncentrirani moment, koncentriranu silu, jednoliko distribuirano opterećenje i trokutasto distribuirano opterećenje, postupak računanja vertikalnog pomaka kraja konzole pomoću metode jedinične sile. Pri tome ćemo naglasak staviti na usporedbu rješenja kako bismo vidjeli razlike u točnosti u ovisnosti o stupnju funkcije kojom su prikazani dijagrami unutarnjih sila.

Konzolu ćemo podijeliti na dva segmenta pa ćemo momentne dijagrame integrirati uzevši tri točke.

### 4.5.1. Koncentrirani moment

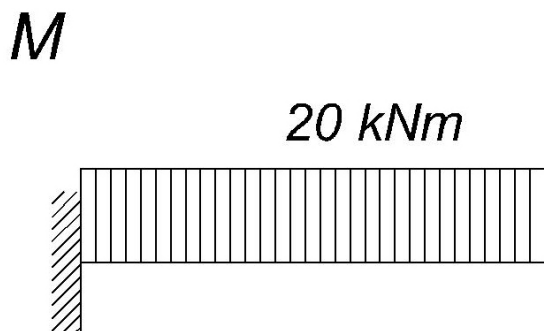
Prvo ćemo tražiti pomak točke za slučaj kada je kraj konzole opterećen koncentriranim momentom.



Slika 4.7

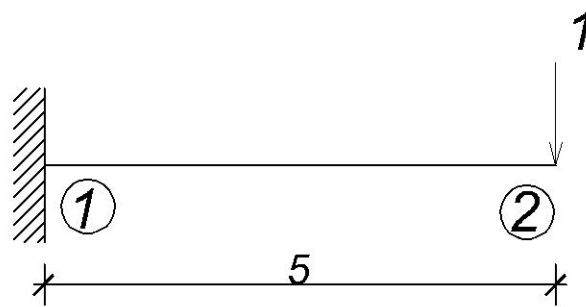
$$\sum M_{/i} = 0 \Rightarrow M_1 - 20 = 0$$
$$M_1 = 20 \text{ kNm}$$

Momentni dijagram vanjskog opterećenja bit će



Slika 4.8

Kako tražimo vertikalni pomak konzole u točki 2, u toj točki ćemo nanijeti jediničnu silu.



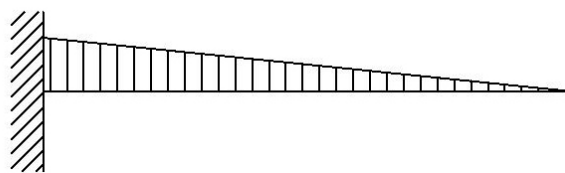
Slika 4.9

$$\sum M_{/1} = 0 \Rightarrow m_1 - (5 \cdot 1) = 0$$

$$m_1 = 5 \text{ kNm}$$

*m*

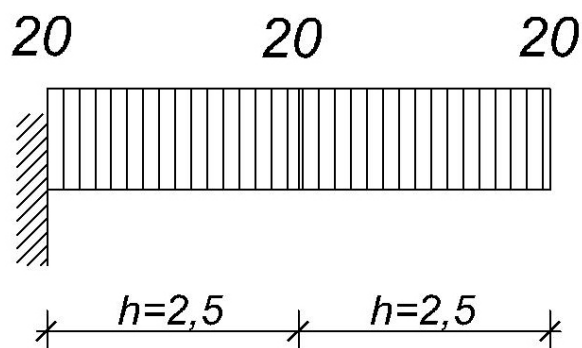
5 kNm



Slika 4.10

Momentni dijagram od jediničnog opterećenja bit će isti u svim primjerima tako da ga više nećemo crtati.

Podijelit ćemo konzolu na dva jednaka dijela.



Slika 4.11

Vertikalni pomak kraja konzole prvo ćemo izračunati upotrebom trapeznog pravila.

Za

$$\begin{aligned}E &= 3 \cdot 10^7 \text{ kN} / \text{m}^2 \\I &= \frac{0,5 \cdot 0,5^3}{12} = 5,2083 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \\EI &= 156250 \text{ kNm}^2,\end{aligned}$$

vertikalni pomak kraja konzole bit će

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\&= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 2 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\&= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot [20 \cdot 5 + 2 \cdot (20 \cdot 2,5) + 20 \cdot 0] \\&= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot (200) \\&= 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

Primjenom Simpsonovog pravila pomak će biti

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\&= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{3} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 4 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\&= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot [20 \cdot 5 + 4 \cdot (20 \cdot 2,5) + 20 \cdot 0] \\&= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot (300) \\&= 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

Primjenom Gaussove kvadrature pomak će biti

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot h \cdot M(u_i) \cdot m(u_i) \\
 &= \frac{1}{EI} (A_0 \cdot h \cdot M_0 \cdot m_0 + A_1 \cdot h \cdot M_1 \cdot m_1 + A_2 \cdot h \cdot M_2 \cdot m_2) \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot \left[ 0,5555555556 \cdot 20 \cdot 4,436491673 + 0,8888888889 \cdot 20 \cdot 2,5 + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5555555556 \cdot 20 \cdot 0,563508327 \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot (100) \\
 &= 1,6 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

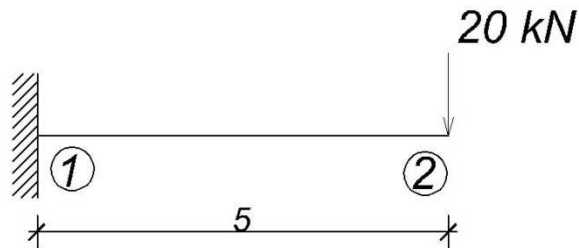
Primjenom Vereščaginova teorema pomak će biti

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \left[ (5 \cdot 20) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot (250) \\
 &= 1,6 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

Možemo vidjeti da sve metode numeričkih integracija daju točno rješenje kada je integrand, koji je umnožak funkcije prvog stupnja i konstante, funkcija prvog stupnja. Vereščaginov teorem, koji je metoda analitičke integracije, uvijek daje točno rješenje.

#### 4.5.2. Koncentrirana sila

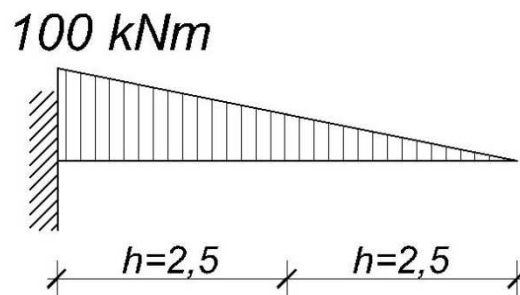
Sljedeći slučaj bit će kada je kraj konzole opterećen koncentriranom silom.



Slika 4.12

$$\sum M_{/1} = 0 \Rightarrow M_1 - (5 \cdot 20) = 0$$
$$M_1 = 100 \text{ kNm}$$

**M**



Slika 4.13

Vidimo da je momentni dijagram opisan linearnom funkcijom.

Primjenom trapeznog pravila, vertikalni pomak kraja konzole za koncentrirano opterećenje od 20 kN bit će

$$\omega = \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx$$
$$= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 2 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5]$$
$$= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot [100 \cdot 5 + 2 \cdot (50 \cdot 2,5) + 0 \cdot 0]$$
$$= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot (750)$$
$$= 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Koristeći Simpsonovo pravilo, vertikalni pomak bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{3} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 4 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot [100 \cdot 5 + 4 \cdot (50 \cdot 2,5) + 0 \cdot 0] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot (1000) \\
 &= 5,33 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

Primjenom Gaussove kvadrature, pomak kraja konzole bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot h \cdot M(u_i) \cdot m(u_i) \\
 &= \frac{1}{EI} (A_0 \cdot h \cdot M_0 \cdot m_0 + A_1 \cdot h \cdot M_1 \cdot m_1 + A_2 \cdot h \cdot M_2 \cdot m_2) \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot \left[ 0,5555555556 \cdot 88,7298 \cdot 4,436491673 + 0,8888888889 \cdot 50 \cdot 2,5 + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5555555556 \cdot 11,2702 \cdot 0,563508327 \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot (333,332) \\
 &= 5,33 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

Koristeći Vereščaginov teorem, vertikalni pomak bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 100 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 5 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot (833,33) \\
 &= 5,33 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

U slučaju kada je integrand, umnožak dviju funkcija prvog stupnja, funkcija drugog stupnja, trapezno pravilo kao što je i bilo za očekivati, više ne daje točno rješenje. Greška iznosi 12,57%.

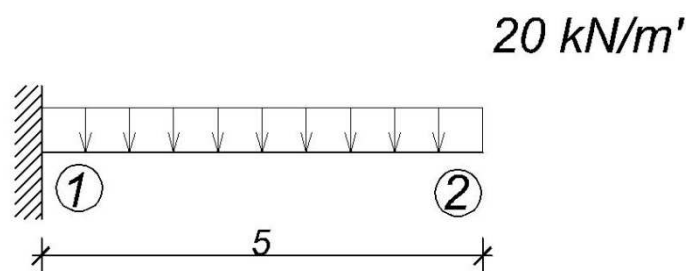
Da bismo vidjeli kako odabrani broj segmenata utječe na dobivenu točnost, za usporedbu ćemo taj isti zadatak ponovno riješiti primjenom trapeznog pravila, ali ovaj put konzolu nećemo podijeliti na dva segmenta, već ćemo uzeti da je cijela konzola jedan segment. Tada će rezultat biti

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + M_5 \cdot m_5] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{2} \cdot [100 \cdot 5 + 0 \cdot 0] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{2} \cdot (500) \\
 &= 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ m},
 \end{aligned}$$

dok je primjenom trapeznog pravila s tri točke greška iznosila 12,57%, ta greška sada iznosi gotovo 51%.

Simpsonovo pravilo i Gaussova kvadratura daju točno rješenje za funkciju drugog stupnja, dobiveno primjenom Vereščaginova teorema.

#### 4.5.3. Jednoliko distribuirano opterećenje

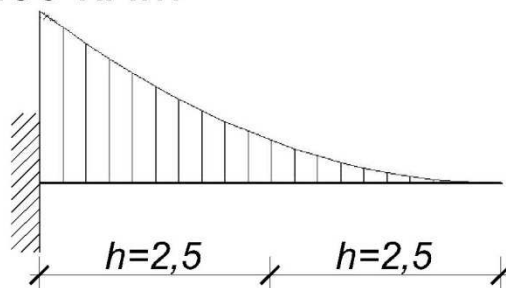


Slika 4.14

$$\begin{aligned}
 \sum M_{/1} = 0 &\Rightarrow M_1 - (5 \cdot 20) \cdot \frac{5}{2} = 0 \\
 M_1 &= 250 \text{ kNm}
 \end{aligned}$$

# M

250 kNm



Slika 4.15

Primjenom trapeznog pravila, vertikalni pomak kraja konzole za kontinuirano opterećenje od 20 kN/m' bit će

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 2 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot [250 \cdot 5 + 2 \cdot (62,5 \cdot 2,5) + 0 \cdot 0] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot (1562,5) \\ &= 0,0125 \text{ m}\end{aligned}$$

Koristeći Simpsonovo pravilo, vertikalni pomak bit će

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{3} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 4 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot [250 \cdot 5 + 4 \cdot (62,5 \cdot 2,5) + 0 \cdot 0] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot (1875) \\ &= 0,01 \text{ m}\end{aligned}$$

Primjenom Gaussove kvadrature, pomak kraja konzole bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot h \cdot M(u_i) \cdot m(u_i) \\
 &= \frac{1}{EI} (A_0 \cdot h \cdot M_0 \cdot m_0 + A_1 \cdot h \cdot M_1 \cdot m_1 + A_2 \cdot h \cdot M_2 \cdot m_2) \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot \left[ 0,55555555556 \cdot 196,8245836 \cdot 4,436491673 + 0,88888888889 \cdot 62,5 \cdot 2,5 + \right. \\
 &\quad \left. + 0,55555555556 \cdot 3,175416346 \cdot 0,563508327 \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot (625) \\
 &= 0,01 m
 \end{aligned}$$

Koristeći Vereščaginov teorem, vertikalni pomak bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \left[ \left( \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 250 \right) \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot 5 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot (1562,5) \\
 &= 0,01 m
 \end{aligned}$$

Greška koju dobijemo koristeći trapezno pravilo za funkciju trećeg stupnja iznosi 25%.

U slučaju da trapezno pravilo primjenimo uzevši samo dvije točke, rezultat će biti

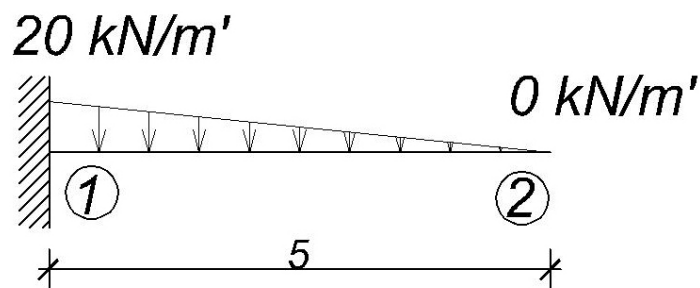
$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 2 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{2} \cdot [250 \cdot 5 + 0 \cdot 0] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{2} \cdot (1250) \\
 &= 0,02 m,
 \end{aligned}$$

a greška sada iznosi 100%.

Iako neočekivano, Simpsonovo pravilo i za funkciju trećeg stupnja daje točno rješenje, ali tu zanimljivost smo već prije objasnili.

Gaussova kvadratura i u ovom slučaju daje točno rješenje integracije, što smo provjerili primjenom Vereščaginova teorema.

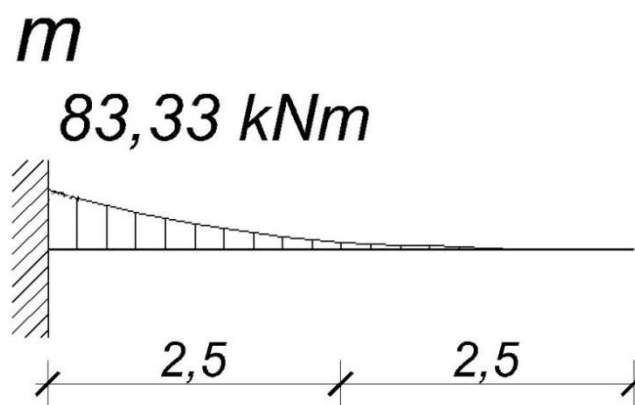
#### 4.5.4. Trokutasto distribuirano opterećenje



Slika 4.16

$$\sum M_{/1} = 0 \Rightarrow M_1 - \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 5 \right) = 0$$

$$M_1 = 83,33 \text{ kNm}$$



Slika 4.17

Primjenom trapeznog pravila, vertikalni pomak kraja konzole za trokutasto distribuirano opterećenje bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 2 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot [83,33 \cdot 5 + 2 \cdot (10,42 \cdot 2,5) + 0 \cdot 0] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{2} \cdot (468,75) \\
 &= 3,75 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

Koristeći Simpsonovo pravilo, vertikalni pomak bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{3} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 4 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot [83,33 \cdot 5 + 4 \cdot (10,42 \cdot 2,5) + 0 \cdot 0] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{2,5}{3} \cdot (520,85) \\
 &= 2,77787 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

Primjenom Gaussove kvadrature, pomak kraja konzole bit će

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\
 &= \frac{1}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot h \cdot M(u_i) \cdot m(u_i) \\
 &= \frac{1}{EI} (A_0 \cdot h \cdot M_0 \cdot m_0 + A_1 \cdot h \cdot M_1 \cdot m_1 + A_2 \cdot h \cdot M_2 \cdot m_2) \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot \left[ 0,5555555556 \cdot 58,214044176 \cdot 4,436491673 + 0,8888888889 \cdot 10,41666667 \cdot 2,5 + \right. \\
 &\quad \left. + 0,5555555556 \cdot 0,119289664 \cdot 0,563508327 \right] \\
 &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot (166,66) \\
 &= 2,66656 \cdot 10^{-3} m
 \end{aligned}$$

Koristeći Vereščaginov teorem, vertikalni pomak bit će

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left[ \left( \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot 83,33 \right) \cdot \left( \frac{4}{5} \cdot 5 \right) \right] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot (416,65) \\ &= 2,66656 \cdot 10^{-3} m\end{aligned}$$

Integrand je umnožak funkcije trećeg stupnja i funkcije prvog stupnja, tj. funkcija četvrtog stupnja.

Greška u rješenju do kojeg dolazimo trapeznim pravilom s tri točke iznosi 40,63%.

Ako zadatak riješimo trapeznim pravilom, ali sa dvije točke, rezultat će biti

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{2} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 2 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{2} \cdot [83,33 \cdot 5 + 0 \cdot 0] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{2} \cdot (416,65) \\ &= 6,6664 \cdot 10^{-3} m\end{aligned}$$

Greška sada iznosi 150%.

Simpsonovo pravilo nam više ne daje točno rješenje, a greška u ovom primjeru iznosi 4,17%.

Kao što smo do sada radili sa trapeznim pravilom, sada ćemo primjer ponovno riješiti Simpsonovim pravilom, ali ovaj puta sa dvije točke.

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{h}{3} \cdot [M_0 \cdot m_0 + 4 \cdot M_{2,5} \cdot m_{2,5} + M_5 \cdot m_5] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{3} \cdot [83,33 \cdot 5 + 0 \cdot 0] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot \frac{5}{3} \cdot (416,65) \\ &= 4,44427 \cdot 10^{-3} m\end{aligned}$$

Greška sada iznosi 66,67%.

Gaussovom kvadraturom ponovno dolazimo do točnog rješenja, što smo provjerili riješivši zadatak primjenom Vereščaginova teorema.

Gaussova kvadratura daje točno rješenje za funkciju  $(2n-1)$  stupnja, gdje je  $n$  broj korištenih točaka ili čvorova. Do sada smo koristili 3 točke, što daje točne rezultate zaključno s funkcijom petog stupnja.

Riješit ćemo sada ponovno ovaj primjer Gaussovom kvadraturom, ali koristeći samo dvije točke.

$$\begin{aligned}\omega &= \int_0^5 \frac{M \cdot m}{E \cdot I} dx \\ &= \frac{1}{EI} \sum_{i=0}^{n-1} A_i \cdot h \cdot M(u_i) \cdot m(u_i) \\ &= \frac{1}{EI} (A_0 \cdot h \cdot M_0 \cdot m_0 + A_1 \cdot h \cdot M_1 \cdot m_1) \\ &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot [1,0 \cdot 40,88021768 \cdot 3,943375673 + 1 \cdot 0,786448986 \cdot 1,056624327] \\ &= \frac{1}{156250} \cdot 2,5 \cdot (162,037037) \\ &= 2,5926 \cdot 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

Greška iznosi 2,77%

Vidimo da Gaussova kvadratura u kojoj se služimo sa dvije točke više ne daje točno rješenje, ali greška je osjetno manja nego primjenom trapeznog ili Simpsonovog pravila.



## 5. Primjena metode jedinične sile u metodi sila

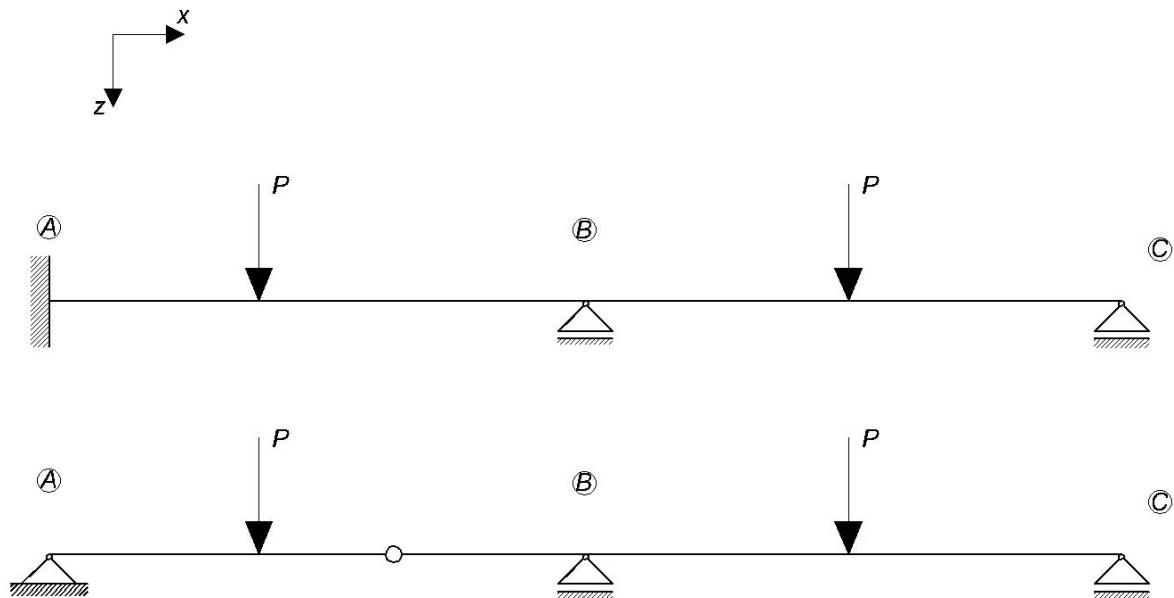
U ovom poglavlju pokazat ćemo važnost metode jedinične sile u rješavanju statički neodređenih sistema.

Statički neodređeni sistemi su sistemi kod kojih je broj nepoznatih veličina potrebnih za izračunavanje sila u vanjskim vezama i unutarnjih sila veći od broja mogućih jednažbi ravnoteže. Dodatne jednažbe potrebne za proračun sila dobivamo iz kinematičkih uvjeta konstrukcije. Jedna od metoda rješavanja statički neodređenih sistema je metoda sila. Ovdje nećemo ulaziti u detalje o toj metodi, samo ćemo dati pregled osnovnih zamisli i jednažbi bez ulaženja u njihovo podrijetlo.

### 5.1. Metoda sila

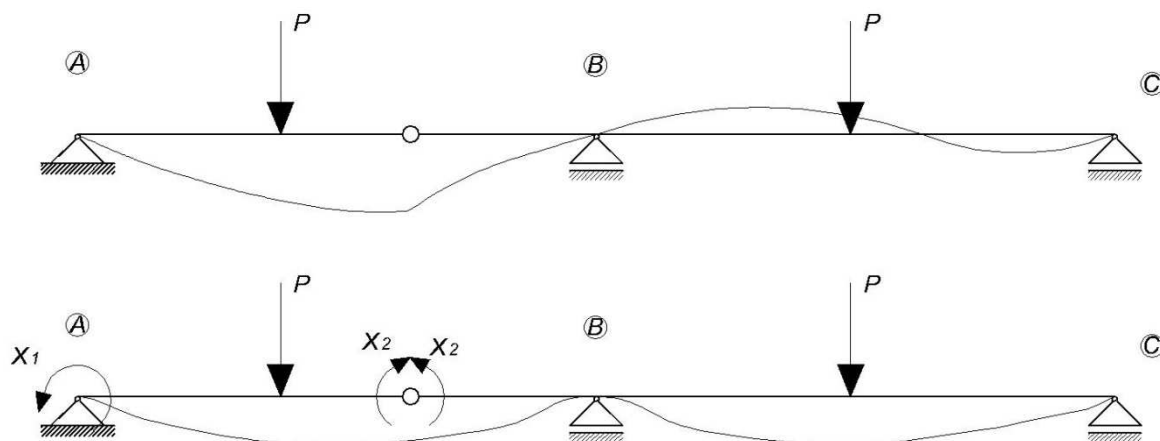
Prvi korak u rješavanju sustava metodom sila nam je da od početnog statički neodređenog sustava napravimo statički određeni sustav, osnovni sistem.

To ćemo učiniti tako da maknemo prekobrojnu vezu, pritom pazeći da sustav ne pretvorimo u mehanizam.



Slika 5.1

Sljedeći korak je riješiti statički određeni sistem, čime dobivamo unutarnje sile  $M_0$  i  $N_0$ .



Slika 5.2

Posljedica uklanjanja prekobrojnih veza je ta da progibna linija osnovnog sustava ne odgovara progibnoj liniji stvarnog sustava.

Uklonjene prekobrojne veze moramo nadomjestiti generaliziranim silama  $X_i$  čiji će iznosi biti točno takvi da osiguraju podudaranje progibnih linija ili neprekinutost polja pomaka.

Ako smo oslobodili translacijski pomak vezu ćemo nadomjestiti silom na mjestu i na pravcu oslobođenog pomaka, a ako smo oslobodili zaokret vezu ćemo nadomjestiti momentom.

Uklanjanjem prekobrojnih veza oslobađa se par sila, ali ako oslobodimo vezu koja spaja element s podlogom, druga sila djeluje na nepomičnu podlogu te je izostavljamo iz proračuna.

Vrijednosti prekobrojnih sila  $X_i$  izračunat ćemo iz uvjeta iščezavanja pomaka njihovih hvatišta. Uvjeti kompatibilnosti pomaka ne mogu se zadovoljavati pojedinačno, jer svaka prekobrojna sila utječe na pomake hvatišta svih prekobrojnih sila, pa se rješenje dobiva rješavanjem sustava jednačbi:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,0} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Te jednačbe nazivamo jednačbama kompatibilnosti.

U  $\delta_{i,j}$  prvi indeks,  $i \in [1, n]$ , označava da je riječ o pomaku hvatišta sile  $X_i$  po pravcu njezina djelovanja. Drugi indeks,  $j \in [1, n]$ , je oznaka sile  $X_j$  koja je uzrokovala taj pomak.

$\delta_{i,0}$  je pomak hvatišta sile  $X_i$  uzrokovan vanjskim djelovanjem.

Pomake  $\delta_{i,j}$  i  $\delta_{i,0}$  računamo primjenom jedinične sile.

Na mjestu i u smjeru svake prekobrojne veze stavimo jediničnu silu i odredimo dijagrame unutarnjih sila  $m_i$ .

Pomak na mjestu  $i$  u smjeru jedinične sile tada će biti

$$\delta_{i,j} = \sum_{(e)} \int_0^{l_e} \left[ \frac{m_i(\xi_e) m_j(\xi_e)}{EI(\xi_e)} + \frac{n_i(\xi_e) n_j(\xi_e)}{EA(\xi_e)} \right] dx,$$

$$\delta_{i,0} = \sum_{(e)} \int_0^{l_e} \left[ \frac{m_i(\xi_e) M_0(\xi_e)}{EI(\xi_e)} + \frac{n_i(\xi_e) N_0(\xi_e)}{EA(\xi_e)} \right] dx$$

pri čemu se zbroj proteže po svim elementima sistema, a  $(\xi_e)$  označava lokalne koordinatne osi pojedinih elemenata.

Uvrštavanjem pomaka i rješavanjem sustava jednadžbi kompatibilnosti dobijemo vrijednosti prekobrojnih sila  $X_i$ .

Pretpostavljamo statičku linearnost, tj. da se uvjeti ravnoteže vanjskih i unutarnjih sila postavljaju na nedeformiranoj konstrukciji, a njena je posljedica linearnost uvjeta ravnoteže. Uz to pretpostavljamo i materijalnu linearnost, tj. da je odnos unutarnjih sila i odgovarajućih deformacijskih sila linearan.

Tada konačne vrijednosti unutarnjih sila u statički neodređenom sistemu možemo izračunati kao algebarski zbroj vrijednosti tih veličina u osnovnom sistemu uzrokovanih vanjskim silama i onih uzrokovanih prekobrojnim silama:

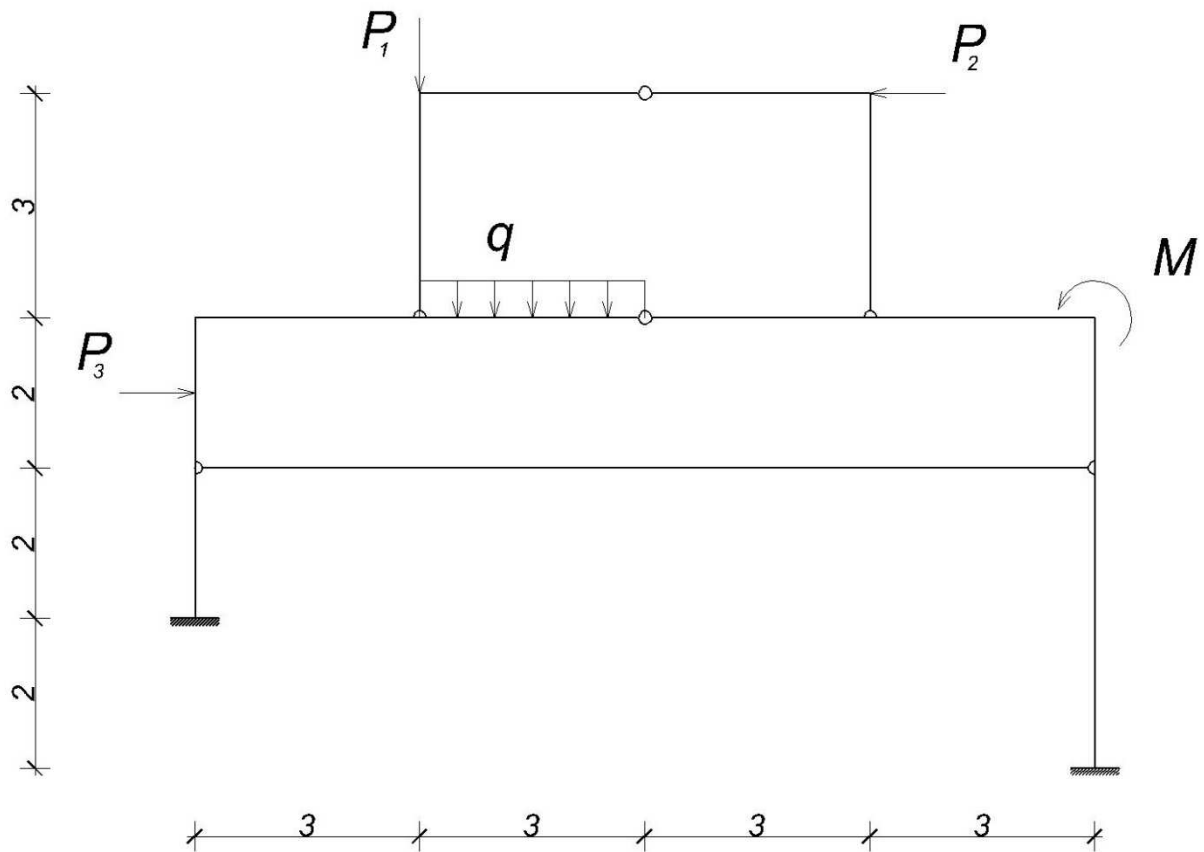
$$M(x) = M_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i m_i(x),$$

$$T(x) = T_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i t_i(x),$$

$$N(x) = N_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i n_i(x).$$

## 6. Primjer

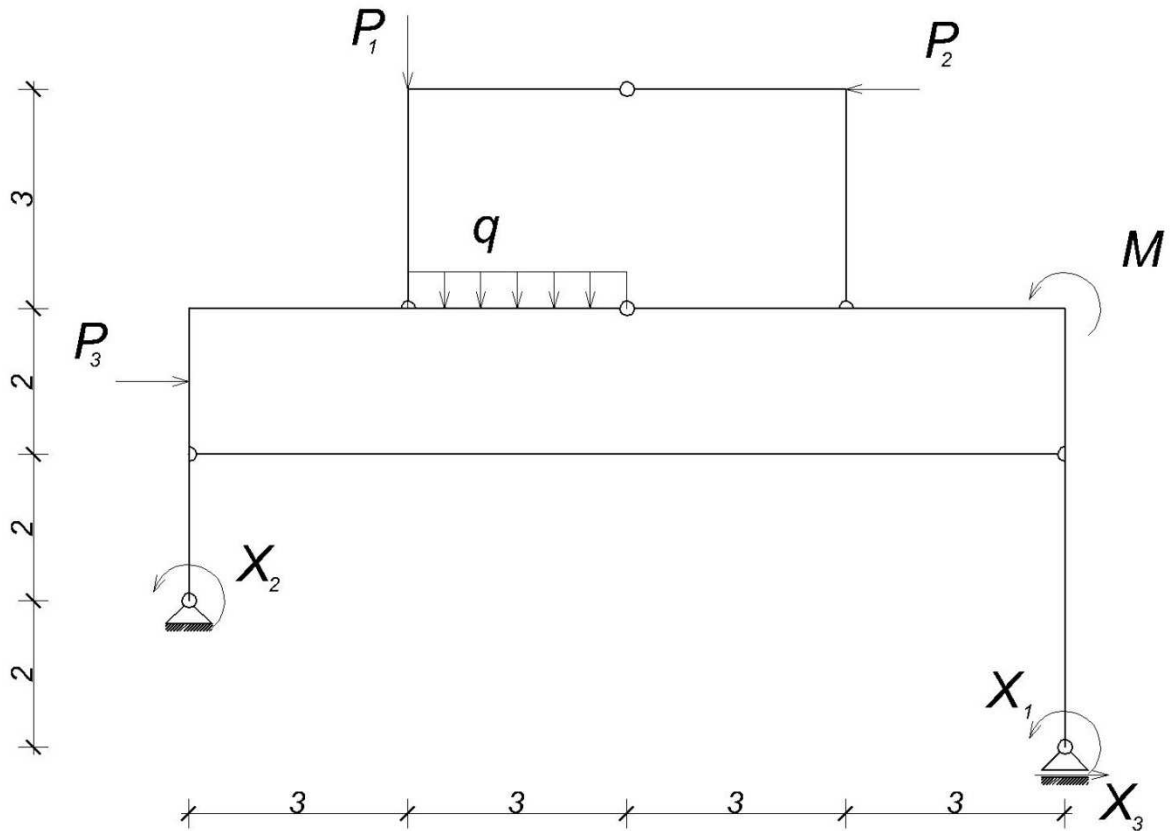
Za primjer na kojem ćemo prikazati primjenu metode jedinične sile u metodi sila odabran je tri puta statički neodređen sustav na slici 6.1.



Slika 6.1

$P_1 = 100 \text{ kN}$	$\text{stup} : b / h = 50 / 50 \text{ cm}$
$P_2 = 150 \text{ kN}$	$\text{greda} : b / h = 50 / 60 \text{ cm}$
$P_3 = 200 \text{ kN}$	$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kNm}^2$
$q = 20 \text{ kN/m'}$	$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
$M = 175 \text{ kNm}$	
$t_s = 20^\circ\text{C}$	

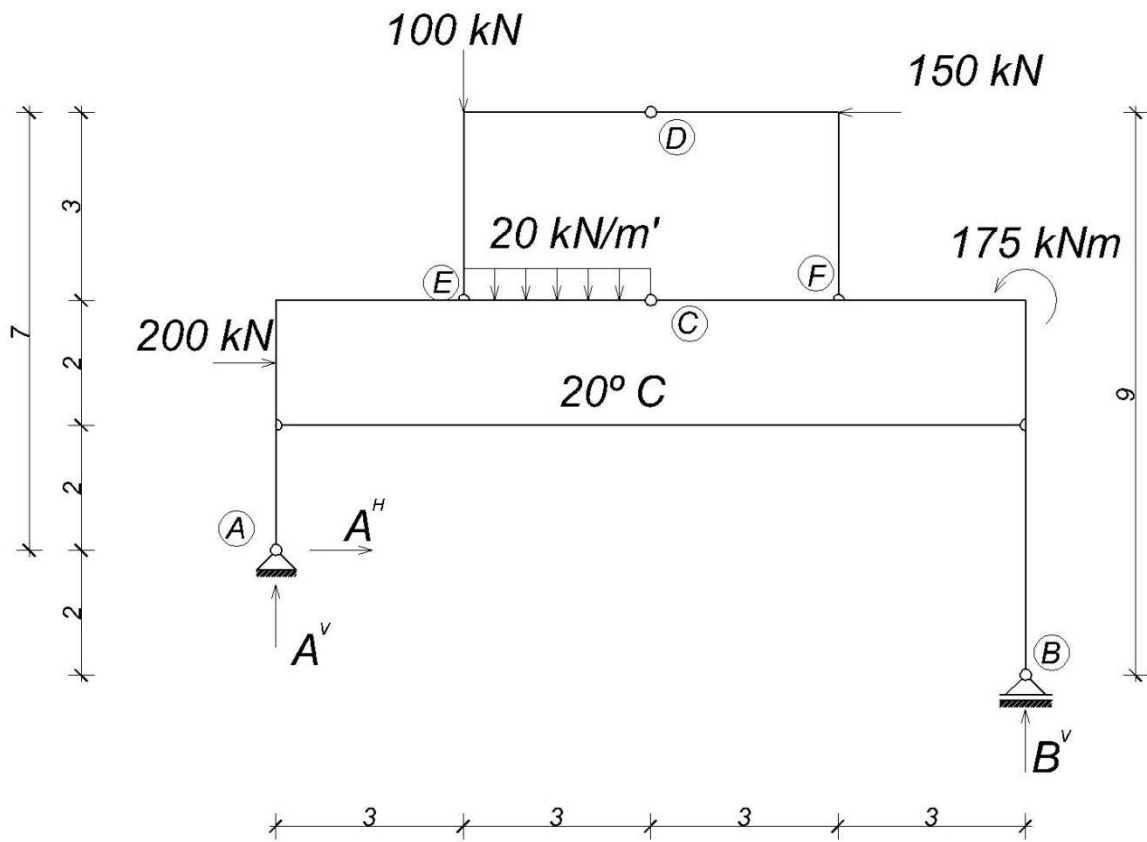
Prvi korak rješavanja statički neodređene konstrukcije metodom sila je pretvaranje statički neodređenog sustava u statički određeni sustav uklanjanjem prekobrojnih veza i nadomještanje tih veza za sada nepoznatim silama.



Slika 6.2

Dalje, na statički određeni sustav nanosimo zasebno vanjsko opterećenje i jedinična opterećenja na mjestu i po pravcu raskinutih prekobrojnih veza te svaki taj sustav rješavamo. Kako se nalazimo u okviru Bernoulli-Eulerove grede, poprečnu silu zbog njenog malog doprinosa zanemarujemo, pa dijagram poprečnih sila nećemo ni crtati.

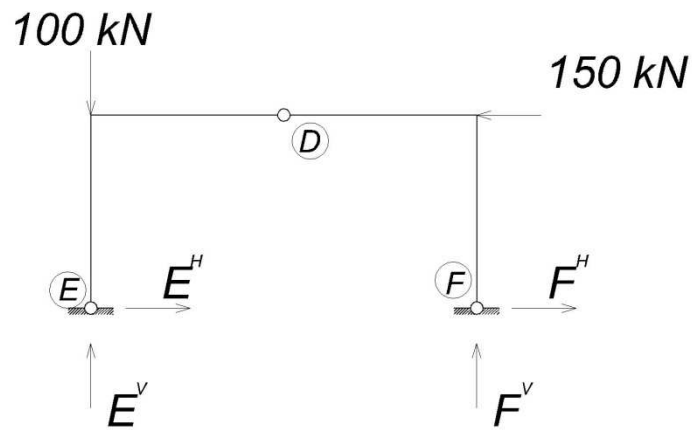
a) Vanjsko opterećenje



Slika 6.3

$$\begin{aligned} \sum M_{/A} = 0 &\Rightarrow 12B^V + 175 + 7 \cdot 150 - 3 \cdot 100 - 4,5 \cdot (3 \cdot 20) - 3 \cdot 200 = 0 \\ 12B^V + 175 + 1050 - 300 - 270 - 600 &= 0 \\ B^V &= -4,58 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F^y = 0 &\Rightarrow -100 - 3 \cdot 200 + A^V + B^V = 0 \\ -160 - 4,58 + A^V &= 0 \\ A^V &= 164,58 \text{ kN} \end{aligned}$$



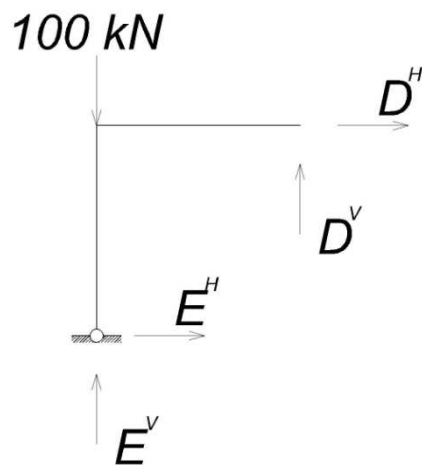
Slika 6.4

$$\sum M_{/E} = 0 \Rightarrow 6 \cdot F^V + 3 \cdot 150 = 0$$

$$F^V = -75 \text{ kN}$$

$$\sum M_{/F} = 0 \Rightarrow 6 \cdot 100 + 3 \cdot 150 - 6 \cdot E^V = 0$$

$$E^V = 175 \text{ kN}$$



Slika 6.5

$$\sum M_{/D} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 100 - 3 \cdot E^V + 3 \cdot E^H = 0$$

$$300 - 3 \cdot 175 + 3E^H = 0$$

$$E^H = 75 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow -150 + E^H + F^H = 0$$

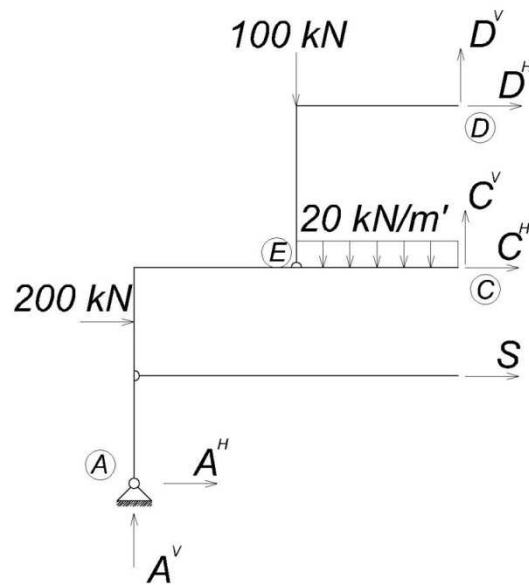
$$F^H = 75 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow D^H + E^H = 0$$

$$D^H - 75 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow D^V + E^V = 0$$

$$D^V - 75 \text{ kN}$$



Slika 6.6

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow -3 \cdot D^H + 3 \text{K} \cdot 100 + 60 \cdot 1,5 + 2 \cdot S + 1 \cdot 200 - 6 \cdot A^V + 4 \cdot A^H = 0$$

$$-3 \cdot (-75) + 300 + 90 + 2 \cdot S + 200 - 987,48 \cdot 200 = 0$$

$$S = 186,24 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow -100 - 20 \cdot 3 + A^V + D^V + C^V = 0$$

$$-100 - 60 + 164,58 - 75 + C^V = 0$$

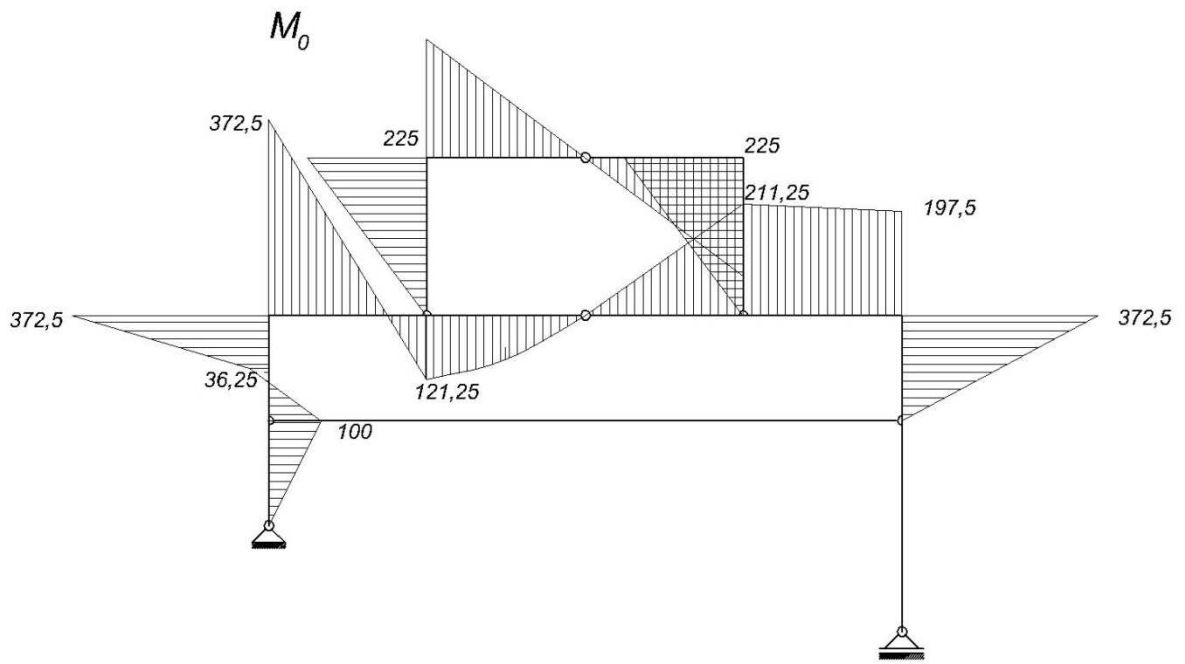
$$C^V = 70,42 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow 200 + D^H + C^H + A^H + S = 0$$

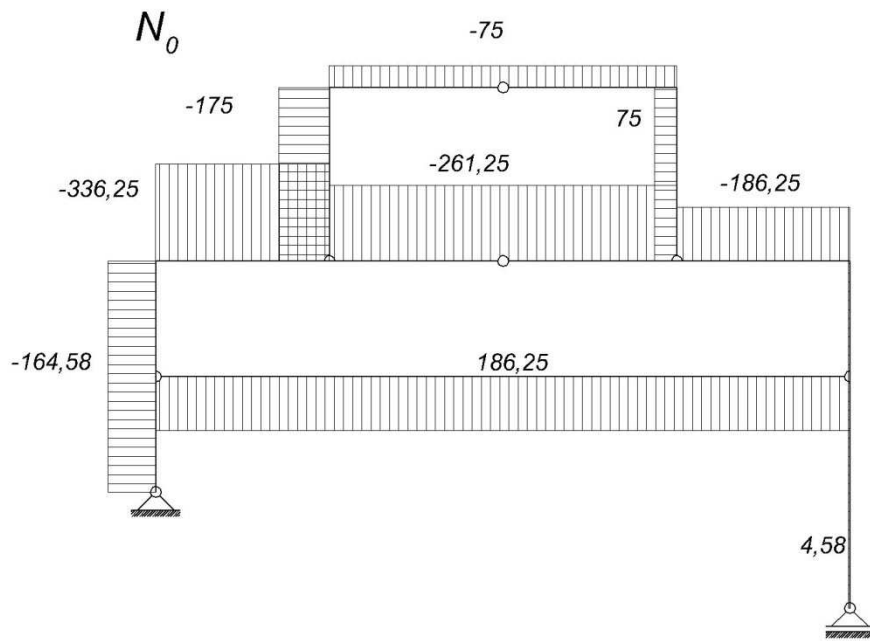
$$200 - 75 + C^H + 186,24 - 50 = 0$$

$$C^H = -261,24 \text{ kN}$$



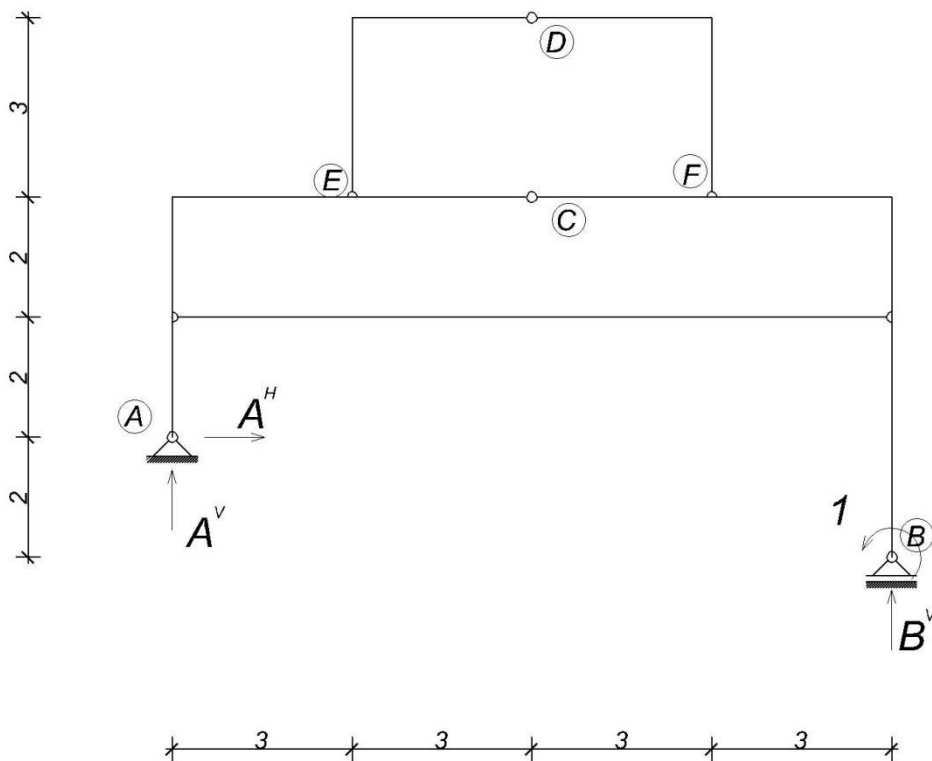


Slika 6.7



Slika 6.8

b) Jedinična sila na mjestu i po pravcu prekobrojne veze  $X_1$



Slika 6.9

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 1 + 12B^V = 0$$

$$B^V = -0,0833 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow A^V + B^V = 0$$

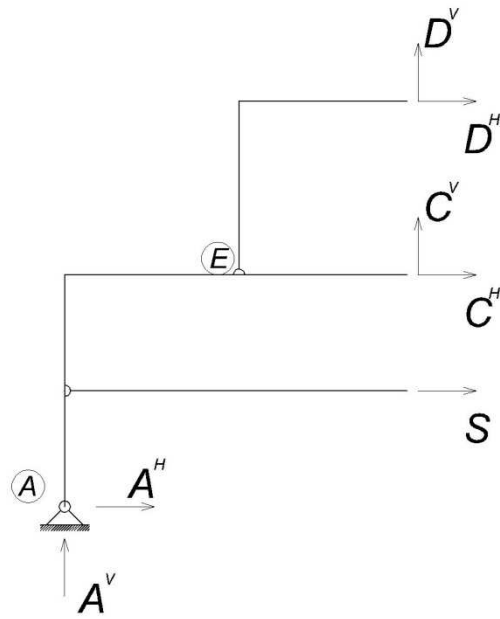
$$A^V = 0,0833 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow A^H = 0$$

$$D^V = 0 \text{ kN}; D^H = 0 \text{ kN}$$

$$E^V = 0 \text{ kN}; E^H = 0 \text{ kN}$$

$$F^V = 0 \text{ kN}; F^H = 0 \text{ kN}$$



Slika 6.10

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow -6 \cdot A^V + 2 \cdot S = 0$$

$$S = 3A^V = 0,25 \text{ kN}$$

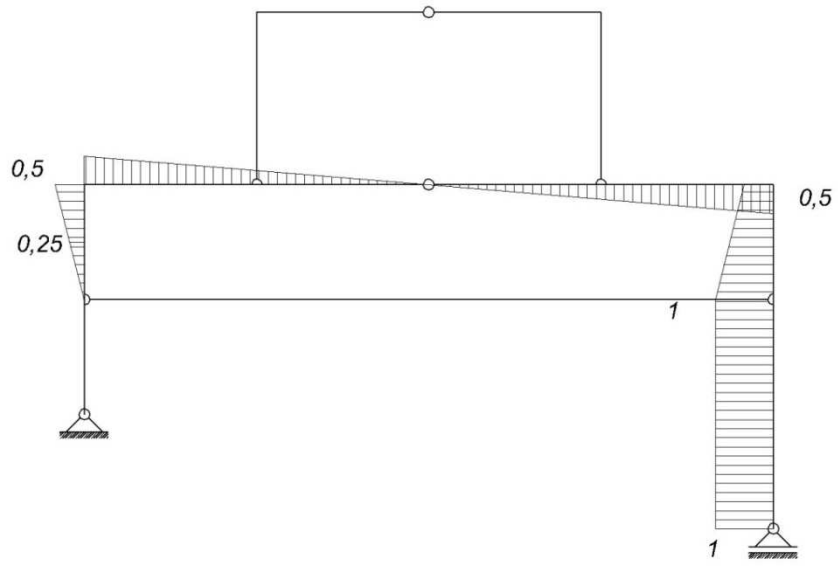
$$\sum F^x = 0 \Rightarrow C^H + S = 0$$

$$C^H = -0,25 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow A^V + C^V = 0$$

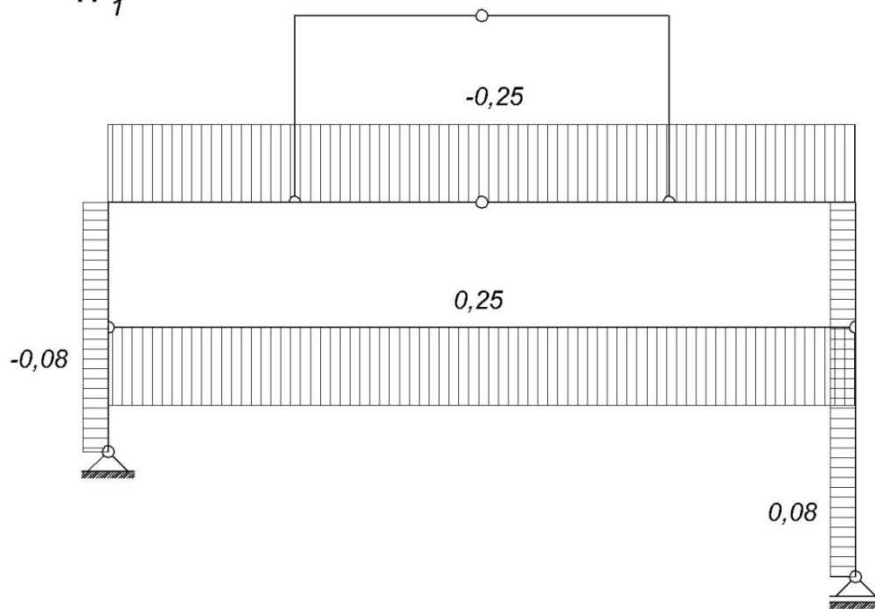
$$C^V = -0,0833 \text{ kN}$$

$m_1$



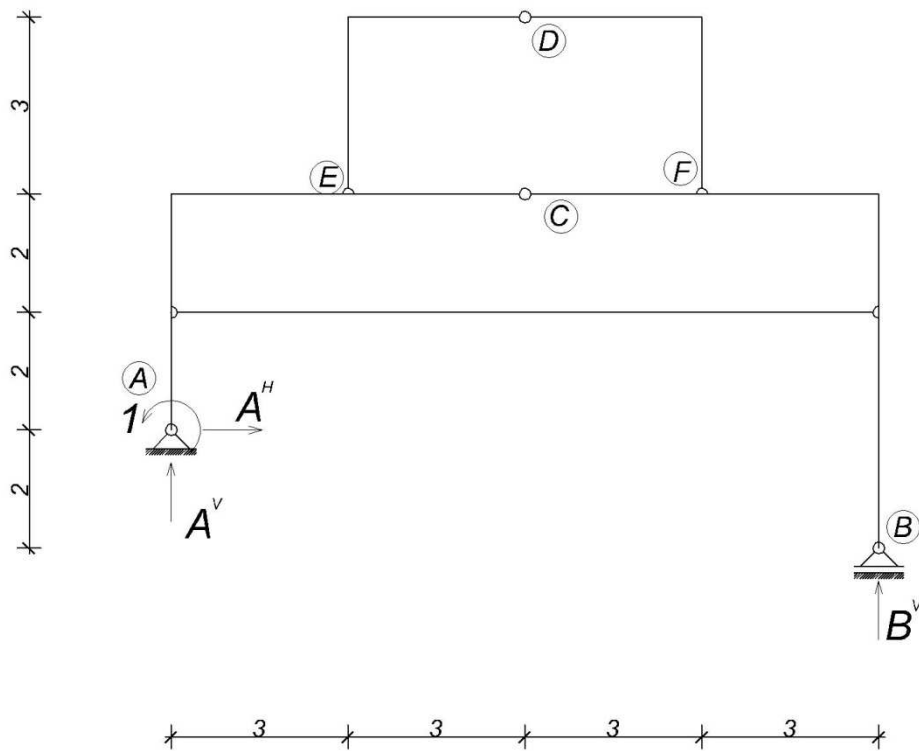
Slika 6.11

$n_1$



Slika 6.12

c) Jedinična sila na mjestu i po pravcu prekobrojne veze  $X_2$



Slika 6.13

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 1 + 12B^V = 0$$

$$B^V = -0,0833 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow A^V + B^V = 0$$

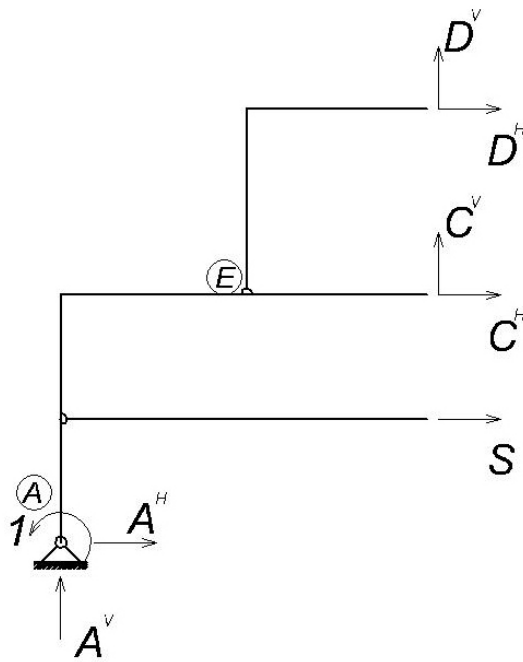
$$A^V = 0,0833 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow A^H = 0$$

$$D^V = 0 \text{ kN}; D^H = 0 \text{ kN}$$

$$E^V = 0 \text{ kN}; E^H = 0 \text{ kN}$$

$$F^V = 0 \text{ kN}; F^H = 0 \text{ kN}$$



Slika 6.14

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow 2 \cdot S + 1 - 6 \cdot A^V = 0$$

$$2S = 6A^V - 1$$

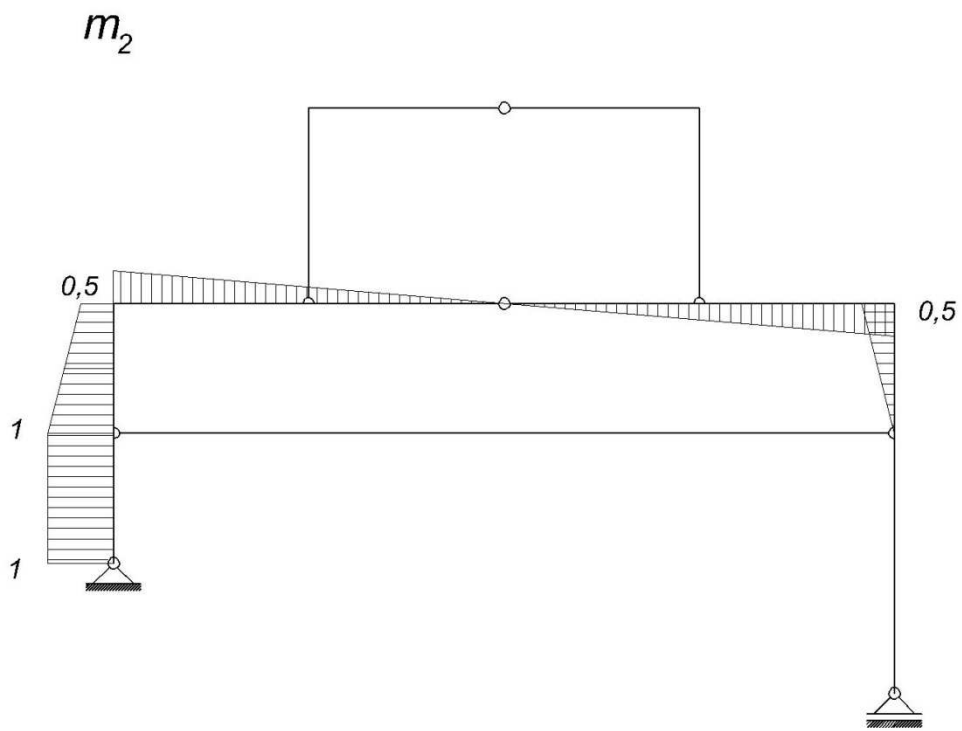
$$S = -0,25 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow C^H + S = 0$$

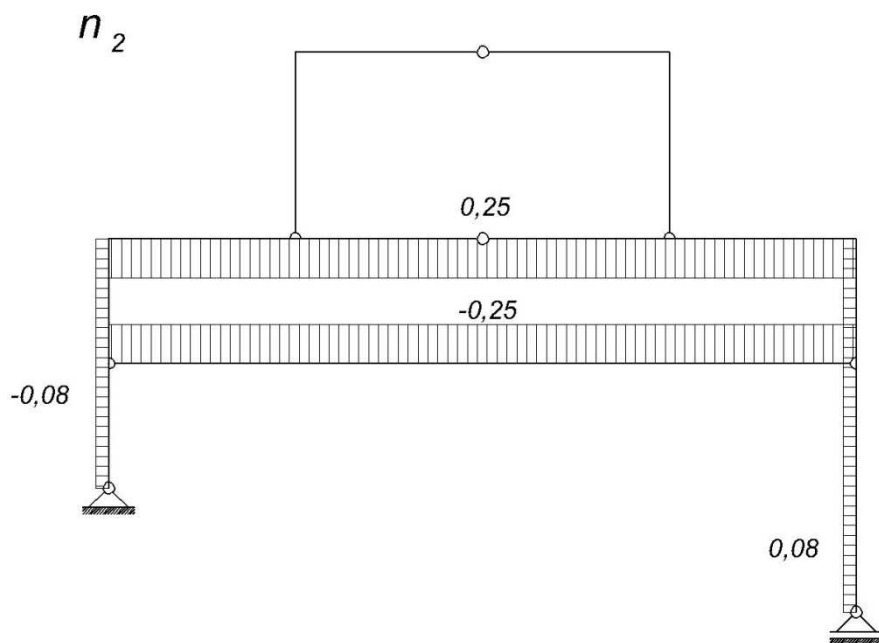
$$C^H = 0,25 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow A^V + C^V = 0$$

$$C^V = -0,0833 \text{ kN}$$

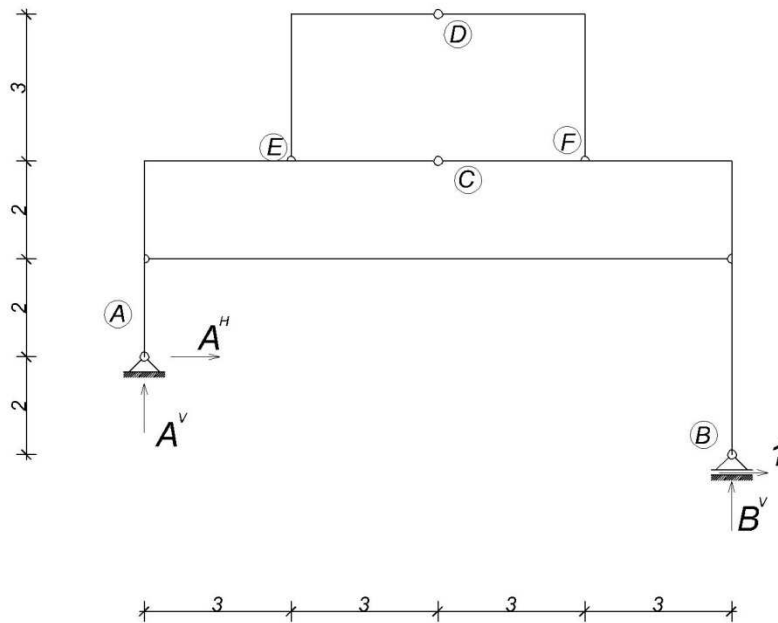


Slika 6.15



Slika 6.16

d) Jedinična sila na mjestu i po pravcu prekobrojne veze  $X_3$



Slika 6.17

$$\sum M_{/A} = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 12B^V = 0$$

$$B^V = -0,17 \text{ kN}$$

$$\sum F^y = 0 \Rightarrow A^V + B^V = 0$$

$$A^V = 0,17 \text{ kN}$$

$$\sum F^x = 0 \Rightarrow A^H + 1 = 0$$

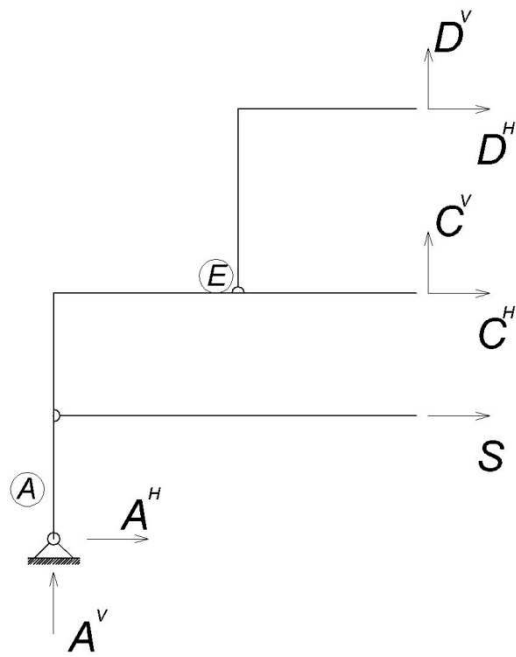
$$A^H = -1 \text{ kN}$$

$$D^V = 0 \text{ kN}; D^H = 0 \text{ kN}$$

$$E^V = 0 \text{ kN}; E^H = 0 \text{ kN}$$

$$F^V = 0 \text{ kN}; F^H = 0 \text{ kN}$$



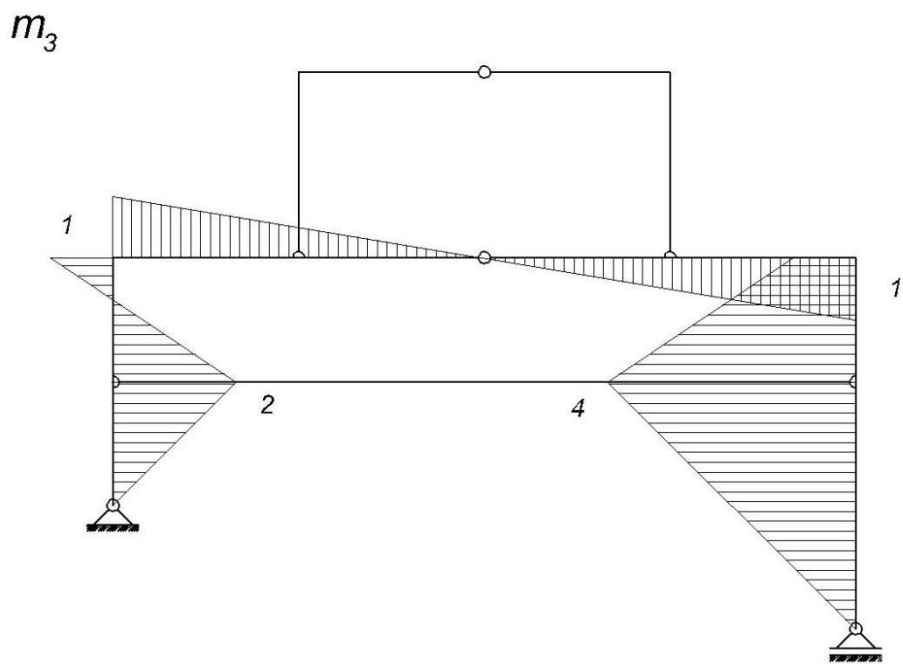


Slika 6.18

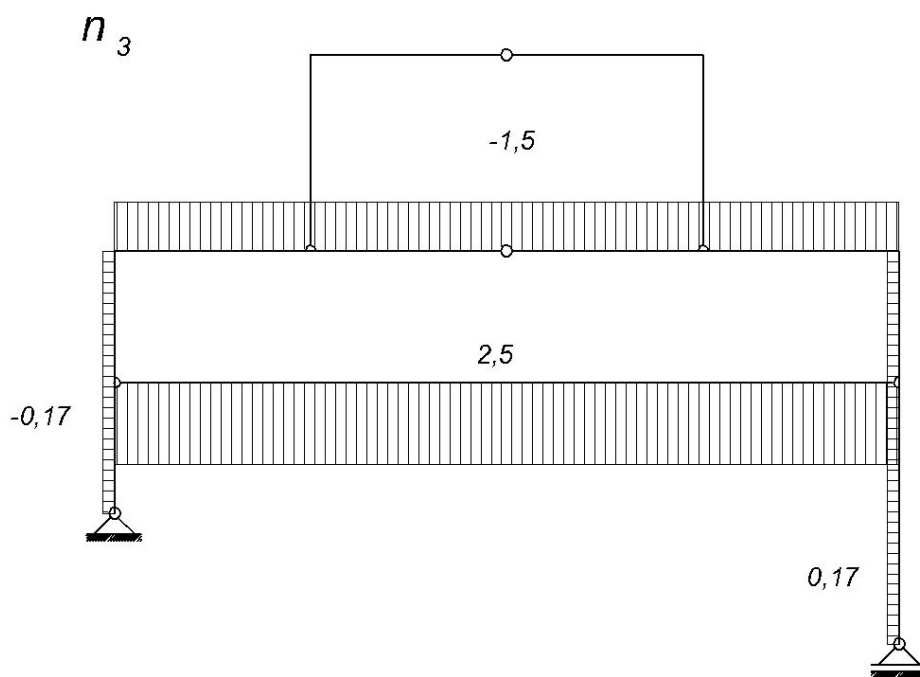
$$\begin{aligned} \sum M_{/C} = 0 &\Rightarrow 2 \cdot S + 4 \cdot A^H - 6 \cdot A^V = 0 \\ 2S + 4 \cdot (-1) - 6 \cdot (0,17) &= 0 \\ S &= 2,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F^x = 0 &\Rightarrow A^H + C^H + S = 0 \\ C^H &= -1 + 2,5 = 0 \\ C^H &= -1,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F^y = 0 &\Rightarrow A^V + C^V = 0 \\ C^V &= -0,17 \text{ kN} \end{aligned}$$



Slika 6.19



Slika 6.20

Sljedeći korak je izračunavanje pomaka uzrokovanih na mjestu i po pravcu jedinične sile. Prvo ćemo primjenom Vereščaginova teorema izračunati pomake  $\delta_{1,0}$ ,  $\delta_{2,0}$  i  $\delta_{3,0}$  prouzročene djelovanjem vanjskog opterećenja.

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= \int_0^l \left[ \frac{M(x) \cdot m_1(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{N(x) \cdot n_1(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\
 &= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36,25 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36,25 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,25 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 0,25 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] + \\
 &\quad \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 121,25 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 0,5 - \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{EI_G} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 121,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 3 \right) \cdot \left( \frac{-0,25}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 211,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 211,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 - \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 197,5 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 0,25 - \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{EA_G} \cdot \left[ (12 \cdot 186,25) \cdot (0,25) \right] + \left[ (12 \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}) \cdot (0,25) \right] \\
 &= \frac{1}{EI_s} \cdot (-165,83) + \frac{1}{EI_G} \cdot (-145,625) + \frac{1}{EA_G} \cdot (558,75) + (7,2 \cdot 10^{-4}) \\
 &= -221,01674
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{20} &= \int_0^l \left[ \frac{M(x) \cdot m_2(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{N(x) \cdot n_2(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \right) \cdot (-1) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,75 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36,25 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36,25 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,75 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 121,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 - \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 121,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 \right) + \left( \frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 3 \right) \cdot \left( \frac{-0,25}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 211,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 211,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,25 - \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 197,5 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 0,25 - \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EA_G} \cdot \left[ (12 \cdot 186,25) \cdot (-0,25) \right] + \left[ (12 \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}) \cdot (-0,25) \right] \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot (-134,17) + \frac{1}{EI_G} \cdot (-145,625) + \frac{1}{EA_G} \cdot (-558,75) + (-7,2 \cdot 10^{-4}) \\
&= -588,63326
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{30} &= \int_0^l \left[ \frac{M(x) \cdot m_3(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{N(x) \cdot n_3(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 100 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 100 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36,25 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 372,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 121,25 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 121,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 3 \right) \cdot \left( \frac{-0,5}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 211,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,5 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 211,25 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 0,5 - \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 197,5 \right) \cdot \left( \frac{-2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EA_G} \cdot \left[ (12 \cdot 186,25) \cdot (2,5) \right] + \left[ (12 \cdot 2,4 \cdot 10^{-4}) \cdot (2,5) \right] \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot (-461,67) + \frac{1}{EI_G} \cdot (-291,25) + \frac{1}{EA_G} \cdot (5587,5) + (7,2 \cdot 10^{-3}) \\
&= 1022,615
\end{aligned}$$

Pomaci  $\delta_{1,1}$ ,  $\delta_{1,2}$ ,  $\delta_{1,3}$ ,  $\delta_{2,1}$ ,  $\delta_{2,2}$ ,  $\delta_{2,3}$ ,  $\delta_{3,1}$ ,  $\delta_{3,2}$  i  $\delta_{3,3}$  su pomaci uzrokovani jediničnim silama.

Pritom vrijedi

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$$

$$\delta_{1,3} = \delta_{3,1}$$

$$\delta_{2,3} = \delta_{3,2}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^l \left[ \frac{m_1(x) \cdot m_1(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{n_1(x) \cdot n_1(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\ &= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + (4 \cdot 1) \cdot (1) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA_G} \cdot [(12 \cdot 0,25) \cdot (0,25)] \\ &= \frac{1}{EI_s} \cdot (5,33) + \frac{1}{EI_G} \cdot (1) + \frac{1}{EA_G} \cdot (0,75) \\ &= 10,23274 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \int_0^l \left[ \frac{m_2(x) \cdot m_2(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{n_2(x) \cdot n_2(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\ &= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ (2 \cdot 1 \cdot 1) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA_G} \cdot [(12 \cdot 0,25) \cdot (0,25)] \\ &= \frac{1}{EI_s} \cdot (3,33) + \frac{1}{EI_G} \cdot (1) + \frac{1}{EA_G} \cdot (0,75) \\ &= 6,77674 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{33} &= \int_0^l \left[ \frac{m_3(x) \cdot m_3(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{n_3(x) \cdot n_3(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\ &= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2 \right) - \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA_G} \cdot [(12 \cdot 2,5) \cdot (2,5)] \\ &= \frac{1}{EI_s} \cdot (40) + \frac{1}{EI_G} \cdot (4) + \frac{1}{EA_G} \cdot (75) \\ &= 75,37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} &= \int_0^l \left[ \frac{m_1(x) \cdot m_2(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{n_1(x) \cdot n_2(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA_G} \cdot [(12 \cdot 0,25) \cdot (-0,25)] \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot (0,66) + \frac{1}{EI_G} \cdot (1) + \frac{1}{EA_G} \cdot (-0,75) \\
&= 2,13526
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{13} &= \int_0^l \left[ \frac{m_1(x) \cdot m_3(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{n_1(x) \cdot n_3(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + (4 \cdot 1) \cdot (2) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA_G} \cdot [(12 \cdot 0,25) \cdot (2,5)] \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot (12) + \frac{1}{EI_G} \cdot (2) + \frac{1}{EA_G} \cdot (7,5) \\
&= 22,961
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{23} &= \int_0^l \left[ \frac{m_2(x) \cdot m_3(x)}{EI(x)} \right] dx + \int_0^l \left[ \frac{n_2(x) \cdot n_3(x)}{EA(x)} + \alpha t_s \right] dx \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot \left[ (2 \cdot 1) \cdot (-1) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{-1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{EI_G} \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 0,5 \right) \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 \right] + \frac{1}{EA_G} \cdot [(12 \cdot 0,25) \cdot (-2,5)] \\
&= \frac{1}{EI_s} \cdot (-2) + \frac{1}{EI_G} \cdot (2) + \frac{1}{EA_G} \cdot (-7,5) \\
&= -1,681
\end{aligned}$$

Sada te pomake koje smo dobili uvrštavamo u sustav jednažbi

$$\sum_{j=1}^n \delta_{i,j} X_j + \delta_{i,0} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

a rješenje tog sustava dat će nam vrijednosti prekobrojnih sila kojima smo nadomjestili raskinute veze.

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 &= 0 \\ \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 &= 0 \\ \delta_{30} + \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-221,01674 + 10,23274 \cdot X_1 + 2,13526 \cdot X_2 + 22,961 \cdot X_3 &= 0 \\ -588,63326 + 2,13526 \cdot X_1 + 6,77674 \cdot X_2 - 1,681 \cdot X_3 &= 0 \\ 1022,615 + 22,961 \cdot X_1 - 1,681 \cdot X_2 + 75,37 \cdot X_3 &= 0\end{aligned}$$

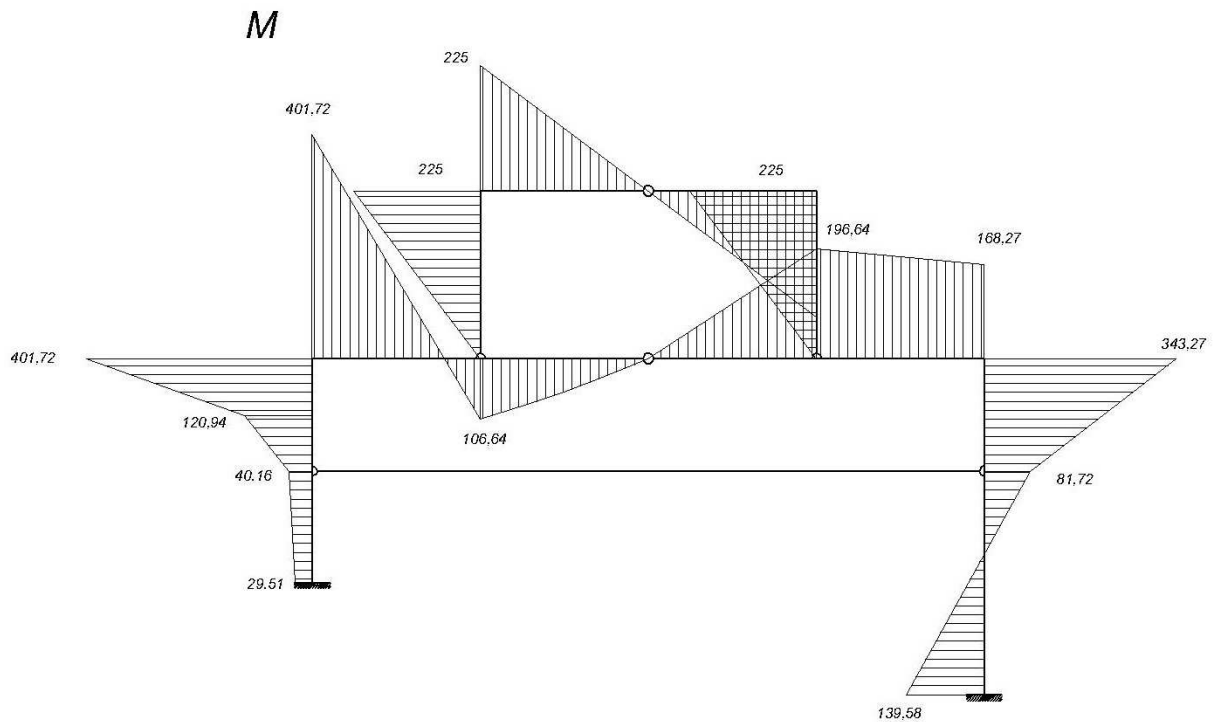
$$\begin{aligned}X_1 &= 139,578 \\ X_2 &= 29,5143 \\ X_3 &= -55,3231\end{aligned}$$

Konačni dijagrami sila na statički neodređenom sustavu dobiveni su, kako je već prije navedeno, kao algebarski zbroj unutarnjih sila izazvanih vanjskim opterećenjem i unutarnjih sila izazvanih jediničnim silama te pomnoženih s prekobrojnim veličinama,

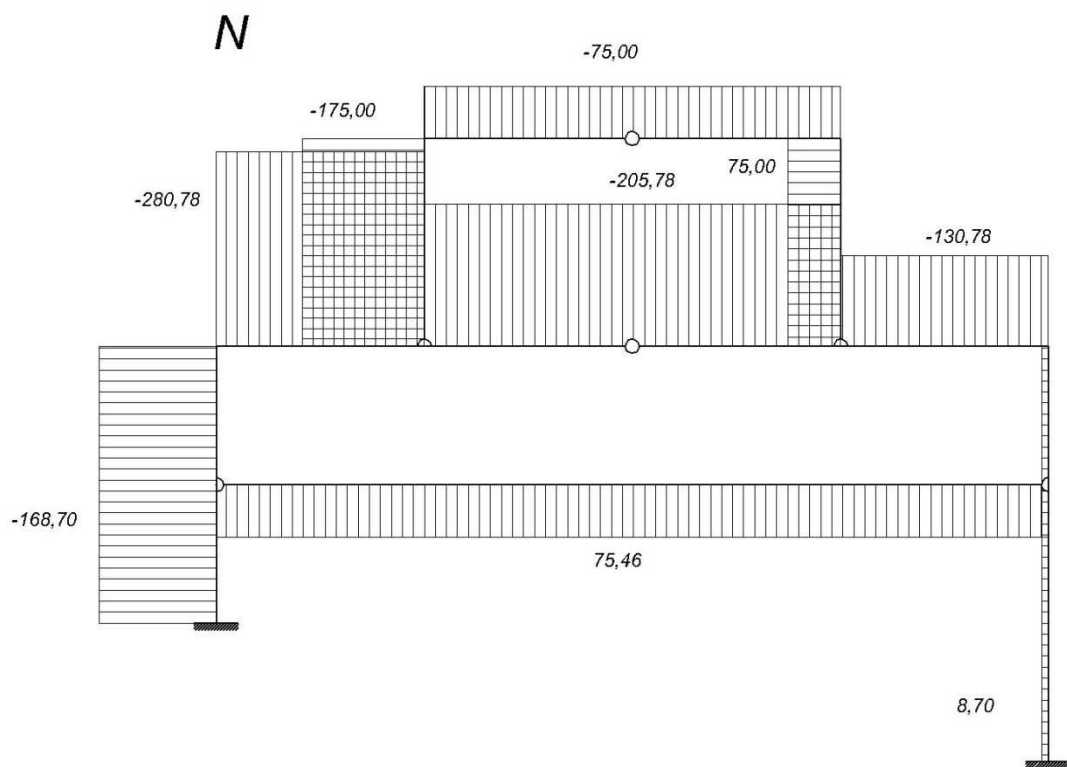
$$M(x) = M_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i m_i(x),$$

$$T(x) = T_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i t_i(x),$$

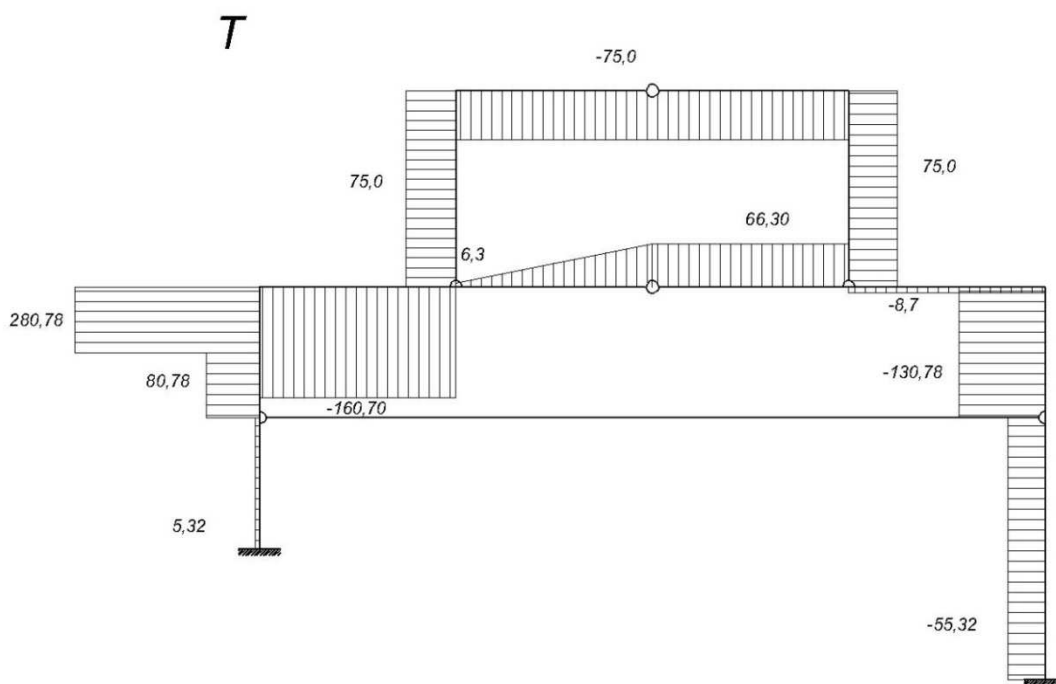
$$N(x) = N_0(x) + \sum_{i=1}^n X_i n_i(x).$$



Slika 6.21



Slika 6.22

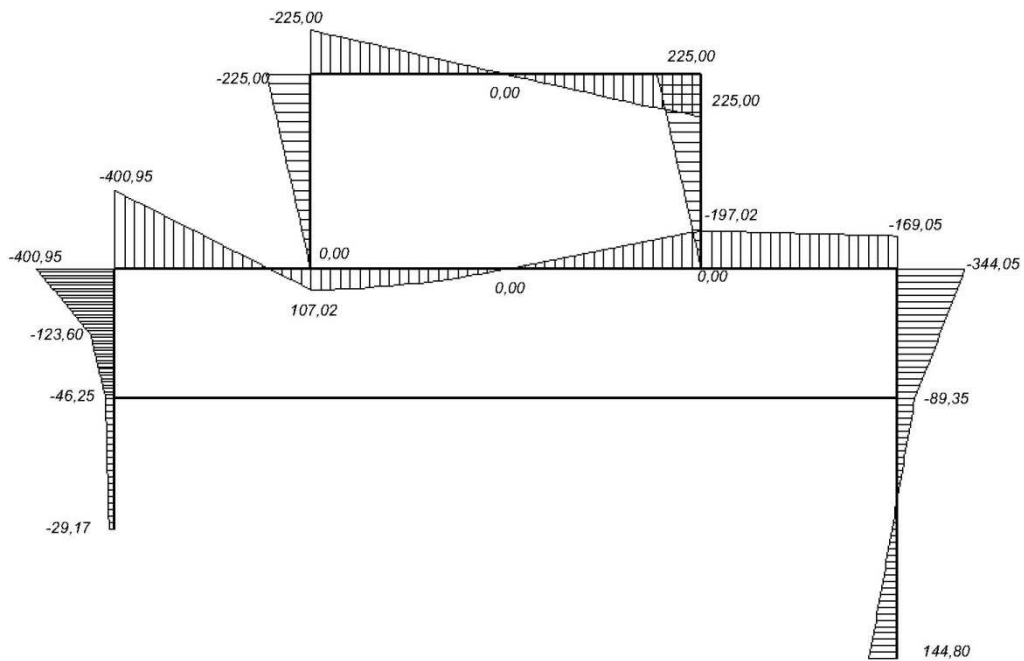


Slika 6.23



Za usporedbu dani su rezultati dobiveni programom LinPro 2.7.

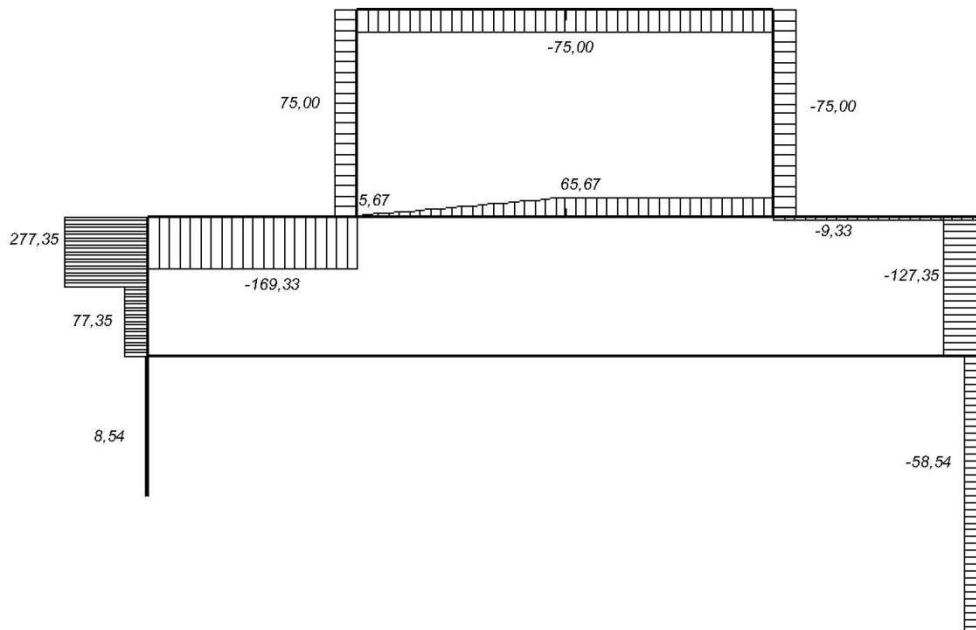
Momentni dijagram:



Moment Diagram, Comb: CASE1, Units: kN-m  
LinPro 2.7

Slika 6.24

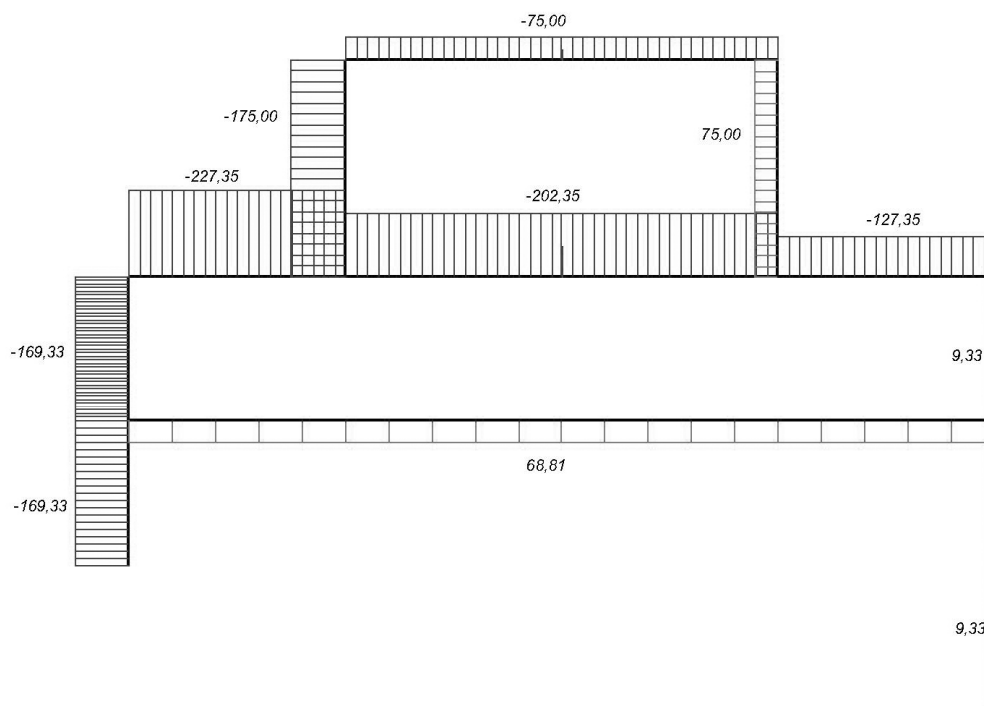
Dijagram posmičnih sila:



Shear Force Diagram, Comb: CASE1, Units: kN-m  
LinPro 2.7

Slika 6.25

Dijagram uzdužnih sila:



Axial Force Diagram, Comb: CASE1, Units: kN-m  
LinPro 2.7

Slika 6.26

U usporedbi rezultata možemo vidjeti manje razlike. Razlog tome je što program, osim momenata, u obzir uzima i uzdužne sile koje su u proračunu, s izuzetkom uzdužne sile u zatezi, bile zanemarene.

## 7. Zaključak

Metoda jedinične sile omogućava relativno jednostavno računanje pomaka bile koje točke na konstrukciji. To je značajno kraći i jednostavniji postupak od analitičkog rješavanja diferencijalne jednačbe progibne linije, a primjena Vereščaginova teorema na štapnim konstrukcijama to svodi na jednostavno određivanje površine i traženje težišta na dijagramu unutarnjih sila od vanjskog opterećenja te određivanje ordinate u težištu dijagrama unutarnjih sila od jediničnog opterećenja.

Provođenjem proračuna na Bernoulli-Eulerovoj gredi zanemarujemo poprečnu silu što dodatno olakšava cijeli proračun. Također možemo zanemariti i uzdužnu silu  $N$ , osim ako je ona dominantna sila na elementu, zato što je njezin doprinos u odnosu na doprinos momenta najčešće jako mali.

## 8. Literatura

- [1] Anđelić, Milutin: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [2] Dorn, William S.; McCracken, Daniel D.: *Numerical Methods with Fortran IV Case studies*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [3] Došlić, T.; Sandrić, N.: *Matematika 1: Skripta iz matematike 1*, <http://www.grad.hr/nastava/mat1/MAT1.html>
- [4] Fresl K.; Simović V.: *Građevna statika I: bilješke i skice s predavanja*, <http://www.grad.hr/nastava/gS/bilj1/index.html>
- [5] Press, W.H.; Flannery, B.P.; Teukowsky, S.A.; Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes in C (The Art of Scientific Computing)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [6] Simović, V.: *Građevna statika I*, Građevinski institut Zagreb, Zagreb, 1988.
- [7] Šimić, Vice: *Otpornost materijala I*, Školska knjiga Zagreb, Zagreb, 2007.
- [8] Šimić, Vice: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga Zagreb, Zagreb, 2002.