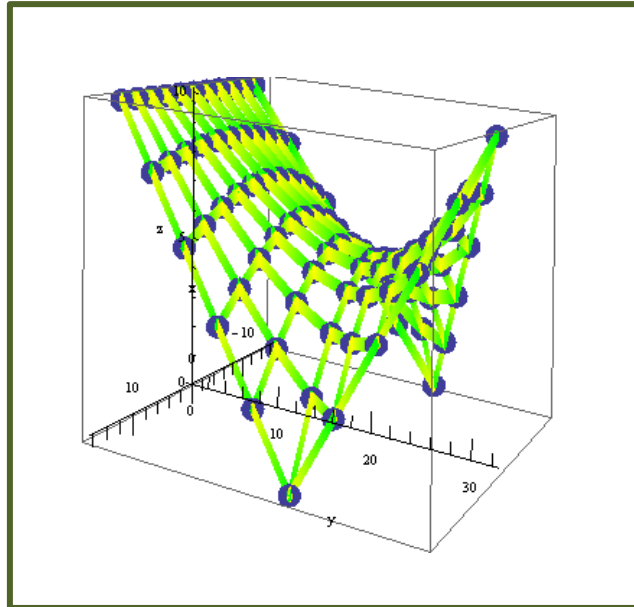


METODA GUSTOĆE SILA

ZAVRŠNI RAD



Studentica: Nikolina Smokrović
Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.
Ak. god. 2010./11.

Zagreb; 5. srpnja 2011.

SADRŽAJ:

| | |
|--|-----------|
| 1. POVIJEST RAZVOJA KONSTRUKCIJA OD UŽADI | 4 |
| 2. UVOD O KONSTRUKCIJAMA OD UŽADI | 8 |
| 2.1. SVOJSTVA UŽETA | 8 |
| 2.2. UŽAD ZA VLAČNE KONSTRUKCIJE | 9 |
| 2.3. SPAJANJE UŽADI U MREŽE | 10 |
| 2.4. GLAVNA OBILJEŽJA KONSTRUKCIJA OD UŽADI | 11 |
| 3. OBLIKOVANJE KONSTRUKCIJA OD UŽADI | 13 |
| 3.1. TRAŽENJE OBLIKA | 13 |
| 3.1.1. PRORAČUNSKI MODEL MREŽE OD UŽADI | 13 |
| 3.1.2. UVJETI RAVNOTEŽE ČVORA | 13 |
| 3.1.3. TVORBA SUSTAVA JEDNADŽBI | 18 |
| 4. METODA GUSTOĆE SILA | 20 |
| 5. PRIMJERI | 26 |
| PRIMJER 1 | 26 |
| PRIMJER 2 | 31 |
| PRIMJER 3 | 44 |
| 6. ZAKLJUČAK | 50 |
| LITERATURA | 51 |

1. Povijest razvoja konstrukcija od užadi

Početak razvoja „konstrukcija“ od užadi seže u daleku prošlost. Nastambe nomadskog stanovništva morale su biti takve da se mogu jednostavno demontirati na trenutnoj lokaciji, transportirati s jednog mjesta na drugo, te na tome drugom mjestu brzo i lagano opet složiti. Pustinjska plemena kao primjerice Beduini, Mauri i Kurdi žive u šatorima čija konstrukcija pokazuje sve osnovne značajke današnjih laganih konstrukcija od užadi i tkanine. Njihovi „crni šatori“ sklopljeni su od užadi postavljene preko stupova koji se nalaze u sredini i oko rubova. Užad je sidrena na štapove u tlu. Preko nje složeni su trokutasto izrezani oblici životinjske kože koji prihvaćaju vanjsko opterećenje, te ga prenose na užad, stupove i konačno u tlo.

Spletove između dvaju stabala, nastale od dostupnog materijala – biljnih vlakana i granja – pomoću kojih su ljudi, u početku razvoja civilizacije, premošćivali prepreke među tim stablima, smatramo prvim visećim mostovima (slika 1). Već prije 4000 godina ljudi su instinktivno prepoznali prednosti nosivog elementa kojeg danas zovemo uže. Čovjek se razvija, „konstrukcije“ su sve složenije. Pojedinačno uže zamijenjeno je s dva paralelno postavljena na koja su složene daske u poprečnom smjeru, prvi oblik današnjih kolničkih konstrukcija. Sljedeći korak je postavljanje još jednog para užadi, malo iznad nosive – prve ograde na mostovima. Najčešći materijal za izradu tih prastarih mostova bio je bambus.



Slika 1: Prastare konstrukcije od užadi

Proizvodnja lijevanog željeza u Europi otvara put razvoju visećih mostova velikih raspona. Jedan od prvih je Menai Strait Bridge u Sjevernom Walesu. Užad koja se koristi na mostu sastavljena je od niza šipaka međusobno povezanih iglama. Na taj način postignuto je gipko ponašanje užeta, iako njegovi sastavni elementi, sami za sebe, nisu takvog svojstva. Ovaj tip užadi razvojem čelika zamijenjen je onom od visokočvrstoga, do 10 puta veće čvrstoće. Glavna joj prednost leži u činjenici da se može proizvesti jako velike duljine, pa potrebe za iglama više nema. To uvelike pridonosi pouzdanosti konstrukcije. Naime, vjerojatnost da uže pukne na mjestu povezivanja dvije šipke neusporedivo je veća od vjerojatnosti da se slomi na svom kontinuiranom dijelu. Takvu užad možemo vidjeti na Brooklyn Bridgeu u New Yorku, primjeru težnje projektanata čistoći konstrukcije u kojoj je jasna uloga svakog elementa u lancu prijenosa sila do tla.

Razvoj čelika te nove spoznaje i iskustva na području projektiranja omogućuju izradu sve laganijih mostova. Istraživanja ponašanja laganih konstrukcija, užadi i elemenata koje ona nose, nisu pratila korak njihova napretka. Rade se sve ekstremnije konstrukcije bez pravog poznavanja cjelokupne palete njihova ponašanja u situacijama potencijalno opasnim po njih. Štoviše, bez spoznaje o tome koje situacije jesu opasne. Kako to u povijesti čovječanstva općenito biva, i na području laganih konstrukcija u određenoj se mjeri i na greškama učilo. Procesu projektiranja pristupa se na temelju znanja i iskustva. Ipak, do kud god čovjek dođe u svom učenju, uvijek je prisutna razina neznanja.



Slika 2: Tacoma Narrows Bridge; Washington, SAD

Ta razina može dovesti do havarija. Jedna takva dogodila se 7. studenog 1940. godine. Most Tacoma (slika 2), otvora 855 m, srušio se pod djelovanjem vjetra brzine svega 18,8 m/s kad je uzbudna frekvencija tog djelovanja pogodila vlastitu frekvenciju mosta. Odnosi širina/raspon i debljina kolničke konstrukcije/raspon ovog mosta bili su 1/72 odnosno 1/32. Nakon rušenja zaključeno je da su takvi omjeri daleko premali i u budućnosti nedopustivi. Usporedbe radi, najveća brzina vjetra do tada izmjerena iznosila je 45 m/s.

Danas je most Akashi-Kaikyo u Japanu, otvoren 1998. godine najdulji viseći most na svijetu. Dva paralelno postavljena čelična užeta, svaki promjera 112 cm, premošćuju raspon od rekordnih 1991 m između dva pilona. Među 10 najduljih mostova s jednim rasponom u svijetu nije se našao niti jedan koji nije viseći.

Osim visećih mostova, konstrukcije od užadi najčešće su krovovi stadiona i sportskih dvorana, te izložbeni paviljoni. Primjeri takvih su krovovi Raleigh Arene u Sjevernoj Karolini, SAD, Njemačkog paviljona na Svjetskoj izložbi Expo u Montrealu 1967. godine (slika 4), te Olimpijskog stadiona u Münchenu (slika 3).



Slika 3: Olimpijski kompleks u Münchenu



Slika 4: Mreža užadi Njemačkog paviljona na Svjetskoj izložbi u Montrealu, 1967.

2. Uvod o konstrukcijama od užadi

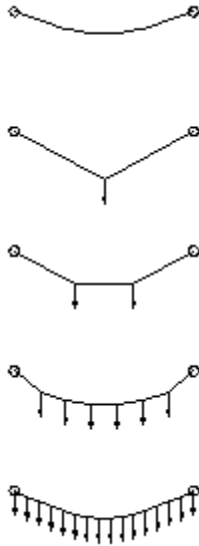
Konstrukcije od užadi sastoje se od kombinacije užadi usidrene u temelje ili u komplementarnu konstrukciju. Takve se konstrukcije u velikoj većini slučajeva pokrivaju tkaninom.

2.1. Svojstva užeta

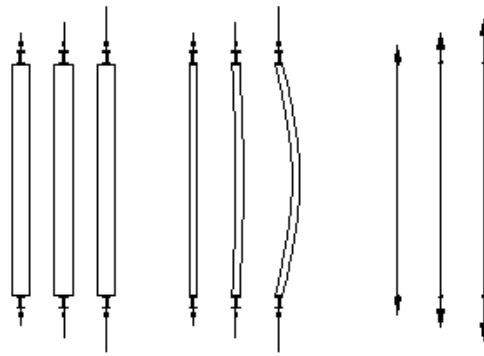
Uže je gipki element koji prenosi centričnu vlačnu silu, bez krutosti na savijanje i torziju. Oblik užeta jako je osjetljiv na promjene opterećenja, bilo kroz intenzitet, smjer ili njegovu razdiobu (slika 5). Pri vertikalnom opterećenju jednoliko raspodijeljenom po jedinici duljine raspona smjera gravitacije obješeno uže poprima oblik parabole. Taj oblik odgovara obliku obrnutog luka. Za razliku od užeta u kojem se, kako je već navedeno, pojavljuje vlačna sila, luk prenosi tlak. Upravo u toj činjenici leži prednost užeta nad lukom. Pri djelovanju tlaka dva su moguća načina otkazivanja nosivosti:

1. otkazivanje poprečnog presjeka u kojem su tlačna naprezanja zbog vanjskog djelovanja dosegla tlačnu čvrstoću materijala,
2. otkazivanje gubitkom stabilnosti elementa zbog djelovanja tlačne sile.

Vjerojatnost otkazivanja elementa može biti samo jednaka ili veća od vjerojatnosti otkazivanja poprečnog presjeka, a u izravnoj je vezi s dimenzijama poprečnog presjeka tlačnog elementa. Što je element vitkiji, odnosno za istu duljinu tanji, za konstantno opterećenje raste vjerojatnost da će se izviti prije nego što naprezanja dosegnu tlačnu čvrstoću materijala. Takav problem kod užeta ne postoji budući da se vlačno opterećen element može slomiti samo na jedan način – na najslabijem poprečnom presjeku kada vlačna naprezanja prekorače vrijednost čvrstoće na vlak. Stoga je užad moguće stanjiti do razine vlačne čvrstoće (slika 6). Tako je kod vlačnih konstrukcija u cilju postizanja veće atraktivnosti moguće upotrebljavati tanje elemente veće čvrstoće. Kako je kvalitetniji materijal ujedno i skuplji, ekonomsko je pitanje pronalaska optimuma količine i jedinične cijene materijala.



Slika 5: Uže poprima različite oblike pri različitom opterećenju



Slika 6: Usporedba ponašanja tlačno i vlačno opterećenog elementa

2.2. Užad za vlačne konstrukcije

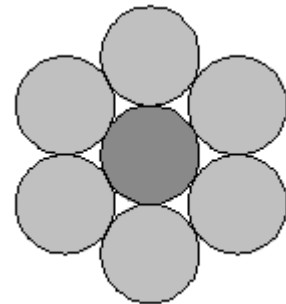
1. Spiralni snopovi

Najpogodniji za mreže od užadi i užad ovješeneh mostova. Uobičajene vrijednosti mehaničkih karakteristika su:

$$E = 170 \text{ kN/mm}^2 \pm 5 \text{ kN/mm}^2 ;$$

$$f_{c,o,d} = 1770 - 1860 \text{ kN/mm}^2 .$$

Broj snopova koji čine uže varira od 7 do 91, a u ovisnosti o njemu promjer se kreće od 7 mm do 91 mm.



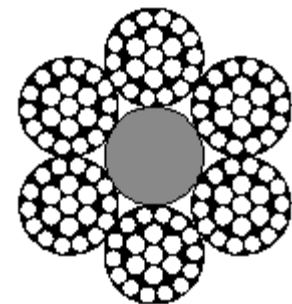
2. Žičana užad sa čeličnom jezgrom

Koristi se kao rubna užad kod konstrukcija od prednapete vlačne tkanine.

Prosječna vrijednost modula elastičnosti jest

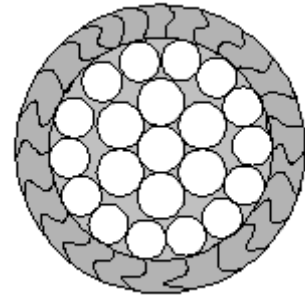
$$E = 100 \text{ kN/mm}^2 \pm 10 \text{ kN/mm}^2 .$$

Užad je promjera 6 - 45 mm.



3. Kabeli unutar krutog užeta

Užad u ovješnim krovnim konstrukcijama, visećim i ovješnim mostovima. Promjera 20 - 124 mm, modula elastičnosti 160 - 180 kN/mm².



2.3. Spajanje užadi u mreže

Užad se na različite načine spaja u mreže.

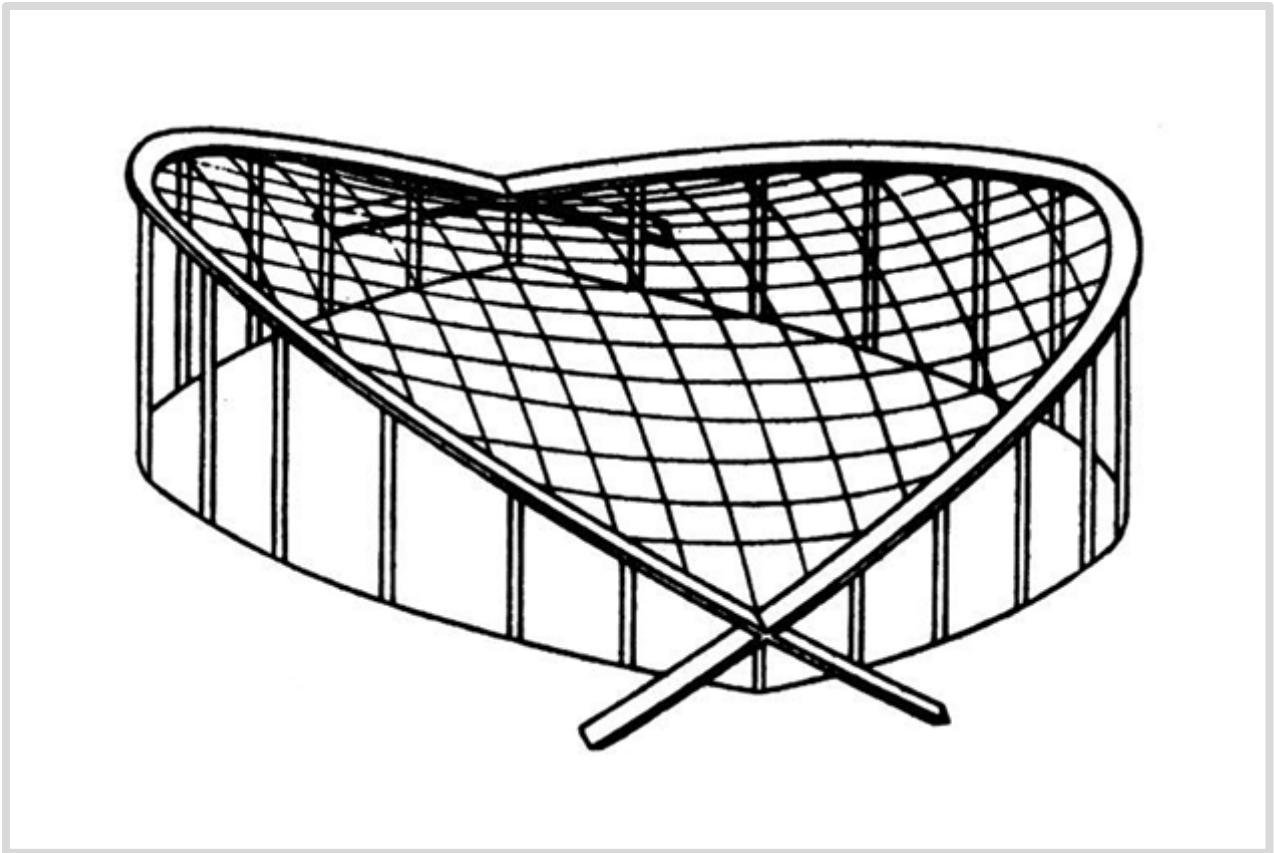
Pravčasta mreža je ona koja se sastoji od užadi čija os je pravac. Takva mreža je geodetska (svako uže leži na najkraćoj spojnici svojih rubnih točaka) i ta činjenica glavna je prednost ove vrste mreže. U vjerojatnim okolnostima ne može se dogoditi da se izgube sile prednapona zbog djelovanja vanjskog opterećenja s obzirom da se pravac tada može još samo više napregnuti. Ipak, nisu našle veliku primjenu u graditeljstvu.

Regularna mreža užadi sastoji se od dvije familije užadi – konkavne i konveksne. Te familije tvore sedlastu plohu (takvu kojoj središta glavnih zakrivljenosti leže na suprotnim stranama). Pod djelovanjem vertikalnog opterećenja u smjeru gravitacije (npr. snijeg) konkavna užad je nosiva i vlačne se sile u njoj povećavaju, dok se istodobno smanjuju u konveksnoj užadi koju nazivamo prednaponskom. Pri djelovanju vertikalnog opterećenja u smjeru suprotnom smjeru djelovanja gravitacije suprotan je i utjecaj na povećanje odnosno smanjene unutarnjih sila u užadi. Najjednostavniji oblik ovakve mreže užadi je „konstrukcija u četiri točke“. Izvedba je sljedeća:

1. Uže preko dva stupa usidrimo u tlo.
2. Drugo uže prebacimo preko prvoga pod pravim kutem. Usidrimo ga u tlo tako da zategne prvo uže, odnosno povuče ga prema dolje. Ta dva užeta sada su prednapeta silama kojima djeluju jedan na drugoga.
3. Postavimo četiri rubna užeta.
4. Dodamo prikladan broj dodatne užadi paralelne s prava dva užeta.

Primjer regularne mreže užadi mreža je krova Raleigh Arene (slika 7).

Složeniji tip mreža od užadi jesu neregularne. U ovu skupinu spadaju takve mreže kod kojih je užad kompleksnije složena, pri čemu možemo razaznati više od dvije familije užadi, može se dogoditi da se uže prekine unutar konstrukcije, isto uže može biti na jednom svom dijelu konveksno, na drugom konkavno, odnosno može mijenjati predznak zakrivljenosti, a unutar konstrukcije se mogu pojaviti i kruti elementi.



Slika 7: Regularna mreža užadi; Raleigh Arena, Sjeverna Karolina, SAD

2.4. Glavna obilježja konstrukcija od užadi

Konstrukcije od užadi vlačne su konstrukcije koje prenose opterećenje centričnom vlačnom silom. Spadaju u skupinu laganih konstrukcija. Naime, vlastita težina ovih

konstrukcija zanemarive je vrijednosti u usporedbi s ostalim djelovanjima na nju (snijeg, vjetar). Zbog svoje neznatne težine i malog prostora koji zauzimaju, tanki elementi oblikovani na različite i zanimljive načine izgledaju atraktivno u prostoru odajući dojam prozračnosti i nespitanosti. Kao takve konstrukcije od užadi vrlo su ugodni prostori boravka ljudi. Neke od njih jako nalikuju prastarim čovjekovim nastambama, a oblikovanjem je relativno lako imitirati razne prirodne tvorevine, te ih je stoga moguće vrlo dobro uklopiti u okoliš.

Projektiranje konstrukcija od užadi razlikuje se od projektiranja tradicionalnih masivnih konstrukcija od betona, opeke, čelika (koji nije u obliku užeta) itd. Glavni uzrok različitosti leži u činjenici da su pomaci konstrukcije od užadi zbog opterećenja takve veličine da ih se mora uzeti u obzir pri projektiranju.

Dok je kod tradicionalnih masivnih konstrukcija nosivost ostvarena vlastitom težinom konstrukcije i krutošću materijala od kojeg je izgrađena, kod konstrukcija od užadi ona se postiže prednapinjanjem i optimalnim oblikovanjem.

Što su sile prednapona veće, manje će se očitovati svojstvo užeta da zbog svoje gipkosti mijenja oblik i pri maloj promjeni opterećenja. One moraju biti dovoljno velike da konstrukcija ne olabavi pod djelovanjem vanjskog opterećenja. Ipak, pri određivanju optimalne prednaponske sile potrebno je imati na umu da je njezina veličina u izravnoj vezi s veličinom sile koju moraju primiti oslonci na koje je nategnuto uže, pa tako i s njihovim dimenzijama, dimenzijama užadi, a u konačnici i cijenom projekta te estetskim obilježjima koja se krše s osnovnim značajkama laganih konstrukcija. Spomenute oslonce nazivamo komplementarnim konstrukcijama, a upotrebljavamo ih ako su mjesta usidrenja užadi visoko iznad tla i rasponi veliki. U suprotnom, užad se sidri u temelje u tlu. Vrlo je vjerojatno da sila prednapona neće, zbog mehaničkih karakteristika materijala (osjetljivost na zamor), ili u krajnjem slučaju iz ekonomskih razloga, biti odabrana takvom da su pomaci konstrukcije apsolutno nedopustivi. Tada treba voditi računa o tome da pokrov koji naliježe na konstrukciju bude takav da može pratiti deformacije svojih oslonaca bez da odgovori koji se pri tome u njemu javljaju dosegnu maksimalno dopuštene vrijednosti.

Moto na kojem se zasniva filozofija projektiranja konstrukcija od užadi je – minimum materijala, maksimum krutosti kroz oblikovanje. Oblik užadi nije moguće unaprijed odrediti, ta zadaća zahtjeva iteracijski postupak traženja oblika. Proces traženja oblika glavna je specifičnost ovih konstrukcija u odnosu na tradicionalne.

3. Oblikovanje konstrukcija od užadi

Oblikovanje konstrukcija od užadi bitno se razlikuje od oblikovanja tradicionalnih konstrukcija od betona, opeke, čelika ili drveta. Sastoji se od tri koraka:

1. traženje oblika,
2. geometrijski nelinearan statički proračun,
3. određivanje duljine užadi.

U ovom ćemo se radu baviti samo traženjem oblika.

3.1. Traženje oblika

Traženje oblika, u literaturi nazvano *form finding*, prva je faza oblikovanja konstrukcija od užadi. Takva konstrukcija određena je položajem rubnih čvorova, odnosno oblikom konstrukcije u koju se užad sidri. Položaj unutarnjih čvorova mreže potrebno je odrediti tako da zadovoljava estetske uvjete, ali i uvjete mogućnosti izvedbe i povoljne razdiobe sila unutar konstrukcije.

3.1.1. Proračunski model mreže od užadi

Proračunski model mreže od užadi sustav je zglobno spojenih štapnih (konačnih) elemenata. Čvorom je nazvano sjecište dva užeta, a dio užeta između dva čvora štapom. Pretpostavljamo da su štapovi centrički spojeni u čvorove. To u stvarnosti najčešće nije točno već su kabeli postavljeni jedan na drugoga, pa im se osi mimoilaze.

3.1.2. Uvjeti ravnoteže čvora

Uvjeti ravnoteže čvora i možemo izraziti na dva načina:

1. Simetričan zapis u kojem su sve koordinate ravnopravne

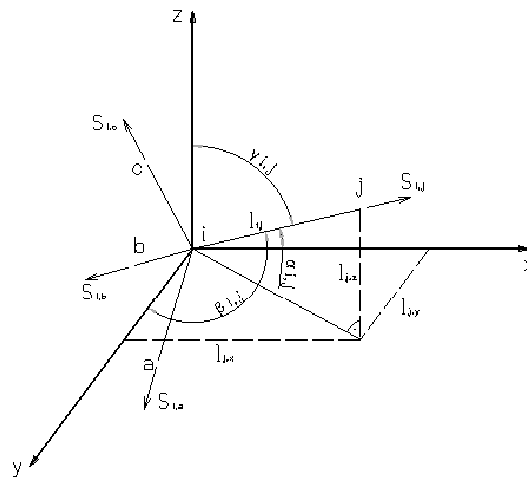
Zbroj projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenima u čvor i u odnosu na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži sa komponentama vanjskog opterećenja P .

$$\sum_{j=1}^n X_{i,j} = P_{x,i} ,$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{i,j} = P_{y,i} ,$$

$$\sum_{j=1}^n Z_{i,j} = P_{z,i} ,$$

gdje je n broj štapova priključenih u čvor i .



Oblik konstrukcija od užadi traži se samo pod djelovanjem sila prednapona. Vanjsko opterećenje uvodi se u sljedećoj fazi - fazi geometrijski nelinearnog statičkog proračuna. Dakle:

$$\sum_{j=1}^n X_{i,j} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n Y_{i,j} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n Z_{i,j} = 0 .$$

Neka su $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ i $\gamma_{i,j}$ kutovi koje štap između čvorova i i j , odnosno sila u štapu $S_{i,j}$ zatvara sa koordinatnim osima x , y , z .

$$\alpha_{i,j} = \sphericalangle(l_{i,j}, x), \beta_{i,j} = \sphericalangle(l_{i,j}, y), \gamma_{i,j} = \sphericalangle(l_{i,j}, z),$$

pri čemu je $l_{i,j}$ duljina štapa ij . Tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \alpha_{i,j} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \beta_{i,j} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \cos \gamma_{i,j} = 0.$$

Kosinusi kutova $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ i $\gamma_{i,j}$ mogu se izraziti kao

$$\cos \alpha_{i,j} = \frac{l_{j,x}}{l_{i,j}} = \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}},$$

$$\cos \beta_{i,j} = \frac{l_{j,y}}{l_{i,j}} = \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}},$$

$$\cos \gamma_{i,j} = \frac{l_{j,z}}{l_{i,j}} = \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}},$$

pri čemu su x_i , y_i , z_i koordinate čvora i u prostoru, a x_j , y_j , z_j koordinate čvora j .

Tada gornji oblik jednadžbe ravnoteže možemo razviti u

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} = 0,$$

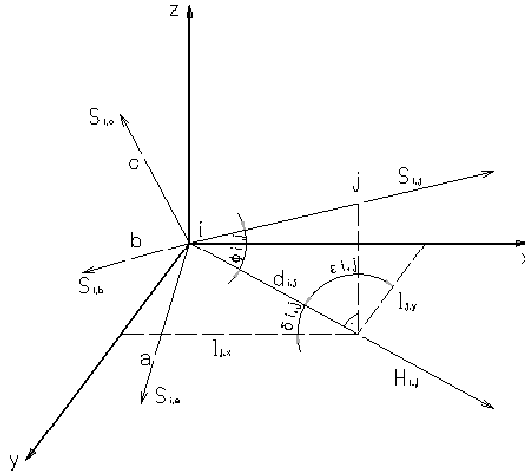
$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} = 0.$$

Kako je

$$l_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

sustav jednadžbi je nelinearan.

2. Zapis pomoću projekcija sila i duljina na ravninu xy



Neka je $H_{i,j}$ projekcija sile $S_{i,j}$ na horizontalnu ravninu xy , i neka je $d_{i,j}$ projekcija štapa $l_{i,j}$ na istu ravninu. Tada uvjete ravnoteže čvora i možemo zapisati u obliku

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \cos \delta_{i,j} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \cos \epsilon_{i,j} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{i,j} = 0 ;$$

$\delta_{i,j}$ i $\epsilon_{i,j}$ kutovi su što ih projekcije sile $H_{i,j}$ zatvaraju sa osima x i y , a $\varphi_{i,j}$ je kut između štapa u prostoru i njegove projekcije na ravninu xy .

Vrijedi

$$\cos \delta_{i,j} = \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}} ,$$

$$\cos \epsilon_{i,j} = \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}} ,$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{i,j} = \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}} .$$

Konačno, razvijeni oblik drugog zapisa jednadžbi ravnoteže jest

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}} = 0 .$$

Između zapisa jednadžbi ravnoteže na prvi i drugi način postoji očita ekvivalencija. Naime, vrijedi

$$S_{i,j} \cos \varphi_{i,j} = H_{i,j} .$$

Kosinus kuta $\varphi_{i,j}$ između štapa u prostoru i njegove projekcije na ravninu xy možemo izraziti kao

$$\cos \varphi_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{l_{i,j}} ,$$

pa gornja jednadžba prelazi u

$$S_{i,j} \cdot \frac{d_{i,j}}{l_{i,j}} = H_{i,j} ,$$

odnosno

$$S_{i,j} = \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} .$$

Uvrštavanjem tog izraza u jednadžbe ravnoteže u prvom obliku,

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

dobivamo

$$\sum_{j=1}^n \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}} \cdot H_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} = 0,$$

što je nakon sređivanja izraza zapravo drugi zapis ravnoteže čvora:

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{d_{i,j}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{d_{i,j}} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{d_{i,j}} = 0.$$

3.1.3. Tvorba sustava jednadžbi

Neka je N broj slobodnih čvorova, a S broj štapova. Tada je moguće napisati $3N$ jednadžbe ravnoteže. Nepoznanica je $3N + S$ (tri koordinate svakog slobodnog čvora i sila u svakom štapu). Broj nepoznanica je za S veći od broja jednadžbi, pa ih nije moguće jednoznačno odrediti. Uvjet jednoznačnosti rješenja jednak je broj nepoznanica i jednadžbi iz kojih ih trebamo odrediti. Dakle, nedostaje nam S jednadžbi. Sustav je moguće učiniti jednoznačno rješivim uvođenjem nekog slobodno odabranog pravila eliminacije sila u štapovima kao nepoznanica. To pravilo može biti jedno od sljedećih:

1. „Kvazilaplaceovo pravilo“

Unaprijed su zadane uravnotežene projekcije sila u svim štapovima na ravninu xy .

2. Pravilo „gustoće sila“

Zadaju se omjeri između iznosa sila i duljina pojedinačnih štapova.

3. Pravilo „geodetske mreže“

Zadani su iznosi sila u svim štapovima.

4. „Kombinirano pravilo“

U nekim štapovima zadani su iznosi sila, u ostalima je definirana linearna ovisnost sile o deformaciji.

U ovom radu detaljnije ćemo obraditi metodu gustoće sila.

Prije toga reći ćemo nekoliko riječi o geodetskoj mreži koja je „najprirodniji“ oblik konstrukcije od užadi. Užad se postavlja u položaj koji tvori geodetsku mrežu ako za prednapinjanja omogućimo kabelima da slobodno kližu jedan po drugome bez trenja. Tada svako uže dolazi u položaj koji odgovara najkraćoj spojici njegovih krajnjih točaka. Sile u svim štapovima su jednake, a ukupna duljina užadi je minimalna. Nakon prednapinjanja i postizanja konačne geometrije užad međusobno spajamo.

4. Metoda gustoće sila

Proračun gipkih konstrukcija traži uvažavanje geometrijske, a katkad i materijalne nelinearnosti. Geometrijska nelinearnost podrazumijeva nepravocrtan graf prikaza odnosa opterećenja i pomaka konstrukcije. Ona zahtijeva uspostavljanje stanja ravnoteže na deformiranoj konstrukciji. Taj nelinearan problem proračunski se pojednostavljuje primjenom metode gustoće sila.

Metoda gustoće sila razvijena je za potrebe kompjutorskog modeliranja krova Olimpijskog stadiona u Münchenu (slika 8). Mreža krova sastavljena je od 210 km užadi i pokriva površinu od 75000 m². Za proračun takvog opsega dotad korišteni fizikalni modeli nisu bili dovoljni za određivanje oblika. Napravljen je računalni program za rješavanje te zadaće utemeljen na metodi gustoće sila. Metoda primjenjuje linearan sustav jednačbi za postavljanje uvjeta ravnoteže prednapetog užeta. Ova transformacija nelinearnoga problema u linearan omogućava direktno rješavanje. Metodom gustoće sila dobivaju se oblici vlačnih konstrukcija koji su u statičkoj ravnoteži. Sve takve konstrukcije ne moraju nužno biti prihvatljive zbog premale krutosti, nepovoljnog djelovanja na komplementarnu konstrukciju, nedovoljnih padova za oborinsku vodu i sl.



Slika 8: Detalj mreže užadi Olimpijskog kompleksa u Münchenu

Ako unaprijed zadamo omjer $q_{i,j} = S_{i,j}/l_{i,j}$, nazvan gustoćom sila, nelinearan sustav jednadžbi ravnoteže

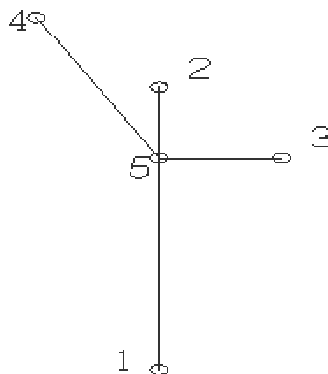
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{x_i - x_j}{l_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{y_i - y_j}{l_{i,j}} &= 0, \\ \sum_{j=1}^n S_{i,j} \cdot \frac{z_i - z_j}{l_{i,j}} &= 0 \end{aligned}$$

prelazi u linearan

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) &= 0. \end{aligned}$$

Primjer: Iz mreže užadi izdvojili smo čvor 5 u koji su spojena četiri štap. Svaki štap ima dva kraja, od kojih je svima jedan krajnji čvor čvor 5 čije su nam koordinate nepoznate. Koordinate ostalih čvorova zadane su kao:

- 1(1,2,3)
- 2(2,3,4)
- 3(3,3,3)
- 4(4,6,2)



Razvijen oblik jednažbi metode sila za čvor 5 jest:

$$q_1 \cdot (x_1 - x_5) + q_2 \cdot (x_2 - x_5) + q_3 \cdot (x_3 - x_5) + q_4 \cdot (x_4 - x_5) = 0 ,$$

$$q_1 \cdot (y_1 - y_5) + q_2 \cdot (y_2 - y_5) + q_3 \cdot (y_3 - y_5) + q_4 \cdot (y_4 - y_5) = 0 ,$$

$$q_1 \cdot (z_1 - z_5) + q_2 \cdot (z_2 - z_5) + q_3 \cdot (z_3 - z_5) + q_4 \cdot (z_4 - z_5) = 0 ,$$

odnosno,

$$-x_5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 + q_4 x_4 = 0 ,$$

$$-y_5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + q_4 y_4 = 0 ,$$

$$-z_5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 = 0 .$$

Uvrštavanjem poznatih koordinata čvorova 1,2,3 dobivamo:

$$-x_5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + 1q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 = 0$$

$$-y_5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + 2q_1 + 3q_2 + 3q_3 + 6q_4 = 0$$

$$-z_5 \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + 3q_1 + 4q_2 + 3q_3 + 2q_4 = 0$$

Da bismo mogli odrediti koordinate čvora 5, potrebno je pretpostaviti vrijednosti gustoće sila. Neka je $q_{i,j} = 1$ za svaki j :

$$4 x_5 = 10 ,$$

$$4 y_5 = 14 ,$$

$$4 z_5 = 12 ,$$

pa je

$$x_5 = 2,5 ,$$

$$y_5 = 3,5 ,$$

$$z_5 = 3 .$$

Matrični zapis gornjih jednažbi jest:

$$[q_1 + q_2 + q_3 + q_4]\{x_5\} = -[-q_1 \quad -q_2 \quad -q_3 \quad -q_4] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} ,$$

$$[q_1 + q_2 + q_3 + q_4] \{y_5\} = -[-q_1 \quad -q_2 \quad -q_3 \quad -q_4] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix},$$

$$[q_1 + q_2 + q_3 + q_4] \{z_5\} = -[-q_1 \quad -q_2 \quad -q_3 \quad -q_4] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix},$$

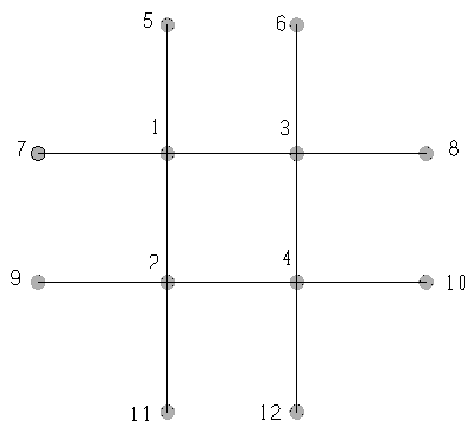
odnosno:

$$\mathbb{D}\{x_5\} = -\mathbb{D}_f \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbb{D}\{y_5\} = -\mathbb{D}_f \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbb{D}\{z_5\} = -\mathbb{D}_f \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix}.$$

Da bismo dobili bolji uvid u oblik matrica \mathbb{D} i \mathbb{D}_f proširit ćemo sustav na mrežu od 12 čvorova, 8 rubnih i 4 slobodna.



Redci i stupci matrice \mathbb{D} odgovaraju slobodnim čvorovima.

- na dijagonali je zbroj gustoća sila štapova priključenih u slobodan čvor,
- izvan dijagonale:
 - u slučaju povezanosti slobodnih čvorova i i j negativna vrijednost gustoće sila u štapu koji spaja ta dva slobodna čvora na mjestima (i, j) i (j, i) ,
 - nema povezanosti: 0.

U primjeru je

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} q_{1,2} + q_{1,3} + q_{1,5} + q_{1,7} & -q_{1,2} & -q_{1,3} & 0 \\ -q_{1,2} & q_{1,2} + q_{2,4} + q_{2,9} + q_{2,11} & 0 & -q_{2,4} \\ -q_{1,3} & 0 & q_{1,3} + q_{3,4} + q_{3,6} + q_{3,8} & 0 \\ 0 & -q_{2,4} & 0 & q_{2,4} + q_{3,4} + q_{4,10} + q_{4,12} \end{bmatrix}$$

Redci matrice \mathbb{D}_f odgovaraju slobodnim čvorovima, a stupci rubnim. Na odgovarajućim križištima upisuje se negativna vrijednost gustoće sila štapa koji spaja slobodni i rubni čvor. Na mjestima križišta čvorova koji nisu povezani upisuje se 0.

U primjeru je

$$\mathbb{D}_f = \begin{bmatrix} -q_{1,5} & 0 & -q_{1,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{2,9} & 0 & -q_{2,11} & 0 \\ 0 & -q_{3,6} & 0 & -q_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q_{4,10} & 0 & -q_{4,12} \end{bmatrix}$$

Neka su $\mathbb{X}_S, \mathbb{Y}_S, \mathbb{Z}_S$ vektori nepoznatih koordinata slobodnih čvorova, i neka su $\mathbb{X}_R, \mathbb{Y}_R, \mathbb{Z}_R$ vektori zadanih koordinata rubnih čvorova.

$$\mathbb{X}_S = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbb{X}_R = \begin{Bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{Bmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_S = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_R = \begin{Bmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{Bmatrix},$$

$$\mathbb{Z}_S = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbb{Z}_R = \begin{Bmatrix} z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \\ z_{11} \\ z_{12} \end{Bmatrix}.$$

Tada sljedeći izrazi predstavljaju tri neovisna sustava jednažbi iz kojih se određuju koordinate slobodnih čvorova:

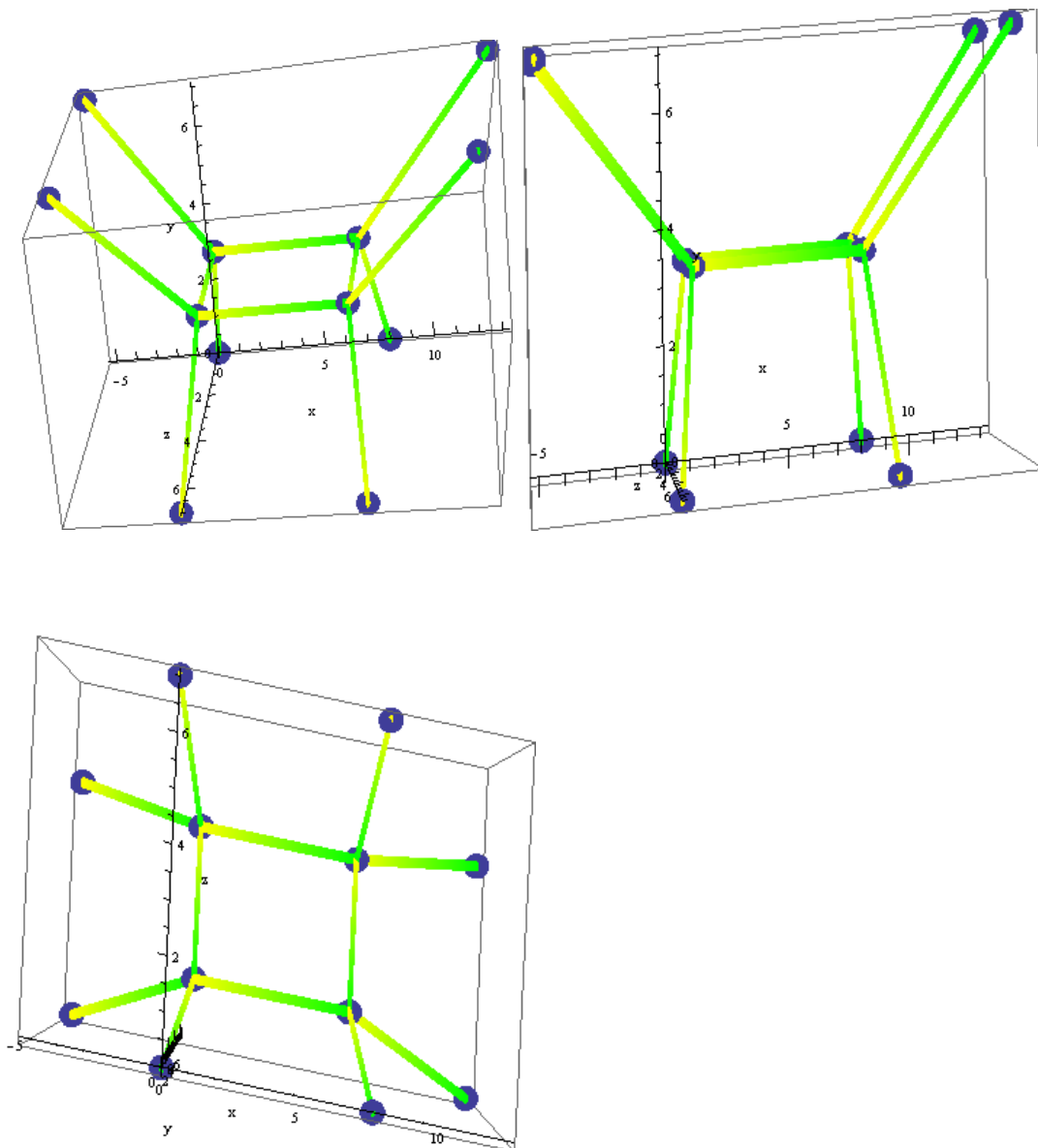
$$\mathbb{D}\mathbb{X}_S = -\mathbb{D}_f\mathbb{X}_R,$$

$$\mathbb{D}\mathbb{Y}_S = -\mathbb{D}_f\mathbb{Y}_R,$$

$$\mathbb{D}\mathbb{Z}_S = -\mathbb{D}_f\mathbb{Z}_R.$$


```
{13., 7., 0.},
{0., 0., 0.},
{8., 0., 0.}
```

Program nam daje prostorni prikaz mreže naredbom
`crt[nds2, elems]`



Slika 9: Ravnotežni položaj za $q_{i,j} = 1$

Duljine pojedinačnih štapova su:

$l = \text{vectorOfElementLengths}[\text{elems}, \text{nds2}]$

{4.36606, 4.36606, 6.75, 6.5, 6.75, 3., 3., 6.89656, 6.5, 6.89656, 3.88104, 3.88104}

Ukupna duljina štapova je

$\text{Total}[l]$

62.7873

Sile u štapovima su:

$\text{vectorOfElementForces}[l, \text{gs}]$

{4.36606, 4.36606, 6.75, 6.5, 6.75, 3., 3., 6.89656, 6.5, 6.89656, 3.88104, 3.88104}

Kao što vidimo, sile u pojedinim štapovima se razlikuju. U stvarnoj je konstrukciji to moguće ostvariti tako da se kabeli u izračunatim čvorovima međusobno povežu. No, to ima stanovitih nedostataka. Kod ekscentričnog spajanja užadi, različite sile u štapovima istog užeta uzrokuju izobličenje čvorova. Pojava je izraženija što je užad deblja, tj. što je ekscentricitet veći. Centriranje čvorova mjera je sprječavanja ove pojave.

Iteracijskim postupkom prema izrazu

$$q_i^{(k+1)} = q_i^{(k)} \cdot \frac{\bar{f}^{(k)}}{f_i^{(k)}},$$

gdje su:

$q_i^{(k)}$ i $q_i^{(k+1)}$ gustoće sila u $k - \text{tom}$ i $(k + 1) - \text{om}$ koraku,

$f_i^{(k)}$ sile u štapovima u $k - \text{tom}$ koraku,

$\bar{f}^{(k)}$ srednja vrijednost sila u štapovima u $k - \text{tom}$ koraku,

vrijednosti sila možemo izjednačiti do tražene točnosti i time rješenje približiti geodetskoj (minimalnoj) mreži.

$\{\text{nds3}, f\} = \text{multiStepFDM}[\text{nds}, \text{elems}, \text{supps}, \text{gs}, 10]$

{{{0., 0., 7.}, {8., 0., 7.}, {-5., 7., 5.}, {0.878909, 2.24624, 3.73895},
 {7.12109, 2.24624, 3.73895}, {13., 7., 5.}, {-5., 7., 0.},
 {0.8587, 2.14601, 2.20374}, {7.1413, 2.14601, 2.20374}, {13., 7., 0.},
 {0., 0., 0.}, {8., 0., 0.}},
 {4.73591, 4.73591, 4.71111, 4.69992, 4.71111, 4.59278, 4.59278, 4.7112, 4.69
 92, 4.7112, 4.74159, 4.74159}}

nds3

{{{0., 0., 7.}, {8., 0., 7.}, {-5., 7., 5.},
 {0.878909, 2.24624, 3.73895}, {7.12109, 2.24624, 3.73895}, {13., 7., 5.},

```
{-5., 7., 0.}, {0.8587, 2.14601, 2.20374}, {7.1413, 2.14601, 2.20374},  
{13., 7., 0.}, {0., 0., 0.}, {8., 0., 0.}}
```

f

```
{4.73591, 4.73591, 4.71111, 4.69992, 4.71111, 4.59278, 4.59278, 4.7112,  
4.6992, 4.7112, 4.74159, 4.74159}
```

Nakon deset koraka iteracijskog postupka vrijednosti sila gotovo su se izjednačile.

Sada su duljine pojedinačnih štapova:

```
l1 = vectorOfElementLengths[elems, nds3]
```

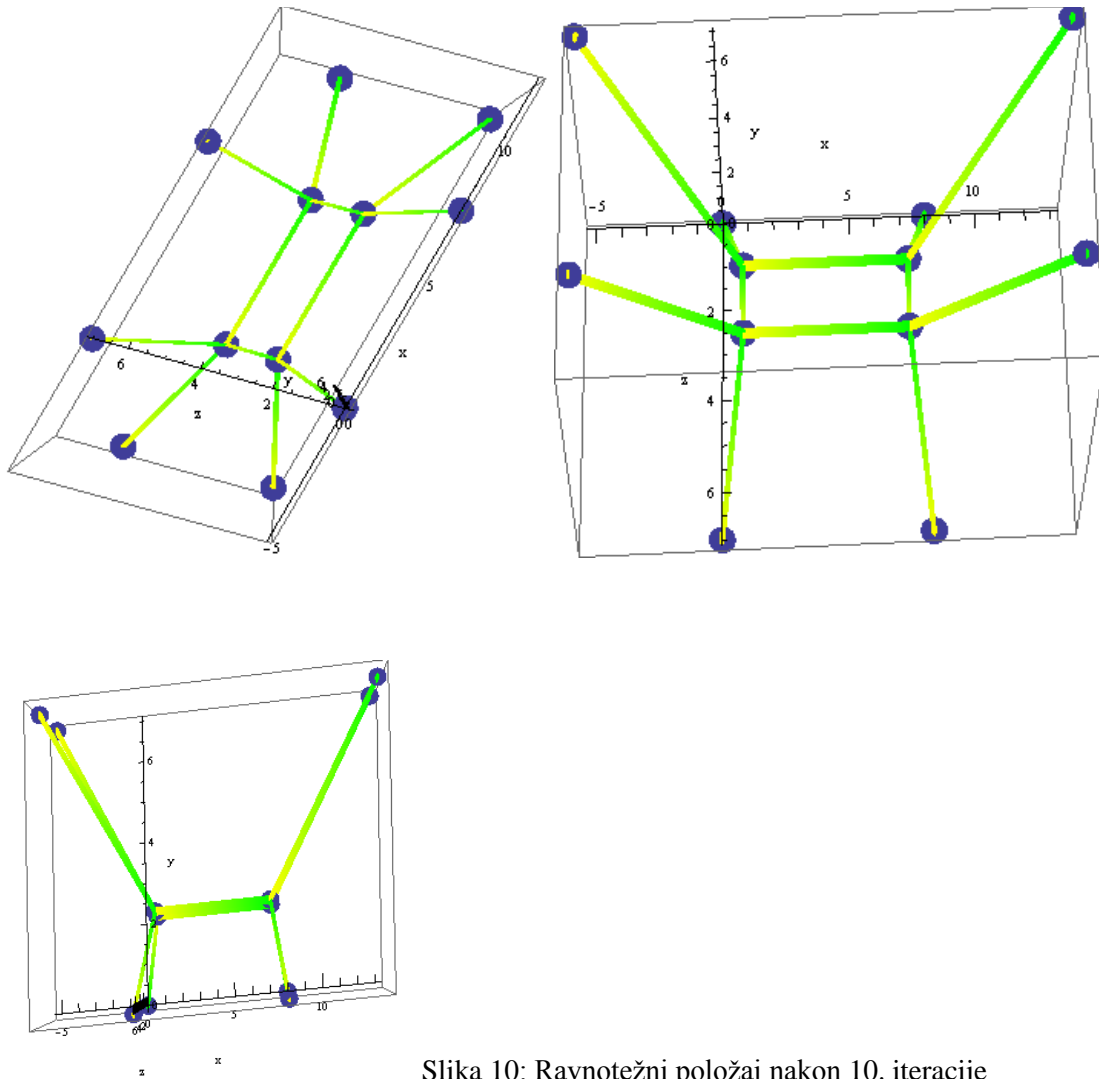
```
{4.05617, 4.05617, 7.66486, 6.24218, 7.66486, 1.53861, 1.53861, 7.92099,  
6.2826, 7.92099, 3.19362, 3.19362}
```

a ukupna duljina štapova jest

```
Total[l1]
```

```
61.2733
```

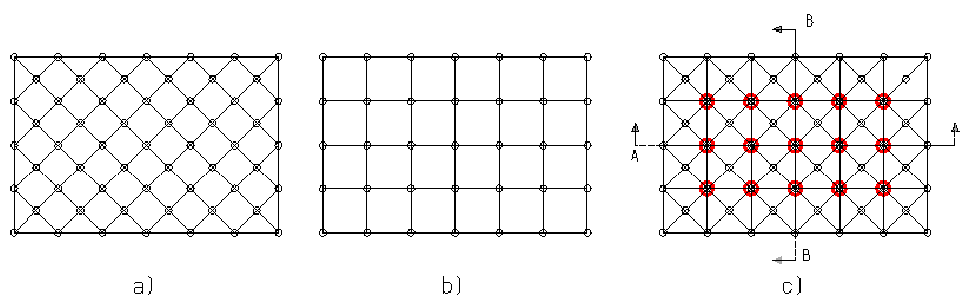
crt[nds3, elems]



Slika 10: Ravnotežni položaj nakon 10. iteracije

Primjer 2

U ovom primjeru provest ćemo postupak traženja oblika mreže čiji rub u tlocrtu čini pravokutnik dimenzija 24x16 m. Unutarnja užad postavljena je u dva dijagonalna smjera, po 9 kabela različitih duljina u svakom smjeru. Mreža se sastoji od 59 čvorova i 116 elemenata. Dobivene koordinate čvorova usporedit ćemo s onima koje je dobila Petra Gidak u magistarskom radu postavljanjem unutarnje užadi paralelno s rubovima. Ta mreža ima manje slobodnih čvorova od prve, svaki njezin čvor ujedno je čvor i prve, no obratno ne vrijedi.



Slika 11: a) dijagonalna užad – „mreža 1“, b) paralelna užad – „mreža 2“, c) zajednički čvorovi mreža „1“ i „2“ s osima simetrije A-A i B-B

nds =

```
{ {0., 0., 0.}, {4., 0., 3.}, {8., 0., 6.}, {12., 0., 9.}, {16., 0., 6.},
  {20., 0., 3.}, {24., 0., 0.}, {}, {}, {}, {}, {}, {}, {0., 4., 0.}, {}, {}, {}, {}, {},
  {24., 4., 0.}, {}, {}, {}, {}, {}, {}, {0., 8., 0.}, {}, {}, {}, {}, {}, {24., 8., 0.},
  {}, {}, {}, {}, {}, {}, {0., 12., 0.}, {}, {}, {}, {}, {}, {24., 12., 0.}, {}, {}, {},
  {}, {}, {}, {0., 16., 0.}, {4., 16., 3.}, {8., 16., 6.}, {12., 16., 9.},
  {16., 16., 6.}, {20., 16., 3.}, {24., 16., 0.} }
```

supps = listOfSupports[nds]

```
{1,2,3,4,5,6,7,14,20,27,33,40,46,53,54,55,56,57,58,59}
```

elems =

```
{ {1, 2}, {2, 3}, {3, 4}, {4, 5}, {5, 6}, {6, 7}, {53, 54}, {54, 55}, {55, 56}, {56, 57}, {57,
  58}, {58, 59}, {1, 14}, {14, 27}, {27, 40}, {40, 53}, {7, 20}, {20, 33}, {33, 46}, {46,
  59}, {1, 8}, {2, 8}, {2, 9}, {3, 9}, {3, 10}, {4, 10}, {4, 11}, {5, 11}, {5, 12}, {6, 12}, {6, 13},
  {7, 13}, {8, 14}, {8, 15}, {9, 15}, {9, 16}, {10, 16}, {10, 17}, {11, 17}, {11, 18}, {12, 18},
  {12, 19}, {13, 19}, {13, 20}, {14, 21}, {15, 21}, {15, 22}, {16, 22}, {16, 23}, {17, 23},
  {17, 24}, {18, 24}, {18, 25}, {19, 25}, {19, 26}, {20, 26}, {21, 27}, {21, 28}, {22, 28},
  {22, 29}, {23, 29}, {23, 30}, {24, 30}, {24, 31}, {25, 31}, {25, 32}, {26, 32}, {26, 33},
  {27, 34}, {28, 34}, {28, 35}, {29, 35}, {29, 36}, {30, 36}, {30, 37}, {31, 37}, {31, 38},
  {32, 38}, {32, 39}, {33, 39}, {34, 40}, {34, 41}, {35, 41}, {35, 42}, {36, 42}, {36, 43}, {37,
```


{, {24., 4., 0.}, {2., 6., 1.1803}, {6., 6., 3.32236}, {10., 6., 4.67913}, {14., 6., 4.67913}, {18., 6., 3.32236}, {22., 6., 1.1803}, {0., 8., 0.}, {4., 8., 2.25133}, {8., 8., 4.00074}, {12., 8., 4.67913}, {16., 8., 4.00074}, {20., 8., 2.25133}, {24., 8., 0.}, {2., 10., 1.1803}, {6., 10., 3.32236}, {10., 10., 4.67913}, {14., 10., 4.67913}, {18., 10., 3.32236}, {22., 10., 1.1803}, {0., 12., 0.}, {4., 12., 2.46987}, {8., 12., 4.5675}, {12., 12., 5.46914}, {16., 12., 4.5675}, {20., 12., 2.46987}, {24., 12., 0.}, {2., 14., 1.36747}, {6., 14., 4.00934}, {10., 14., 6.25916}, {14., 14., 6.25916}, {18., 14., 4.00934}, {22., 14., 1.36747}, {0., 16., 0.}, {4., 16., 3.}, {8., 16., 6.}, {12., 16., 9.}, {16., 16., 6.}, {20., 16., 3.}, {24., 16., 0.}}

f

{5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 3.14165, 3.26576, 3.00313, 3.45872, 2.84028, 3.93855, 3.93855, 2.84028, 3.45872, 3.00313, 3.26576, 3.14165, 3.14165, 3.03567, 3.22025, 2.88297, 3.29571, 2.93669, 2.93669, 3.29571, 2.88297, 3.22025, 3.03567, 3.14165, 3.06482, 3.10853, 2.95411, 3.09037, 2.83063, 2.93669, 2.93669, 2.83063, 3.09037, 2.95411, 3.10853, 3.06482, 3.06482, 3.02442, 3.02442, 2.90864, 2.90864, 2.82843, 2.82843, 2.90864, 2.90864, 3.02442, 3.02442, 3.06482, 3.06482, 3.02442, 3.02442, 2.90864, 2.90864, 2.82843, 2.82843, 2.90864, 2.90864, 3.02442, 3.02442, 3.06482, 3.06482, 3.10853, 2.95411, 3.09037, 2.83063, 2.93669, 2.93669, 2.83063, 3.09037, 2.95411, 3.10853, 3.06482, 3.14165, 3.03567, 3.22025, 2.88297, 3.29571, 2.93669, 2.93669, 3.29571, 2.88297, 3.22025, 3.03567, 3.14165, 3.14165, 3.26576, 3.00313, 3.45872, 2.84028, 3.93855, 3.93855, 2.84028, 3.45872, 3.00313, 3.26576, 3.14165}

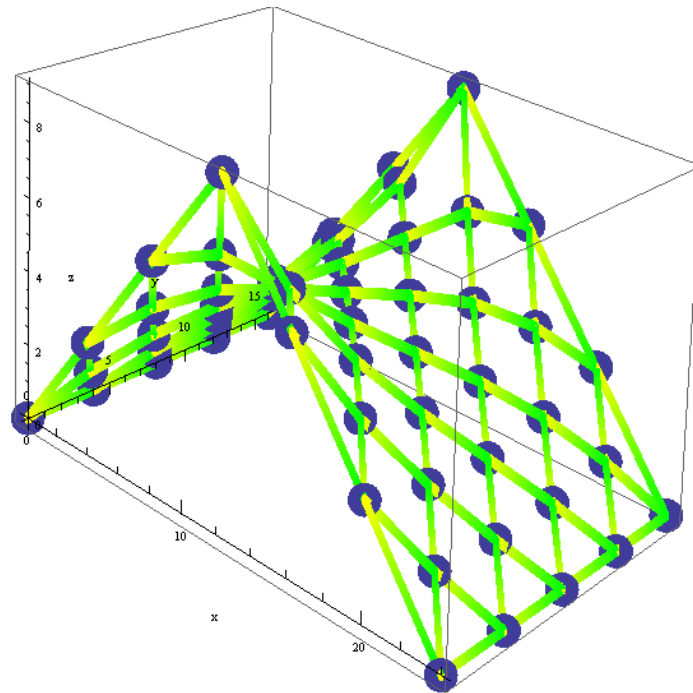
l = vectorOfElementLengths[elems, nds2]

{5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 3.14165, 3.26576, 3.00313, 3.45872, 2.84028, 3.93855, 3.93855, 2.84028, 3.45872, 3.00313, 3.26576, 3.14165, 3.14165, 3.03567, 3.22025, 2.88297, 3.29571, 2.93669, 2.93669, 3.29571, 2.88297, 3.22025, 3.03567, 3.14165, 3.06482, 3.10853, 2.95411, 3.09037, 2.83063, 2.93669, 2.93669, 2.83063, 3.09037, 2.95411, 3.10853, 3.06482, 3.06482, 3.02442, 3.02442, 2.90864, 2.90864, 2.82843, 2.82843, 2.90864, 2.90864, 3.02442, 3.02442, 3.06482, 3.06482, 3.02442, 3.02442, 2.90864, 2.90864, 2.82843, 2.82843, 2.90864, 2.90864, 3.02442, 3.02442, 3.06482, 3.06482, 3.10853, 2.95411, 3.09037, 2.83063, 2.93669, 2.93669, 2.83063, 3.09037, 2.95411, 3.10853, 3.06482, 3.14165, 3.03567, 3.22025, 2.88297, 3.29571, 2.93669, 2.93669, 3.29571, 2.88297, 3.22025, 3.03567, 3.14165, 3.14165, 3.26576, 3.00313, 3.45872, 2.84028, 3.93855, 3.93855, 2.84028, 3.45872, 3.00313, 3.26576, 3.14165}

Total[*l*]

387.622

crt[nds2, elems]

Slika 12: Ravnotežni položaj za $q_{i,j} = 1$

Ovaj oblik mreže dobiven je nakon jednog koraka postupka. Gustoća sila jednaka je u svim elementima mreže, $q_{i,j} = 1$.

```
{nds3, f2} = multiStepFDM[nds, elems, supps, q, 55]
```

```
{{{0., 0., 0.}, {4., 0., 3.}, {8., 0., 6.}, {12., 0., 9.}, {16., 0., 6.}, {20., 0., 3.},
{24., 0., 0.}, {1.92345, 2.14149, 1.27768}, {5.9065, 2.25906, 3.80076}, {9.74045, 2.19865, 5.85229},
{14.2595, 2.19865, 5.85229}, {18.0935, 2.25906, 3.80076}, {22.0765, 2.14149, 1.27768}, {0., 4., 0.}, {3.95576, 4.22917, 2.31961},
{7.80459, 4.20633, 4.21769}, {12., 4.28028, 5.04718}, {16.1954, 4.20633, 4.21769}, {20.0442, 4.22917, 2.31961},
{24., 4., 0.}, {2.04749, 6.06986, 1.14351}, {5.91911, 6.11522, 3.0862}, {9.95371, 6.16558, 4.318}, {14.0463, 6.16558, 4.318},
{18.0809, 6.11522, 3.0862}, {21.9525, 6.06986, 1.14351}, {0., 8., 0.}, {4.00644, 8., 2.12646}, {7.96357, 8., 3.71039},
{12., 8., 4.318}, {16.0364, 8., 3.71039}, {19.9936, 8., 2.12646}, {24., 8., 0.}, {2.04749, 9.93014, 1.14351},
{5.91911, 9.88478, 3.0862}, {9.95371, 9.83442, 4.318}, {14.0463, 9.83442, 4.318}, {18.0809, 9.88478, 3.0862},
{21.9525, 9.93014, 1.14351}, {0., 12., 0.}, {3.95576, 11.7708, 2.31961}, {7.80459, 11.7937, 4.21769}, {12., 11.7197, 5.04718},
{16.1954, 11.7937, 4.21769}, {20.0442, 11.7708, 2.31961}, {24., 12., 0.}, {1.92345, 13.8585, 1.27768},
{5.9065, 13.7409, 3.80076}, {9.74045, 13.8014, 5.85229}, {14.2595, 13.8014, 5.85229}, {18.0935, 13.7409, 3.80076},
{22.0765, 13.8585, 1.27768}, {0., 16., 0.}, {4., 16., 3.}, {8., 16., 6.}, {12.,
```



```
.32892, 3.32889, 3.32907, 3.32909, 3.32886, 3.32888, 3.32888, 3.32886, 3.32909, 3.32907, 3.32889, 3.32892, 3.32895, 3.32904, 3.32888, 3.32887, 3.32906, 3.3289, 3.3289, 3.32906, 3.32887, 3.32888, 3.32904, 3.32895, 3.32898, 3.32896, 3.32889, 3.32889, 3.32894, 3.32902, 3.32902, 3.32894, 3.32889, 3.32889, 3.32896, 3.32898, 3.32895, 3.32892, 3.32896, 3.32895, 3.32892, 3.32896, 3.32896, 3.32892, 3.32895, 3.32896, 3.32892, 3.32895}
```

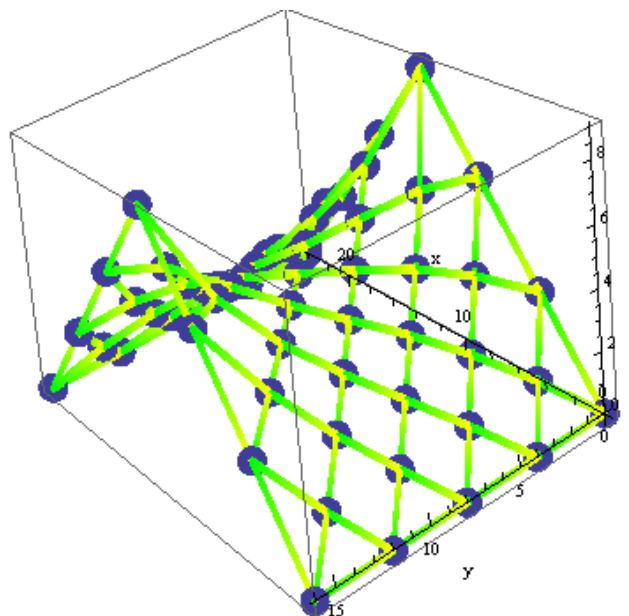
```
l1 = vectorOfElementLengths[elems, nds3]
```

```
{5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 5., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 4., 3.14931, 3.44448, 3.06256, 3.78454, 2.80803, 4.45507, 4.45507, 2.80803, 3.78454, 3.06256, 3.44448, 3.14931, 2.96415, 3.09423, 3.14333, 2.75108, 3.23269, 3.176, 3.176, 3.23269, 2.75108, 3.14333, 3.09423, 2.96415, 3.12797, 2.90049, 2.82835, 2.9119, 2.90988, 2.87635, 2.87635, 2.90988, 2.9119, 2.82835, 2.90049, 3.12797, 3.03731, 2.92046, 2.85163, 2.84988, 2.77397, 2.74816, 2.74816, 2.77397, 2.84988, 2.85163, 2.92046, 3.03731, 3.03731, 2.92046, 2.85163, 2.84988, 2.77397, 2.74816, 2.74816, 2.77397, 2.84988, 2.85163, 2.92046, 3.03731, 3.12797, 2.90049, 2.82835, 2.9119, 2.90988, 2.87635, 2.87635, 2.90988, 2.9119, 2.82835, 2.90049, 3.12797, 2.96415, 3.09423, 3.14333, 2.75108, 3.23269, 3.176, 3.176, 3.23269, 2.75108, 3.14333, 3.09423, 2.96415, 3.14931, 3.44448, 3.06256, 3.78454, 2.80803, 4.45507, 4.45507, 2.80803, 3.78454, 3.06256, 3.44448, 3.14931}
```

```
Total[l1]
```

```
387.207
```

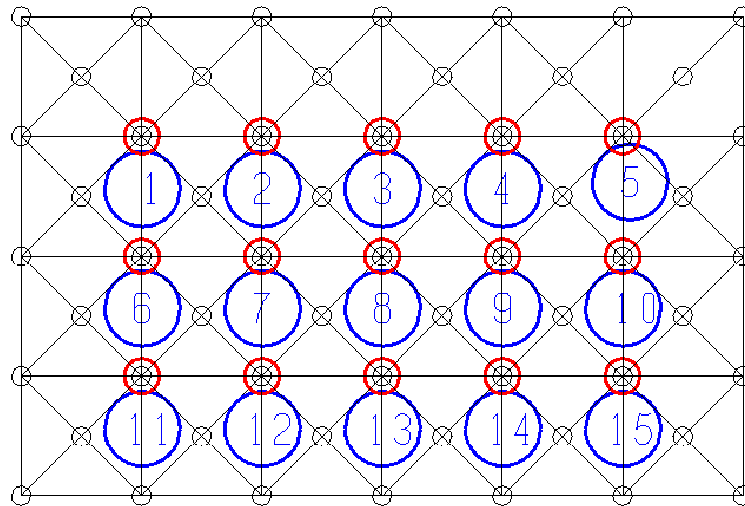
```
crt[nds3, elems]
```



Slika 13: Ravnotežni položaj nakon 55.iteracije

„Mreža 1“ ima 59 čvorova, a „mreža 2“ 35. U postupku traženja oblika čvorove smo u oba slučaja označavali redosljedom njihova pojavljivanja. Jasno je da stoga zajednički čvorovi nisu istog rednog broja u ova dva slučaja. Radi lakšeg prikaza usporedbe položaja tih čvorova u slučaju dijagonalnog i paralelnog postavljanja unutarne užadi, uvest ćemo nove oznake navedenih:

| Nova oznaka | „Mreža 1“ | „Mreža 2“ |
|-------------|-----------|-----------|
| 1 | 15 | 9 |
| 2 | 16 | 10 |
| 3 | 17 | 11 |
| 4 | 18 | 12 |
| 5 | 19 | 13 |
| 6 | 28 | 16 |
| 7 | 29 | 17 |
| 8 | 30 | 18 |
| 9 | 31 | 19 |
| 10 | 32 | 20 |
| 11 | 41 | 23 |
| 12 | 42 | 24 |
| 13 | 43 | 25 |
| 14 | 44 | 26 |
| 15 | 45 | 27 |



Slika 14: Zajednički čvorovi mreža „1“ i „2“

Koordinate zajedničkih čvorova „mreže 1“ i „mreže 2“ nakon prvog koraka:

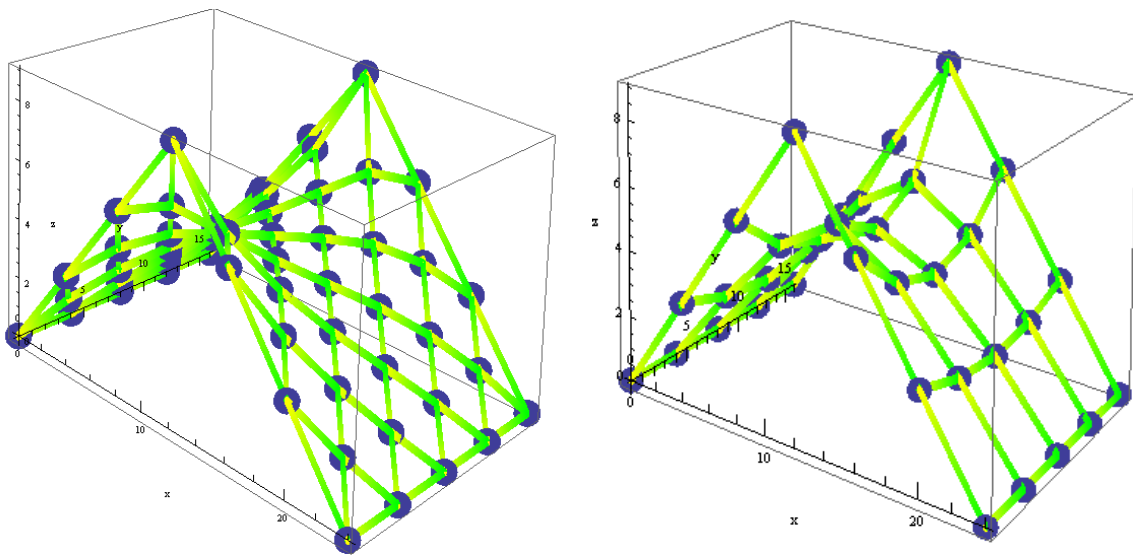
| Čvor | „Mreža 1“ | | | „Mreža 2“ | | |
|------|-----------|----|---------|-----------|----|---------|
| | x | y | z | x | y | z |
| 1 | 4 | 4 | 2,46987 | 4 | 4 | 2,45655 |
| 2 | 8 | 4 | 4,5675 | 8 | 4 | 4,57732 |
| 3 | 12 | 4 | 5,46914 | 12 | 4 | 5,77025 |
| 4 | 16 | 4 | 4,5675 | 16 | 4 | 4,57732 |
| 5 | 20 | 4 | 2,46987 | 20 | 4 | 2,45655 |
| 6 | 4 | 8 | 2,25133 | 4 | 8 | 2,2489 |
| 7 | 8 | 8 | 4,00074 | 8 | 8 | 4,08247 |
| 8 | 12 | 8 | 4,67913 | 12 | 8 | 4,92636 |
| 9 | 16 | 8 | 4,00074 | 16 | 8 | 4,08247 |
| 10 | 20 | 8 | 2,25133 | 20 | 8 | 2,2489 |
| 11 | 4 | 12 | 2,46987 | 4 | 12 | 2,45655 |
| 12 | 8 | 12 | 4,5675 | 8 | 12 | 4,57732 |
| 13 | 12 | 12 | 5,46914 | 12 | 12 | 5,77025 |
| 14 | 16 | 12 | 4,5675 | 16 | 12 | 4,57732 |
| 15 | 20 | 12 | 2,46987 | 20 | 12 | 2,45655 |

Koordinate zajedničkih čvorova „mreže 1“ i „mreže 2“ nakon 55.koraka iteracijskog postupka:

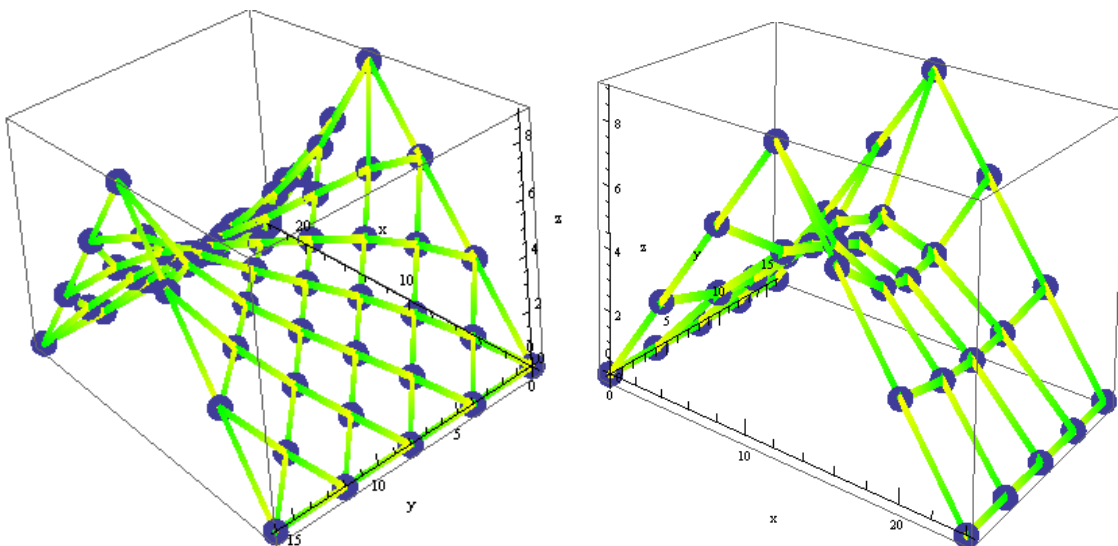
| Čvor | „Mreža 1“ | | | „Mreža 2“ | | |
|------|-----------|---------|---------|-----------|---------|---------|
| | x | y | z | x | y | z |
| 1 | 3,95576 | 4,22917 | 2,31961 | 4,29388 | 4,6924 | 2,41161 |
| 2 | 7,80459 | 4,20633 | 4,21769 | 8,55545 | 5,30726 | 4,30519 |
| 3 | 12 | 4,28028 | 5,04718 | 12 | 5,60625 | 5,0244 |
| 4 | 16,1964 | 4,20633 | 4,21769 | 15,4445 | 5,30726 | 4,30519 |
| 5 | 20,0442 | 4,22917 | 2,31961 | 19,7061 | 4,6924 | 2,41161 |
| 6 | 4,00644 | 8 | 2,12646 | 4,3582 | 8 | 2,27309 |
| 7 | 7,96357 | 8 | 3,71039 | 8,63636 | 8 | 4,02401 |
| 8 | 12 | 8 | 4,318 | 12 | 8 | 4,60843 |
| 9 | 16,0364 | 8 | 3,71039 | 15,3636 | 8 | 4,02401 |
| 10 | 19,9936 | 8 | 2,12646 | 19,6418 | 8 | 2,27309 |
| 11 | 3,95576 | 11,7708 | 2,31961 | 4,29388 | 11,3076 | 2,41161 |
| 12 | 7,80459 | 11,7937 | 4,21769 | 8,55545 | 10,6927 | 4,30519 |
| 13 | 12 | 11,7197 | 5,04718 | 12 | 10,3837 | 5,0244 |
| 14 | 16,1954 | 11,7937 | 4,21769 | 15,4445 | 10,6927 | 4,30519 |
| 15 | 20,0442 | 11,7708 | 2,31961 | 19,7061 | 11,3076 | 2,41161 |

Nakon jednog koraka koordinate mreža razlikuju se tek u drugoj decimali. Nakon 55 koraka iteracijskog postupka, odnosno nakon što su sile u svoj užadi jednake do u drugu decimalu, razlike između koordinata zajedničkih čvorova u mrežama „1“ i „2“ već su u prvoj decimali. Dok se za $q_{ij} = 1$ položaj čvorova razlikuje samo po visini, nakon 55. iteracije razlika je i u preostala dva smjera koordinatnog sustava. Razlog tomu je pomicanje čvorova u položaj u koji bi došli da je omogućeno slobodno klizanje – položaj geodetske mreže.

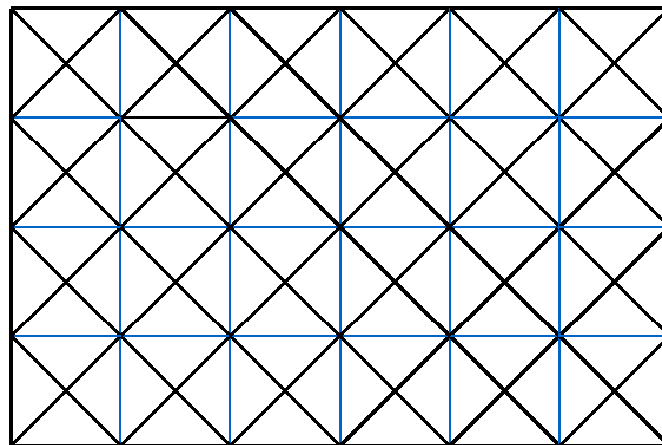
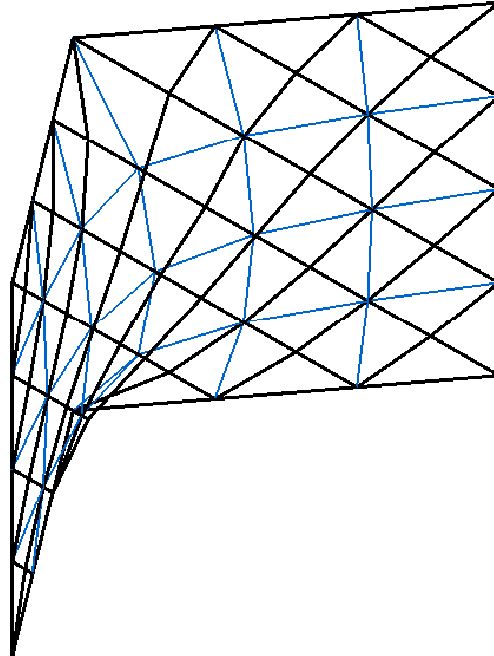
a)



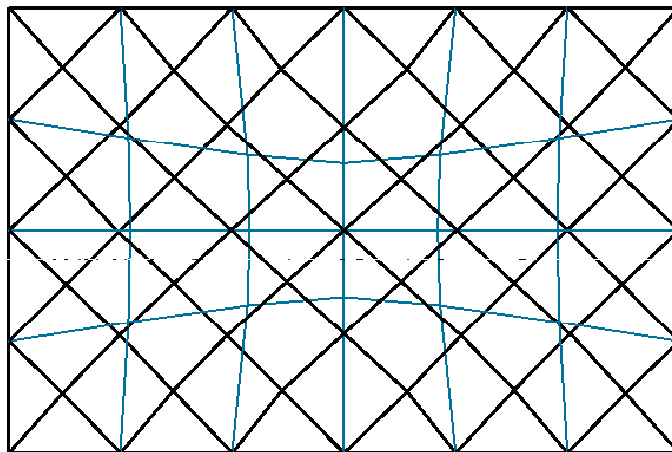
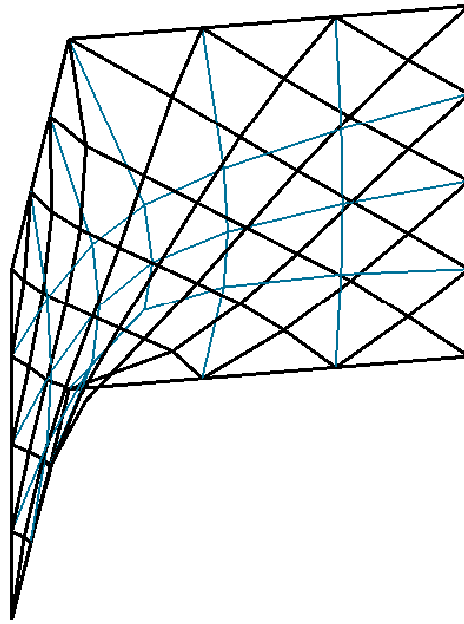
b)



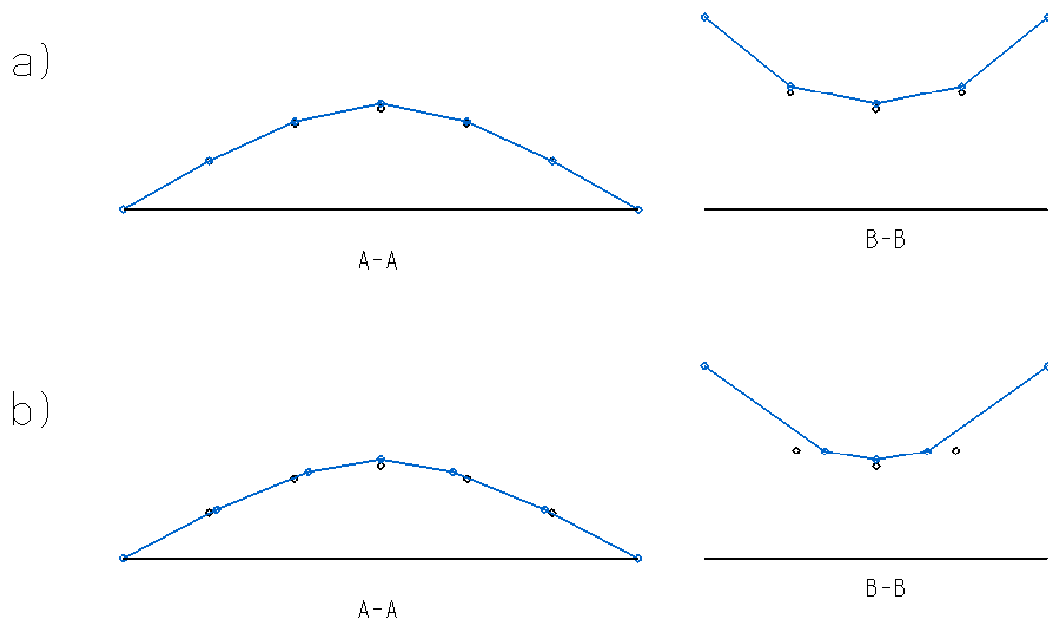
Slika 14: Usporedba položaja „mreže 1“ i „mreže 2“
a) za $q_{i,j} = 1$ i b) nakon 55. iteracije



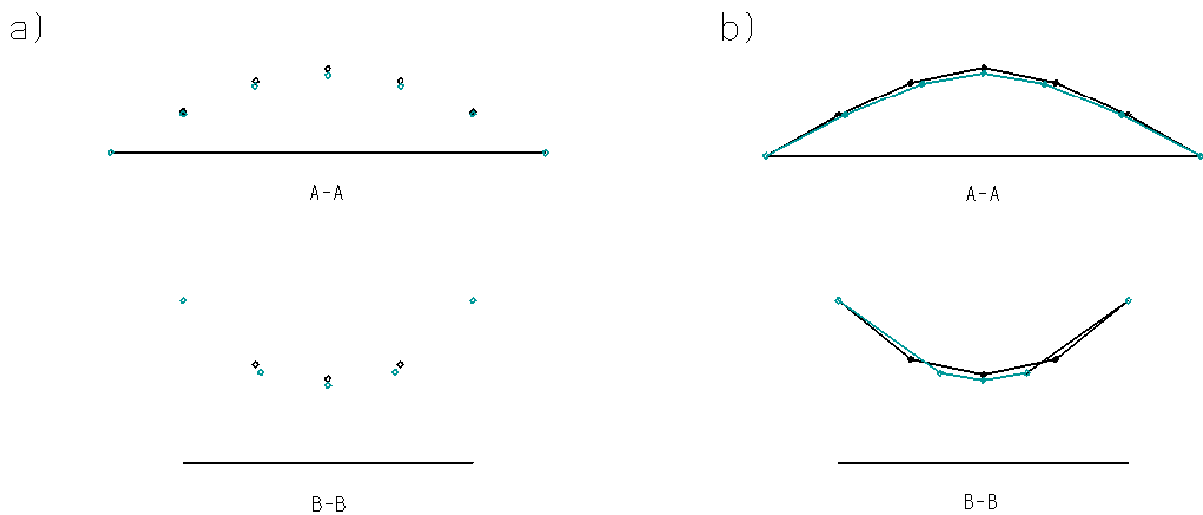
Slika 15: Prostorni prikaz mreža za $q_{i,j} = 1$



Slika 16: Prostorni prikaz mreža nakon 55.iteracije



Slika 17: Usporedba položaja čvorova „mreže 1“ (crno) i „mreže 2“ (plavo) u osima simetrije A-A i B-B
a) za $q_{i,j} = 1$ i b) nakon 55.iteracije



Slika 18: Usporedba položaja čvorova u osima simetrije za $q_{i,j} = 1$ (crno) i nakon 55. iteracije (plavo):
a) „mreža 1“; b) „mreža 2“

Usporedba ukupnih duljina mreža „1“ i „2“ za $q_{i,j} = 1$ i nakon 55.iteracije

| | Ukupna duljina „mreže 1“ | Ukupna duljina „mreže 2“ |
|--------------------|--------------------------|--------------------------|
| $q_{i,j} = 1$ | 387,622 m | 255,468 m |
| Nakon 55.iteracije | 387,207 m | 254,770 m |

7214, 4.54029, 4.54385, 4.54387, 4.54376, 4.54387, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.5
8877, 2.57948, 2.56652, 2.55531, 2.54904, 2.54904, 2.55531, 2.56652, 2.57948
, 2.58877, 2.81833, 2.78722, 2.74657, 2.71307, 2.69488, 2.69488, 2.71307, 2.7
4657, 2.78722, 2.81833, 3.11577, 3.03334, 2.93987, 2.86937, 2.83283, 2.83283
, 2.86937, 2.93987, 3.03334, 3.11577, 3.54889, 3.3302, 3.14125, 3.01709, 2.95
668, 2.95668, 3.01709, 3.14125, 3.3302, 3.54889, 4.29393, 3.65556, 3.32549, 3
.14267, 3.05881, 3.05881, 3.14267, 3.32549, 3.65556, 4.29393, 3.77032, 3.431
43, 3.22844, 3.1328, 3.1328, 3.22844, 3.43143, 3.77032, 3.47059, 3.2749, 3.17
875, 3.17875, 3.2749, 3.47059, 3.29236, 3.20187, 3.20187, 3.29236, 3.20953, 3
.20953, 4.307, 4.28064, 4.21982, 4.10069, 3.86051, 3.36571, 4.10935, 4.06745
, 3.97718, 3.82505, 3.59482, 3.30161, 3.08796, 3.96534, 3.91691, 3.81772, 3.6
6555, 3.46603, 3.24901, 3.07717, 2.98464, 3.87919, 3.82888, 3.72875, 3.58255
, 3.40296, 3.21798, 3.06794, 2.98361, 2.97948, 3.85066, 3.80005, 3.70026, 3.5
5676, 3.38371, 3.20789, 3.06455, 2.98312, 2.97954, 3.05676, 3.87919, 3.82888
, 3.72875, 3.58255, 3.40296, 3.21798, 3.06794, 2.98361, 2.97948, 3.96534, 3.9
1691, 3.81772, 3.66555, 3.46603, 3.24901, 3.07717, 2.98464, 4.10935, 4.06745
, 3.97718, 3.82505, 3.59482, 3.30161, 3.08796, 4.307, 4.28064, 4.21982, 4.100
69, 3.86051, 3.36571}

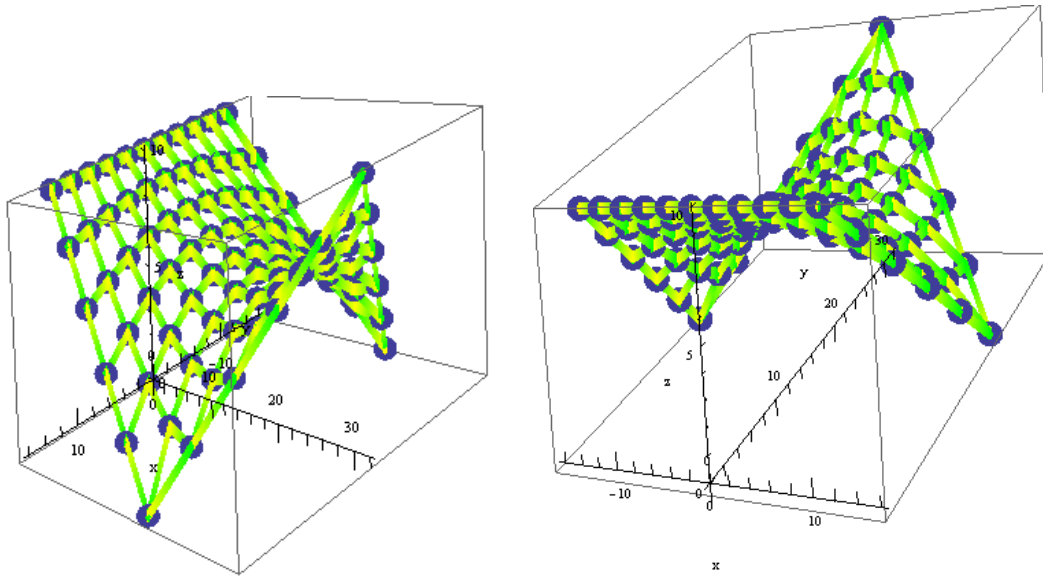
l = vectorOfElementLengths[elems, nds2]

{2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 4.54387, 4.54376, 4.54387, 4.54385, 4.54029, 4.47214
, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.4
7214, 4.54029, 4.54385, 4.54387, 4.54376, 4.54387, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.5
8877, 2.57948, 2.56652, 2.55531, 2.54904, 2.54904, 2.55531, 2.56652, 2.57948
, 2.58877, 2.81833, 2.78722, 2.74657, 2.71307, 2.69488, 2.69488, 2.71307, 2.7
4657, 2.78722, 2.81833, 3.11577, 3.03334, 2.93987, 2.86937, 2.83283, 2.83283
, 2.86937, 2.93987, 3.03334, 3.11577, 3.54889, 3.3302, 3.14125, 3.01709, 2.95
668, 2.95668, 3.01709, 3.14125, 3.3302, 3.54889, 4.29393, 3.65556, 3.32549, 3
.14267, 3.05881, 3.05881, 3.14267, 3.32549, 3.65556, 4.29393, 3.77032, 3.431
43, 3.22844, 3.1328, 3.1328, 3.22844, 3.43143, 3.77032, 3.47059, 3.2749, 3.17
875, 3.17875, 3.2749, 3.47059, 3.29236, 3.20187, 3.20187, 3.29236, 3.20953, 3
.20953, 4.307, 4.28064, 4.21982, 4.10069, 3.86051, 3.36571, 4.10935, 4.06745
, 3.97718, 3.82505, 3.59482, 3.30161, 3.08796, 3.96534, 3.91691, 3.81772, 3.6
6555, 3.46603, 3.24901, 3.07717, 2.98464, 3.87919, 3.82888, 3.72875, 3.58255
, 3.40296, 3.21798, 3.06794, 2.98361, 2.97948, 3.85066, 3.80005, 3.70026, 3.5
5676, 3.38371, 3.20789, 3.06455, 2.98312, 2.97954, 3.05676, 3.87919, 3.82888
, 3.72875, 3.58255, 3.40296, 3.21798, 3.06794, 2.98361, 2.97948, 3.96534, 3.9
1691, 3.81772, 3.66555, 3.46603, 3.24901, 3.07717, 2.98464, 4.10935, 4.06745
, 3.97718, 3.82505, 3.59482, 3.30161, 3.08796, 4.307, 4.28064, 4.21982, 4.100
69, 3.86051, 3.36571}

Total[*l*]

581.663

crt[nds2, elems]



Slika 21: Ravnotežni položaj za $q_{i,j} = 1$

{nds3, f2} = multiStepFDM[nds, elems, supps, q, 65]

nds3

```
{ {0., 0., 10.}, {2.4, 0., 10.}, {4.8, 0., 10.}, {7.2, 0., 10.}, {9.6, 0., 10.}, {12.
., 0., 10.}, {12.8002, 4.0008, 8.}, {13.6003, 8.0015, 6.}, {14.4005, 12.0023, 4
.}, {15.2006, 16.0031, 2.}, {16., 20., 0.}, {12.8, 22.4, 2.}, {9.6, 24.8, 4.}, {6
.4, 27.2, 6.}, {3.2, 29.6, 8.}, {0., 32., 10.}, {-3.2, 29.6, 8.}, {-
6.4, 27.2, 6.}, {-9.6, 24.8, 4.}, {-12.8, 22.4, 2.}, {-16., 20., 0.}, {-
15.2006, 16.0031, 2.}, {-14.4005, 12.0023, 4.}, {-13.6003, 8.0015, 6.}, {-
12.8002, 4.0008, 8.}, {-12., 0., 10.}, {-9.6, 0., 10.}, {-7.2, 0., 10.}, {-
4.8, 0., 10.}, {-2.4, 0., 10.}, {-10.1047, 4.0765, 8.22339}, {-
7.47275, 4.13937, 8.41509}, {-4.90583, 4.18437, 8.55762}, {-
2.4152, 4.21047, 8.64277}, {7.0041×10-
16, 4.21881, 8.6704}, {2.4152, 4.21047, 8.64277}, {4.90583, 4.18437, 8.55762}
, {7.47275, 4.13937, 8.41509}, {10.1047, 4.0765, 8.22339}, {-
10.6109, 8.15138, 6.49983}, {-7.74871, 8.27212, 6.91908}, {-
5.01541, 8.35584, 7.22345}, {-2.43229, 8.40291, 7.40065}, {1.00486×10-
15, 8.41751, 7.45663}, {2.43229, 8.40291, 7.40065}, {5.01541, 8.35584, 7.2234
5}, {7.74871, 8.27212, 6.91908}, {10.6109, 8.15138, 6.49983}, {-
11.127, 12.218, 4.88182}, {-8.04081, 12.3823, 5.59684}, {-
5.14064, 12.4905, 6.09868}, {-
2.45775, 12.5487, 6.38172}, {0., 12.5661, 6.46838}, {2.45775, 12.5487, 6.381
72}, {5.14064, 12.4905, 6.09868}, {8.04081, 12.3823, 5.59684}, {11.127, 12.2
18, 4.88182}, {-11.6723, 16.2517, 3.44451}, {-8.37276, 16.4209, 4.54825}, {-
5.30078, 16.5234, 5.28818}, {-2.50211, 16.5755, 5.69129}, {-8.57072×10-
16, 16.5904, 5.81086}, {2.50211, 16.5755, 5.69129}, {5.30078, 16.5234, 5.2881
```

8}, {8.37276, 16.4209, 4.54825}, {11.6723, 16.2517, 3.44451}, {-
12.2766, 20.081, 2.3503}, {-8.76178, 20.099, 3.91948}, {-
5.50556, 20.0953, 4.90928}, {-2.57205, 20.0886, 5.4303}, {-1.99032×10⁻
¹⁶, 20.086, 5.58063}, {2.57205, 20.0886, 5.4303}, {5.50556, 20.0953, 4.90928}
, {8.76178, 20.099, 3.91948}, {12.2766, 20.081, 2.3503}, {-
9.08269, 22.2467, 3.80875}, {-5.6806, 22.1462, 4.93102}, {-
2.63913, 22.0917, 5.51553}, {4.97293×10⁻
¹⁶, 22.0759, 5.68228}, {2.63913, 22.0917, 5.51553}, {5.6806, 22.1462, 4.93102
, {9.08269, 22.2467, 3.80875}, {-5.9599, 24.4844, 5.25166}, {-
2.75074, 24.3207, 5.89583}, {1.08807×10⁻
¹⁵, 24.2744, 6.07743}, {2.75074, 24.3207, 5.89583}, {5.9599, 24.4844, 5.25166
, {-2.93488, 26.9108, 6.70876}, {1.28312×10⁻
¹⁵, 26.83, 6.90697}, {2.93488, 26.9108, 6.70876}, {6.7655×10⁻
¹⁶, 29.4724, 8.21432}}

f2

{3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.3
6522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522
, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.3
6522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36522, 3.36517, 3.36521, 3.3654,
3.36508, 3.36508, 3.3654, 3.36521, 3.36517, 3.36522, 3.36522, 3.36515, 3.365
19, 3.36554, 3.36497, 3.36497, 3.36554, 3.36519, 3.36515, 3.36522, 3.36525, 3
.36515, 3.36517, 3.36561, 3.3649, 3.3649, 3.36561, 3.36517, 3.36515, 3.36525
, 3.36526, 3.36518, 3.36516, 3.36561, 3.36488, 3.36488, 3.36561, 3.36516, 3.3
6518, 3.36526, 3.36504, 3.36518, 3.36524, 3.36568, 3.365, 3.365, 3.36568, 3.3
6524, 3.36518, 3.36504, 3.3653, 3.36515, 3.36543, 3.36488, 3.36488, 3.36543,
3.36515, 3.3653, 3.36519, 3.36542, 3.36503, 3.36503, 3.36542, 3.36519, 3.365
29, 3.36513, 3.36513, 3.36529, 3.36522, 3.36522, 3.36524, 3.36523, 3.3651, 3.
36512, 3.36622, 3.36387, 3.36526, 3.36524, 3.36499, 3.36503, 3.36713, 3.3616
3, 3.36601, 3.36527, 3.36525, 3.36491, 3.36498, 3.36782, 3.35995, 3.36666, 3.
36522, 3.36527, 3.36525, 3.36487, 3.36494, 3.36821, 3.35897, 3.36703, 3.3653
, 3.36517, 3.36528, 3.36525, 3.36485, 3.36494, 3.36834, 3.35867, 3.36715, 3.3
6533, 3.36515, 3.36522, 3.36527, 3.36525, 3.36487, 3.36494, 3.36821, 3.35897
, 3.36703, 3.3653, 3.36517, 3.36527, 3.36525, 3.36491, 3.36498, 3.36782, 3.35
995, 3.36666, 3.36522, 3.36526, 3.36524, 3.36499, 3.36503, 3.36713, 3.36163,
3.36601, 3.36524, 3.36523, 3.3651, 3.36512, 3.36622, 3.36387}

l1 = vectorOfElementLengths[elems, nds3]

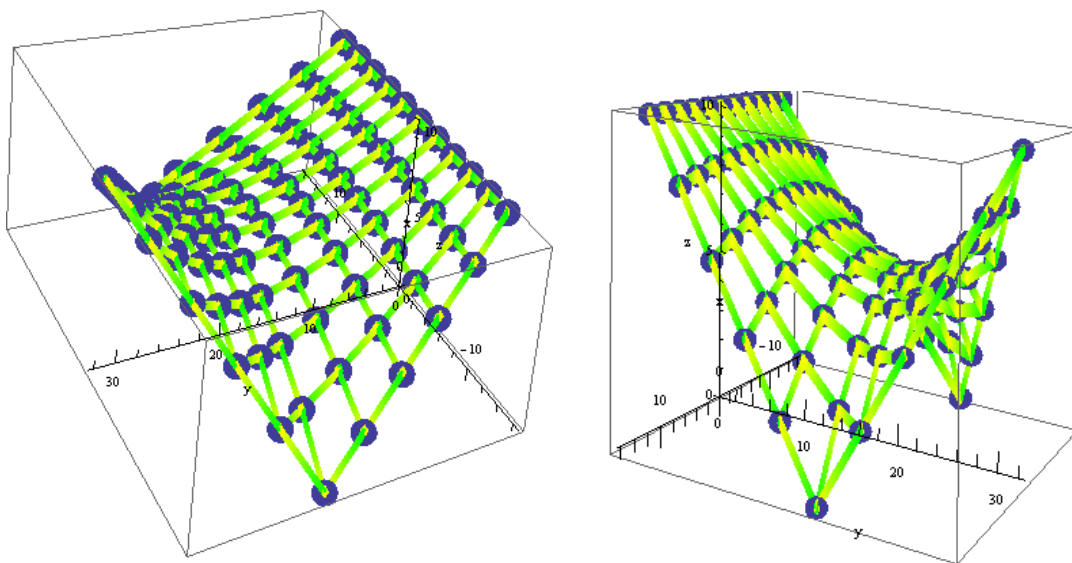
{2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 4.54387, 4.54376, 4.54387, 4.54385, 4.54029, 4.47214
, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.47214, 4.4
7214, 4.54029, 4.54385, 4.54387, 4.54376, 4.54387, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.4, 2.7
0575, 2.63972, 2.57127, 2.49222, 2.41537, 2.41537, 2.49222, 2.57127, 2.63972
, 2.70575, 3.03464, 2.89521, 2.75147, 2.58962, 2.43297, 2.43297, 2.58962, 2.7
5147, 2.89521, 3.03464, 3.39708, 3.17216, 2.94526, 2.69841, 2.45934, 2.45934
, 2.69841, 2.94526, 3.17216, 3.39708, 3.82063, 3.48339, 3.16149, 2.82803, 2.5
0501, 2.50501, 2.82803, 3.16149, 3.48339, 3.82063, 4.40389, 3.84922, 3.40334
, 2.97942, 2.57644, 2.57644, 2.97942, 3.40334, 3.84922, 4.40389, 4.13685, 3.5
8382, 3.09761, 2.64444, 2.64444, 3.09761, 3.58382, 4.13685, 3.8622, 3.27727,

2.75712, 2.75712, 3.27727, 3.8622, 3.54866, 2.94268, 2.94268, 3.54866, 3.20971, 3.20971, 4.47537, 4.45326, 4.40699, 4.31673, 4.02817, 2.40297, 4.4408, 4.40384, 4.32753, 4.18562, 3.7517, 2.1744, 2.61217, 4.42726, 4.381, 4.28674, 4.11662, 3.59782, 2.05844, 2.37655, 2.85102, 4.42384, 4.3726, 4.26926, 4.08577, 3.52347, 2.00611, 2.26392, 2.72095, 2.99486, 4.42337, 4.37062, 4.2647, 4.07767, 3.50313, 1.99253, 2.23367, 2.68694, 2.94805, 3.09476, 4.42384, 4.3726, 4.26926, 4.08577, 3.52347, 2.00611, 2.26392, 2.72095, 2.99486, 4.42726, 4.381, 4.28674, 4.11662, 3.59782, 2.05844, 2.37655, 2.85102, 4.4408, 4.40384, 4.32753, 4.18562, 3.7517, 2.1744, 2.61217, 4.47537, 4.45326, 4.40699, 4.31673, 4.02817, 2.40297}

Total[l1]

579.763

crt[nds3, elems]



Slika 22: Ravnotežni položaj nakon 65.iteracije

6. Zaključak

Konstrukcije od užadi sastoje se od užadi usidrene u temelje ili u komplementarnu konstrukciju. Uže prenosi opterećenje centričnom vlačnom silom. Takav način prijenosa opterećenja vrlo je racionalan jer omogućuje znatnu uštedu materijala. Vlastita težina konstrukcije od užadi zanemarive je veličine. Tradicionalnim masivnim konstrukcijama upravo ona osigurava nosivost. Kod konstrukcija od užadi nosivost se postiže prednapinjanjem i optimalnim oblikovanjem. Prva faza njihova oblikovanja jest traženje oblika. Oblik konstrukcije u prvoj fazi traži se samo pod djelovanjem sila prednapona. Pomaci užadi pod opterećenjem relativno su veliki, a njihov odnos nije linearan, pa je stanje ravnoteže potrebno ostvariti na deformiranoj konstrukciji. Postavljanjem uvjeta ravnoteže slobodnih čvorova dobivamo nelinearan sustav jednadžbi bez jednoznačnog rješanja. Taj problem rješavamo zadavanjem omjera između iznosa sila i duljina pojedinačnih štapova koji nazivamo gustoćom sila. U ovom radu dane su osnovne jednadžbe metode gustoće sila. Na tri primjera prikazana je njena primjena u kompjutorskom oblikovanju konstrukcija. Za početak se pretpostavi da su gustoće sila u svim štapovima mreže jednake jedinici. Time dobivamo oblik konstrukcije u kojem su sile u štapovima istog užeta različite ako su štapovi različite duljine. To je su stvarnoj konstrukciji moguće ostvariti spojnim sredstvima na položaju dobivenom postupkom traženja oblika. Takva razdioba sila nije povoljna jer može doći do izobličenja čvorova, a spojna sredstva moraju prenositi velike sile već u fazi prednapinjanja. Bolji oblik mreže je onaj u koji ona dođe ako omogućimo klizanje kabela bez trenja – oblik geodetske mreže. Takvom obliku odgovaraju jednake sile u svim štapovima. Do njega dolazimo iterativnim postupkom. Broj koraka postupka ovisi o broju čvorova u mreži i traženoj jednakosti sila.

Literatura

- [1] Berger, H.: Light Structures, Structures of Light, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [2] Dvornik, J.; Lazarević, D.: Prednapregnute gipke konstrukcije od užadi i tkanine, Građevinar, 47 (1995) 4, str. 185 - 199.
- [3] Dvornik, J.; Lazarević, D.: Viseće konstrukcije od platna i užadi, Građevni godišnjak '97, HDGI, Zagreb, 1997., str. 239 - 297.
- [4] Gidak, P.: Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža, magistarski rad (rukopis).
- [5] Jecić, Z.: Oblikovanje visećih konstrukcija pomoću modela, Prostor, 5 (1997) 1, str. 83 - 96.
- [6] Linkwitz, K.: About formfinding of double – curved structures, Engineering Structures 21 (1999) 709 -718.
- [7] W. J. Lewis: Tension structures, Form and behaviour, Thomas Telford Publishing, London, 2003.