

Sveučilište u Zagrebu  
Građevinski fakultet

**Ivana Pastuović**

# **TEOREM MÜLLER - BRESLAUA**

**(ZAVRŠNI RAD)**

Zagreb, 2009.

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2. Pojam utjecajne funkcije i utjecajne linije</b>	<b>3</b>
<b>3. Primjena utjecajnih linija</b>	<b>5</b>
3.1. Utjecaj jedne koncentrirane sile .....	5
3.2. Utjecaj niza koncentriranih sila .....	5
3.3. Utjecaj distribuirane sile .....	7
3.4. Utjecaj koncentriranog momenta .....	9
<b>4. Teorem o uzajamnosti radova Enrica Bettija</b>	<b>10</b>
<b>5. Teorem o uzajamnosti pomaka Jamesa Clerka Maxwella</b>	<b>12</b>
<b>6. Teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela</b>	<b>13</b>
<b>7. Iskaz i dokaz teorema Müller - Breslaua</b>	<b>15</b>
<b>8. Primjena teorema – crtanje utjecajnih linija</b>	<b>18</b>
<b>9. Varijante dokaza</b>	<b>26</b>
9.1. Dokaz pomoću Maxwellovog teorema .....	26
9.2. Dokaz pomoću virtualnog rada .....	29
<b>10. Primjena teorema u metodi pomaka</b>	<b>34</b>
<b>11. Zaključak</b>	<b>50</b>
<b>Literatura</b>	<b>51</b>

## 1. Uvod

U ovom ćemo se radu posvetiti proučavanju postupka određivanja utjecajnih funkcija i utjecajnih linija na statički neodređenim sistemima primjenom teorema Heinricha Müller - Breslaua. Dokaz teorema primijenit ćemo na Bettijevu teorem o uzajamnosti radova, na Maxwellovu teorem o uzajamnosti pomaka i na teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela. Primjenu teorema ilustrirat ćemo na nekoliko primjera, pri čemu će sistemi biti riješeni metodom sila i metodom pomaka, a za crtanje utjecajnih linija upotrijebit ćemo Mohrovu analogiju.

## 2. Pojam utjecajne funkcije i utjecajne linije

Mnoge se konstrukcije kao što su mostovi, nadvožnjaci, vijadukti, kranske staze grade da bi mogli preuzeti pokretna opterećenja kao što su vlakovi, cestovna vozila ili kranovi. Ako se ta opterećenja kreću većim brzinama po nosaču, izazvat će ubrzanje dijelova nosača, pa će se pojaviti i inercijalne sile koje se moraju uzeti u obzir u proračunu. Takav se proračun proučava i obrađuje u *dinamici konstrukcija*. Uz pretpostavku da brzina kretanja opterećenja po nosaču nije velika, ubrzanja koja nastanu na nosaču bit će malena, pa se proračun može provoditi zanemarivanjem inercijalnih sila, jer su one proporcionalne ubrzanjima.

Utjecajne funkcije i utjecajne linije koriste se za proračun konstrukcija na koje djeluju pokretna opterećenja, a također i u slučajevima kada se provodi proračun za nepokretna opterećenja kada ih ima više vrsta. Uglavnom se utjecajne funkcije i utjecajne linije koriste za proračun nosača za djelovanje pokretnih opterećenja onda kada se mogu zanemariti inercijalne sile.

Promjenom položaja opterećenja u konstrukciji se mijenjaju reakcije, unutašnje sile te pomaci. Treba, dakle, više puta izračunati sile i pomake za različite karakteristične položaje opterećenja. Jednostavan i razmjerno brz proračun omogućava princip superpozicije, ukoliko je primjenjiv. Da bi se utvrdilo kako se te veličine - sila i pomak – mijenjaju ovisno o položaju jedinične sile treba promatrati razne položaje jedinične sile i ovisno o tim položajima izraziti traženu veličinu. Utjecajne funkcije su u općenitom obliku funkcije dviju varijabli, jedna varijabla je mjesto na nosaču u kojem se želi odrediti neka veličina, a druga je položaj jediničnog opterećenja. U praktičnim proračunima utjecajna funkcija je ipak funkcija jedne promjenljive – položaja jedinične sile, jer se mjesto tržene veličine (sile ili pomaka) unaprijed zadaje.

Ako jedinična sila djeluje u točki  $x_1$ , a vrijednost je određene sile ili pomaka pri djelovanju jedinične sile u toj točki  $\eta_1$ , tada će, prema principu superpozicije, pri djelovanju sile  $P_1$  vrijednosti  $P_1$  u  $x_1$  vrijednost te veličine biti  $P_1 \cdot \eta_1$ ; uz pretpostavku da se pri promjeni vrijednosti sile ne mijenja pravac njezina djelovanja. Ako jedinična sila djeluje u točki  $x_2$ , a vrijednost promatrane veličine za to djelovanje  $\eta_2$ , pri djelovanju sile  $P_2$  vrijednosti  $P_2$  u  $x_2$  ta će vrijednost biti  $P_2 \cdot \eta_2$ . Djeluju li  $P_1$  u  $x_1$  i  $P_2$  u  $x_2$  istodobno, ta vrijednost iznosi  $P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2$ , dok je pri istodobnom djelovanju sile  $P_1$  u točki  $x_2$  i sile  $P_2$  u točki  $x_1$  ta vrijednost je  $P_2 \cdot \eta_1 + P_1 \cdot \eta_2$ .

Funkcija  $\eta_{\bar{x}}$  položaja jedinične sile, čija je vrijednost statičke ili kinematičke veličine  $\bar{\delta}$  u odabranoj točki  $\bar{x}$  na nosaču, prouzročena djelovanjem te jedinične sile, naziva se utjecajnom funkcijom za veličinu  $\bar{\delta}$  u točki  $\bar{x}$ . Utjecajna funkcija, drugim riječima, preslikava položaj jedinične sile, koje se „kreće“ po nosaču, u vrijednost tom silom izazvane poopćene sile ili poopćenog pomaka u prethodno odabranoj točki nosača:

$$\eta_{\bar{\delta}\bar{x}} : x \rightarrow \eta_{\bar{\delta}\bar{x}}(x);$$

vrijednost veličine  $\bar{\delta}$  u točki  $\bar{x}$ , kao vrijednost utjecajne funkcije  $\eta_{\bar{\delta}\bar{x}}$  u točki  $x$ , označena je sa  $\eta_{\bar{\delta}\bar{x}}(x)$ .

Utjecajna linija je grafički prikaz utjecajne funkcije na štapnim nosačima, a na plošnim nosačima grafički je prikaz utjecajna ploha. Utjecajna linija za neku veličinu je, prema tome, linija čije ordinate daju vrijednosti te veličine ako jedinična sila djeluje u točkama za koje očitavamo te ordinate.

U nastavku ćemo pokazati da su na statički neodređenim nosačima utjecajne funkcije za statičke veličine nelinearne, a utjecajne linije, po dijelovima, krivulje. Utjecajne linije za (poopćene) pomake na svim sistemima su po dijelovima krivulje. Na određenim su pak sistemima utjecajne funkcije za statičke veličine po segmentima linearne – točnije, afine – funkcije ili konstante pa su utjecajne linije sastavljene od dijelova pravaca.

Za neku statičku veličinu utjecajne funkcije i utjecajne linije mogu se odrediti statičkim ili kinematičkim postupkom.

Kod statičkog postupka određivanja utjecajnih linija, nalazimo ordinate utjecajne linije kao funkciju položaja jedinične sile.

Statički postupak određivanja utjecajnih linija temelji se na tome da iz uvjeta ravnoteže nosača opterećenog jediničnom silom u po volji odabranoj točki  $x$  izvodimo funkcijski izraz za vrijednost veličine  $\bar{\delta}$  u točki  $\bar{x}$ .

Kinematički postupak temelji se na teoremu Müller - Breslaua. Kinematički postupak za statički određen nosač zasniva se na teoremu o virtualnim pomacima krutih tijela, a za statički neodređen nosač na teoremu o virtualnim pomacima za nedeformabilna tijela te teoremu o uzajamnosti pomaka. Za statički određen sistem utjecajnu linije možemo nacrtati kao plan pomaka mehanizma nastalog raskidanjem veze koja u izvornom sistemu prenosi promatranu silu, ako je po pravcu djelovanja te sile zadan jedinični pomak njezina hvatišta, suprotan od smisla njezina djelovanja. Ako je izvorni sistem statički neodređen, sistem koji ostaje nakon raskidanja odgovarajuće veze geometrijski je nepromjenljiv, pa crtamo njegovu progibnu liniju.

### 3. Primjena utjecajnih linija

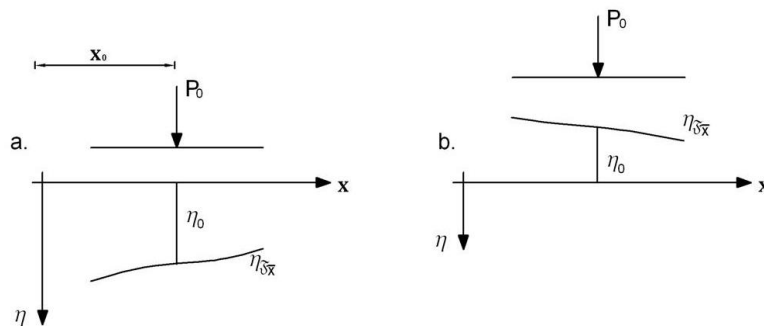
Opisat ćemo sada detaljnije postupak izračunavanja tražene veličine za djelovanja raznih opterećenja s pomoću utjecajnih funkcija ili utjecajnih linija; temeljnu smo zamisao za niz koncentriranih sila u prethodnom odjeljku već skicirali. Pretpostavit ćemo zasad da su nam utjecajna funkcija  $\eta_{\bar{x}}$  i utjecajna linija za traženu veličinu  $\bar{x}$  u točki  $\bar{x}$  poznate. Smjer djelovanja zadanih opterećenja mora se podudariti sa smjerom djelovanja koji je pretpostavljen pri nalaženju odgovarajuće utjecajne funkcije ili linije.

#### 3.1. Utjecaj jedne koncentrirane sile

Ako na nosač djeluje jedna koncentrirana sila  $P_0$  u točki  $x_0$ , a utjecajna linija u toj točki ima vrijednost  $\eta_0 = \eta_{\bar{x}}(x_0)$ , tada će vrijednost veličine  $F$  u točki  $x_0$  biti:

$$F_{\bar{x}}(P_0) = P_0 \cdot \eta_0.$$

Za izračunavanje vrijednosti  $F_{\bar{x}}$  treba paziti da li je ta vrijednost pozitivna ili negativna. Pri tome se treba uvažiti predznak ordinate  $\eta_0$  i smisao djelovanja sile  $P_0$ , ovisno o tome ima li isti smisao kao i jedinična sila ili joj je smisao suprotan.



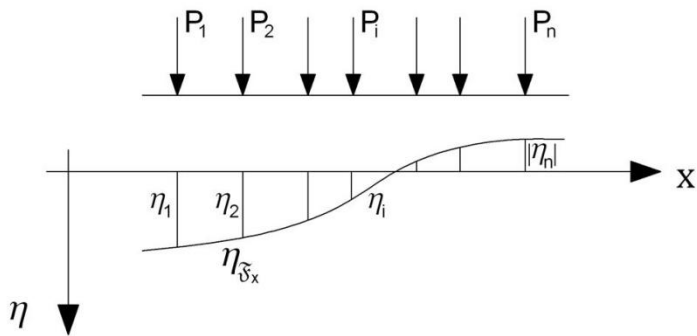
Slika 1.

#### 3.2. Utjecaj niza koncentriranih sila

Ako na nosač djeluju koncentrirane sile niza  $\{P_i\}_{i=1}^n = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  u točkama  $x_i$  u kojima su vrijednosti utjecajne funkcije  $\eta_i = \eta_{\bar{x}}(x_i)$ , onda će ukupan utjecaj biti:

$$F_{\bar{x}}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i;$$

pri čemu treba uvažiti predznake vrijednosti  $\eta_i$  i orijentacije sile.

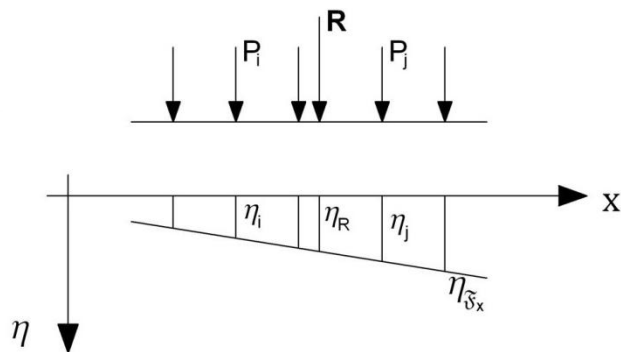


Slika 2.

Promatramo sada slučaj kada na dijelu nosača, za koji je utjecajna linija pravac, djeluje niz koncentriranih sila  $P_i, i = 1, \dots, n$ . Prikažemo li funkciju  $\eta_{\bar{x}}$  izrazom  $\eta_{\bar{x}}(x) = ax + b$ , vrijednost utjecajne funkcije u točkama  $x_i$  bit će  $\eta_i = \eta_{\bar{x}}(x_i) = ax_i + b$  pa je:

$$F_{\bar{x}}(\{P_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i = \sum_{i=1}^n P_i (ax_i + b) = a \sum_{i=1}^n P_i x_i + b \sum_{i=1}^n P_i ;$$

$\sum_{i=1}^n P_i = R$  vrijednost je rezultante R sila  $P_i$ , dok je  $\sum_{i=1}^n P_i x_i$  zbroj vrijednosti momenata sila  $P_i$  u odnosu na točku  $x = 0$ . Prema Varignonovu teoremu je taj zbroj jednak vrijednosti momenata



Slika 3.

rezultante u odnosu na istu točku,  $\sum_{i=1}^n P_i x_i = R x_R$  gdje je  $x_R$  točka u kojoj djeluje rezultanta R, pa dobivamo

$$F_{\bar{x}}(\{P_i\}_{i=1}^n) = aR x_R + bR = R(ax_R + b) = R \eta_{\bar{x}}(x_R) = R \eta_R = F_{\bar{x}}(R).$$

Prema tome, utjecaj niza koncentriranih sila na dijelu na kojem je utjecajna linija pravac jednak je utjecaju njihove rezultante.

Na temelju toga utjecaj se može izračunati množenjem rezultante s ordinatom utjecajne linije umjesto da se određuju ordinate ispod svake sile i zatim rezultat dobiva iz sume produkata svih sila s odgovarajućim ordinatama utjecajnih linija. Pri tome treba naglasiti da se jednom rezultantom smiju zamijeniti samo one sile koje djeluju na dijelu nosača koji "pokriva", jedan pravčasti odsječak – ako je utjecajna linija sastavljena od nekoliko pravčastih odsječaka, sile se moraju zamjenjivati rezultatama po pojedinim dijelovima nosača koje ti odsječci pokrivaju.

### 3.3. Utjecaj distribuirane sile

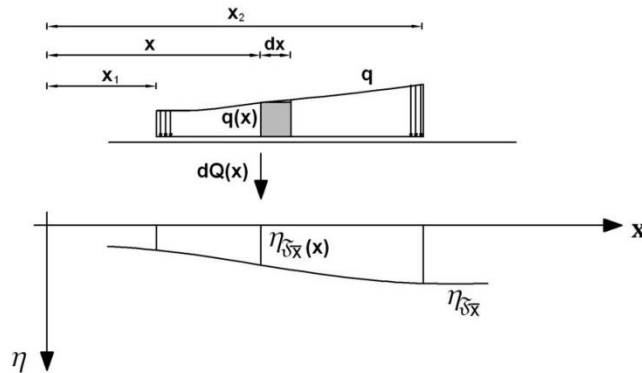
Neka na dijelu nosača između točaka  $x_1$  i  $x_2$  djeluje distribuirana sila čija je vrijednost opisana funkcijom  $q$  i neka je utjecajna funkcija za neku veličinu  $\bar{\delta}_x$  linearna ili nelinearna funkcija  $\eta_{\bar{\delta}_x}$ .

Na infinitesimalnom odsječku  $[x, x + dx]$  možemo opterećenje  $q$  zamijeniti infinitesimalnom koncentriranom silom  $dQ(x)$  čija je vrijednost  $dQ(x) = q(x) dx$ , a hvatište u  $x$ ; njezin će utjecaj tada biti

$$F_{\bar{x}}(dQ(x)) = dQ(x) \eta_{\bar{\delta}_x}(x) = q(x) dx \eta_{\bar{\delta}_x}(x) = q(x) \eta_{\bar{\delta}_x}(x) dx = d[F_{\bar{x}}(q)](x).$$

Ukupni utjecaj distribuirane sile na dijelu  $[x_1, x_2]$  dobivamo integracijom:

$$F_{\bar{x}}(Q) = \int_{x_1}^{x_2} d[F_{\bar{x}}(Q)](x) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \eta_{\bar{\delta}_x}(x) dx.$$



Slika 4.

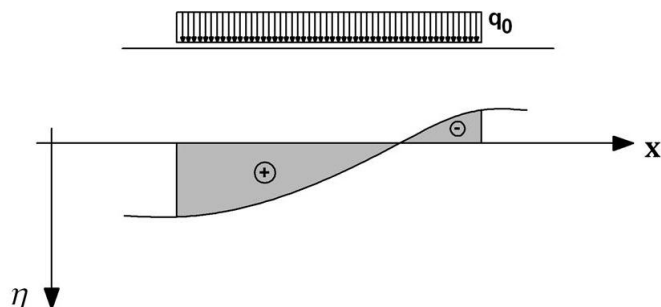
Ako je kontinuirana sila jednoliko raspodijeljena,  $q(x) = q_0$  bit će

$$F_{\bar{x}}(q_0) = \int_{x_1}^{x_2} q_0 \eta_{\bar{\delta}_x}(x) dx = q_0 \int_{x_1}^{x_2} \eta_{\bar{\delta}_x}(x) dx = q_0 \mathfrak{A}_{1,2},$$

gdje je, slikovito rečeno,  $\mathfrak{A}_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \eta_{\bar{\delta}_x}(x) dx$  površina „ispod“ krivulje  $\eta_{\bar{\delta}_x}$  na segmentu  $[x_1, x_2]$ . (Slikovito rečeno, jer ta površina nije geometrijska veličina – vrijednost integrala može biti i negativna). Dakle, utjecaj jednoliko distribuirane sile može se izračunati kao umnožak



njezine vrijednosti i površine, uz odgovarajući predznak, ispod utjecajne linije na dijelu nosača na kojem ta sila djeluje (slika 5. - tu je dio "površine,, pozitivan, a dio negativan).

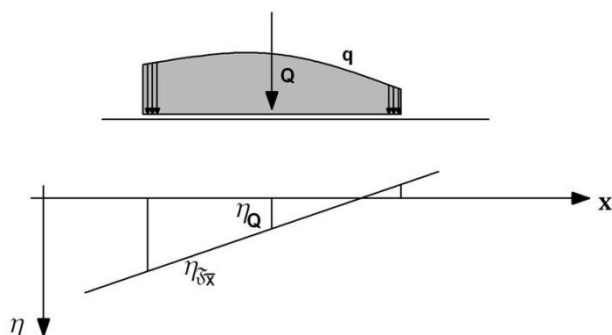


Slika 5.

Kao drugi poseban slučaj, ako je utjecajna funkcija na dijelu nosača na kojem djeluje (opća) distribuirana sila  $q$  linearna,  $\eta_{\delta\bar{x}}(x) = ax + b$ , bit će

$$F_{\bar{x}}(q) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) \eta_{\delta\bar{x}}(x) dx = a \int_{x_1}^{x_2} q(x)x dx + b \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx;$$

$Q = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx$  je vrijednost rezultante distribuirane sile  $q$ , dok je  $\int_{x_1}^{x_2} q(x)x dx$  vrijednost momenta te sile u odnosu na  $x = 0$ , koja je, prema Varignonovu teoremu, jednaka vrijednosti momenta njezine rezultante u odnosu na tu točku:  $Q x_Q$ , gdje je  $x_Q$  točka u kojoj



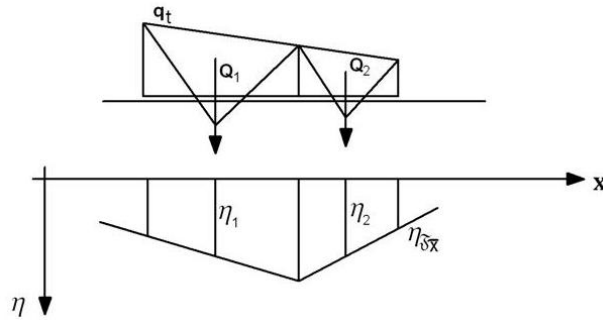
Slika 6.

djeluje sila  $Q$ , točnije, apscisa težišta površine „ispod“ krivulje kojom je distribuirana sila prikazana. Slijedi:

$$F_{\bar{x}}(q) = aQ x_Q + bQ = Q(a x_Q + b) = Q \eta_{\delta\bar{x}}(x_Q) = Q \eta_Q = F_{\bar{x}}(Q);$$

ili: utjecaj distribuirane sile, koja djeluje na dijelu nosača na kojemu je utjecajna linija dio pravca, jednak je utjecaju rezultante te sile (slika 6.). Kao i pri izračunavanju utjecaja niza sila,

djeluje li distribuirana sila „iznad“ utjecajne linije sastavljene od više pravčastih odsječaka, rezultante treba uzimati nad pojedinim odsječcima (slika 7.:  $F_{\bar{x}}(q_t) = Q_1\eta_1 + Q_2\eta_2$ ).

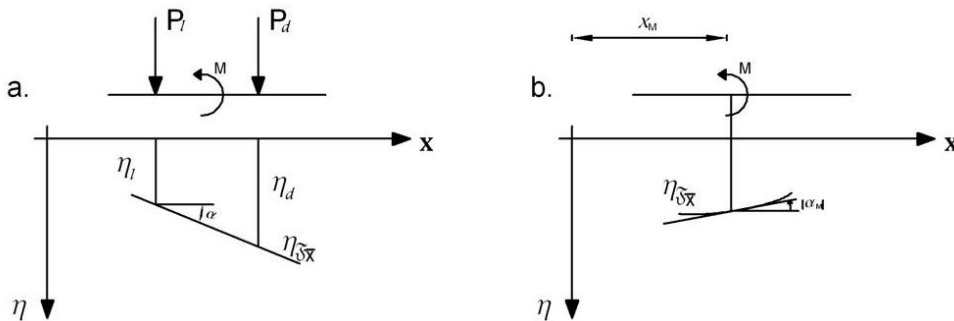


Slika 7.

### 3.4. Utjecaj koncentriranog momenta

Za određivanje utjecaja koncentriranog momenta uzeta je, radi jednostavnijeg grafičkog prikaza, utjecajna linija koja je pravac. Koncentrirani moment  $M$  vrijednosti  $M$ , koji djeluje u točki  $x_M$ , zamijenit ćemo spregom sila  $P_l$  i  $P_d$  koje djeluju na međusobnoj udaljenosti  $\lambda$ , a u točkama  $x_l = x_M - \lambda/2$  i  $x_d = x_M + \lambda/2$  (slika 8.) vrijednosti sila sprega su  $P_l = P_d = M/\lambda$ . Utjecaj tog para sila bit će

$$F_{\bar{x}}(P_l, P_d) = P_l\eta_l - P_d\eta_d = \frac{M}{\lambda}\eta_l - \frac{M}{\lambda}\eta_d = M\left(-\frac{\eta_d - \eta_l}{\lambda}\right) = -M \operatorname{tg} \alpha,$$



Slika 8.

gdje je  $\alpha$  orijentirani kut između osi  $x$  i pravca utjecajne linije, a iz relacije

$$\frac{\eta_d - \eta_l}{\lambda} = \eta'_{\delta x}(x_M),$$

slijedi da je kut  $\alpha$  na slici 8.a. pozitivan. U ravnini  $xz$  je, prema tome, sa stanovišta matematičke analize i diferencijalne geometrije, pozitivan onaj kut čiji je smisao jednak smislu vrtnje kazaljke na satu. To ne mora vrijediti za neke njegove kinematičke interpretacije - primjerice, kut zaokreta osi nosača, kao i moment, smatramo pozitivnim ako mu je smisao suprotan smislu vrtnje kazaljke na satu.

Izraz  $M \operatorname{tg} \alpha$  ne ovisi o razmaku sila  $\lambda$ , pa zaključujemo da je

$$F_{\bar{x}}(M) = -M \operatorname{tg} \alpha.$$

(Negativan predznak u izrazu za  $F_{\bar{x}}$  posljedica je spomenute pomalo neugodne i, možda, zbunjujuće činjenice da pozitivan moment i pozitivan kut  $\alpha$  imaju suprotan smisao vrtnje.) Vidimo, uz to, da na linearnom dijelu utjecajne funkcije položaja hvatišta koncentriranoga momenta ne utječe na vrijednost  $F_{\bar{x}}$ .

Nije li utjecajna funkcija linearna (slika 8.b.) moment ćemo zamijeniti spregom (neizmjerljivo velikih) sila na infinitesimalnoj udaljenosti  $d\lambda = dx$ . Slijedi:

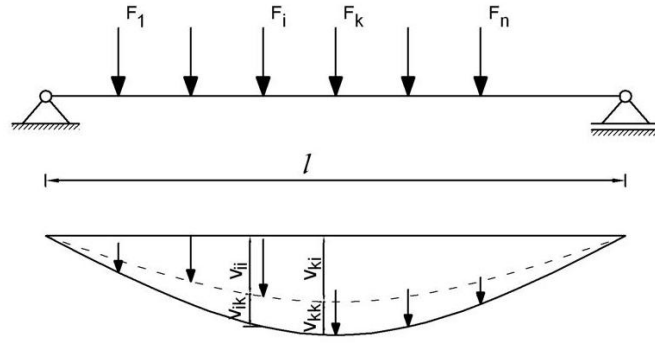
$$F_{\bar{x}}(M) = M \left( \frac{d\eta_{\bar{x}}}{dx} \right) = -M \eta'_{\bar{x}}(x_M) = -M \operatorname{tg} \alpha_M.$$

Sada je  $\alpha_M$  (orijentirani) kut nagiba tangente na utjecajnu liniju u točki koja daje vrijednost utjecajne funkcije u hvatištu  $x_M$  momenta  $M$ . Budući da se nagib tangente na krivulju utjecajne linije mijenja uzduž osi nosača, vrijednost utjecaja ovisit će o točki u kojoj moment djeluje.

#### 4. Teorem o uzajamnosti radova Enrica Bettija

Teorem Heinricha Müller - Breslaua može se dokazati pomoću teorema *Enrica Bettija o uzajamnosti radova* koji ćemo prvo dokazati.

Promatramo prostu gredu na kojoj razmatramo grupe sila koje nastaju neovisno jedna iza druge.



Slika 9.

Pomaci se označavaju s dva indeksa. Prvi indeks označava pravac i smjer pomaka koji odgovara sili koja na tom pravcu djeluje, drugi indeks označava uzrok pomaka.

Ako prvo nastaje grupa sila  $F_1$  do  $F_i$ , a zatim grupa  $F_k$  do  $F_n$  ukupni rad će biti:

$$R_v(1) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^i F_m \cdot \sum_{n=1}^i v_{mn} + \sum_{m=1}^i F_m \cdot \sum_{j=k}^n v_{mj} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=k}^n F_j \cdot \sum_{l=1}^n v_{jl} ,$$

Ako se redoslijed nastajanja sila promjeni bit će:

$$R_v(2) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=k}^n F_j \cdot \sum_{l=1}^n v_{jl} + \sum_{j=k}^n F_j \cdot \sum_{m=1}^i v_{jm} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^i F_m \cdot \sum_{k=1}^i v_{mk} .$$

Budući da ukupni rad vanjskih sila ne ovisi o redoslijedu nastanka sila, mogu se izjednačiti radovi za različite redoslijede nastajanja grupa sila, te će onda biti

$$\sum_{m=1}^i F_m \cdot \sum_{j=k}^n v_{mj} = \sum_{j=k}^n F_j \cdot \sum_{m=1}^i v_{jm} ,$$

gdje su

$F_m$  - jedno stanje opterećenja,

$F_j$  - drugo stanje opterećenja,

$v_{mj}$  - pomaci u smjeru  $i$  na mjestu sila prvog stanja opterećenja (stanje  $m$ )

izazvani silama drugog stanja opterećenja ( stanje  $j$ ),

$v_{jm}$  - pomaci na mjestu i u smjeru sila drugog stanja opterećenja (stanje j)  
 izazvani silama prvog stanja opterećenja ( stanje m).

Ova jednadžba predstavlja teorem o uzajamnosti radova.

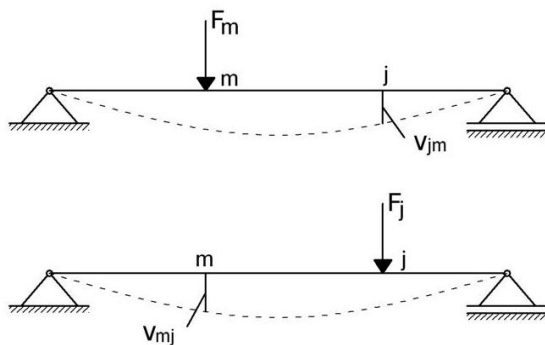
Riječima iskazan teorem o uzajamnosti radova:

Za sistem s dva različita stanja opterećenja vrijedi da je rad vanjskih sila jednog stanja opterećenja na pomacima izazvanim drugim stanjem opterećenja jednak radu vanjskih sila drugog stanja opterećenja na pomacima izazvanim prvim stanjem opterećenja.

Taj teorem vrijedi za linearne i nelinearne odnose sila i pomaka za slučaj konzervativnih sila, te vrijedi ako se materijal ponaša po Hookeovu zakonu. Iz njega proizlaze teoremi: Maxwellov teorem o uzajamnosti pomaka, teorem o uzajamnosti reakcija i teorem o uzajamnosti reakcija i pomaka.

### 5. Teorem o uzajamnosti pomaka Jamesa Clerka Maxwella:

Teorem o uzajamnosti radova primijenit ćemo na prostoju gredi za dva stanja opterećenja.



Slika 10.

Za prvo stanje se uzima sila  $F_m$  koja djeluje u točki m, a za drugo stanje opterećenja odabere se sila  $F_j$  koja djeluje u točki j. Dobiva se

$$F_m \cdot v_{mj} = F_j \cdot v_{jm} .$$

Pomaci  $v_{mj}$ , odnosno  $v_{jm}$  mogu se izraziti pomoću pomaka od jediničnih sila jer vrijedi princip superpozicije:

$$v_{mj} = F_m \cdot \delta_{mj},$$

$$v_{jm} = F_j \cdot \delta_{jm},$$

gdje su  $\delta_{mj}$  - pomak na mjestu  $i$  u smjeru sile  $F_m$  izazvan silom  $F_j = 1$ ,

$\delta_{jm}$  - pomak na mjestu  $i$  u smjeru sile  $F_j$  izazvan silom  $F_m = 1$ .

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivenu iz teorema o uzajamnosti radova dobiva se sljedeća jednakost:

$$F_m \cdot F_j \cdot \delta_{mj} = F_j \cdot F_m \cdot \delta_{jm},$$

odnosno

$$\delta_{mj} = \delta_{jm},$$

čime je formuliran teorem o uzajamnosti pomaka.

Riječima iskazan teorem o uzajamnosti pomaka:

Pomak na mjestu, pravcu  $i$  u smjeru sile u točki ( $m$ ) zbog jedinične sile koja djeluje u točki ( $j$ ) jednak je pomaku na mjestu, pravcu  $i$  smjeru sile u točki ( $j$ ) uslijed djelovanja jedinične sile u točki ( $m$ ).

To je Maxwellov teorem koji se riječima može općenitije pokazati i na ovaj način:

Pomak generalizirane sile  $F_m$  izazvan jediničnom generaliziranom silom  $F_j$  jednak je pomaku generalizirane sile  $F_j$  izazvanom jediničnom silom  $F_m$ .

Pomaci su jednaki po apsolutnim vrijednostima, ali mogu imati različite dimenzije, ovisno o karakteru generalizirane sile  $F$ .

Maxwellov teorem upotrijebit ćemo u varijanti dokaza teorema Müller – Breslaua.

## 6. Teorem o virtualnim pomacima za elastična tijela

Ako se elastično tijelo pod zadanim sistemom sila nalazi u ravnoteži, tada je rad vanjskih sila na virtualnim pomacima (ili, na varijaciji pomaka) jednak radu unutarnjih sila ili naprezanja na odgovarajućim virtualnim deformacijama. Vrijedi i obrat: ako je rad vanjskih sila na bilo kakvim virtualnim pomacima jednak radu unutarnjih sila na odgovarajućim deformacijama, tada su vanjske i unutarnje sile u ravnoteži.

I sada se pretpostavlja da se tijekom virtualnih pomaka ravnotežne vrijednosti vanjskih i unutarnjih sila ne mijenjaju.

Za formulaciju teorema treba definirati odnos pomaka i deformacija (primjerice  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ), no, kako su vanjske i unutarnje sile (odnosno naprezanja) neovisni o virtualnim pomacima i deformacijama, teorem je neovisan o konstitutivnim relacijama gradiva (vezi naprezanja i deformacija, poput Hookeovog zakona).

Rad stvarnih sila na virtualnim pomacima naziva se virtualnim radom, pa se teorem često naziva i teorem o virtualnom radu.

Teorem je formalna osnova za formulaciju metode pomaka, klasične Galerkinove metode, i Galerkinovog pristupa metodi konačnih elemenata.

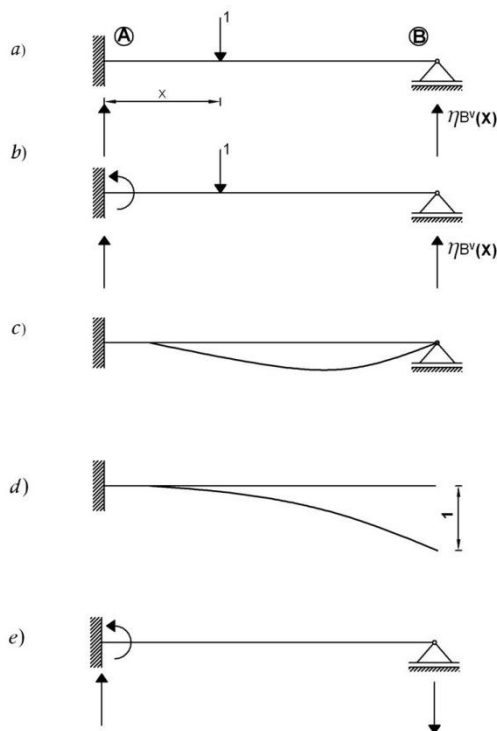
Poopćenje teorema, u kojem varijacija pomaka u odabranoj točki ne mora zadovoljavati rubne uvjete i/ili uvjete neprekidnosti, osnova je metode jediničnog pomaka koja se primjenjuje, primjerice, u određivanju utjecajnih linija ili utjecajnih funkcija te koeficijenata krutosti u metodi pomaka.

U trećoj varijanti dokaza primijenit ćemo teorem o virtualnim pomacima.

## 7. Iskaz i dokaz teorema Müller - Breslaua

Utjecajnu liniju na statički neodređenom sistemu za neku statičku veličinu dobijamo kao liniju pomaka na zadanom sistemu u smjeru zadanog opterećenja izazvanu jediničnim pomakom na mjestu  $i$  u smjeru statičke veličine za koju tražimo utjecajnu liniju. Ovo možemo dokazati primjenom teorema o uzajamnosti radova na kojemu se temelji teorem Müller - Breslaua.

Teorem Heinricha Müller - Breslaua, odnosno valjanost postupka „dokazati“ ćemo na primjeru funkcije za reakciju  $B^v$  u zglobnom ležaju jednostavno upete grede i pripadne utjecajne linije. Polazište je, dakle, teorem *Enrica Bettija o uzajamnosti radova* u dva različita ravnotežna stanja.



Slika 11.

Na slici 11.a) je prikazano prvo stanje. U prvome stanju promatramo gredu na koju djeluje jedinična sila okomito na njezinu os, u nekoj proizvoljno odabranoj točki  $x$ . Drugo stanje je prikazano na slici 11.d) u kojem je zadan prisilni jedinični pomak desnog ležaja po pravcu okomitom na os grede.

Na slici 11.b) su skicirane sve vanjske sile koje u prvom stanju djeluju na gredu. To su zadana jedinična sila u općem položaju, zatim uravnotežujuće reaktivne sile te uravnotežujući reaktivni moment. Progibna linija grede zbog djelovanja jedinične sile skicirana je na slici 11.c). Kako bismo primijenili teorem Enrica Bettija, zamišljamo da sile koje djeluju na gredu na slici 11.b)



rade na pomacima drugoga stanja. U tom je stanju lijevi ležaj nepomičan, i ne zaokreće se, pa rade samo sila  $\eta_{B^V}(x)$  i jedinična sila.

Obje sile djeluju na pomacima po kojima se odvijaju pomaci njihovih hvatišta. Vrijednosti su tih pomaka 1 i  $\omega(x)$ , a smisao jediničnog pomaka suprotan je smislu djelovanja sile  $\eta_{B^V}(x)$ , pa je stoga rad sila prvoga stanja na pomacima drugog stanja

$$-\eta_{B^V}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x).$$

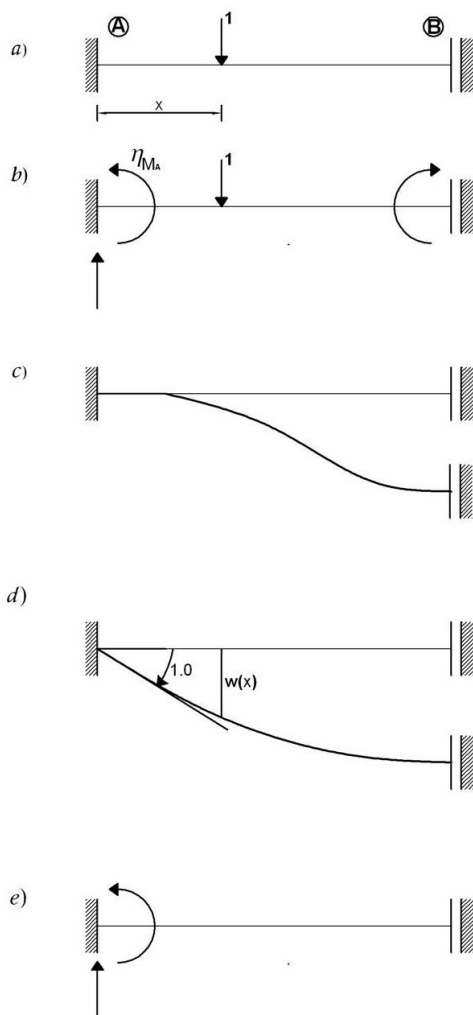
Prema Bettijevu teoremu rad je sila prvoga stanja na pomacima drugog jednak radu sila drugoga na pomacima prvog stanja. U drugom stanju, koje je prikazano na skici 11.e) postoje samo reakcije, a u prvom stanju nema ni pomaka ni zaokreta ležajeva, tako da je rad sila drugog stanja na pomacima prvog jednak nuli. Iz teorema Enrica Bettija slijedi da je

$$-\eta_{B^V}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x) = 0,$$

pa je

$$\eta_{B^V}(x) = \omega(x).$$

Valjanost postupka pokazat ćemo i na primjeru funkcije  $\eta_{MA}$  i pripadne utjecajne linije (slika 12.).



Slika 12.

Na slici 12.a) je prikazano prvo stanje. U prvome stanju promatramo gredu na koju djeluje jedinična sila okomito na njezinu os, u nekoj proizvoljno odabranoj točki  $x$ . Drugo stanje je prikazano na slici 12.d) u kojem je zadan prisilni jedinični zaokret lijevoga ležaja.

Na slici 12.b) su skicirane sve vanjske sile koje u prvom stanju djeluju na gredu. To su zadana jedinična sila u općem položaju, zatim uravnotežujuća reaktivna sila te uravnotežujući reaktivni momenti. Progibna linija grede zbog djelovanja jedinične sile skicirana je na slici 12.c). Kako bismo primijenili teorem Enrica Bettija, zamišljamo da sile koje djeluju na gredu na slici 12.b) rade na pomacima drugoga stanja. U tom je stanju lijevi ležaj nepomičan, a desni se ne zaokreće, pa rade samo moment  $\eta_{MA}(x)$  i jedinična sila.

Sila i moment djeluju na pomacima po kojima se odvijaju pomaci njihovih hvatišta. Vrijednosti su tih pomaka  $1$  i  $\omega(x)$ , a smisao jediničnog zaokreta suprotan smislu djelovanja sile  $\eta_{MA}(x)$ , pa je stoga rad sila prvoga stanja na pomacima drugog stanja

$$-\eta_{MA}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x).$$

Prema Bettijevu teoremu rad je sila prvoga stanja na pomacima drugog jednak radu sila drugoga na pomacima prvog stanja. U drugom stanju, koje je prikazano na skici 12.e) postoje samo reakcije, a u prvom stanju nema ni pomaka ni zaokreta ležajeva, tako da je rad sila drugog stanja na pomacima prvog jednak nuli. Iz teorema Enrica Bettija slijedi da je

$$-\eta_{MA}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x) = 0,$$

pa je

$$\eta_{MA}(x) = \omega(x).$$

Dakle, teorem Müllerā Breslaua kaže: utjecajna linija ta statičku veličinu  $\eta$  jednaka je progibnoj liniji od jediničnog prisilnog pomaka na mjestu  $i$  u smjeru suprotnom od tražene statičke veličine  $\eta$ .

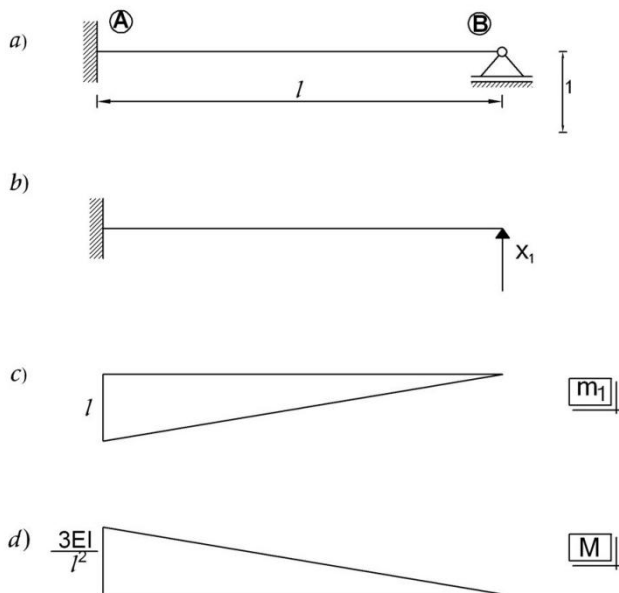
## 8. Primjena teorema – crtanje utjecajnih linija

Problem određivanja utjecajne funkcije svodi se na problem određivanja funkcijskog izraza za progibnu liniju. Drugim riječima, treba riješiti diferencijalnu jednadžbu

$$\omega''(x) = -\frac{M(x)}{EI},$$

gdje je  $M$  funkcija koja opisuje vrijednosti momenata savijanja izazvanih prisilnim jediničnim pomakom u smislu suprotnom od pozitivnog smisla djelovanja sile za koju tražimo utjecajnu funkciju. Izraz za funkciju  $M$  izvest ćemo metodom sila.

Prvo ćemo odrediti funkcijski izraz za utjecajnu liniju za reakciju  $B^v$  jednostrano upete grede.



Slika 13.

Za osnovni sistem sa slike 13.b), jednačba je neprekinutosti

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} = -1.$$

Uz dijagram  $m_1$  sa slike 13.c) dobivamo

$$\delta_{1,1} = \int_0^l \frac{m_1(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{3EI}.$$

Vrijednost nepoznanice  $X_1$  izračunavamo iz

$$X_1 = \frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = \frac{-1}{\frac{l^3}{3EI}},$$

pa je

$$X_1 = \frac{-3EI}{l^3}.$$

Sada možemo odrediti funkcijski izraz za moment savijanja

$$M(x) = X_1 \cdot m_1(x) = \frac{-3EI}{l^3} \cdot (l - x) = \frac{-3EI}{l^2} + \frac{3EI}{l^3} \cdot x.$$

Uvrštavanjem izraza za moment u diferencijalnu jednadžbu progibne linije dobivamo

$$\omega''(x) = -\frac{3}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Prvo integriranje daje

$$\omega'(x) = -\frac{3}{l^2} \left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + C_1.$$

Iz rubnoga uvjeta  $\varphi(0) = -\omega'(0)$  slijedi  $C_1 = 0$ . Još jednim integriranjem dobivamo da je

$$\omega(x) = -\frac{3}{l^2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l}\right) + C_2.$$

$C_2$  je 0, jer je  $\omega(0) = 0$ .

Funkcijski izraz za progibnu liniju je nakon sređivanja

$$\omega(x) = -\frac{x^2(3l-x)}{2l^3}.$$

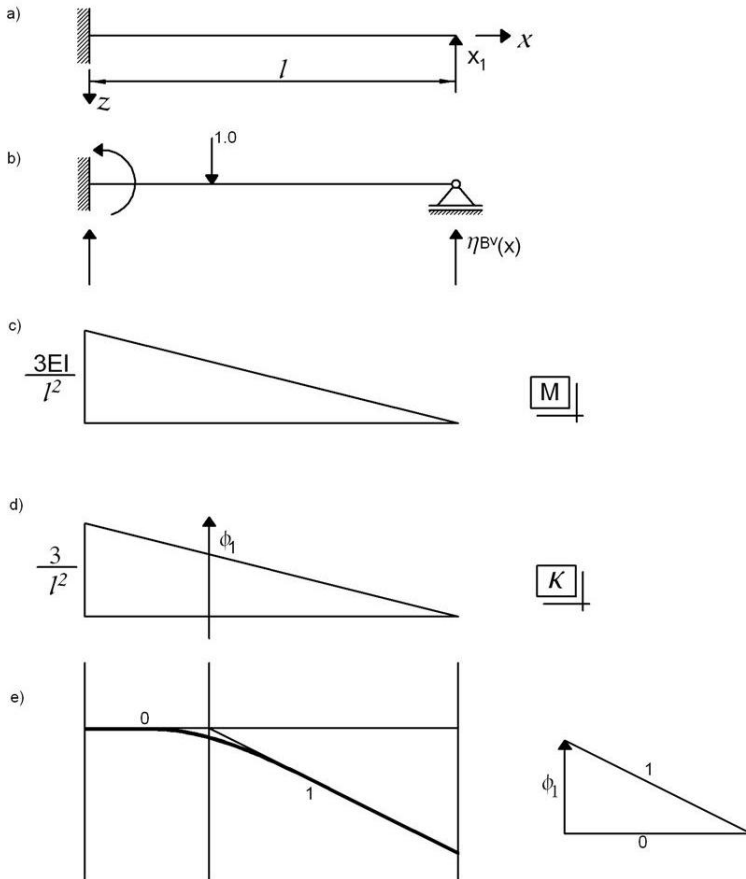
Za crtanje utjecajnih linija najčešće primjenjujemo postupak crtanja progibnih linija utemeljeni na Mohrovoj analogiji. Tražene vrijednosti utjecajne funkcije tada očitavamo na utjecajnoj liniji, koja je, kao što smo dokazali, upravo ta progibna linija.

Za očitavanje vrijednosti moraju mjerila na crtežu biti definirana. Progibnu, odnosno utjecajnu liniju nacrtat ćemo za gredu raspona  $l$ .

Za primjenu Mohrove analogije gredu, kojoj ležajni uvjeti ne trebaju biti definirani, „opterećujemo“ zamišljenom „distribuiranom silom“ čije su vrijednosti zadane funkcijom

$$\kappa(x) = \frac{M(x)}{EI}.$$

Crtamo utjecajnu liniju za  $\eta_{B^v}$ :



Mjerilo duljina:  $k \text{ [cm]} :: l \text{ [m]}$

$k=6$

$1 \text{ [cm]} :: l/k \text{ [m]}$

$1 \text{ [cm]} :: l/6$

$l/k = m$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{l^2} = \frac{3}{2l} [m^\circ]$$

Slika 14.

Mjerilo kutova:  $1 \text{ [cm]} :: \frac{1}{l} [m^\circ]$

$$\Phi_1^* = 1.5 \text{ cm}$$

$$H^* = 3 \text{ [cm]} \Rightarrow H = \frac{3}{l} [m^\circ]$$

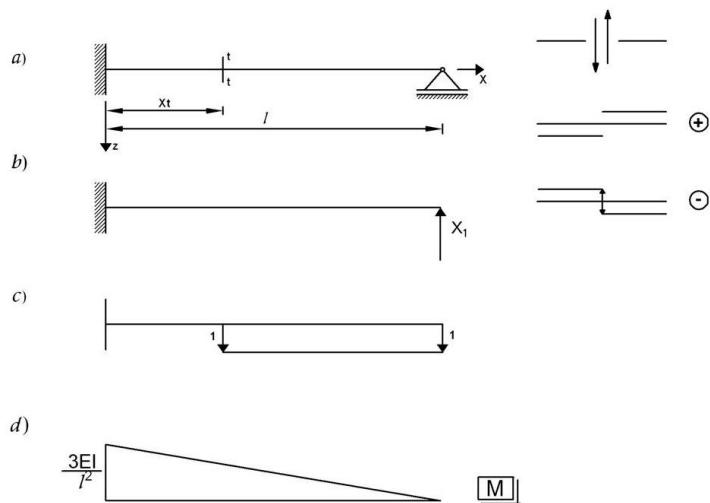
$$H = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{H} = \frac{l}{3}$$

$$\eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^* = \frac{l}{kn} \cdot \eta^*$$

$$\eta = \frac{l}{6 \cdot l/3} \cdot \eta^* = \frac{1}{2} \cdot \eta^* \quad \eta^* = 2 \text{ [cm]}$$

$$\eta = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Kao drugi primjer, tražimo utjecajnu liniju za  $\eta_{T_{t-t}}$ .



Slika 15.

Metoda sila:

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} = -1.$$

Vrijednost nepoznanice  $X_1$  izračunavamo iz

$$X_1 = \frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = \frac{-1}{\frac{l^3}{3EI}},$$

pa je

$$X_1 = -\frac{3EI}{l^3}.$$

Mjerilo duljina:  $k$  [cm] ::  $l$  [m]

$k=6$

1 [cm] ::  $l/k$  [m]

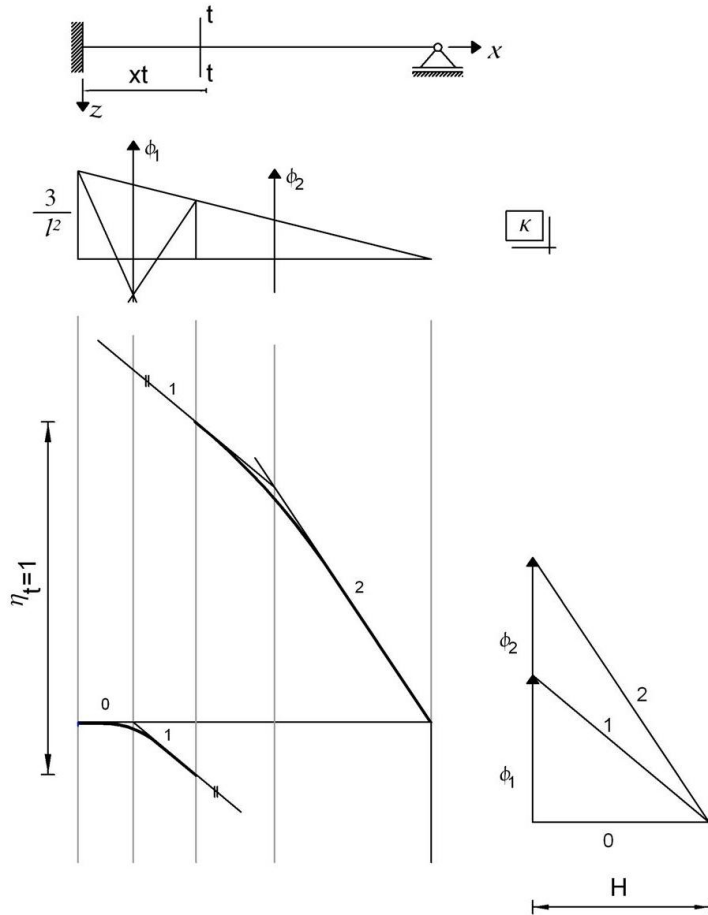
1 [cm] ::  $l/6$  [m]

$$l/k = m$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l}{3} + \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{5}{6l} [m^\circ]$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{l^2} \cdot \frac{2l}{3} = \frac{2}{3l} [m^\circ]$$

Crtamo utjecajnu liniju za  $\eta_{T_{t-t}}$



Mjerilo kutova:  $1 \text{ [cm]} :: \frac{1}{3l} \text{ [m}^\circ\text{]}$

$$\Phi_1^* = 2$$

$$\Phi_2^* = 2.5$$

$$H^* = 3 \text{ [cm]} \Rightarrow H = \frac{1}{l} \text{ [m}^\circ\text{]}$$

$$H = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{H} = l$$

$$\eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^* = \frac{l}{kn} \cdot \eta^*$$

$$\eta = \frac{l}{6 \cdot l} \cdot \eta^* = \frac{1}{6} \cdot \eta^*$$

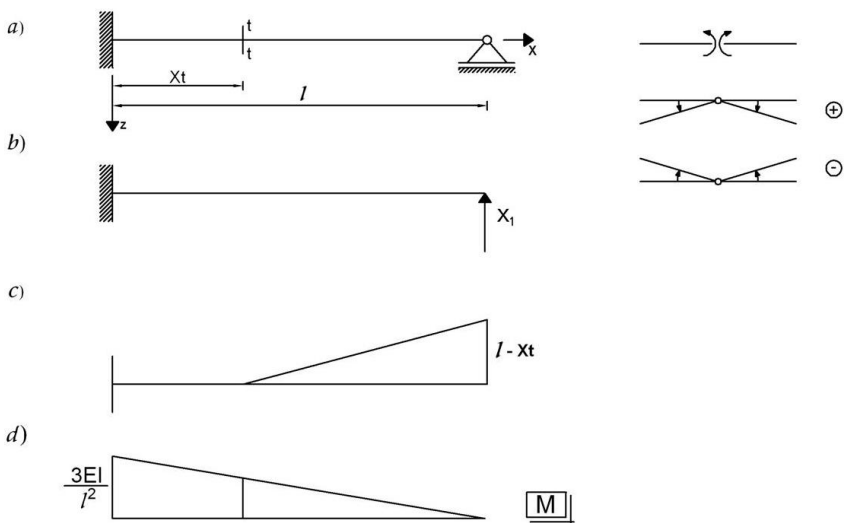
$$\eta^* = 6 \text{ [cm]}$$

$$\eta = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$$

Slika 16.



I, napokon, kao treći primjer, tražimo utjecajnu liniju za  $\eta_{M_{t-t}}$



Slika 17.

Metoda sila:

$$X_1 \cdot \delta_{1,1} = -1,$$

$$X_1 = \frac{\delta_{1,0}}{\delta_{1,1}} = \frac{-1}{\frac{l^3}{3EI}}.$$

pa je

$$X_1 = -\frac{3EI}{l^3}.$$

Mjerilo duljina:  $k$  [cm] ::  $l$  [m]                       $k=4$

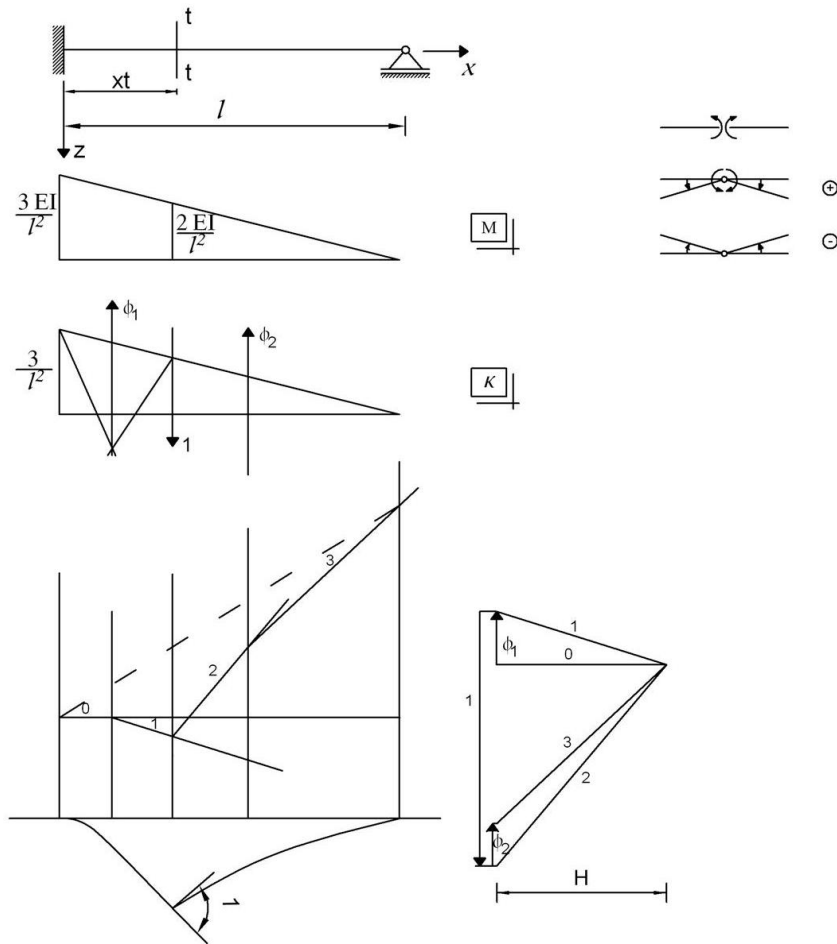
1 [cm] ::  $l/k$  [m]      1 [cm] ::  $l/4$  [m]

$$l/k = m \quad x_t = l/3$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l}{3} + \frac{2}{l^2} \cdot \frac{l}{3} = \frac{5}{6l} [m^\circ]$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{l^2} \cdot \frac{2l}{3} = \frac{2}{3l} [m^\circ]$$

Crtamo utjecajnu liniju za  $\eta_{M_{t-t}}$



Slika 18.

Mjerilo kutova:  $1 \text{ [cm]} :: \frac{2}{3l} \text{ [m}^\circ\text{]}$

$$\Phi_1^* = 1.25$$

$$\Phi_2^* = 1.0 \quad 1^* = 6$$

$$H^* = 3 \text{ [cm]} \Rightarrow H = \frac{2}{l} \text{ [m}^\circ\text{]}$$

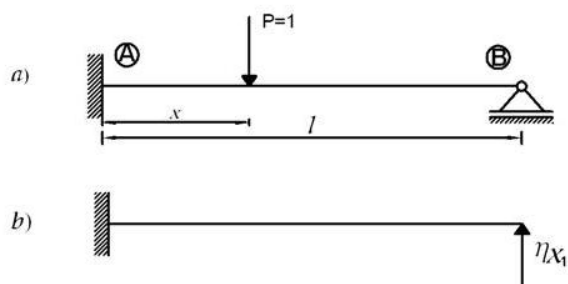
$$H = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{H} = \frac{l}{2} \quad \eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^* = \frac{l}{kn} \cdot \eta^*$$

## 9. Varijante dokaza

### 9.1. Dokaz pomoću Maxwellovog teorema

Započet ćemo prikazom statičkog načina određivanja utjecajnih funkcija.

Na jednostrano upetoj gredi sa slike 19. Tražimo utjecajnu liniju za prekobrojnu silu  $X_1$ .



Slika 19.

Na gredu djeluje jedinična sila  $P = 1$  na udaljenosti  $x$  od ležaja A. Sila se kreće po gredi i potrebno je odrediti prekobrojnu silu kao funkciju položaja jedinične sile.

Na slici 19.b) prikazan je osnovni sistem. Osnovna jednačba metode sila za ovaj slučaj glasi

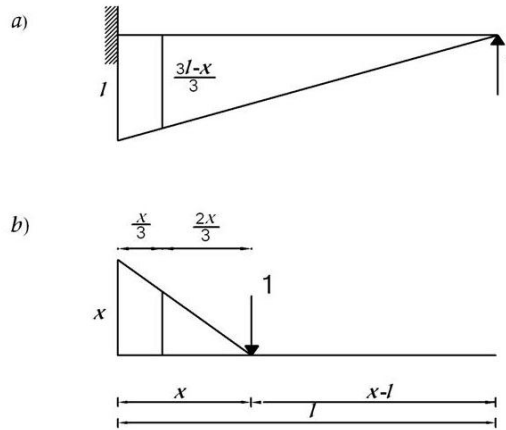
$$\eta_{X_1} \cdot \delta_{11} + \delta_{1v} = 0,$$

odakle dobijemo

$$\eta_{X_1} = -\frac{\delta_{1v}}{\delta_{11}}.$$

U gornjem izrazu  $\delta_{11}$  je konstantna veličina, dok je  $\delta_{1v}$  promjenjiva i ovisi od položaja jedinične sile na osnovnom sistemu.

Na slici 20. nacrtani su dijagrami na zadanoj gredi za jediničnu vrijednost prekobrojne sile i za silu  $P = 1$  na proizvoljnom mjestu na gredi.



Slika 20.

Iz prikazanih dijagrama možemo naći izraze za  $\delta_{11}$  i  $\delta_{1v}$

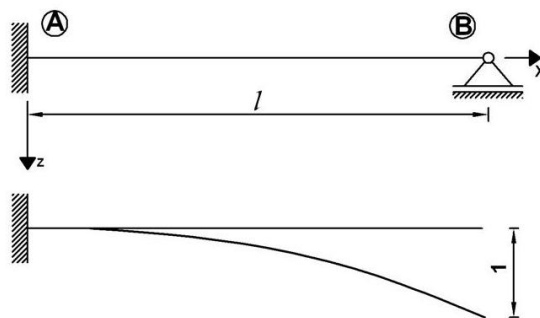
$$\delta_{11} = \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{1v} = -\frac{x \cdot x}{2} \cdot \frac{3l-x}{3} \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{x^2(3l-x)}{6EI}$$

Ako ovo uvrstimo u izraz za  $\eta_{x_1}$  dobijemo

$$\eta_{x_1} = \frac{x^2(3l-x)}{2l^3}$$

Dobiveni izraz je jednačba utjecajne linije za prekobrojni silu  $X_1$ . Na slici 21. nacrtana je utjecajna linija.



Slika 21.

Za kinematički način određivanja utjecajnih linija poslužit ćemo se sada teoremom o uzajamnosti pomaka po kojem možemo za pomak od vanjskog djelovanja u općoj jednadžbi metode sila staviti da je

$$\delta_{1v} = \delta_{v1},$$

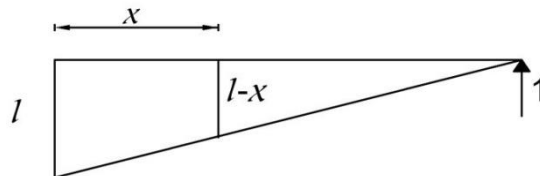
ili, riječima:

pomak na mjestu, pravcu  $i$  u smjeru sile u točki (1) uslijed jedinične sile koja djeluje u točki ( $v$ ) jednak je pomaku na mjestu, pravcu  $i$  u smjeru sile u točki ( $v$ ) uslijed djelovanja jedinične sile u točki (1).

Primijenjeno na promatrani primjer ovo znači da jednadžbu možemo pisati u ovom obliku

$$\mathcal{M}_{X_1} = -\frac{\delta_{v1}}{\delta_{11}}.$$

Kako je  $\delta_{v1}$  pomak na mjestu  $i$  u smjeru vanjskog djelovanja (znači u smjeru  $i$  na mjestu jedinične sile čiji se položaj mijenja) izazvan jediničnom silom na mjestu  $i$  u smjeru prekobrojne sile  $X_1$ , to znači da ćemo utjecajnu liniju za tu prekobrojni silu dobiti ako nađemo progibnu liniju zbog jedinične sile u smjeru  $i$  na mjestu prekobrojne sile  $X_1$  i to podijelimo sa  $\delta_{11}$ . Znači da smo problem nalaženja utjecajne linije sveli na traženje progibne linije, tj. linije pomaka u smjeru zadanog opterećenja.



Slika 22.

U promatranom primjeru dobit ćemo prema slici 22. izraz za moment u presjeku

$$M_x = (l - x).$$

Iz jednadžbe progibne linije imamo

$$\omega''(x) = -\frac{M_x}{EI} = \frac{-l+x}{EI},$$

$$EI\omega'(x) = -lx + \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$EI\omega(x) = -\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Iz rubnog uvjeta za  $x = 0$ , za šta je  $y = 0$ ,  $y' = 0$  dobivamo da je  $C_1 = C_2 = 0$ .

Tako dobivamo izraz za progib

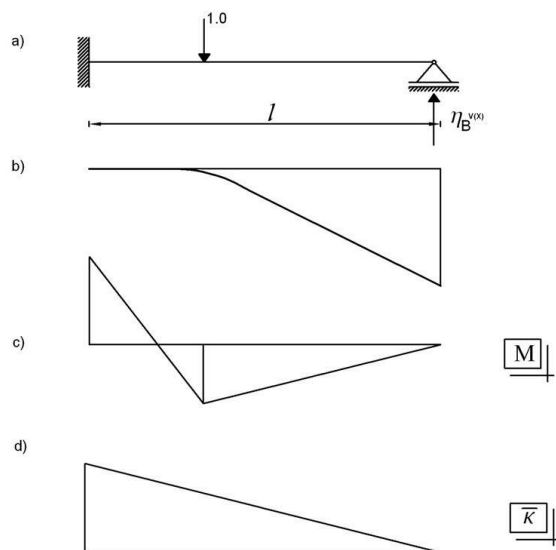
$$\omega(x) = -\frac{x^2(3l-x)}{6EI} = \delta_{v1}.$$

Kako je ovo isti izraz koji smo ranije dobili za  $\delta_{1v}$  jasno je da ćemo dobiti i isti izraz za  $\eta_{x1}$ .

Iz gornjeg slijedi:

Utjecajnu liniju na statički neodređenom sistemu za neku statičku veličinu dobivamo kao reduciranu progibnu liniju izazvanu jediničnom silom na mjestu i u smjeru veličine za koju tražimo utjecajnu liniju pod uvjetom da smo raskinuli vezu koja prenosi tu silu. Dobivenu progibnu liniju treba podijeliti sa  $\delta_{ii}$ . Znači da je faktor redukcije  $1/\delta_{ii}$ .

## 9.2. Dokaz pomoću virtualnog rada



Slika 23.

Rad vanjskih sila mora biti jednak radu unutarnjih sila

$$W_v = W_u.$$

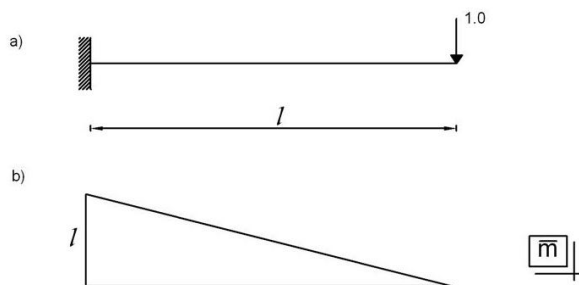
Rad vanjskih sila jednak je

$$W_v = -\eta_{B^v}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x).$$

Da iz tog izraza dobijemo  $\eta_{B^v}(x) = \omega(x)$ , moramo pokazati da je  $W_u = 0$ .

Deformacijska kontrola u fizikalnom smislu je izračunavanje pomaka unaprijed poznatog iz geometrijskih rubnih uvjeta na konstrukciji.

Za osnovni sistem uzmemo da je



Slika 24.

Na slici 23.d) prikazan je dijagram  $\bar{\kappa}$  koji je jednak izrazu

$$\bar{\kappa} = \frac{\bar{M}}{EI},$$

gdje je  $\bar{M} = a \cdot \bar{m}$  za neki zasad nepoznati  $a$ .

Dakle, znamo da će nam pomak  $\delta_B$  biti jednak nuli. Taj pomak izračunavamo pomoću izraza

$$\delta_B = \int_0^l \frac{M\bar{m}}{EI} dx,$$

gdje je  $M$  dijagram od vanjskog opterećenja (slika 23.c)), a  $\bar{m}$  dijagram od jediničnog opterećenja u smjeru traženoga vertikalnog pomaka koji je prikazan na slici 23.b). Uvrštavanje  $\bar{m} = \frac{\bar{M}}{a}$  dobivamo

$$\delta_B = \int_0^l \frac{M\bar{m}}{EI} dx = \frac{1}{a} \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx,$$

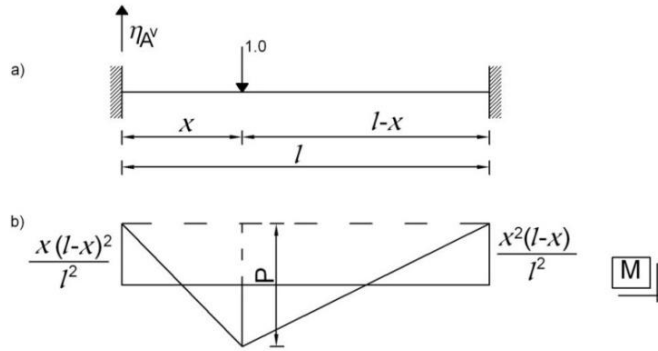
pri čemu je  $a \neq 0$ , pa iz toga slijedi da  $\int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx$  mora biti jednak nuli, a to znači da je rad unutarnjih sila

$$\omega_u = \int_0^l M\bar{K} dx = 0,$$

što smo i željeli dokazati.

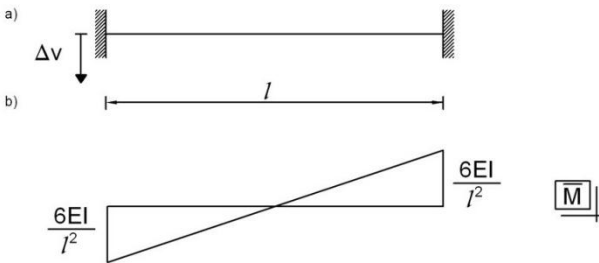
Na primjeru za obostrano upetu gredu (slika 25.a)) dokazujemo da je

$$-\eta_{A^v}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x) = \int_0^l M \bar{K} dx = 0.$$



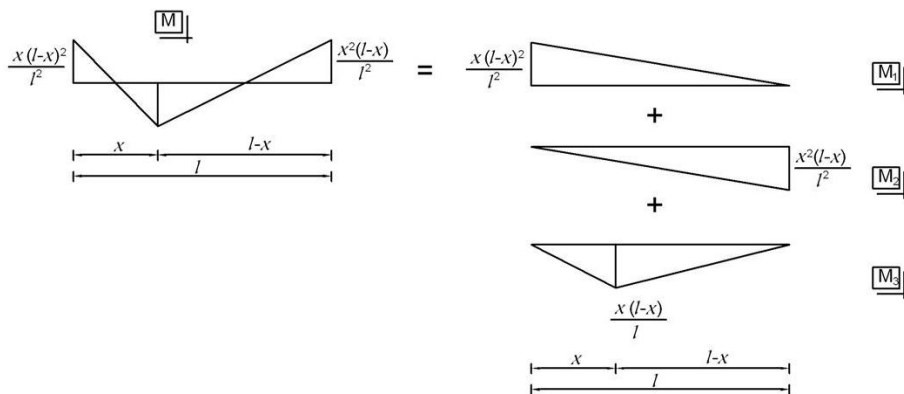
Slika 25.

Momentni dijagram za prisilni pomak  $\Delta v = 1$



Slika 26.

Radi lakšeg računanja koristimo superpoziciju M dijagrama (slika 27.)

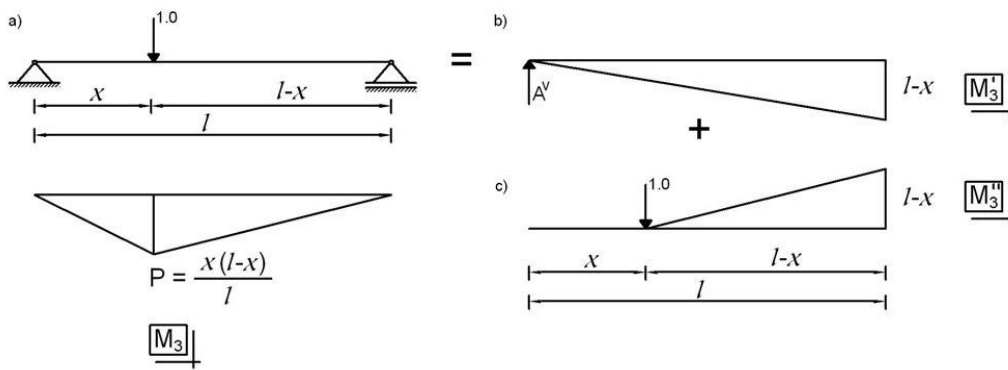


Slika 27.



Dakle, imamo da je  $M = M_1 + M_2 + M_3$ .

Dijagram  $M_3$  se može rastaviti na još dva dijagrama. To su

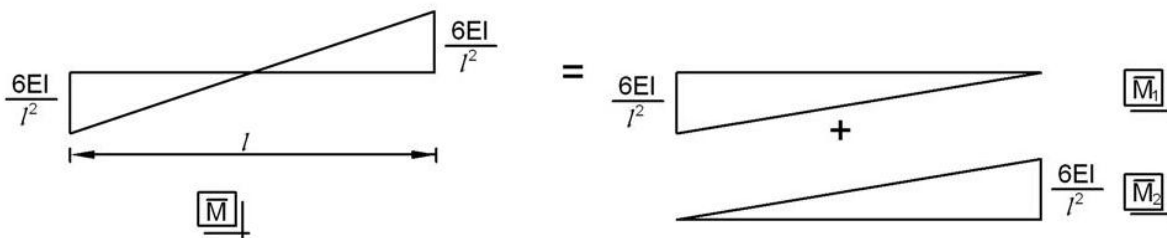


Slika 28.

Kako je  $EI = const.$ , možemo uzeti da je

$$-\eta_{A^v}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x) = \int_0^l M \bar{M} dx.$$

Dijagram  $\bar{M}$  možemo prikazati kao superpoziciju 2 dijagrama (slika 29.)



Slika 29.

$$\bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$$

Radi lakšeg proračuna uvodimo zamjenu:

$$x = a,$$

$$l - x = b,$$

$$\frac{6EI}{l^2} = A.$$

Integral  $\int_0^l M\bar{M} dx$  će se raspasti na 8 podintegrala, međusobni umnožak ( $M_1, M_2, M'_3, M''_3$ ) sa ( $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ ). Integriramo po Vereščagin.

Imamo da je:

$$\begin{aligned}
 -\eta_{A^v}(x) \cdot 1 + 1 \cdot \omega(x) &= \int_0^l M\bar{M} dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 b}{l^2} + \frac{1}{2} \cdot A \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 b}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot A \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab^2}{l^2} + \frac{1}{2} \cdot A \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab^2}{l^2} + \frac{1}{2} \\
 &\cdot A \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot b - \frac{1}{2} \cdot A \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot b - \frac{Ab}{l} \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{3} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{Aa}{l} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \frac{2}{3} \\
 &\cdot A = \frac{Aa^2 b}{6l} + \frac{Aa^2 b}{3l} - \frac{Aab^2}{3l} + \frac{Aab^2}{6l} + \frac{Alb}{6} - \frac{Alb}{3} - \frac{Ab^3}{6l} + \frac{Aab^2}{6l} + \frac{Ab^2}{3} \\
 &= \frac{Aa^2 b}{6l} - \frac{Alb}{6} - \frac{Ab^3}{6l} + \frac{Ab^2}{3} = \frac{Ab}{6l} (a^2 - l^2 - b^2 + 2bl) \\
 &= \frac{Ab}{6l} (a^2 - l^2 - b^2 + 2bl).
 \end{aligned}$$

Kako je  $A \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , znači da izraz u zagradi mora biti jednak nuli.

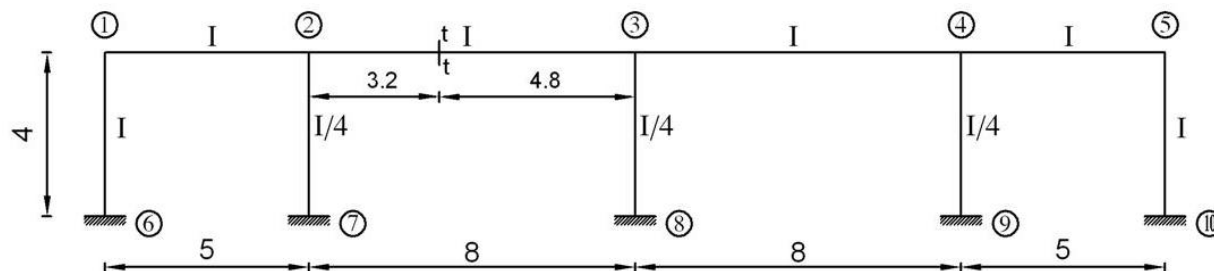
Vraćamo zamjenu  $x = a$ ;  $l - x = b$ ,

pa je

$$\begin{aligned}
 a^2 - l^2 - b^2 + 2bl &= x^2 - l^2 - (l - x)^2 + 2(l - x)l = \\
 &= x^2 - l^2 - (l^2 - 2lx + x^2) + 2l^2 - 2lx = x^2 + l^2 - l^2 + 2lx - x^2 - 2lx = \\
 &= (x^2 - x^2) + (l^2 - l^2) + (2lx - 2lx) = 0 + 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

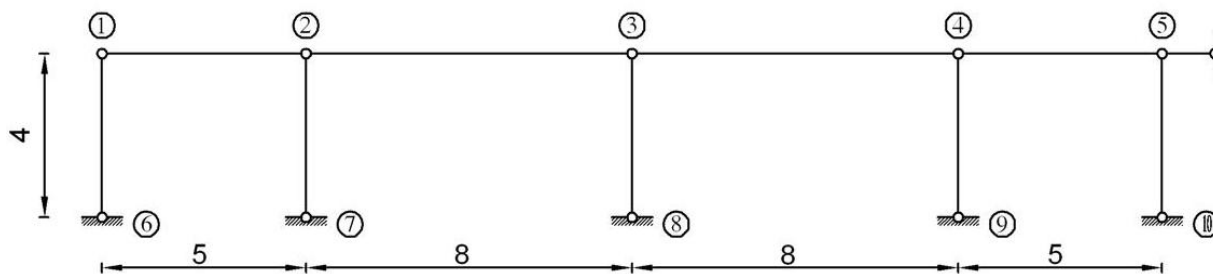
## 10. Primjena teorema u metodi pomaka

Za okvir sa slike 30. nacrtat ćemo utjecajne linije za moment u presjeku t-t, uzdužnu i poprečnu silu u presjeku t-t, te vertikalnu reakciju u ležaju 7.



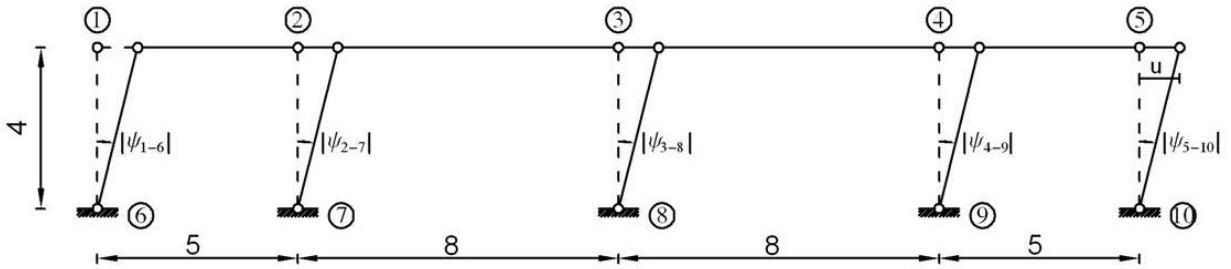
Slika 30.

Postupak proračuna započinje se identifikacijom nepoznanica. Ukupan broj slobodnih čvorova je 5 (čvorovi 1, 2, 3, 4 i 5) iz čega proizlazi zaključak da je broj nepoznatih zaokreta 5. Za određivanje broja neovisnih pomaka promatra se mehanizam nastao ubacivanjem zglobova u čvorove od 1 do 10 (slika 31.).



Slika 31.

Mehanizam ima jedan stupanj slobode koja se može spriječiti dodavanjem veze u čvoru 5. Mogli smo spriječiti dodavanjem veze i u čvoru 1 jer su horizontalne komponente čvora 1 i čvora 5 jednake, a to nam dokazuje osnovni teorem kinematike nedeformabilnih tijela koji kaže: projekcije vektora brzina bilo kojih dviju točaka nedeformabilnog tijela na os određenu njihovom spojnicom jednake su.



Slika 32.

Za zadani relativni pomak kutovi zaokreta štapova su:

$$\Psi_{1,6} = \Psi_{2,7} = \Psi_{3,8} = \Psi_{4,9} = \Psi_{5,10} = -\frac{u}{4}$$

Prema tome, broj je neovisnih pomaka 1. Oslobodi li se veza koja sprječava horizontalni pomak čvora 5 i na pravcu oslobođene veze dozvoli pomak  $u$  dobiva se plan pomaka štapova (slika 32).

Nakon identifikacije nepoznatih pomaka prelazi se na određivanje relativnih krutosti štapova.

$$k = \frac{EI}{l} \quad EI = 1$$

$$k_{1,2} = k_{4,5} = \frac{1}{5}$$

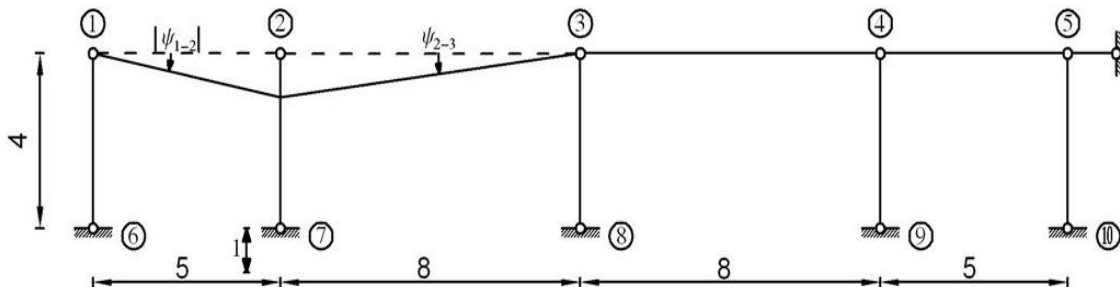
$$k_{2,3} = k_{3,4} = \frac{1}{8}$$

$$k_{1,6} = k_{5,10} = \frac{1}{4}$$

$$k_{2,7} = k_{3,8} = k_{4,9} = \frac{1}{16}$$

Tražimo utjecajnu liniju za vertikalnu reakciju u ležaju 7.

Dijagram pomaka za zadani jedinični pomak ležaja prema dolje prikazan je na slici 33.:



Slika 33.

Za zadani relativni jedinični pomak kutevi zaokreta štapa 1,2 i štapa 2,3 su

$$\psi_{1,2} = -\frac{1}{5}, \quad \psi_{2,3} = \frac{1}{8}.$$

Za nastale su pomake momenta upetosti:

$$\bar{M}_{1,2} = -6 \cdot k_{1,2} \cdot \psi_{1,2} = -6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 0.240 = \bar{M}_{2,1},$$

$$\bar{M}_{2,3} = -6 \cdot k_{2,3} \cdot \psi_{2,3} = -6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = -0.09375 = \bar{M}_{3,2}.$$

Momenti na krajevima elemenata su:

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= 4 \cdot k_{1,2} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot k_{1,2} \cdot \varphi_2 + \bar{M}_{1,2} = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \frac{1}{5} \varphi_2 + 0.240 \\ &= 0.8 \varphi_1 + 0.4 \varphi_2 + 0.240, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,1} &= 2 \cdot k_{1,2} \cdot \varphi_1 + 4 \cdot k_{1,2} \cdot \varphi_2 + \bar{M}_{2,1} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \varphi_1 + 4 \cdot \frac{1}{5} \varphi_2 + 0.240 \\ &= 0.4 \varphi_1 + 0.8 \varphi_2 + 0.240, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,3} &= 4 \cdot k_{2,3} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot k_{2,3} \cdot \varphi_3 + \bar{M}_{2,3} = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \varphi_3 - 0.09375 \\ &= 0.5 \varphi_2 + 0.25 \varphi_3 - 0.09375, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{3,2} &= 2 \cdot k_{3,2} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot k_{3,2} \cdot \varphi_3 + \bar{M}_{3,2} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \varphi_3 - 0.09375 \\ &= 0.25 \varphi_2 + 0.5 \varphi_3 - 0.09375, \end{aligned}$$

$$M_{3,4} = 4 \cdot k_{3,4} \cdot \varphi_3 + 2 \cdot k_{3,4} \cdot \varphi_4 = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi_3 + 2 \cdot \frac{1}{8} \varphi_4 = 0.5 \varphi_3 + 0.25 \varphi_4,$$

$$M_{4,3} = 2 \cdot k_{4,3} \cdot \varphi_3 + 4 \cdot k_{3,4} \cdot \varphi_4 = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \frac{1}{8} \varphi_4 = 0.25 \varphi_3 + 0.5 \varphi_4,$$

$$M_{4,5} = 4 \cdot k_{4,5} \cdot \varphi_4 + 2 \cdot k_{4,5} \cdot \varphi_5 = 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \varphi_4 + 2 \cdot \frac{1}{5} \varphi_5 = 0.8 \varphi_4 + 0.4 \varphi_5,$$

$$M_{5,4} = 2 \cdot k_{4,5} \cdot \varphi_4 + 4 \cdot k_{4,5} \cdot \varphi_5 = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \varphi_4 + 4 \cdot \frac{1}{5} \varphi_5 = 0.4 \varphi_4 + 0.8 \varphi_5,$$

$$M_{1,6} = 4 \cdot k_{1,6} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot k_{1,6} \cdot \Psi_{1,6} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = \varphi_1 + 0.375 u,$$

$$M_{6,1} = 2 \cdot k_{1,6} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot k_{1,6} \cdot \Psi_{1,6} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.5 \varphi_1 + 0.375 u,$$

$$M_{2,7} = 4 \cdot k_{2,7} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot k_{2,7} \cdot \Psi_{2,7} = 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.25 \varphi_2 + 0.09375 u,$$

$$M_{7,2} = 2 \cdot k_{2,7} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot k_{2,7} \cdot \Psi_{2,7} = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \varphi_2 - 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.125 \varphi_2 + 0.09375 u,$$

$$M_{3,8} = 4 \cdot k_{3,8} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot k_{3,8} \cdot \Psi_{3,8} = 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.25 \varphi_3 + 0.09375 u,$$

$$M_{8,3} = 2 \cdot k_{3,8} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot k_{3,8} \cdot \Psi_{3,8} = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \varphi_3 - 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.125 \varphi_3 + 0.09375 u,$$

$$M_{4,9} = 4 \cdot k_{4,9} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot k_{4,9} \cdot \Psi_{4,9} = 4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.25 \varphi_4 + 0.09375 u,$$

$$M_{9,4} = 2 \cdot k_{4,9} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot k_{4,9} \cdot \Psi_{4,9} = 2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \varphi_4 - 6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.125 \varphi_4 + 0.09375 u,$$

$$M_{5,10} = 4 \cdot k_{5,10} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot k_{5,10} \cdot \Psi_{5,10} = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = \varphi_5 + 0.375 u,$$

$$M_{10,5} = 2 \cdot k_{5,10} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot k_{5,10} \cdot \Psi_{5,10} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \varphi_5 - 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{u}{4}\right) = 0.5\varphi_5 + 0.375 u,$$

ili, tablično,

Tablica 1.

Momenti na krajevima elemenata	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$u$	$\bar{M}$
$M_{1,2}$	0.8	0.4	-	-	-	-	0.240
$M_{2,1}$	0.4	0.8	-	-	-	-	0.240
$M_{2,3}$	-	0.5	0.25	-	-	-	-0.09375
$M_{3,2}$	-	0.25	0.5	-	-	-	-0.09375
$M_{3,4}$	-	-	0.5	0.25	-	-	-
$M_{4,3}$	-	-	0.25	0.5	-	-	-
$M_{4,5}$	-	-	-	0.8	0.4	-	-
$M_{5,4}$	-	-	-	0.4	0.8	-	-
$M_{1,6}$	1	-	-	-	-	0.375	-
$M_{6,1}$	0.5	-	-	-	-	0.375	-
$M_{2,7}$	-	0.25	-	-	-	0.09375	-
$M_{7,2}$	-	0.125	-	-	-	0.09375	-
$M_{3,8}$	-	-	0.25	-	-	0.09375	-
$M_{8,3}$	-	-	0.125	-	-	0.09375	-
$M_{4,9}$	-	-	-	0.25	-	0.09375	-
$M_{9,4}$	-	-	-	0.125	-	0.09375	-
$M_{5,10}$	-	-	-	-	1	0.375	-
$M_{10,5}$	-	-	-	-	0.5	0.375	-

Jednadžbe ravnoteže momenata u čvorovima su:

čvor 1:

$$-M_{1,2} - M_{1,6} = 0, \quad \text{tj. } M_{1,2} + M_{1,6} = 0, \quad (1)$$

$$0.8 \varphi_1 + 0.4 \varphi_2 + 0.240 + \varphi_1 + 0.375 u = 0;$$

čvor 2:

$$-M_{2,1} - M_{2,3} - M_{2,7} = 0, \quad (2)$$

$$0.4 \varphi_1 + 0.8 \varphi_2 + 0.240 + 0.5 \varphi_2 + 0.25 \varphi_3 - 0.09375 + 0.25 \varphi_2 + 0.09375 u = 0;$$

čvor 3:

$$-M_{3,2} - M_{3,4} - M_{3,8} = 0, \quad (3)$$

$$0.25 \varphi_2 + 0.5 \varphi_3 - 0.09375 + 0.5 \varphi_3 + 0.25 \varphi_4 + 0.25 \varphi_3 + 0.09375 u = 0;$$

čvor 4:

$$-M_{4,3} - M_{4,5} - M_{4,9}, \quad (4)$$

$$0.25 \varphi_3 + 0.5 \varphi_4 + 0.8 \varphi_4 + 0.4 \varphi_5 + 0.25 \varphi_4 + 0.09375 u = 0;$$

čvor 5:

$$-M_{5,4} - M_{5,10} = 0, \quad (5)$$

$$0.4 \varphi_4 + 0.8 \varphi_5 + \varphi_5 + 0.375 u = 0;$$

Jednadžba je virtualnog rada na pomaku  $\bar{u} = 1$ ;

$$(M_{1,6} + M_{6,1} + M_{2,7} + M_{7,2} + M_{3,8} + M_{8,3} + M_{4,9} + M_{9,4} + M_{5,10} + M_{10,5}) \cdot \Psi_{1,6}^{(1)} = 0 \quad (6)$$

$$(\varphi_1 + 0.375 u + 0.5 \varphi_1 + 0.375 u + 0.25 \varphi_2 + 0.09375 u + 0.125 \varphi_2 + 0.09375 u + 0.25 \varphi_3 + 0.09375 u + 0.125 \varphi_3 + 0.09375 u + 0.25 \varphi_4 + 0.09375 u + 0.125 \varphi_4 + 0.09375 u + \varphi_5 + 0.375 u + 0.5 \varphi_5 + 0.375 u) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$(1.5 \varphi_1 + 0.375 \varphi_2 + 0.375 \varphi_3 + 0.375 \varphi_4 + 1.5 \varphi_5 + 2.0625 u) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -0.375 \varphi_1 - 0.09375 \varphi_2 - 0.09375 \varphi_3 - 0.09375 \varphi_4 - 0.375 \varphi_5 - 0.515625 u = 0$$

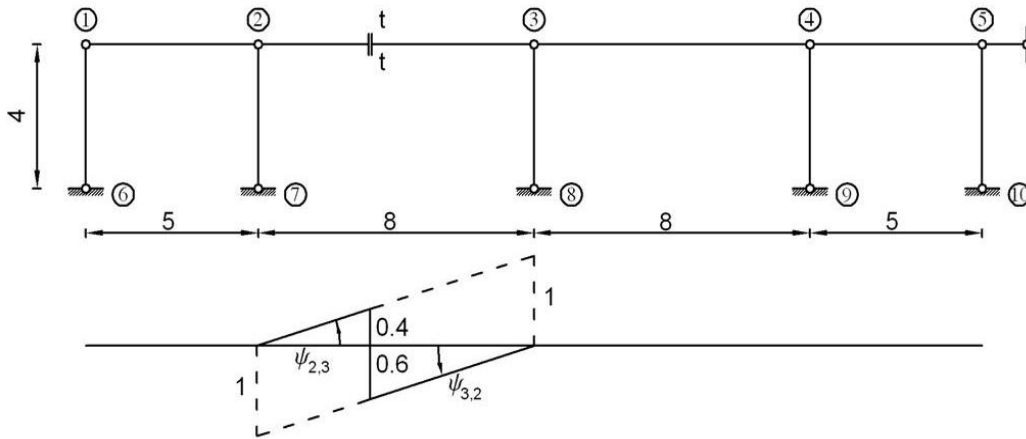


Koeficijente sustava jednažbi i slobodne članove možemo zapisati u tabličnom obliku

Tablica2.

jednažbe	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$u$	$\bar{M}$
(1)	1.8	0.4	-	-	-	0.375	0.240
(2)	0.4	1.55	0.25	-	-	0.09375	0.14625
(3)	-	0.25	1.25	0.25	-	0.09375	-0.09375
(4)	-	-	0.25	1.55	0.4	0.09375	
(5)	-	-	-	0.4	1.8	0.375	
(6)	-0.375	-0.09375	-0.09375	-0.09375	-0.375	-0.515625	

Tražimo utjecajnu liniju za  $\eta_{T_{t-t}}$



Slika 34.

Za zadani relativni jedinični pomak kutevi zaokreta štapa 2,3 su

$$\Psi_{2,3} = \frac{1}{8}, \quad \Psi_{3,2} = \frac{1}{8}.$$

Pa su momenti upetosti:

$$\bar{M}_{2,3} = -6 \cdot k_{2,3} \cdot \Psi_{2,3} = -6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = -0.09375,$$

$$\bar{M}_{3,2} = -6 \cdot k_{3,2} \cdot \Psi_{3,2} = -6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = -0.09375.$$

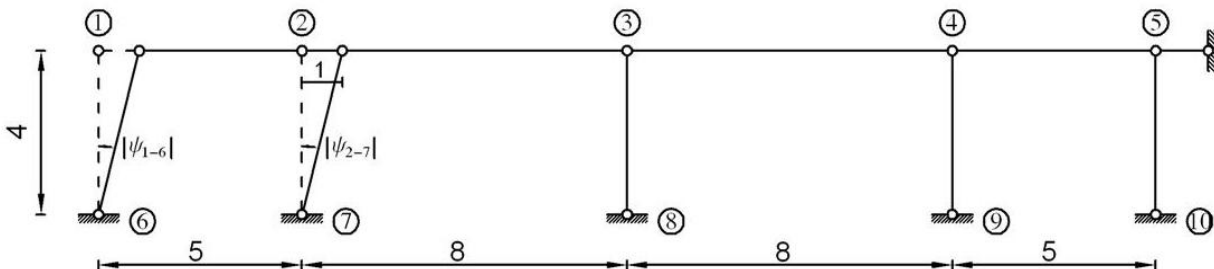
Proračun momenata na krajevima elemenata ostaje isti kao i kod traženja utjecajne linije za vertikalnu reakciju u ležištu 7, samo se vrijednosti momenata upetosti mijenjaju. U sustavu jednažbi mijenjaju se stoga samo slobodni članovi. Koeficijenti sustava i slobodni članovi prikazani su u tablici 3.

Tablica 3.

jednažbe	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$u$	$\bar{M}$
(1)	1.8	0.4	-	-	-	0.375	
(2)	0.4	1.55	0.25	-	-	0.09375	-0.09375
(3)	-	0.25	1.25	0.25	-	0.09375	-0.09375
(4)	-	-	0.25	1.55	0.4	0.09375	
(5)	-	-	-	0.4	1.8	0.375	
(6)	-0.375	-0.09375	-0.09375	-0.09375	-0.375	-0.515625	

Tražimo utjecajnu liniju za  $\eta_{N_{t-t}}$

Štap 2 – 3 se skraćuje za jedinicu duljine, a dijagram pomaka prikazan je na slici 35.:



Slika 35.

Za kuteve zaokreta

$$\psi_{1,6} = \psi_{2,7} = -\frac{1}{4}$$

Moment su upetosti:

$$\bar{M}_{1,6} = -6 \cdot k_{1,6} \cdot \psi_{1,6} = -6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0.375,$$

$$\bar{M}_{2,7} = -6 \cdot k_{2,7} \cdot \psi_{2,7} = -6 \cdot \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0.09375,$$

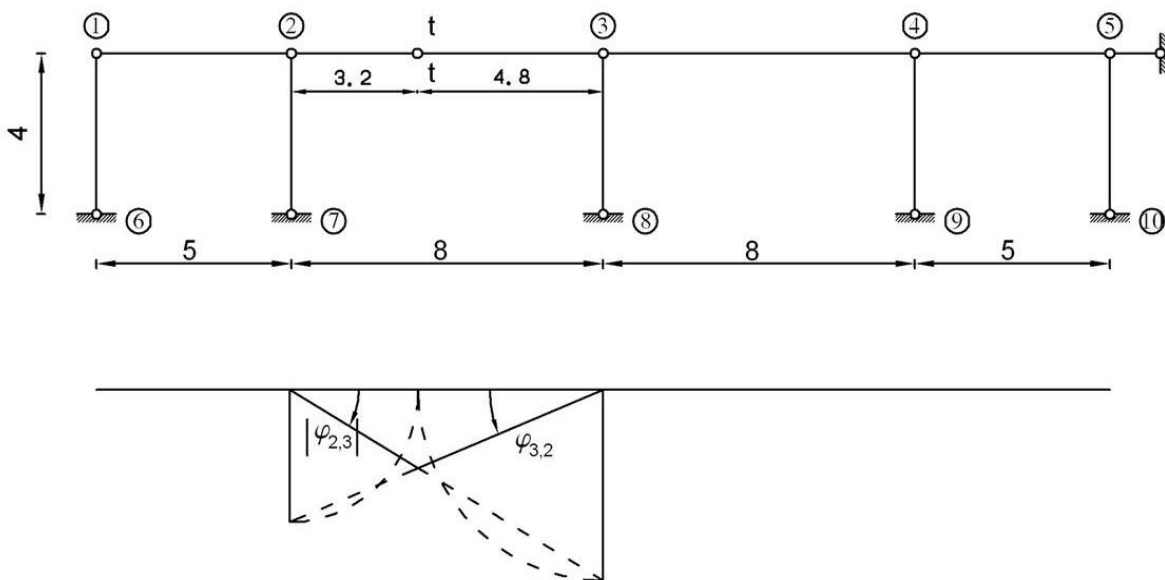
pa je sustav jednažbi

Tablica 4.

jednažbe	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$u$	$\bar{M}$
(1)	1.8	0.4	-	-	-	0.375	0.375
(2)	0.4	1.55	0.25	-	-	0.09375	0.09375
(3)	-	0.25	1.25	0.25	-	0.09375	
(4)	-	-	0.25	1.55	0.4	0.09375	
(5)	-	-	-	0.4	1.8	0.375	
(6)	-0.375	-0.09375	-0.09375	-0.09375	-0.375	-0.515625	-0.234375

Tražimo utjecajnu liniju za  $\eta_{M_{t-t}}$

Dijagram pomaka za zadani relativni jednični zaokret prikazan je na slici 36.:



Slika 36.

Kutovi zaokreta krajeva grede su

$$\varphi_{2,3} = -\frac{3}{5},$$

$$\varphi_{3,2} = \frac{2}{5},$$

pa su momenti upetosti

$$\bar{M}_{2,3} = -4 \cdot k_{2,3} \cdot \varphi_{2,3} - 2 \cdot k_{2,3} \cdot \varphi_{3,2} = -4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} = 0.2,$$

$$\bar{M}_{3,2} = -2 \cdot k_{3,2} \cdot \varphi_{2,3} - 4 \cdot k_{2,3} \cdot \varphi_{3,2} = -2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} = -0.05.$$

Dobivamo sustav jednadžbi

Tablica 5.

jednadžbe	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$u$	$\bar{M}$
(1)	1.8	0.4	-	-	-	0.375	-
(2)	0.4	1.55	0.25	-	-	0.09375	0.2
(3)	-	0.25	1.25	0.25	-	0.09375	-0.05
(4)	-	-	0.25	1.55	0.4	0.09375	-
(5)	-	-	-	0.4	1.8	0.375	-
(6)	-0.375	-0.09375	-0.09375	-0.09375	-0.375	-0.515625	-

Rješenja navedenih sustava primjenom programa Mathematica dana su u tablici:

Tablica 6.

Utjecajna linija	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$	$u$
$\eta_{A_7}$	-0.140726	-0.0789718	0.0848911	-0.0153786	-0.0215241	0.11972
$\eta_{T_{t-t}}$	-0.00774034	0.0526288	0.068205	-0.0115347	0.00651821	-0.0189836
$\eta_{M_{t-t}}$	0.0362026	-0.149346	0.0734472	-0.0124639	0.00578433	-0.01447
$\eta_{N_{t-t}}$	-0.113635	-0.0101081	0.0359	-0.00297884	0.0931137	-0.443769

Iznosi momenata na krajevima elemenata za određenu utjecajnu liniju:

Tablica 7.

Iznosi momenata na krajevima elemenata	$\eta_{M_{t-t}}$	$\eta_{T_{t-t}}$	$\eta_{N_{t-t}}$	$\eta_{A_7}$
$M_{1,2}$	-0.03077632	0.014859248	-0.09495124	0.09583048
$M_{2,1}$	-0.10499576	0.039006904	-0.05354048	0.12053216
$M_{2,3}$	0.1436888	-0.05038435	0.00392095	-0.112013125
$M_{3,2}$	0.0506129	-0.0464903	0.015422975	-0.0710474
$M_{3,4}$	0.033607625	0.031218825	0.01720529	0.0386009
$M_{4,3}$	0.01212985	0.0112839	0.00748558	0.013533475
$M_{4,5}$	-0.007657388	-0.006620476	0.034862408	-0.02091252
$M_{5,4}$	-0.000358096	0.000600688	0.073299424	-0.02337072

Vrijednosti kutova između tangenata:

Tablica 8.

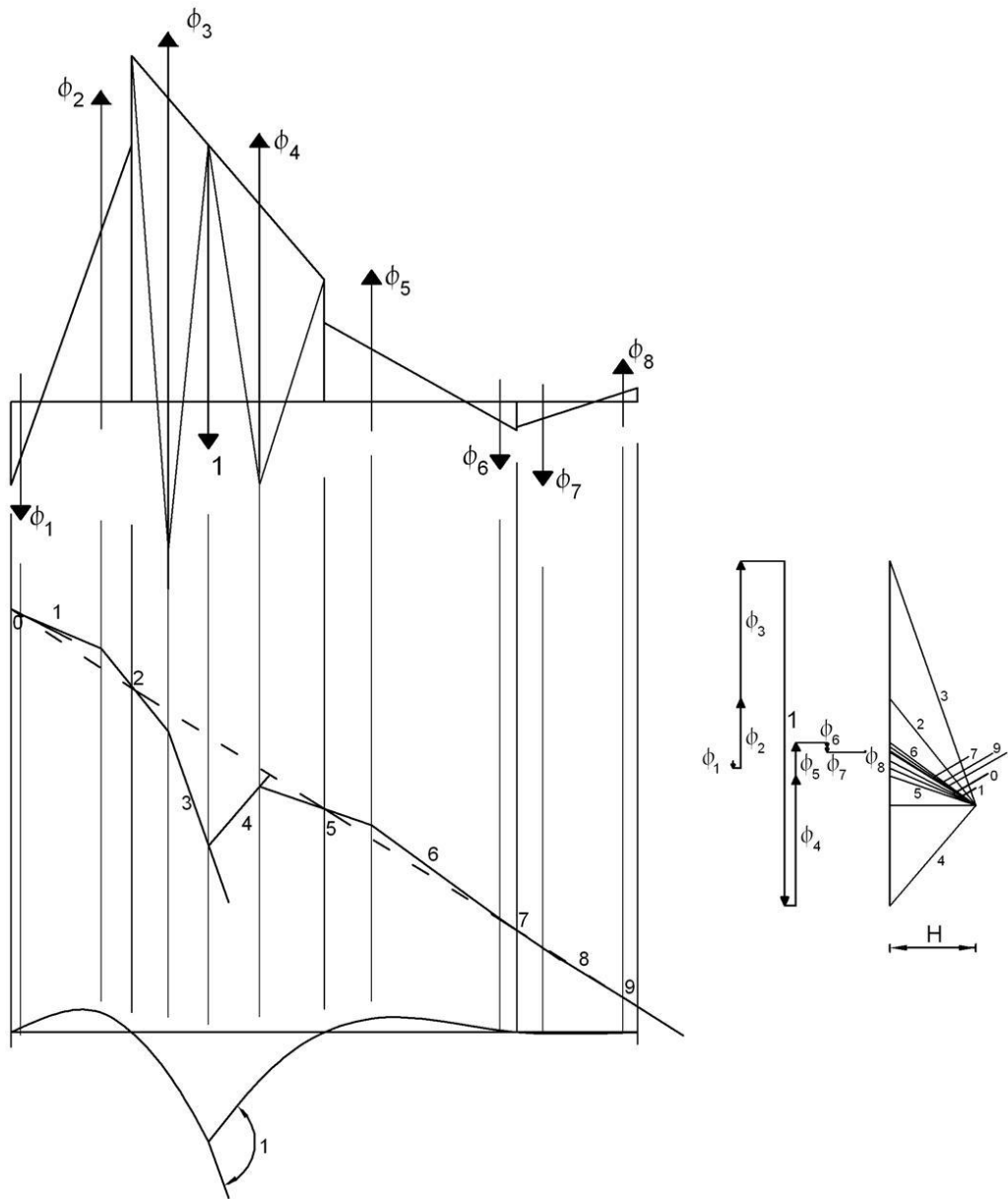
Vrijednosti kutova između tangenata	$\eta_{M_{t-t}}$	$\eta_{T_{t-t}}$	$\eta_{N_{t-t}}$	$\eta_{A_7}$
$\Phi_1$	0.02097	0.01025	0.15177	0.10611
$\Phi_2$	0.20178	0.07062	0.04826	0.16787
$\Phi_3$	0.40	0.09921	0.00318	0.27416
$\Phi_4$	0.377	0.005578	0.00303	0.11029
$\Phi_5$	0.0965	0.08927	0.04629	0.11432
$\Phi_6$	0.01244	0.09174	0.04796	0.01405
$\Phi_7$	0.01648	0.01198	0.00908	0.02469
$\Phi_8$	0.00532	0.0185	0.02809	0.03084
$\Phi_9$	-	-	0.12216	-

Vrijednosti duljina kutova u poligonu za određenu utjecajnu liniju dane su u tablici 9.:

Tablica 9.

Duljine kutova u poligonu kutova na crtežima u [cm]	$\eta_{M_{t-t}}$	$\eta_{T_{t-t}}$	$\eta_{N_{t-t}}$	$\eta_{A_7}$
$\Phi_1^*$	0.2097	1.025	15.177	5.3055
$\Phi_2^*$	2.0178	7.062	4.826	8.3945
$\Phi_3^*$	4.0	9.921	0.318	13.708
$\Phi_4^*$	3.77	0.5578	0.303	5.5145
$\Phi_5^*$	0.965	8.927	4.629	5.716
$\Phi_6^*$	0.1244	9.174	4.796	0.7025
$\Phi_7^*$	0.1648	1.198	0.908	1.2345
$\Phi_8^*$	0.0532	1.85	2.809	1.542
$\Phi_9^*$	-	-	12.216	-

Utjecajna linija za moment savijanja  $M_{t-t}$



Slika 37.

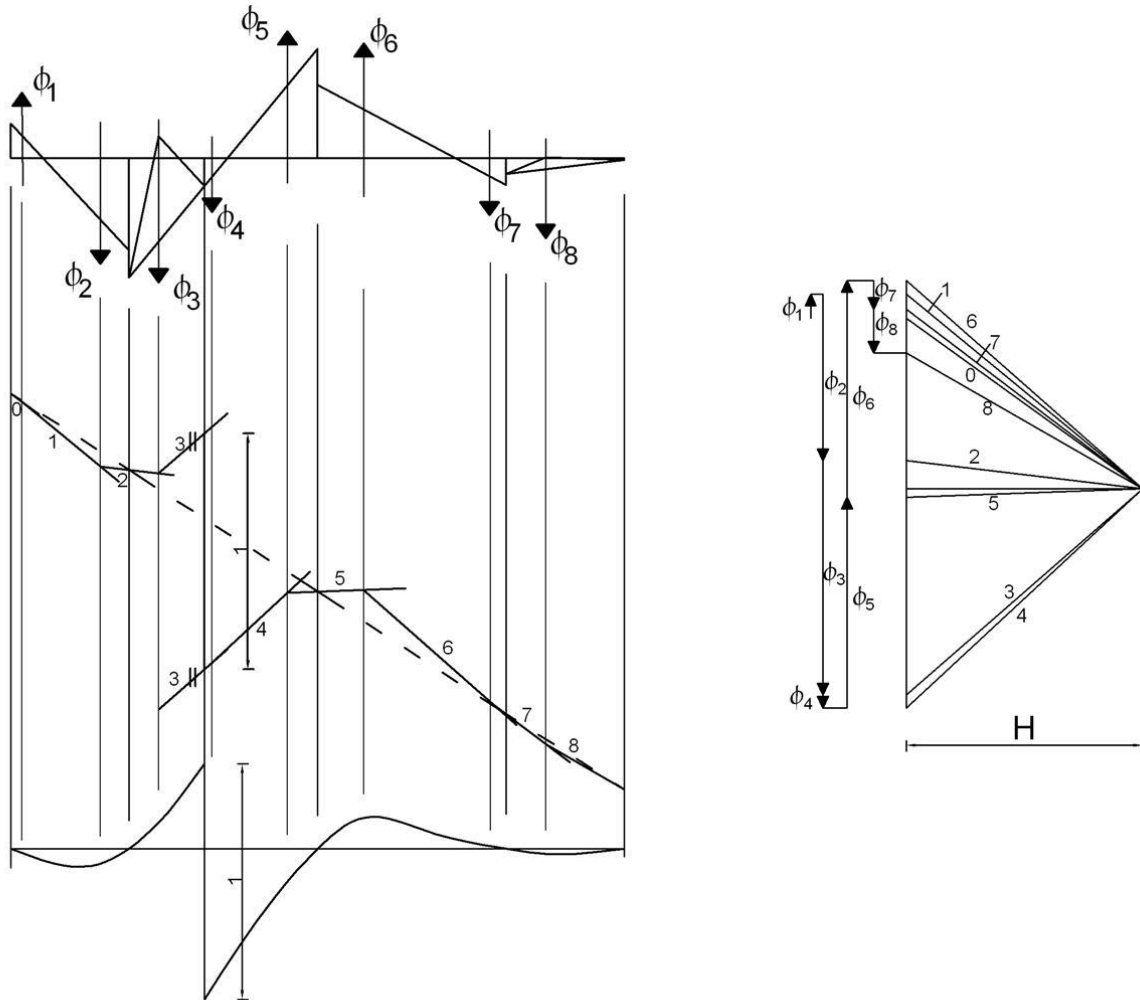
Mjerilo duljina: 1 [cm] :: 1 [m]

Mjerilo kutova: 1 [cm] :: 1/10 [ $m^\circ$ ]

$$H^* = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2.5 \text{ [cm]} \quad \Rightarrow \quad \left( \text{za odabrani } H = \frac{1}{4} [m^\circ] \right)$$

$$H = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{H} = 4 \quad \eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^*$$

Utjecajna linija za  $T_{t-t}$



Slika 38.

Mjerilo duljina: 1 [cm] :: 1 [m]

Mjerilo kutova: 1 [cm] :: 1/100 [ $m^\circ$ ]

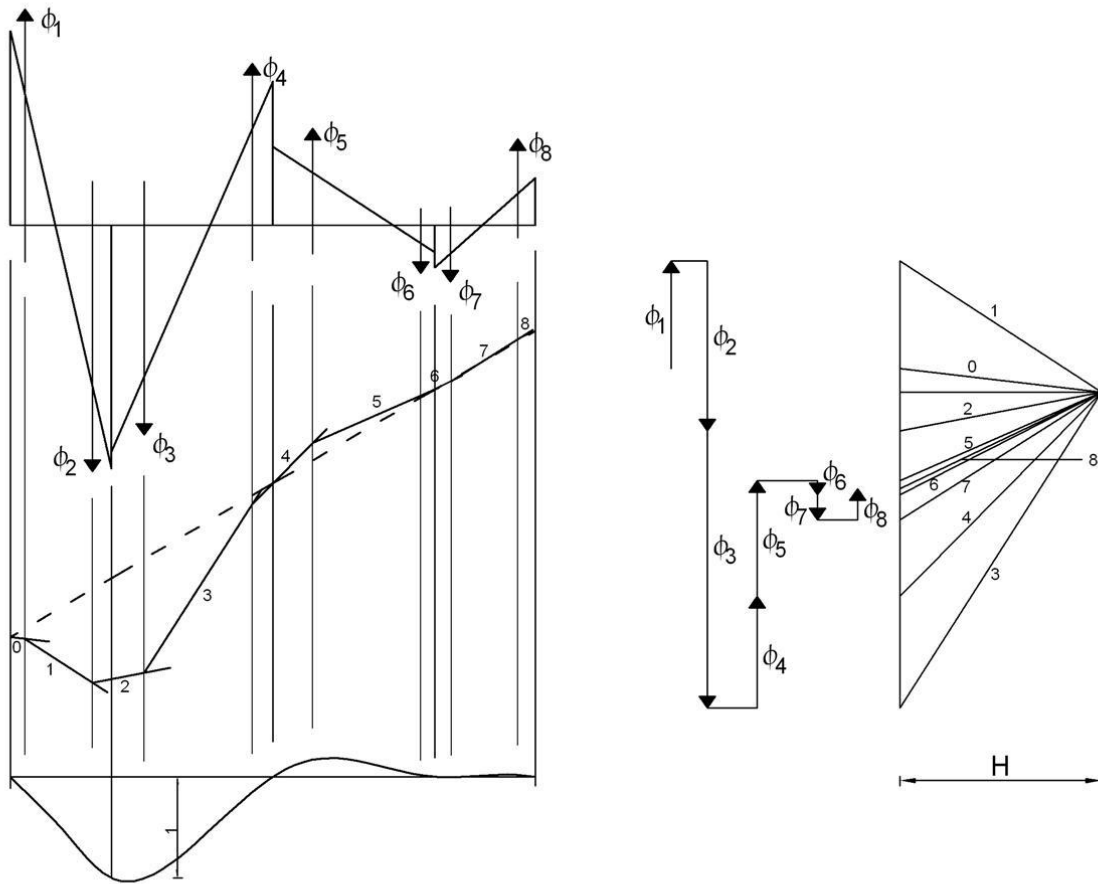
$$H^* = 100 \cdot \frac{1}{10} = 10 \text{ [cm]} \quad \Rightarrow \quad \left( \text{za odabrani } H = \frac{1}{10} [m^\circ] \right)$$

$$H = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{H} = 10$$

$$\eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^* \Rightarrow \eta^* = \frac{n}{m} \cdot \eta = \frac{10}{1} \cdot 1 = 10 \text{ [cm]}$$



Utjecajna linija za  $A_7$



Slika 39.

Mjerilo duljina: 1 [cm] :: 1 [m]

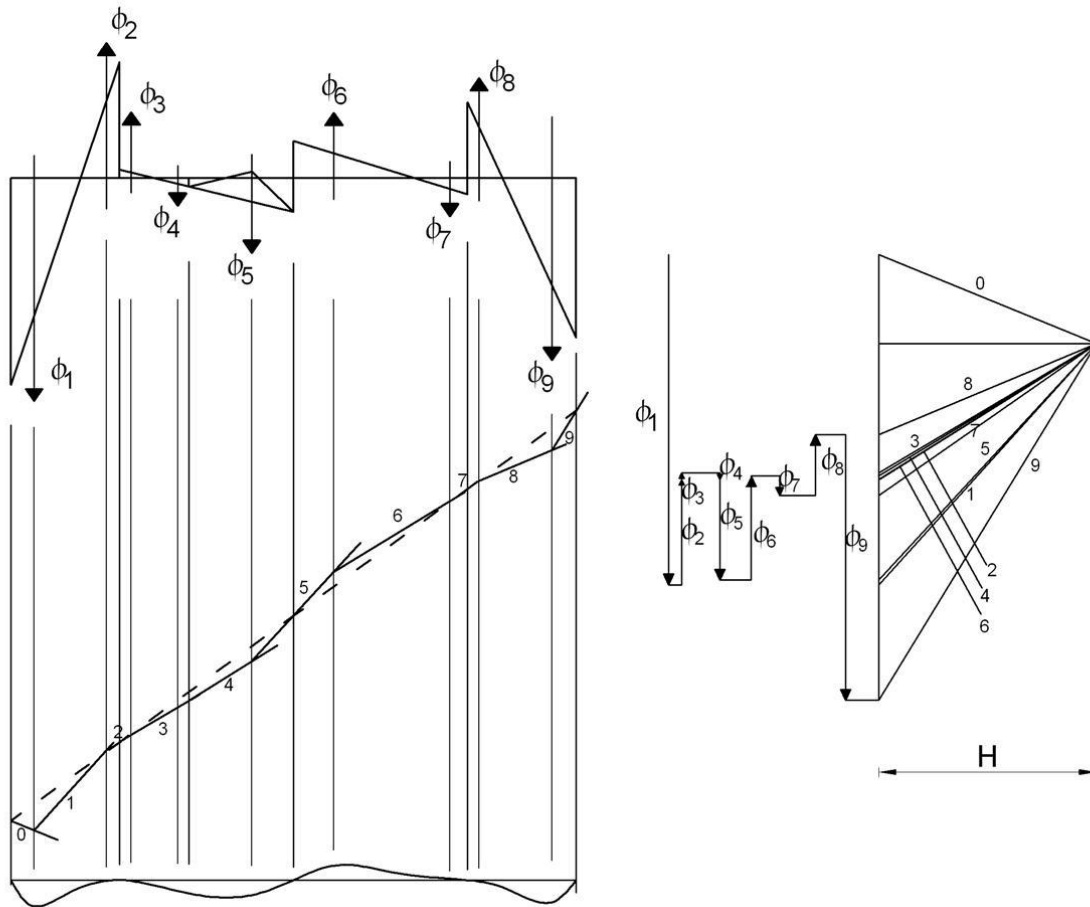
Mjerilo kutova: 1 [cm] :: 1/50 [ $m^\circ$ ]

$$H^* = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10 \text{ [cm]} \quad \Rightarrow \quad \left( \text{za odabrani } H = \frac{1}{5} [m^\circ] \right)$$

$$H = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{H} = 5$$

$$\eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^* \quad \Rightarrow \quad \eta^* = \frac{n}{m} \cdot \eta = \frac{5}{1} \cdot 1 = 5 \text{ [cm]}$$

Utjecajna linija za  $N_{t-t}$



Slika 40.

Mjerilo duljina: 1 [cm] :: 1 [m]

Mjerilo kutova: 1 [cm] :: 1/100 [ $m^\circ$ ]

$$H^* = 100 \cdot \frac{1}{10} = 10 \text{ [cm]} \quad \Rightarrow \quad \left( \text{za odabrani } H = \frac{1}{10} \text{ [m}^\circ \text{]} \right)$$

$$H = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{H} = 10$$

$$\eta = \frac{m}{n} \cdot \eta^*$$

## 11. Zaključak

Kinematički postupak određivanja utjecajnih funkcija i utjecajnih linija na statički neodređenim sistemima za neku statičku veličinu temelji se na teoremu Heinricha Müller - Breslaua. Prikazali smo tri varijante dokaza teorema: pomoću Bettijeva teorema o uzajamnosti radova, pomoću Maxwellovog teorema o uzajamnosti pomaka i pomoću teorema o virtualnom radu (za elastična tijela). Na kraju smo primjenom metode sila i metode pomaka riješili nekoliko primjera te nacrtali utjecajne linije.

## Literatura

- [1] M. Anđelić: *Građevna statika II*, Građevinski fakultet sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [2] K. Fresl: *Građevna statika 1.: bilješke i skice s predavanja*,  
<http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj1/index.html>
- [3] K. Fresl: *Građevna statika 2.: bilješke i skice s predavanja*,  
<http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj2/index.html>
- [4] V. Simović: *Građevna statika 1*, Građevinski institut, Zagreb, 1988.
- [5] R. Kušević: *Neposredno izračunavanje uticajnih linija za unutarnje sile u okvirnim sistemima nosača metodom deformacija (postupak nul – polja)*, Građevinar, Zagreb, br.1 – 1957.