

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA  
GRAĐEVNA STATIKA 2

**KUŠEVIĆEV POSTUPAK NEPOSREDNOG  
IZRAČUNAVANJA  
PRIKLJUČNIH MOMENATA**

Studentica: Katarina Markoč

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Akadska godina: 2010./2011.

Zagreb, 13. rujna 2011.

## SADRŽAJ:

|   |    |
|---|----|
| 1. BIOGRAFIJA RAJKA KUŠEVIĆA.....   | 2  |
| 2. UVOD.....  | 3  |
| 3. OSNOVNI POJMOVI I IZRAZI RELAKSACIJSKOG POSTUPKA IZRAČUNAVANJA OKVIRNIH KONSTRUKCIJA.....                                    | 4  |
| 3.1. Jednostrano upeta greda izložena momentu $M_m$ na nepomičnom ležaju $m$ .....  | 4  |
| 3.2. Pramen štapova kruto spojenih u čvoru $m$ i upetih na suprotnim krajevima $k$ , opterećen momentom $M_m$ u čvoru $m$ ..... | 5  |
| 3.3. Upeto-klizni stup izložen horizontalnoj sili $H$ .....   | 6  |
| 3.4. Niz paralelnih štapova jednakih visina upetih u neizmjereno krute grede, izložen horizontalnoj sili $H$ .....              | 7  |
| 4. CROSSOV POSTUPAK.....  | 9  |
| 5. KUŠEVIĆEV POSTUPAK NEPOSREDNOG IZRAČUNAVANJA PRIKLJUČNIH MOMENATA... ..  | 12 |
| 5.1. Opis postupka.....   | 12 |
| 5.2. Kratak osvrt na vezu s Crossovim postupkom.....  | 15 |
| 6. IZVODI OSNOVNIH IZRAZA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA.....   | 16 |
| 7. PRIMJENA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA NA ZADATKU.....  | 21 |
| 8. PRIKAZ I ANALIZA KORAKA NEPOSREDNOG I POSREDNOG IZRAČUNAVANJA PRIKLJUČNIH MOMENATA.....                                      | 31 |
| 8.1. Zadatak riješen postupkom neposrednog izračunavanja priključnih momenata.....  | 32 |
| 8.2. Zadatak riješen postupkom posrednog izračunavanja priključnih momenata.....  | 35 |
| 8.3. Usporedba neposrednog i posrednog postupka izračunavanja priključnih momenata.....   | 39 |
| 9. ZAKLJUČAK.....   | 41 |
| 10. LITERATURA.....   | 42 |

## 1. BIOGRAFIJA RAJKA KUŠEVIĆA

Rajko Kušević rođen je u Iloku 12. 9. 1894., a umro je u Zagrebu 18. 2. 1966. godine. Diplomirao je 1917. na građevinskom odjelu Tehničke visoke škole u Grazu. Nakon toga u službi je tadašnje Hrvatske zemaljske vlade. U Beč odlazi 1921. na specijalizaciju iz područja čeličnih konstrukcija, a krajem 1922. postaje pristav pri Katedri za mostogradnju na Tehničkoj visokoj školi u Zagrebu. Doktorat stječe 1923. godine. Nakon izbora za docenta 1928. preuzima nastavu iz predmeta Tehnička mehanika na Arhitektonskom odjelu, a 1932. iz predmeta Viša građevna statika na Građevinskom odjelu Tehničkog fakulteta u Zagrebu. Za izvanrednog profesora izabran je 1935. godine, a za redovitog 1941. godine. Objavio je velik broj znanstvenih radova iz područja teorije konstrukcija u domaćim i inozemnim časopisima. Glavni je urednik časopisa Tehnički list od 1923. do 1939. godine. Izabran je 1949. godine za dopisnog člana JAZU (Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti).

Uz članove Zavoda za tehničku mehaniku zagrebačkog Građevinskog fakulteta (K. Čališev, G. Kani, O. Werner) dao je doprinos razvoju iteracijskih postupaka za rješavanje sustava jednadžbi inženjerske metode pomaka u štapnoj statici.



*Slika 1. Rajko Kušević*

## 2. UVOD

Rajko Kušević je u članku u časopisu Naše građevinarstvo [1] izveo izraze za iteracijske postupke rješavanja okvira "neposrednim izračunavanjem priključnih momenata štapova" i "posrednim izračunavanjem priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova". Iteracija se temelji na relaksaciji fiktivnih veza protiv zaokretanja čvorova i stupova pojedinih etaža.

Iako ga je prvi pronašao Konstantin Čališev početkom dvadesetih, relaksacijski postupak izračunavanja okvirnih konstrukcija općenito se u stručnoj literaturi povezuje s imenom profesora Hardyja Crossa. Crossova je neosporna zasluga da je uveo pregledno shematsko pisanje iteracijskog računa.

Kuševićev postupak "neposrednog izračunavanja" inačica je Crossovog postupka, dok je postupak "posrednog izračunavanja" inačica Čališevljevog postupka.

U ovom ću radu detaljno opisati Kuševićevu metodu "neposrednog izračunavanja priključnih momenata", te ju usporediti s Crossovim postupkom i postupkom "posrednog izračunavanja priključnih momenata štapova iz kutova zaokreta čvorova i štapova"

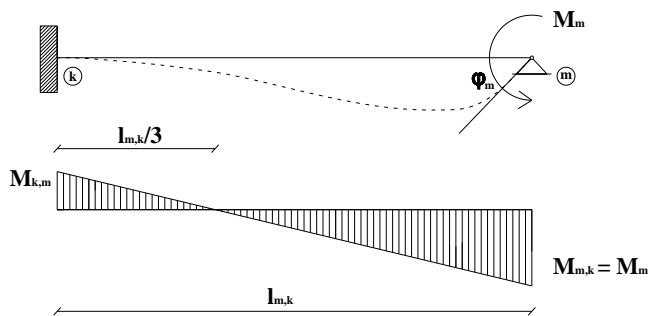
### 3. OSNOVNI POJMOVI I IZRAZI RELAKSACIJSKOG POSTUPKA IZRAČUNAVANJA OKVIRNIH KONSTRUKCIJA

*Dogovor o predznacima:*

- Zaokreti krajeva štapova suprotni od vrtnje kazaljke na satu su pozitivni*
- Momenti na krajevima štapova koji vrte suprotno od vrtnje kazaljke na satu su pozitivni*
- Djelovanje horizontalne sile s lijeva na desno smatra se pozitivnim*

Relaksacijski postupak izračunavanja okvira temelji se na teoriji jednostrano i obostrano upete grede. Ovdje ćemo navesti izraze iz te teorije, koji su potrebni za daljnje izlaganje.

#### 3.1. Jednostrano upeta greda izložena momentu $M_m$ na nepomičnom ležaju $m$



*Slika 2.*

Krutost štapnog elementa  $m-k$ :

$$k_{m,k} = \frac{E_{m,k} I_{m,k}}{l_{m,k}}$$

Momenti savijanja u ležajnim presjecima jednostrano upete grede:

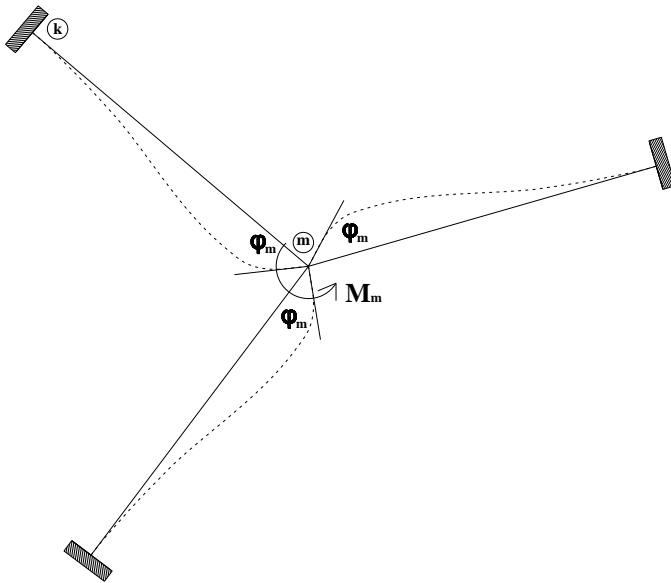
$$M_{m,k} = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m$$

$$M_{k,m} = \frac{1}{2} M_{m,k} = 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m$$

Kut zaokreta presjeka štapnog elementa  $m-k$  u ležaju  $m$ :

$$\varphi_m = \frac{M_m}{4 \cdot k_{m,k}}$$

**3.2. Pramen štapova kruto spojenih u čvoru  $m$  i upetih na suprotnim krajevima  $k$ , opterećen momentom  $M_m$  u čvoru  $m$**



Slika 3.

Krutost čvora:

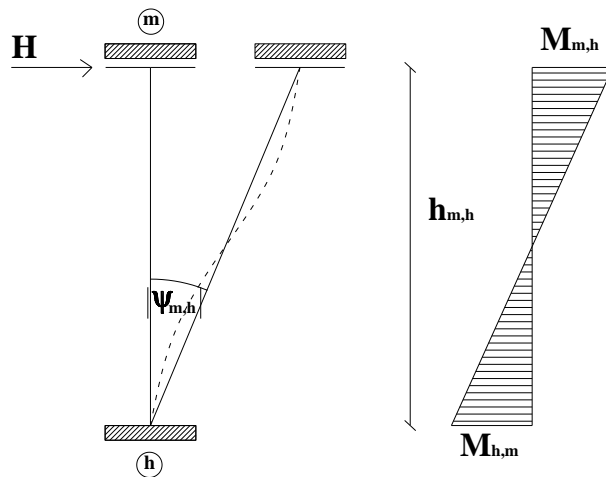
$$\sum_k k_{m,k} = k_m$$

S upotrebom poznatog izraza  $\varphi_m = \frac{M_m}{4 \cdot k_m}$  vrijedi:

$$M_{m,k} = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m = \frac{k_{m,k}}{k_m} \cdot M_m$$

$$M_{k,m} = \frac{1}{2} M_{m,k} = 2 \cdot k_{m,k} \cdot \varphi_m = \frac{k_{m,k}}{2 \cdot k_m} \cdot M_m$$

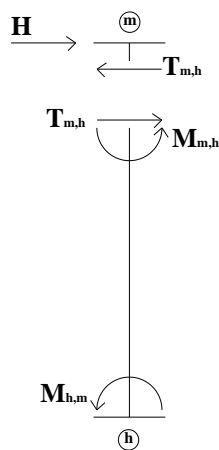
### 3.3. Upeto-klizni stup izložen horizontalnoj sili H



Slika 4.

Moment na dnu stupa zbog sile H:

$$M_r = -H \cdot h_{m,h}$$



Slika 5.

$$H = -T_{m,h}$$

Momenti savijanja na krajevima štapnog elementa:

$$M_{m,h} = M_{h,m} = \frac{T_{m,h} \cdot h_{m,h}}{2}$$

Poprečna sila u presjeku na vrhu štapnog elementa:

$$T_{m,h} = \frac{2 \cdot M_{m,h}}{h_{m,h}}$$

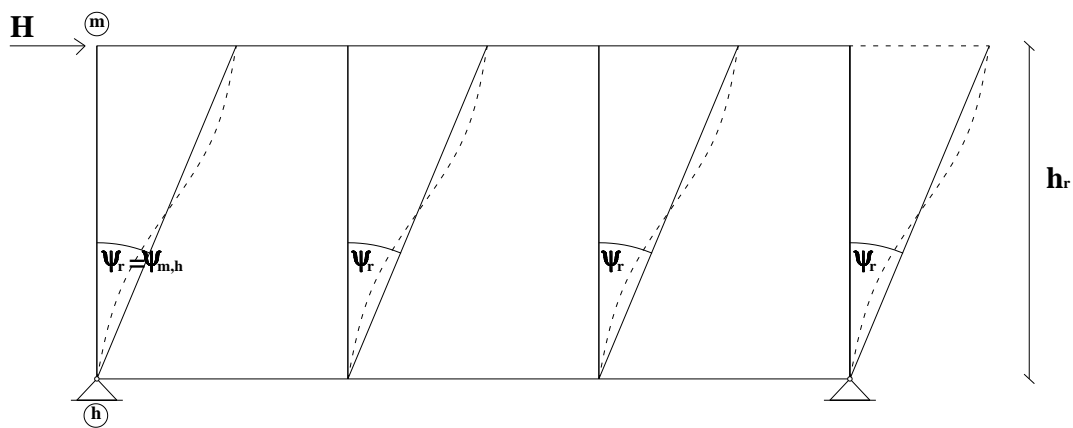
Momenti savijanja u ležajnim presjecima štapnog elementa:

$$M_{m,h} = M_{h,m} = -6 \cdot k_{m,h} \cdot \Psi_{m,h}$$

Kut zaokreta štapnog elementa  $m-h$ :

$$\Psi_{m,h} = -\frac{M_{m,h}}{6 \cdot k_{m,h}}$$

### 3.4. Niz paralelnih štapova jednakih visina upetih u neizmjereno krute grede, izložen horizontalnoj sili $H$



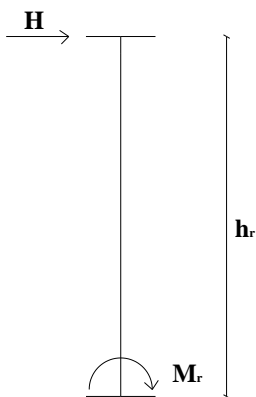
Slika 6.

Krutost etaže  $r$ :

$$\sum_{(m,h) \in r} k_{m,h} = k_r$$

Moment etaže  $r$ :

$$M_r = -H \cdot h_r$$



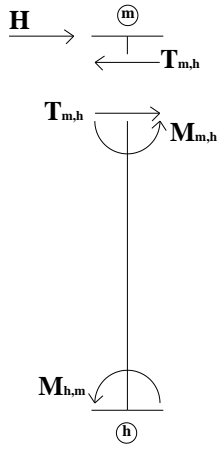
Slika 7.



Potisak etaže  $r$ :

$$H = -\sum_{(m,h) \in r} T_{m,h}$$

$T_{m,h}$  - poprečna sila u presjeku na vrhu štapnog elementa



Slika 8.

S upotrebom poznatog izraza  $\psi_r = \frac{M_r}{12 \cdot k_r}$  vrijedi:

$$M_{m,h} = M_{h,m} = -6 \cdot k_{m,h} \cdot \psi_r = -\frac{k_{m,h}}{k_r} \cdot M_r$$

## 4. CROSSOV POSTUPAK

U uvodu sam napomenula da je postupak "neposrednog izračunavanja priključnih momenata" inačica Crossovog postupka. Iz tog razloga, prije same teme završnog rada opisat ću izračunavanje priključnih momenata Crossovim postupkom.

### *Opis postupka*

Crossova metoda izvorno je namijenjena proračunu translacijski nepomičnih sistema. Međutim, primjenjuje se i na translacijski pomične sisteme. Cross je prvi uočio da se vrijednosti momenata na krajevima štapova mogu izravno izračunati.

Cross promatra nepomični sistem u kojem su spriječeni kutovi zaokreta svih čvorova. Translacijski pomaci čvorova također su spriječeni, što je postignuto dodavanjem bočnih pridržanja. Otpuštamo čvor po čvor. Pri tome ostali čvorovi ostaju ukrućeni. Otpuštanjem čvorova omogućavamo njihovo zaokretanje. Zaokretanjem čvora uravnotežujemo neuravnotežene momente u tom čvoru. Započinjemo s onim čvorom koji je najneuravnoteženiji. U našem slučaju pretpostavit ćemo da je to čvor  $m$ .

Promatramo obostrano upeti štapni element  $m-k$ . Poznat je prirast kuta zaokreta čvora  $m$ , kojeg možemo prikazati kao

$$\Delta\varphi_m^n = \frac{\mathfrak{M}_n^{(n-1)}}{4 \cdot \sum_k k_{m,k}}. \quad (1)$$

Oznaka  $\mathfrak{M}_n^{(n-1)}$  predstavlja neuravnoteženi moment u čvoru  $m$ . U prvom ciklusu to je zbroj momenata upetosti, a u ostalim zbroj prenesenih momenata od prethodnih zaokretanja čvorova.

Prirast vrijednosti momenta u čvoru  $m$  izražen je kao

$$\Delta M_{m,k}^n = 4 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta\varphi_m^n. \quad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (1) u izraz (2) dobivamo

$$\Delta M_{m,k}^n = \frac{4 \cdot k_{m,k}}{\sum_k 4k_{m,k}} \cdot \mathfrak{M}_n^{(n-1)}. \quad (3)$$

Zbroj koeficijenata krutosti svih priključnih elemenata čvora  $m$ ,

$$k_m = \sum_k k_{m,k}, \quad (4)$$

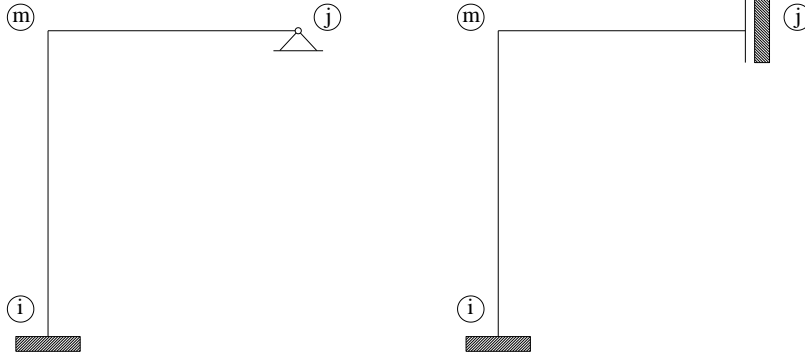
naziva se koeficijentom krutosti čvora  $m$ , a razlomak

$$\mu_{m,k} = \frac{4k_{m,k}}{4k_m} \quad (5)$$

razdjelnim koeficijentom u čvoru  $m$  za obostrano upeti štapni element  $m-k$ .

Naravno, svi elementi nisu uvijek obostrano upeti. Prirast kuta zaokreta u tom slučaju poprima drugi oblik, a time i ostali izrazi.

To ću pokazati u sljedeća dva primjera:



Slika 9.

$$\Delta\varphi_m^n = \frac{\mathfrak{M}_n^{(n-1)}}{4 \cdot k_{m,i} + 3 \cdot k_{m,j}}$$

$$\Delta\varphi_m^n = \frac{\mathfrak{M}_n^{(n-1)}}{4 \cdot k_{m,i} + k_{m,j}}$$

Očito je  $\sum_k \mu_{m,k} = 1$ , te je sada

$$\Delta M_{m,k}^n = \mu_{m,k} \cdot \mathfrak{M}_n^{(n-1)}. \quad (6)$$

Slijedi:

$$\sum_k \Delta M_{m,k}^n = \mathfrak{M}_n^{(n-1)}. \quad (7)$$

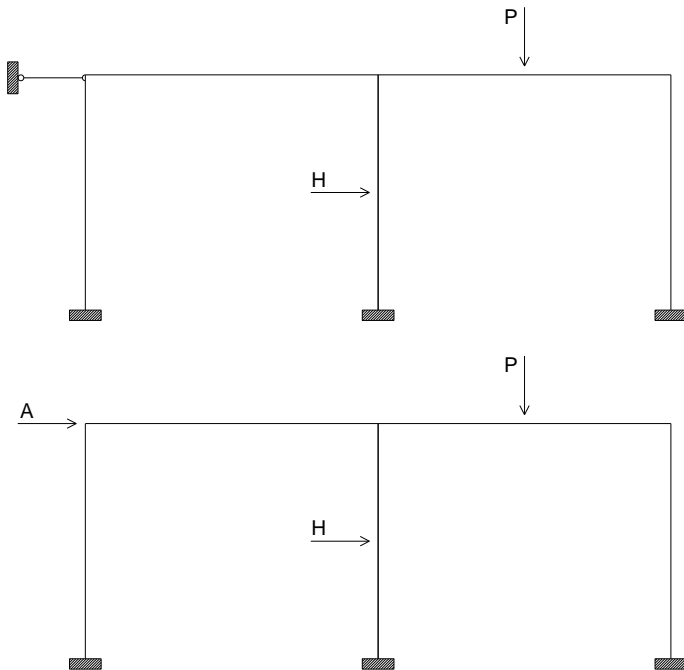
Prema tome, čvor  $m$  možemo uravnotežiti tako da na njega dodamo moment jednakog intenziteta, ali suprotnog smjera od neuravnoteženog momenta  $\mathfrak{M}_n^{(n-1)}$  i to tako da ga razdijelimo na priključne elemente u omjeru njihovih krutosti. Zbog zaokreta čvora  $m$  pojavit će se moment u susjednom čvoru  $k$  čija je vrijednost

$$\Delta M_{k,m} = 2 \cdot k_{m,k} \cdot \Delta\varphi_k^n = \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{m,k}^n. \quad (8)$$

Kažemo da na susjedne čvorove čvora kojeg trenutno uravnotežujemo "prenosimo pola momenta", pa je  $\frac{1}{2}$  prijenosni koeficijent za obostrano upeti element. No, u slučaju zglobnog ležaja prijenosni koeficijent je 0, odnosno kod upeto kliznog ležaja on je -1.

Zbrajajući sve vrijednosti momenata iz iteracijskog računa, dobivamo konačne momente koji se javljaju od utjecaja zaokretanja čvorova.

U sistemima s translacijski pomičnim čvorovima moramo spriječiti njihov translacijski pomak. To ostvarujemo dodavanjem bočnih pridržanja. Nakon dobivenih momenata zbog zaokretanja čvorova, potrebno je odrediti momente koji nastaju pod djelovanjem horizontalne sile, koja je jednaka i protusmjerna sili u štapu, kojim smo prethodno spriječili translacijski pomak grede. Primjer je prikazan na slici 10.



Slika 10.

Stupovi etaža se zaokreću, te se javljaju dodatni momenti na stupovima. Nakon što uravnotežimo te momente, možemo izračunati traženu silu u pridržanju. Rezultanta sila u pridržanju zbog vanjskog opterećenja i zbog translacijskog pomaka treba biti nula, te iz tog uvjeta dobivamo translacijski pomak.

Traženi momenti su zbrojevi momenata zbog zaokreta čvorova i momenata zbog zaokreta stupova, pa se ovakva iteracija naziva dvostrukom.

## 5. KUŠEVIĆEV POSTUPAK NEPOSREDNOG IZRAČUNAVANJA PRIKLJUČNIH MOMENATA

### 5.1. Opis postupka

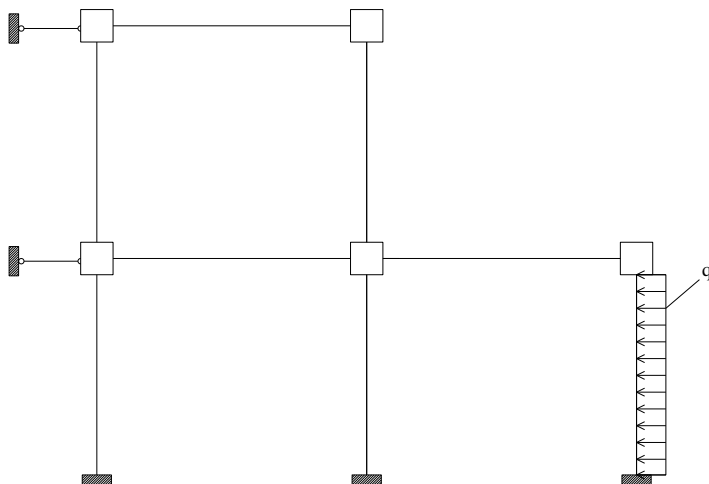
Kušević rješava statički neodređene sisteme s vertikalnim stupovima i s translacijski pomičnim čvorovima tako da naizmjenice izračunava priraste momenata zbog zaokreta čvorova i zaokreta stupova, pa se ovakva iteracija naziva jednostrukom. Ideja iteracijskog postupka sastoji se u tome da ponavljanjem radnji, odnosno uzastopnim iteracijama, postupno dolazimo da konačnog rješenja.

Kao što sam rekla, nepoznate vrijednosti su vrijednosti momenata zbog zaokreta čvorova i vrijednosti momenata zbog zaokreta stupova pojedinih etaža. U ovom postupku momente na krajevima štapova ne dobivamo preko drugih fizikalnih veličina, već direktno. Zbog toga se i ovaj postupak naziva postupkom neposrednog izračunavanja priključnih momenata. Ciklusi otpuštanja i uspostavljanja fiktivnih pričvršćenja protiv zaokretanja čvorova, u kojima se svaki čvor uravnotežuje po jedanput, izmjenjuju se s ciklusima otpuštanja i uspostavljanja fiktivnih pričvršćenja protiv zaokretanja stupova etaža.

”Pod djelovanjem vanjskih sila čvorovi nosača zaokrenut će se u općenitom slučaju za neke kutove  $\varphi$  i uz to pomaknuti za veličinu  $u$ , koja je za sve čvorove grede zajednička”, jer ”promatramo samo deformaciju uslijed savijanja štapova i zato ne uzimamo u obzir pomaknuća uslijed stlačivanja ili rastezanja štapova ”(*Konstantin Čališev*).

SAM POSTUPAK ODVIJA SE NA SLJEDEĆI NAČIN:

Izvorni sistem Kušević pretvara u nepomični. Dodavanjem fiktivnih veza sprječava kutove zaokreta i translacijske pomake svih čvorova. Tako dobiveni sistem nazivamo osnovnim sistemom.



Slika 11.

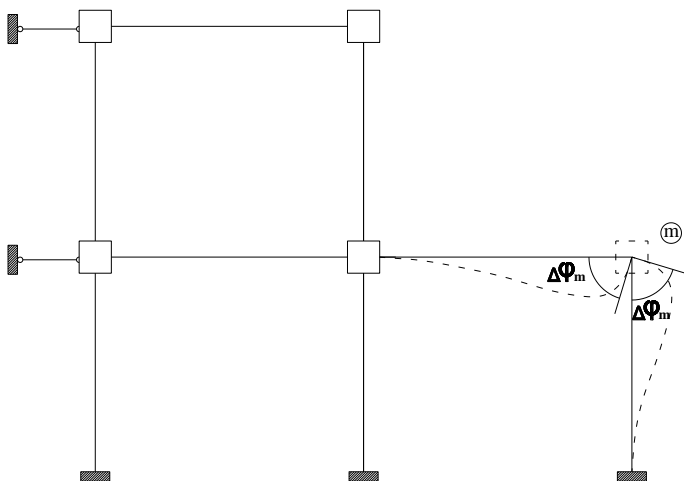
Krećemo s rješavanjem osnovnog sistema. Primjer je prikazan na slici 11. Najprije otpuštamo veze protiv zaokretanja čvorova. Zaokrećemo čvor po čvor. Time zadovoljavamo u svakom od njih zasebice uvjet ravnoteže momenata. Treba naglasiti da je pri tome zaokretanje svih ostalih čvorova spriječeno.

Proračun razmjerno brzo konvergira, posebice ako se kreće od čvora u kojemu je intenzitet neuravnoteženog momenta najveći. Intenziteti neuravnoteženih momenata čvorova jasno se vide u iteracijskom računu, koji provodimo na shemi sistema. Kušević u lijevom stupcu zapisuje momente u čvorovima koje treba uravnotežiti, a u desnom momente koji ih uravnotežuju.

Uravnotežavanje momenata u pojedinim čvorovima obavlja se razdjeljivanjem neuravnoteženog momenta na priključene štapne elemente u omjerima njihovih krutosti. Zbog različitih krutosti priključnih elemenata pojedinih čvorova, razdjelni koeficijenti svojstveni su svakom čvoru. Neuravnotežene momente uravnotežujemo momentom istog iznosa, ali suprotnog smjera, zbog čega razdjelni koeficijenti imaju negativan predznak. Pišemo ih u kvadratiće u čvorovima na shemi sistema.

Uravnotežavanjem susjednih čvorova čvora  $m$  narušavamo prethodno ostvarenu ravnotežu u tom čvoru. Iz tog razloga, potrebno mu je dodati momente čije su vrijednosti jednake polovini vrijednosti raspodijeljenih neuravnoteženih momenata. Stoga je u iteracijskom računu  $\frac{1}{2}$  prijenosni koeficijent.

Čvor od kojega je najbolje započeti iteraciju odabiremo u prvom uravnoteženju prema vrijednostima momenata upetosti, koji se javljaju od utjecaja vanjskog opterećenja nakon što smo upeli sve čvorove. Recimo da je to čvor  $m$  čije smo otpuštanje prikazali na slici 12.



Slika 12.

Nadalje, prolazimo kroz ostale čvorove. U ciklusu uravnotežavanja čvorova uravnotežujemo svaki čvor po jedanput.

Vrijednosti koje izračunavamo pri raspodijeli i pri prenošenju momenata i koje upisujemo u shemu, vrijednosti su prirasta momenata na krajevima štapnih elemenata zbog zaokreta čvorova.

Nakon što smo otpustili i pričvrstili fiktivne veze protiv zaokretanja svih čvorova, otpuštamo fiktivne veze protiv zaokretanja stupova. To je potrebno zbog poprečnih sila na krajevima stupova, koje se javljaju od utjecaja zaokreta čvorova. U prvom uravnoteženju etaža uzimamo u obzir utjecaj zadanog horizontalnog opterećenja, kao što u prvom uravnoteženju čvorova treba uzeti u obzir utjecaj opterećenja na pojedinim štapovima. Zbroj momenata na krajevima stupova etaže  $r$  nakon ciklusa otpuštanja čvorova, kojem u prvom ciklusu pribrajamo moment od ukupne horizontalne sile iznad presjeka stupova te etaže, predstavlja moment etaže  $r$ .

Moment etaže  $r$  uravnotežujemo momentom istog iznosa, ali suprotnog smjera djelovanja, razdjeljujući ga na krajeve stupova te etaže. Razdjeljuje se pomoću koeficijenta negativnog predznaka. On je različit za svaku etažu i ovisi o krutostima stupova te etaže. Nakon uravnoteženja etaža dodatno smo narušili ravnotežu čvorova. Iz tog razloga, razdijeljene neuravnotežene momente zapisujemo u lijevi stupac.

Potreban broj ciklusa ovisi o većoj ili manjoj brzini približavanja prirasta momenata vrijednosti koja je zanemariva. Na kraju konačne momente dobivamo vrlo jednostavno, zbrajanjem svih vrijednosti momenata iz iteracijskog računa.

U daljnjem ću se prikazu ograničiti na okvire s obostrano upetim štapovima, te jednakim visinama stupova u pojedinim etažama. Također sam u primjeni postupka u sljedećim primjerima otpuštala fiktivne veze protiv zaokretanja čvorova i stupova istim redoslijedom, jer smatram da ovakvim rješavanjem problema postoji manja mogućnost pogreške, te da je i preglednost računa veća.

## 5.2. Kratak osvrt na vezu s Crossovim postupkom

Postupci su gotovo identični. Kušević i Cross izračunavaju direktno momente na krajevima priključnih štapova sistema. Oba postupka su iteracijska. Jedina je razlika što Kušević u svom postupku dvije iteracije sabire u jednu, pa se iteracijski računi također pomalo razlikuju. Kušević uvodi zapisivanje prirasta momenata na konstruktivnoj shemi sistema u dva stupca, te u razdjelni koeficijent uvodi negativan predznak, što se meni čini puno zgodnijim.

Treba napomenuti da je kod Crossa pametnije prvo zaokrenuti najvišu etažu, tako da nam zbroj zadanih horizontalnih sila iznad presjeka etaže koju trenutno zaokrećemo bude poznat, dok to kod Kuševićevog postupka nije bitno.

Mogu reći da Kušević bolje obješnjava gibanje sistema pod opterećenjem, jer su zaokreti čvorova i stupova u uzročno-posljedičnoj vezi.



## 6. IZVODI OSNOVNIH IZRAZA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA

Oznake:

- $k$  - u uravnoteženju čvorova: susjedni čvorovi čvora  $m$
- $\underline{m}$ ,  $\overline{m}$  - u uravnoteženju etaža: čvor na dnu stupa ispod čvora  $m$  i čvor na vrhu stupa iznad čvora  $m$
- $r$  - pojedina etaža
- $e$  - etaže iznad etaže  $r$
- $n_{\xi}$  - ciklusi nakon prve relaksacije veza protiv zaokretanja čvorova
- $n_{\varsigma}$  - ciklusi nakon prve relaksacije veza protiv zaokretanja stupova etaža

Izvide Kuševićevog postupka razdvojila sam u dvije cjeline, odnosno na prvi ciklus i ostale cikluse relaksacije veza protiv zaokretanja čvorova i stupova. Razlog tome je što u prvom ciklusu pri dobivanju krajnjih momenata moramo uzeti u obzir i utjecaj zadanog vanjskog opterećenja, dok u ostalim ciklusima uzimamo u obzir samo utjecaj zaokretanja čvorova i stupova. Upravo zbog toga su ostali ciklusi zapravo identični.

### PRVI CIKLUS RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

Prvo otpuštamo veze protiv zaokretanja čvorova. Zaokrećemo čvor po čvor, zadovoljavajući time u svakom od njih zasebice uvjet ravnoteže momenata. Pri tome su zaokreti svih ostalih čvorova spriječeni. Pri zaokretanju čvora uravnotežujemo neuravnotežene momente u tom čvoru. Time narušavamo ravnotežu u čvorovima koju smo prethodno ostvarili. Neuravnoteženi moment u čvoru  $m$  prije njegova zaokretanja dan je izrazom

$$\mathfrak{M}_m^{(0)} = \sum_k \overline{M}_{m,k} + \sum_k \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{k,m}^{(1)}, \quad (9)$$

gdje prvi pribrojnik predstavlja zbroj momenata upetosti priključnih štapova čvora  $m$ , a drugi pribrojnik je zbroj prenesenih momenata zbog uravnoteženja susjednih čvorova uravnoteženih prije čvora  $m$ . Ovi momenti na shemi sistema upisuju se u lijevi stupac, jer neuravnotežene momente i momente koji ih uravnotežuju Kušević odvaja u dva stupca.

Neuravnoteženi moment uravnotežujemo momentom istog iznosa, ali suprotnog smjera. Koristeći razdjelni koeficijent, neuravnoteženi moment u svakom čvoru razdjeljujemo na priključne štapne elemente.

Razdjelni koeficijent dobivamo prema izrazu

$$\mu_{m,k} = \frac{k_{m,k}}{k_m} \quad (10)$$

Vidljivo je da on ovisi o krutostima priključnih elemenata čvora kojeg uravnotežujemo. Oznaka  $k_{m,k}$  predstavlja krutost štapnog elementa priključenog na čvor  $m$   $k_{m,k} = \frac{E_{m,k} I_{m,k}}{l_{m,k}}$ , dok  $k_m$  zbroj krutosti priključnih štapova.

Razdijeljeni neuravnoteženi moment čvora  $m$  dan je izrazom

$$\Delta M_{m,k}^{(1)} = \mu_{m,k} \cdot \mathfrak{M}_m^{(0)} \quad (11)$$

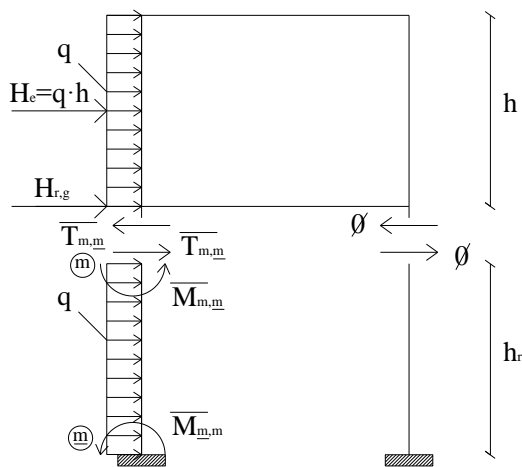
Vrijednost iz izraza (11) zapisujemo u desni stupac, jer neuravnoteženi moment njegovim razdjeljivanjem zapravo uravnotežujemo.

### PRVI CIKLUS RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA POJEDINIHZ ETAŽA

Nakon što smo jedanput otpustili i pričvrstili fiktivne veze protiv zaokretanja svih čvorova, otpuštamo fiktivne veze protiv zaokretanja stupova.

To je potrebno zbog poprečnih sila na krajevima stupova, koje se u prvom ciklusu javljaju od utjecaja zadanog horizontalnog opterećenja i utjecaja prethodnog uravnotežavanja čvorova. Čvorovi pojedinih etaža se pomiču, a stupovi zaokreću.

Prvo ću objasniti utjecaj zadanog horizontalnog opterećenja. Njega ne možemo vidjeti iz iteracijskog računa već ga izračunavamo presijecanjem stupova pojedinih etaža nepomičnog sistema. Primjer presijecanja jedne etaže prikazan je na slici 13.



Slika 13.

Na isti način presijecamo i ostale etaže.

Izraz za vrijednost ukupne horizontalne sile koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže  $r$  glasi:

$$H_r = H_{r,g} + \sum_{e>r} H_e - \sum_{(m,\underline{m}) \in r} \overline{T_{m,\underline{m}}}. \quad (12)$$

Prvi član  $H_{r,g}$  predstavlja rezultantu zadanih horizontalnih sila koje djeluju na gredi etaže  $r$ , drugi  $\sum_{e>r} H_e$  rezultantu zadanih horizontalnih sila koje djeluju na etažama iznad etaže  $r$ , a posljednji član  $\sum_{(m,\underline{m}) \in r} \overline{T_{m,\underline{m}}}$  zbroj poprečnih sila upetosti na vrhu stupa etaže  $r$ .

Vrijednost poprečne sile upetosti na vrhu stupa ovisi samo o poznatim vrijednostima zadanih opterećenja i dana je izrazom

$$\overline{T_{m,\underline{m}}} = T_{m,\underline{m}}^{(0)} + \frac{1}{h_{m,\underline{m}}} \cdot (\overline{M_{m,\underline{m}}} + \overline{M_{\underline{m},m}}). \quad (13)$$

Oznaka  $T_{m,\underline{m}}^{(0)}$  predstavlja poprečnu silu na prostoju gredi zbog zadanog horizontalnog opterećenja tog stupa, dok izraz  $\frac{1}{h_{m,\underline{m}}} \cdot (\overline{M_{m,\underline{m}}} + \overline{M_{\underline{m},m}})$  predstavlja poprečnu silu na vrhu stupa od utjecaja momenata upetosti istog stupa.

Dobili smo ukupnu horizontalnu silu koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže  $r$ . Iz toga proizlazi da je izraz za moment upetosti etaže  $r$

$$\overline{M_r^{(0)}} = -H_r \cdot h_r. \quad (14)$$

Moment pozitivne sile  $H_r$  u odnosu na dno etaže ja negativnog predznaka, što predstavlja predznak u izrazu (14).

Nakon što smo izračunali utjecaj zadanog horizontalnog opterećenja na promjenu momenta etaže, moramo mu još pribrojiti utjecaj prethodnog uravnotežavanja čvorova. Taj utjecaj su raspodijeljeni i preneseni momenti koji su se javili na krajevima stupova pri prethodnom otpuštanju čvorova, te ih jednostavno iščitavamo iz iteracijskog računa.

Pojavom dodatnih momenata na stupovima javlja se poprečna sila na vrhovima tih stupova, te je dana izrazom

$$\begin{aligned} T_{m,\underline{m}}^{(1)} &= \frac{1}{h_r} \cdot [(M_{m,\underline{m}}^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot M_{\underline{m},m}^{(1)}) + (M_{\underline{m},m}^{(1)} + \frac{1}{2} \cdot M_{m,\underline{m}}^{(1)})] \\ &= \frac{1}{h_r} \cdot (\frac{3}{2} \cdot M_{m,\underline{m}}^{(1)} + \frac{3}{2} \cdot M_{\underline{m},m}^{(1)}). \end{aligned} \quad (15)$$

Raspodijeljene i prenesene momente na pojedinim krajevima stupa pri prethodnom otpuštanju čvorova  $m$  i  $\underline{m}$  predstavljaju oznake  $M_{m,\underline{m}}^{(1)}$  i  $M_{\underline{m},m}^{(1)}$ . Oznaka  $M_{m,\underline{m}}^{(1)}$  predstavlja zbroj raspodijeljenih i prenesenih momenata u čvoru  $m$ , dok  $M_{\underline{m},m}^{(1)}$  zbroj raspodijeljenih i prenesenih momenata u čvoru  $\underline{m}$ .

Iz izraza (15) dobivamo izraz za neuravnoteženi moment etaže  $r$  zbog prethodnog ciklusa otpuštanja čvorova

$$\Delta M_r^{(1)} = \sum_{(m,\underline{m}) \in r} T_{m,\underline{m}}^{(1)} \cdot h_r = \sum_{(m,\underline{m}) \in r} \left( \frac{3}{2} \cdot M_{m,\underline{m}}^{(1)} + \frac{3}{2} \cdot M_{\underline{m},m}^{(1)} \right). \quad (16)$$

Ukupni neuravnoteženi moment etaže  $r$  je zbroj momenta upetosti etaže  $r$  i neuravnoteženog momenta te etaže zbog prethodnog ciklusa otpuštanja čvorova. Prikazan je sljedećim izrazom:

$$\mathcal{M}_r^{(0)} = \overline{M}_r^{(0)} + \Delta M_r^{(1)}. \quad (17)$$

Ukupni neuravnoteženi moment etaže  $r$  moramo uravnotežiti momentom istog iznosa, ali suprotnog smjera. Koristeći koeficijent koji je različit za svaku etažu, razdjeljujemo ga na krajeve stupova. Razdjelni koeficijent dobivamo prema izrazu

$$v_r = -\frac{1}{2} \cdot \frac{k_{m,\underline{m}}}{k_r}. \quad (18)$$

Vidljivo je da on ovisi o krutostima stupova pojedine etaže. Oznaka  $k_{m,\underline{m}}$  predstavlja krutost pojedinog stupa, dok  $k_r$  zbroj krutosti svih stupova u etaži.

Razdjeljeni neuravnoteženi moment etaže  $r$  dan je izrazom

$$\Delta M_r^{(1)} = v_r \cdot \mathcal{M}_r^{(0)}. \quad (19)$$

Uspostavljanjem ravnoteže etaža dodatno smo narušili ravnotežu u čvorovima. Iz tog razloga vrijednost iz izraza (19) zapisujemo u lijevi stupac.

## OSTALI CIKLUSI RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

Ponavljamo postupak iz prvog ciklusa uravnoteženja čvorova. Jedina razlika je u izrazu za neuravnoteženi moment. Izraz za neuravnoteženi moment u čvoru  $m$  prije njegova uravnoteženja u ostalim ciklusima sada glasi

$$\mathfrak{B}_m^{(n_\zeta-1)} = \sum_k \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{k,m}^{(n_\zeta-1)} + \Delta M_r^{(n_\zeta-1)} + \Delta M_{r+1}^{(n_\zeta-1)}. \quad (20)$$

Neuravnoteženi moment u čvoru  $m$ , naravno, ne sadrži više momente upetosti kao u prvom ciklusu, ali i dalje sadrži prenesene momente od uravnoteženja susjednih čvorova u ciklusu  $n_\zeta$

$$\sum_k \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{k,m}^{(n_\zeta)}.$$

Sada ne smijemo zaboraviti prenesene momente od prethodnog uravnoteženja susjednih čvorova koji još nisu neuravnoteženi u ciklusu  $n_\zeta$ , te je on prikazan kao

$$\sum_k \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{k,m}^{(n_\zeta-1)}.$$

Iz toga je

$$\sum_k \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{k,m}^{(n_\xi-1)}$$

zbroj prenesenih momenata zbog uravnoteženja susjednih čvorova uravnoteženih i onih još neuravnoteženih u ciklusu  $n_\xi$ .

Pošto se ciklusi uravnoteženja čvorova i stupova stalno izmjenjuju, u ostalim ciklusima uravnoteženja čvorova moramo uzeti u obzir i utjecaj zaokretanja etaža. Utjecaj zaokreta etaže  $r$  iz prethodnog ciklusa  $n_\xi-1$  predstavlja moment uravnoteženja etaže  $r$  raspodijeljen po stupovima, te mu pripada oznaka  $\Delta M_r^{(n_\xi-1)}$ . Posljednji član  $\Delta M_{r+1}^{(n_\xi-1)}$  postoji ako sistem ima više etaža.

Razdijeljeni neuravnoteženi moment čvora  $m$  određuje se prema izrazu (11), samo smo gornje indekse prilagodili ostalim ciklusima uravnoteženja čvorova te je dan izrazom

$$\Delta M_{m,k}^{(n_\xi)} = \mu_{m,k} \cdot \mathfrak{M}_m^{(n_\xi-1)}. \quad (21)$$

## OSTALI CIKLUSI RELAKSACIJE VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA POJEDINIH ETAŽA

U ostalim ciklusima na promjenu momenta pojedine etaže utječe samo prethodno uravnoteženje čvorova. Neuravnoteženi moment etaže  $r$  više nije zbroj momenata od utjecaja zadanog horizontalnog opterećenja i utjecaja uravnoteženja čvorova, te sada glasi:

$$\Delta M_r^{(n_s)} = \sum_{(m,\underline{m}) \in r} \left( \frac{3}{2} \cdot M_{m,\underline{m}}^{(n_s)} + \frac{3}{2} \cdot M_{\underline{m},m}^{(n_s)} \right), \quad (22)$$

odnosno

$$\mathcal{M}_r^{(n_s-1)} = \Delta M_r^{(n_s)}. \quad (23)$$

Oznake  $M_{m,\underline{m}}^{(n_s)}$  i  $M_{\underline{m},m}^{(n_s)}$  predstavljaju raspodijeljene i prenesene momenti na stupu pri prethodnom otpuštanju čvorova  $m$  i  $\underline{m}$

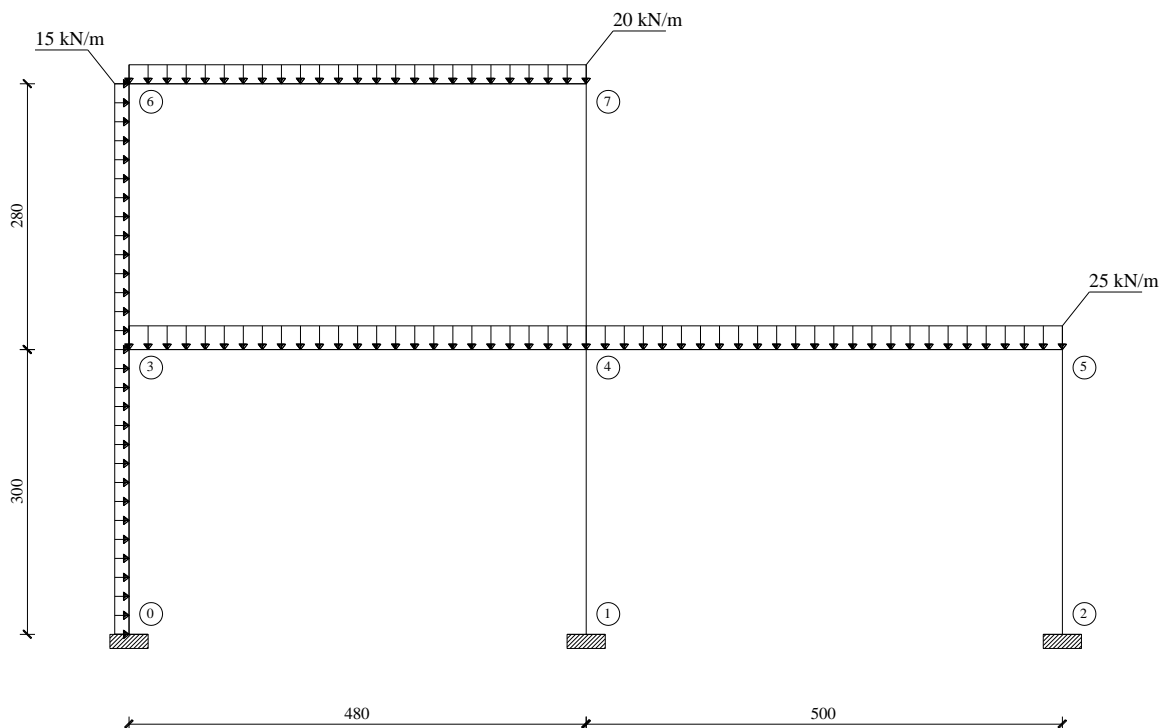
Razdijeljeni neuravnoteženi moment etaže  $r$  određuje se prema izrazu (19) iz prvog ciklusa, samo smo gornje izraze prilagodili ostalim ciklusima uravnoteženja stupova, te je dan izrazom

$$\Delta M_r^{(n_s)} = v_r \cdot \mathcal{M}_r^{(n_s-1)}. \quad (24)$$

Nakon što smo dovoljno puta ponavljali postupak zaokretanja čvorova i stupova, zbrajamo sve vrijednosti momenata iz iteracijskog računa provedenog na konstruktivnoj shemi sistema, te dobivamo konačne vrijednosti momenata.

## 7. PRIMJENA KUŠEVIĆEVOG POSTUPKA NA ZADATKU

Za statički neodređen okvir, prikazan na slici 14, treba za zadano opterećenje odrediti dijagram momenata savijanja.



Slika 14.

Dimenzije poprečnih presjeka stupova i greda: - stupovi: 30/30 cm

- grade: 30/60 cm

Krutosti štapova:  $k_{m,k} = \frac{E_{m,k} I_{m,k}}{I_{m,k}}$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ Kn/m}^2$$

Stupovi:

$$I_s = \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 6,750 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$EI_s = 20\,250 \text{ kNm}^2$$

$$k_{30} = k_{41} = k_{52} = \frac{EI_s}{3} = 6750 \text{ kNm}$$

$$k_{63} = k_{74} = \frac{EI_s}{2,8} = 7232,143 \text{ kNm}$$

Grede:

$$I_g = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 5,400 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$EI_g = 162\,000 \text{ kNm}^2$$

$$k_{67} = k_{34} = \frac{EI_g}{4,8} = 33750 \text{ kNm}$$

$$k_{45} = \frac{EI_g}{5,0} = 32400 \text{ kNm}$$

### *1.ciklus*

#### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA ČVOROVA

Momenti upetosti:

$$\overline{M}_{03} = \frac{15 \cdot 3^2}{12} = 11,25 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{30} = -11,25 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{14} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{41} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{25} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{52} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{36} = \frac{15 \cdot 2,8^2}{12} = 9,8 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{63} = -9,8 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{47} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{74} = 0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{34} = \frac{25 \cdot 4,8^2}{12} = 48,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{43} = -48,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{45} = \frac{25 \cdot 5^2}{12} = 52,083 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{54} = -52,083 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{67} = \frac{20 \cdot 4,8^2}{12} = 38,4 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{76} = -38,4 \text{ kNm}$$

Razdjelni koeficijenti za raspodjelu neuravnoteženog momenta u čvorovima:

$$\text{ČVOR 3 } \sum k_3 = k_{30} + k_{34} + k_{36} = 6750 + 33750 + 7232,143 = 47732,143$$

$$\mu_{30} = -\frac{k_{30}}{\sum k_3} = -0,141$$

$$\mu_{34} = -\frac{k_{34}}{\sum k_3} = -0,707$$

$$\mu_{36} = -\frac{k_{34}}{\sum k_3} = -0,707$$

$$\text{ČVOR 4 } \sum k_4 = k_{41} + k_{43} + k_{45} + k_{47} = 6750 + 33750 + 32400 + 7232,143 = 80132,143$$

$$\mu_{41} = -\frac{k_{41}}{\sum k_4} = -0,084$$

$$\mu_{43} = -\frac{k_{43}}{\sum k_4} = -0,421$$

$$\mu_{45} = -\frac{k_{45}}{\sum k_4} = -0,404$$

$$\mu_{47} = -\frac{k_{47}}{\sum k_4} = -0,090$$

$$\text{ČVOR 5 } \sum k_5 = k_{54} + k_{52} = 32400 + 6750 = 39150$$

$$\mu_{54} = -\frac{k_{54}}{\sum k_5} = -0,828$$

$$\mu_{52} = -\frac{k_{52}}{\sum k_5} = -0,172$$

$$\text{ČVOR 6 } \sum k_6 = k_{63} + k_{67} = 7232,143 + 33750 = 40982,143$$

$$\mu_{63} = -\frac{k_{63}}{\sum k_6} = -0,176$$



$$\mu_{67} = -\frac{k_{67}}{\sum k_6} = -0,824$$

$$\text{ČVOR 7 } \sum k_7 = k_{76} + k_{74} = 33750 + 7232,143 = 40982,143$$

$$\mu_{76} = -\frac{k_{76}}{\sum k_7} = -0,824$$

$$\mu_{74} = -\frac{k_{74}}{\sum k_7} = -0,176$$

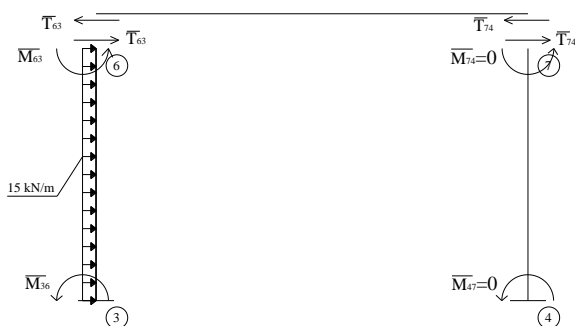
### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOBKRETANJA STUPOVA

Razdjelni koeficijenti za raspodjelu neuravnoteženog momenta pojedinih etaža:

$$v_{II} = -\frac{k_{36}}{2 \cdot (k_{36} + k_{47})} = -\frac{7232,143}{2 \cdot 2 \cdot 7232,143} = -\frac{1}{4}$$

$$v_I = -\frac{k_{03}}{2 \cdot (k_{03} + k_{14} + k_{25})} = -\frac{6750}{2 \cdot 3 \cdot 6750} = -\frac{1}{6}$$

### II. etaža



Slika 15.

$$\sum M_3 = 0 \qquad h_{II} = 2,8 \text{ m}$$

$$\overline{M}_{36} + \overline{M}_{63} - \overline{T}_{63} \cdot h_{II} - \frac{q \cdot h_{II}^2}{2} = 0$$

$$9,8 - 9,8 - \overline{T}_{63} \cdot 2,8 - \frac{42 \cdot 2,8}{2} = 0$$

$$\overline{T}_{63} = -21,0 \text{ Kn}$$

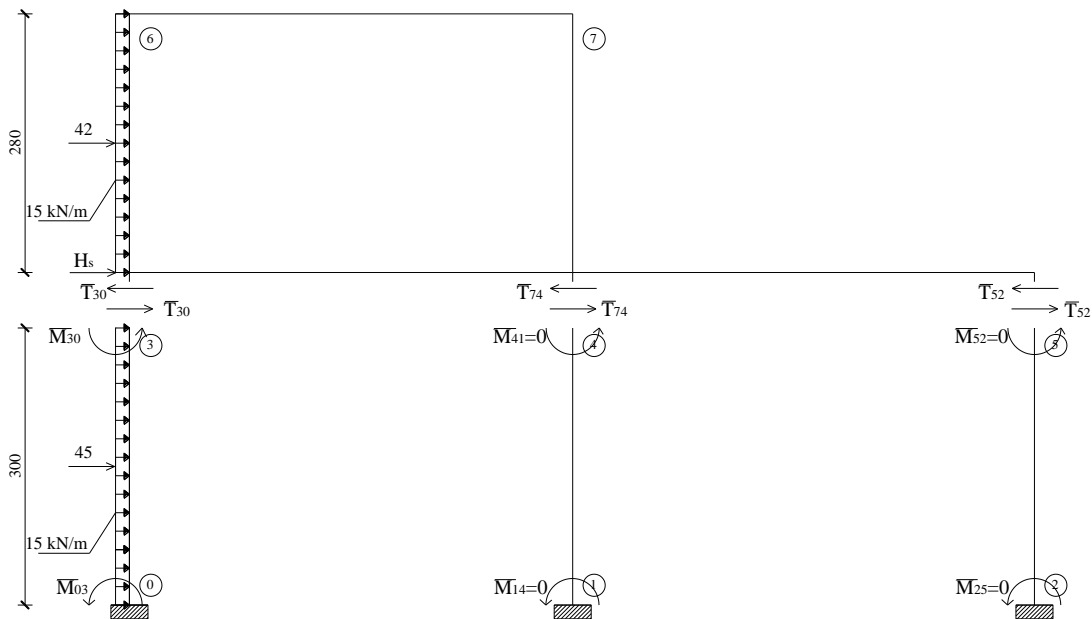
Vrijednost ukupne horizontalne sile koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže II:

$$H_{II} = -\overline{T}_{63} = -(-21,0) = 21,0 \text{ kN}$$

Moment upetosti etaže II:

$$\overline{M_{II}^{(0)}} = -H_{II} \cdot h_{II} = -21,0 \cdot 2,8 = -58,80 \text{ kNm}$$

I. etaža



Slika 16.

$$\sum M_0 = 0$$

$$\sum_{e>I} H_e = 42,0 \text{ kN}$$

$$\overline{M_{03}} + \overline{M_{30}} - \overline{T_{30}} \cdot h_I - \frac{q \cdot h_I^2}{2} = 0$$

$$h_I = 3,0 \text{ m}$$

$$11,25 - 11,25 \cdot \overline{T_{30}} \cdot 3,0 - \frac{45,0 \cdot 3,0^2}{2} = 0$$

$$\overline{T_{30}} = -22,5 \text{ kN}$$

Vrijednost ukupne horizontalne sile koja djeluje na dio okvira iznad presjeka kroz sve stupove etaže I:

$$H_I = -\overline{T_{30}} + \sum_{e>I} H_e = -(-22,5) + 42,0 = 64,5 \text{ kN}$$

Moment upetosti etaže I:

$$\overline{M_I^{(0)}} = -H_I \cdot h_I = -64,5 \cdot 3,0 = -193,5 \text{ kNm}$$

Neuravnoteženi moment pojedinih etaža zbog prethodnog otpuštanja čvorova:

$$M_{II}'^{(1)} = -13,429 \text{ kNm}$$

$$M_I'^{(1)} = 1,503 \text{ kNm}$$

Ukupni neuravnoteženi moment pojedinih etaža:

$$\mathcal{M}_{II}^{(0)} = \overline{M}_{II} + M_{II}'^{(1)} = -72,229 \text{ kNm}$$

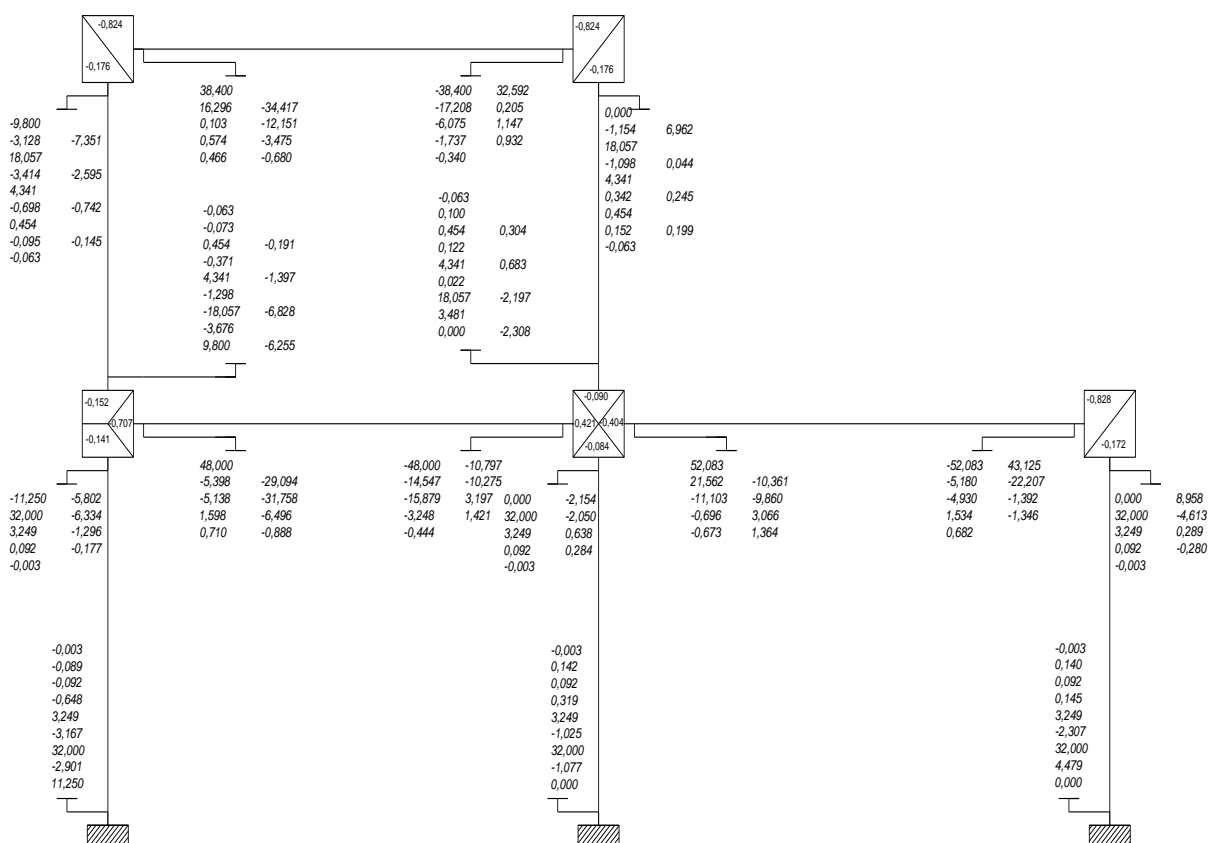
$$\mathcal{M}_I^{(0)} = \overline{M}_I + M_I'^{(1)} = -191,997 \text{ kNm}$$

Raspodjela neuravnoteženih momenata pojedinih etaža na krajeve stupova tih etaža:

$$\Delta M_{II}^{(1)} = \mathcal{M}_{II}^{(0)} \cdot v_{II} = -72,229 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 18,057 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(1)} = \mathcal{M}_I^{(0)} \cdot v_I = -191,997 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 32,00 \text{ kNm}$$

Neposredno izračunati priključni momenti:



Slika 17.

U lijevom stupcu nalaze se neuravnoteženi momenti, a u desnom momenti koji ih uravnotežuju. Uvođenje zapisivanja momenata u dva stupca daje potrebnu preglednost, za razliku od zapisivanja na Crossov način, koji zapisuje sve u jednom stupcu. S Kuševićevim načinom zapisivanja lakše je pratiti korake postupka i korigirati moguće greške.

## 2. ciklus

### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

Neuravnoteženi moment pojedinih etaža zbog prethodnog otpuštanja čvorova:

$$\mathcal{M}_{II}^{(1)} = M_{II}'^{(2)} = -17,364 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(1)} = M_I'^{(2)} = -19,496 \text{ kNm}$$

Raspodjela neuravnoteženih momenata pojedinih etaža na krajeve stupova tih etaža:

$$\Delta M_{II}^{(2)} = \mathcal{M}_{II}^{(1)} \cdot v_{II} = -17,364 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 4,341 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(2)} = \mathcal{M}_I^{(1)} \cdot v_I = -19,496 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 3,249 \text{ kNm}$$

## 3. ciklus

### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

Neuravnoteženi moment pojedinih etaža zbog prethodnog otpuštanja čvorova:

$$\mathcal{M}_{II}^{(2)} = M_{II}'^{(3)} = -1,816 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(2)} = M_I'^{(3)} = -0,553 \text{ kNm}$$

Raspodjela neuravnoteženih momenata pojedinih etaža na krajeve stupova tih etaža:

$$\Delta M_{II}^{(3)} = \mathcal{M}_{II}^{(2)} \cdot v_{II} = -1,816 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 0,454 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(3)} = \mathcal{M}_I^{(2)} \cdot v_I = -0,553 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 0,092 \text{ kNm}$$

## 4. ciklus

### RELAKSACIJA VEZA PROTIV ZAOKRETANJA STUPOVA

Neuravnoteženi moment pojedinih etaža zbog prethodnog otpuštanja čvorova:

$$\mathcal{M}_{II}^{(3)} = M_{II}'^{(4)} = 0,251 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(3)} = M_I^{(4)} = 0,020 \text{ kNm}$$

Raspodjela neuravnoteženih momenata pojedinih etaža na krajeve stupova tih etaža:

$$\Delta M_{II}^{(4)} = \mathcal{M}_{II}^{(3)} \cdot v_{II} = 0,251 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -0,063 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(4)} = \mathcal{M}_I^{(3)} \cdot v_I = 0,020 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -0,003 \text{ kNm}$$

#### UKUPNI MOMENTI

$$M_{03} = 39,783 \text{ kNm}$$

$$M_{30} = 10,479 \text{ kNm}$$

$$M_{14} = 33,697 \text{ kNm}$$

$$M_{41} = 32,056 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = 37,795 \text{ kNm}$$

$$M_{52} = 39,692 \text{ kNm}$$

$$M_{36} = 12,500 \text{ kNm}$$

$$M_{63} = -5,179 \text{ kNm}$$

$$M_{47} = 22,996 \text{ kNm}$$

$$M_{74} = 28,464 \text{ kNm}$$

$$M_{34} = 28,464 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = -98,572 \text{ kNm}$$

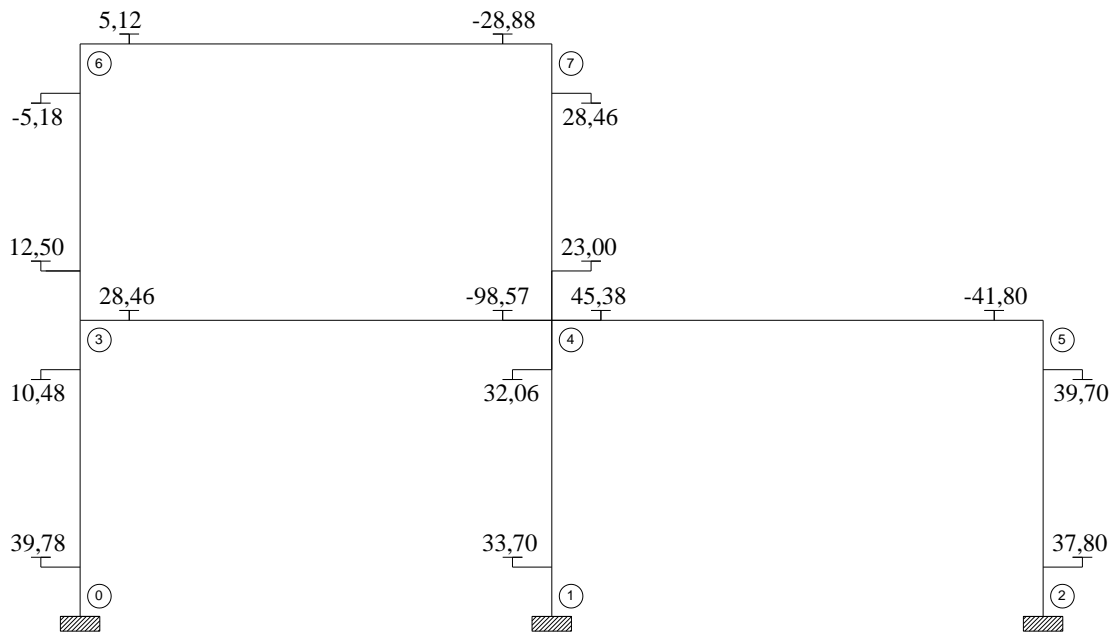
$$M_{45} = 45,382 \text{ kNm}$$

$$M_{54} = -41,797 \text{ kNm}$$

$$M_{67} = 5,116 \text{ kNm}$$

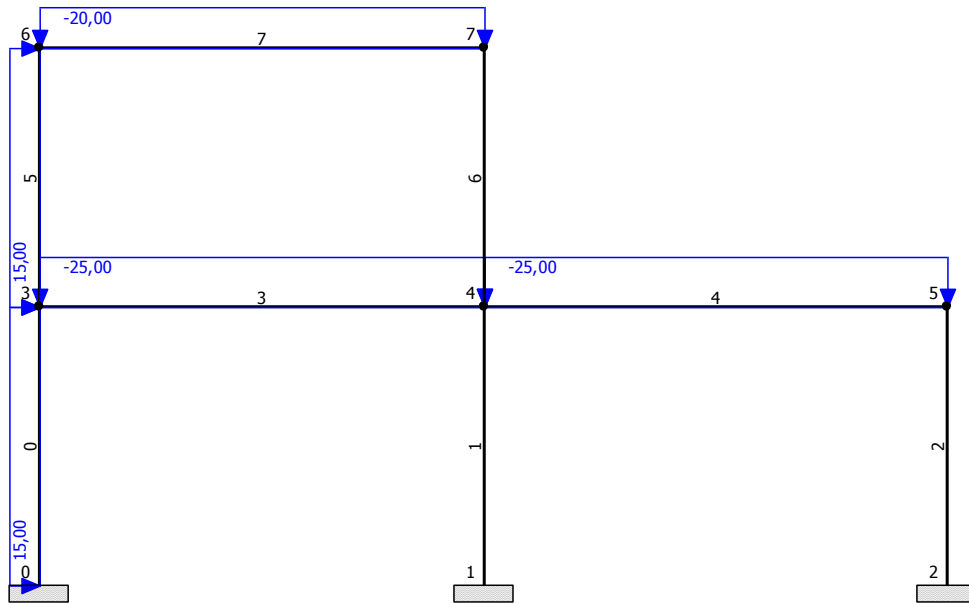
$$M_{76} = -28,884 \text{ kNm}$$

Prikaz ukupnih momenata na sistemu:

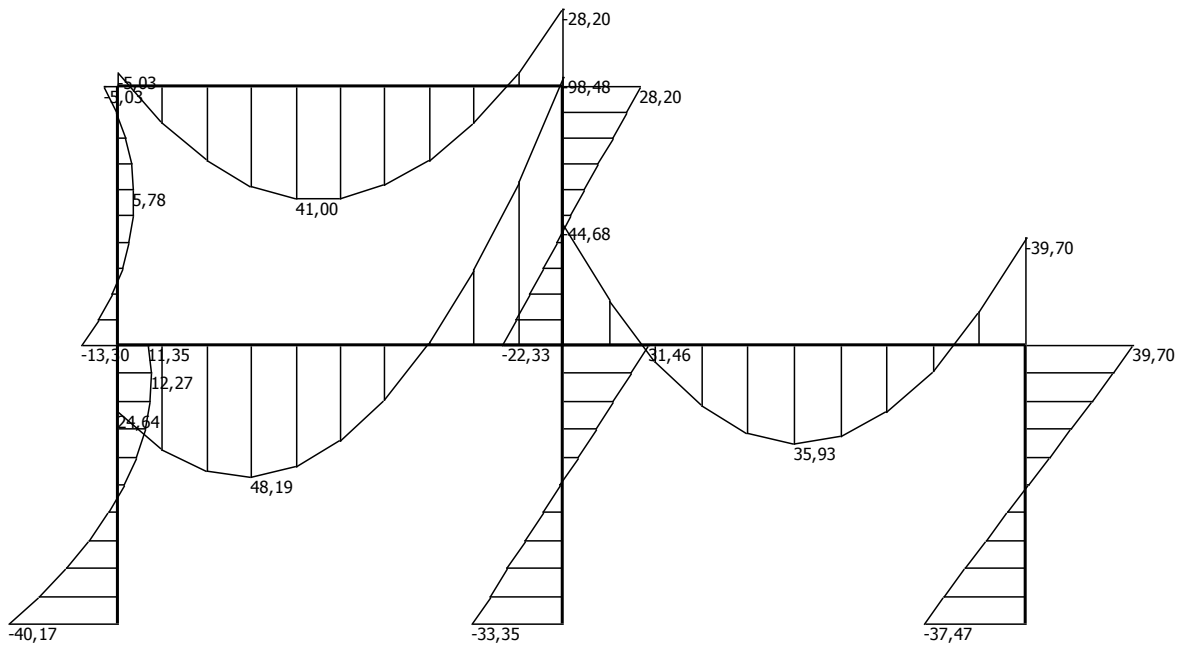


Slika 18.

REZULTAT STATIČKOG PRORAČUNA (LinPro):

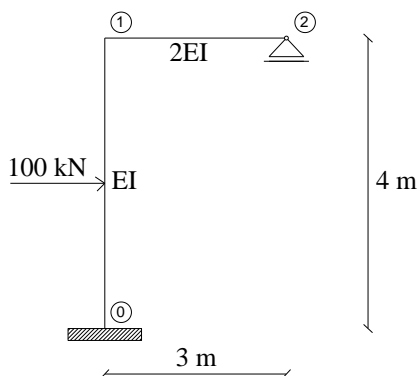


Momentni dijagram:



## 8. PRIKAZ I ANALIZA KORAKA NEPOSREDNOG I POSREDNOG IZRAČUNAVANJA PRIKLJUČNIH MOMENATA

Usporedba će biti prikazana na ovom primjeru:



Slika 19.

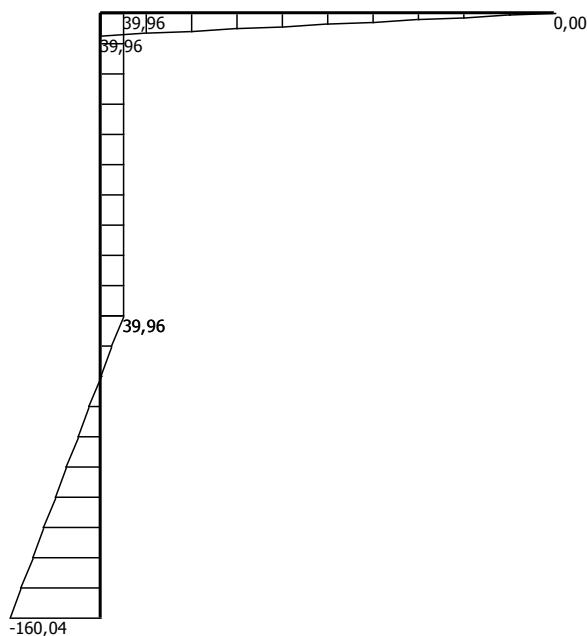
$$EI = 100\,000 \text{ kNm}^2$$

$$k_{01} = \frac{EI}{4,0} = 25000 \text{ kNm}$$

$$k_{12} = \frac{2EI}{3,0} = 66666,7 \text{ kNm}$$

REZULTAT STATIČKOG PRORAČUNA (LinPro):

Momentni dijagram:





## 8.1. Zadatak riješen postupkom neposrednog izračunavanja priključnih momenata

1. ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\overline{M}_{01} = 50,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{10} = -50,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{12} = \overline{M}_{21} = 0 \text{ kNm}$$

- razdjelni koeficijenti za raspodjelu neuravnoteženog momenta u čvoru:

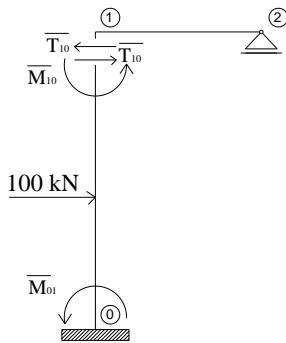
$$\mu_{10} = -\frac{4 \cdot k_{10}}{4 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{12}} = -0,333$$

$$\mu_{12} = -\frac{3 \cdot k_{12}}{4 \cdot k_{10} + 3 \cdot k_{12}} = -0,667$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

- razdjelni koeficijenti za raspodjelu neuravnoteženog momenta pojedine etaže:

$$v_I = -\frac{k_{01}}{2 \cdot k_{01}} = -\frac{1}{2}$$



Slika 20.

$$\sum M_0 = 0$$

$$\overline{M}_{01} + \overline{M}_{10} - \overline{T}_{10} \cdot h_I - \frac{P \cdot h_I}{2} = 0$$

$$50,0 - 50,0 - \overline{T}_{10} \cdot 4,0 - \frac{100,0 \cdot 4,0}{2} = 0$$

$$\overline{T}_{10} = -50,0 \text{ kN}$$

$$H_I = -\overline{T}_{10} = 50,0 \text{ kN}$$

$$\overline{M}_I^{(0)} = -H_I \cdot h_I = -50,0 \cdot 4,0 = -200,0 \text{ kNm}$$

Neuravnoteženi moment etaže zbog prethodnog otpuštanja čvora:

$$\Delta M_I'^{(1)} = 24,975 \text{ kNm}$$

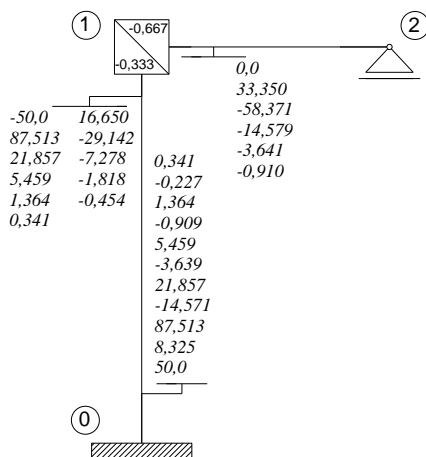
Ukupni neuravnoteženi moment etaže:

$$\mathcal{M}_I^{(0)} = \overline{M}_I^{(0)} + \Delta M_I'^{(1)} = -200,0 + 24,975 = -175,025 \text{ kNm}$$

Raspodjela neuravnoteženih momenata etaže na krajeve stupova te etaže:

$$\Delta M_I^{(1)} = \mathcal{M}_I^{(0)} \cdot v_I = 87,513 \text{ kNm}$$

Neposredno izračunati priključni momenti:



Slika 21.

2.ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(1)} = \Delta M_I'^{(2)} = -43,713 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(2)} = \mathcal{M}_I^{(1)} \cdot v_I = 21,857 \text{ kNm}$$

3.ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(2)} = \Delta M_I'^{(3)} = -10,917 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(3)} = \mathcal{M}_I^{(2)} \cdot v_I = 5,459 \text{ kNm}$$

4. ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(3)} = \Delta M_I^{(4)} = -2,727 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_I^{(4)} = \mathcal{M}_I^{(3)} \cdot v_I = 1,364 \text{ kNm}$$

5. ciklus

$$\mathcal{M}_I^{(4)} = \Delta M_I^{(5)} = -0,681 \text{ kNm}$$

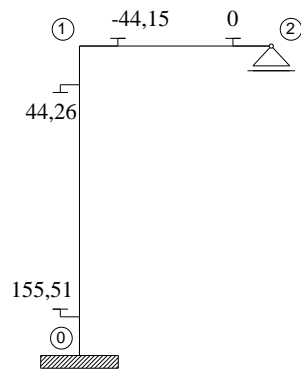
$$\Delta M_I^{(5)} = \mathcal{M}_I^{(4)} \cdot v_I = 0,341 \text{ kNm}$$

UKUPNI MOMENTI

$$M_{01} = 155,51 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = 44,26 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = -44,15 \text{ kNm}$$



Slika 22.

## 8.2. Zadatak riješen postupkom posrednog izračunavanja priključnih momenata

1. ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\overline{M}_{01} = 50,0 \text{ kNm}$$

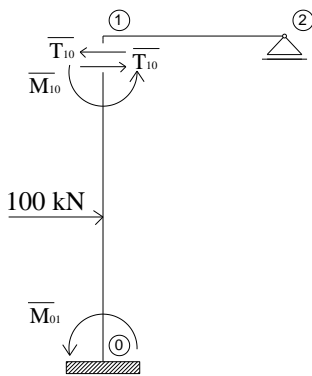
$$\overline{M}_{10} = -50,0 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{12} = \overline{M}_{21} = 0 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta čvora:

$$\Delta\varphi_1^{(1)} = -\frac{1}{4 \cdot k_{01} + 3 \cdot k_{12}} \cdot (\overline{M}_{10} + \overline{M}_{12}) = \frac{50,0}{300000} = 1,670 \cdot 10^{-4}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:



Slika 23.

$$\sum M_0 = 0$$

$$\overline{M}_{01} + \overline{M}_{10} - \overline{T}_{10} \cdot h_1 - \frac{P \cdot h_1}{2} = 0$$

$$50,0 - 50,0 - \overline{T}_{10} \cdot 4,0 - \frac{100,0 \cdot 4,0}{2} = 0$$

$$\overline{T}_{10} = -50,0 \text{ kN}$$

$$H_1 = -\overline{T}_{10} = 50,0 \text{ kN}$$

$$\overline{M}_1^{(0)} = -H_1 \cdot h_1 = -50,0 \cdot 4,0 = -200,0 \text{ kNm}$$

Promjena momenata na dnu i vrhu stupa zbog prethodnog otpuštanja veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta M_I^{(1)} = 6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \varphi_1^{(1)} = 6 \cdot 25000 \cdot 1,670 \cdot 10^{-4} = 25,050 \text{ kNm}$$

Ukupni neuravnoteženi moment etaže:

$$\mathcal{M}_I^{(0)} = \overline{M}_I^{(0)} + \Delta M_I^{(1)} = -200,0 + 25,050 = -174,950 \text{ kNm}$$

Prirast kuta zaokreta etaže:

$$\Delta \Psi_I^{(1)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(0)}}{12 \cdot k_{10}} = \frac{-174,950}{12 \cdot 25000} = -5,832 \cdot 10^{-4}$$

### 2.ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta \varphi_1^{(2)} = - \frac{1}{4 \cdot k_{01} + 3 \cdot k_{12}} \cdot (-6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \Psi_I^{(1)}) = - \frac{8,748}{300000} = -2,916 \cdot 10^{-4}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I^{(2)} = 6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \varphi_1^{(2)} = 6 \cdot 25000 \cdot (-2,916 \cdot 10^{-4}) = -43,740 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(1)} = \Delta M_I^{(2)} = -43,740 \text{ kNm}$$

$$\Delta \Psi_I^{(2)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(1)}}{12 \cdot k_{10}} = \frac{-43,740}{12 \cdot 25000} = -1,458 \cdot 10^{-4}$$

### 3.ciklus

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta \varphi_1^{(3)} = - \frac{1}{4 \cdot k_{01} + 3 \cdot k_{12}} \cdot (-6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \Psi_I^{(2)}) = - \frac{21,87}{300000} = -7,290 \cdot 10^{-5}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I^{(3)} = 6 \cdot k_{01} \cdot \Delta \varphi_1^{(3)} = 6 \cdot 25000 \cdot (-7,290 \cdot 10^{-5}) = -10,935 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(2)} = \Delta M_I^{(3)} = -10,935 \text{ kNm}$$

$$\Delta \Psi_I^{(3)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(2)}}{12 \cdot k_{10}} = \frac{-10,935}{12 \cdot 25000} = -3,645 \cdot 10^{-5}$$

*4.ciklus*

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta\varphi_1^{(4)} = -\frac{1}{4\cdot k_{01} + 3\cdot k_{12}} \cdot (-6\cdot k_{01} \cdot \Delta\Psi_1^{(3)}) = -\frac{5,468}{300000} = -1,823 \cdot 10^{-5}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I'^{(4)} = 6\cdot k_{01} \cdot \Delta\varphi_1^{(4)} = 6\cdot 25000 \cdot (-1,823 \cdot 10^{-5}) = -2,735 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(3)} = \Delta M_I'^{(4)} = -2,735 \text{ kNm}$$

$$\Delta\Psi_1^{(4)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(3)}}{12\cdot k_{10}} = \frac{-2,735}{12\cdot 25000} = -9,115 \cdot 10^{-5}$$

*5.ciklus*

Relaksacija veza protiv zaokretanja čvora:

$$\Delta\varphi_1^{(5)} = -\frac{1}{4\cdot k_{01} + 3\cdot k_{12}} \cdot (-6\cdot k_{01} \cdot \Delta\Psi_1^{(4)}) = -\frac{13,673}{300000} = -4,558 \cdot 10^{-5}$$

Relaksacija veza protiv zaokretanja stupa:

$$\Delta M_I'^{(5)} = 6\cdot k_{01} \cdot \Delta\varphi_1^{(5)} = 6\cdot 25000 \cdot (-4,558 \cdot 10^{-5}) = -6,836 \text{ kNm}$$

$$\mathcal{M}_I^{(4)} = \Delta M_I'^{(5)} = -6,836 \text{ kNm}$$

$$\Delta\Psi_1^{(5)} = \frac{\mathcal{M}_I^{(4)}}{12\cdot k_{10}} = \frac{-6,836}{12\cdot 25000} = -2,279 \cdot 10^{-5}$$

UKUPNI KUTOVI ZAOKRETA

$$\varphi_1 = -2,613 \cdot 10^{-4}$$

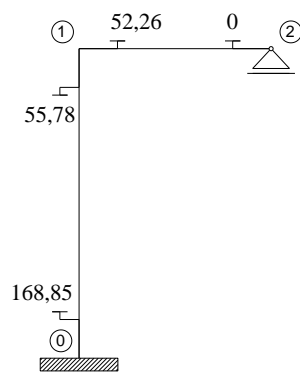
$$\psi_1 = -8,794 \cdot 10^{-4}$$

UKUPNI MOMENTI

$$M_{01} = 2 \cdot k_{01} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot k_{01} \cdot \psi_1 + \overline{M}_{01} = 168,85 \text{ kNm}$$

$$M_{10} = 4 \cdot k_{01} \cdot \varphi_1 - 6 \cdot k_{01} \cdot \psi_1 + \overline{M}_{10} = 55,78 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = 3 \cdot k_{12} \cdot \varphi_1 + \overline{M}_{12} = -52,26 \text{ kNm}$$



Slika 24.

### 8.3. Usporedba neposrednog i posrednog izračunavanja priključnih momenata

Napomenula bih da smo kolegica i ja zajedno rješavale primjere riješene u našim završnim radovima. Dok je kolegica obrađivala Kuševićev postupak posrednog izračunavanja priključnih momenata iz kutova zaokreta čvorova i stupova, ja sam neposredno dolazila do vrijednosti momenata na krajevima štapnih elemenata. Rješavanje istih zadataka na oba načina omogućilo nam je bolju usporedbu postupaka i cjelokupno shvaćanje Kuševićeve ideje.

Isto tako, imale smo mogućnost provjere točnosti neuravnoteženih momenata u čvorovima i stupovima prije svakog ciklusa prije usporedbe konačnih rezultata momenata s rezultatima iz statičkog proračuna LinPro. Upravo zbog toga smo imale potrebnu sigurnost pri rješavanju zadataka, jer smo greške mogle prije uočiti. Iteracijski račun u mojem slučaju nije bio dug i problematičan, te smo pomoću njega uočavale i ispravljale greške u velikim diferencijalnim jednadžbama u postupku posrednog izračunavanja priključnih momenata. Rezultati krajnjih momenata neznatno se razlikuju, što je posljedica zaokruživanja brojeva i pomalo različitih iteracijskih računa.

Zbog gore navedenog, rekle bismo da je postupak neposrednog izračunavanja priključnih momenata zahvalniji postupak u odnosu na postupak posrednog izračunavanja, odnosno metodu pomaka.

Bitna prednost neposrednog postupka je direktno dobivanje baš onih veličina koje se konačno i traže, iako se posrednim izračunavanjem momenata prvo dobivaju pomaci i zaokreti, koji nam daju najjasniju sliku o elastičnom ponašanju sistema.

Uočavamo da se oba postupka temelje na istom principu relaksacije, te da se jednostavno izvode iz istih osnovnih izraza koje sam navela u točki 3. Osnovni računi - krutosti štapova, prijenosnih koeficijenata i neuravnoteženih momenata - u oba postupka gotovo su identični. Isto tako, iteracijski račun približno je podjednak po broju računskih operacija, iako se kod neposrednog izračunavanja priključnih momenata iteracijom redovito određuje daleko veći broj veličina nego kod posrednog izračunavanja tih momenata preko deformacijskih veličina.

Rješavajući isti primjer na oba načina primjećujemo da neposrednim načinom izračunavanja Kušević brže dolazi do traženih momenata izvornog sistema. Postupak se provodi pomoću konstruktivne sheme sistema i nema klasičnog matematičkog postupka, te je i time pogodniji i manje zamoran.

Kod postupka neposrednog izračunavanja priključnih momenata uvođenje zapisivanja momenata u dva stupca daje stupanj preglednosti veći nego kod Crossovog postupka. U lijevom stupcu nalaze se neuravnoteženi momenti, a u desnom momenti koji ih uravnotežuju. Ako na kraju iteracijskog računa uočimo da je došlo do pogreške, odnosno ako su momenti u čvorovima vidljivo neuravnoteženi, potrebna je kontrola računa.



Kako bi se što lakše našla prikradena greška, predlažemo da se izvan iteracijskog računa zapisuju i vrijednosti neuravnoteženih momenata čvorova nakon svakog ciklusa relaksacije. Za sisteme s većim brojem čvorova takav je pomoćni račun od velike važnosti, jer u provjeri iteracijskog računa imamo potvrdu točno, odnosno krivo izračunatih prirasta momenata u pojedinim ciklusima.

Kod posrednog postupka izračunavanja priključnih momenata pomoćni računi nisu potrebni. Pišu se diferencijske jednačbe koje sadrže sve potrebne podatke za dobivanje krajnjih momenata, za razliku od neposrednog postupka u kojem imamo iteracijski račun samo s vrijednostima prirasta momenata. Međutim, rješavanje tih jednačbi je dugotrajan i zamoran posao, pa je i mogućnost pojave greške u računu veća. Stoga, treba biti pažljiv pri postavljanju i rješavanju jednačbi. Ako se uspostavi da je došlo do pogreške u računu, moraju se ponovno računati, a čak i mijenjati, već mukotrpno izračunate diferencijske jednačbe.

Složile smo se da je postupak posrednog izračunavanja priključnih momenata puno pregledniji postupak, te je pomoću njega lakše shvatiti Kuševićevu ideju. Iz tog razloga, pri ponovnom rješavanju problema jednim od ova dva postupka, odlučile bismo se za neposredan postupak dobivanja momenata, iako je korisno proučiti i posredan postupak.

## 9. ZAKLJUČAK

Glavna zadaća proračunavanja okvirnih konstrukcija je određivanje momenata, koji djeluju na krajevima pojedinih štapova. Određivanje kutova ima zapravo prolazno značenje. Stoga je postupak neposrednog izračunavanja kraći i manje zamoran. Njime Kušević odustaje od postavljanja jednadžbi ravnoteže u diferencijskom obliku, te uvodi razdjelne koeficijente za čvorove i stupove kojima razdjeljuje neuravnotežene momente. Takvim postupkom izravno dolazimo do vrijednosti priključnih momenata, što je i primarni cilj.

Naglasila bih i da Kuševićev postupak neposrednog izračunavanja priključnih momenata bolje objašnjava gibanje sistema u odnosu na Crossov postupak.

### *Napomena*

Postupak neposrednog izračunavanja priključnih momenata je postupak diferencijske iteracije. Kušević je uz to pokazao i kako se modifikacijom izraza može dobiti Kanijev postupak potpune iteracije. Nadalje, Kušević je popriličnu pozornost posvetio računskim kontrolama navodeći za svaki postupak moguće provjere prije, tijekom i na kraju proračuna, a istaknuo je i načelnu razliku između potpune i diferencijske iteracije: "Što se tiče pouzdanosti rezultata, " postupci potpune iteracije "imaju veliku prednost ... u tome što se u njima automatski ispravljaju greške proračuna. [...] Greške učinjene pri samoj iteraciji ne utječu na rezultat; one mogu jedino usporiti konvergenciju ... Naprotiv, pri diferencijskoj iteraciji računске greške dovode do krivog rezultata, i tu je stoga neophodno potrebna kontrola završenog računa. "

## 10. LITERATURA

- [1] Fresl K., Gidak P., Hak S.: *Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka*, Građevinar 62 (2010) 10, 959-970.
- [2] Kušević R.: *Relaksacioni postupci izračunavanja okvirnih sistema nosača*, Naše građevinarstvo 8 (1954) 11, 313-320; 12, 329-343.
- [3] Simović V.: Kušević, Rajko, *Leksikon građevinarstva* (ur. V. Simović), Masmedia, Zagreb, 2002.