

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

**KONSTRUKCIJE OD UŽADI**  
ZAVRŠNI RAD IZ KOLEGIJA GRAĐEVNA STATIKA 2

Student: Jana Hršak

Mentor: prof.dr.sc. Krešimir Fresl

ZAGREB, 2021.

## SADRŽAJ

1. UVOD .....	3
2. KARAKTERISTIKE KONSTRUKCIJA OD UŽADI.....	5
2.1. Svojstva i vrste užadi .....	5
2.2. Mreže užadi .....	6
2.3. Svojstva konstrukcija od užadi .....	8
2.4. Povezivanje kabela.....	10
3. NALAŽENJE OBLIKA.....	12
3.1. Osnovni koraci projektiranja .....	12
3.2. Ravnoteža čvora.....	15
3.3. Minimalne i poopćene minimalne mreže .....	17
4. METODA GUSTOĆE SILA.....	19
4.1. Karakteristike metode .....	19
4.2. Iteracijska primjena metode gustoće sila .....	21
4.3. Kinematička ograničenja.....	22
5. PRIMJER.....	24
6. ZAKLJUČAK.....	32
7. LITERATURA .....	33
8. POPIS SLIKA.....	34

## 1. UVOD

Konstrukcije od užadi svoj su put u graditeljstvu započele kao jedna od najstarijih vrsta čovjekovih nastambi koje je on sam napravio. To su šatori starih nomadskih plemena poput indijanskih tipija stožastog oblika, građenih od životinjske kože na drvenim stupovima, te crnih šatora arapskih i afričkih nomada. Takve nastambe rezultat su godina praktičnog iskustva i narodne mudrosti, a sve su definirane kao prednapete konstrukcije od tkanine. Njihova je prednost jednostavna demontaža, prijenos i ponovna montaža na drugom mjestu što je bilo veoma bitno nomadskim plemenima. Svoj su razvitak konstrukcije od užadi nastavile preko kineskih visećih mostova od bambusa koji se kao materijal ističe čvrstoćom i gipkošću. Kasnije je bambus zamijenjen kovanim željezom i naposljetku čelikom što je omogućilo gradnju mostova i čeličnih krovnih konstrukcija velikih raspona. Njemački arhitekt i građevinski inženjer, Frei Otto, koji je poznat po upotrebi vlačnih konstrukcija, a najviše po krovu Olimpijskog stadiona u Münchenu, shvatio je da je gipkost vlačne konstrukcije snaga, a ne slabost te da gradivo na površini mora biti podatnije od elemenata koji ga nose. Pojavom tkanina veće čvrstoće došlo je i do gradnje konstrukcija većih raspona.



*Slika 1. Indijanski tipi*

Neke od najznačajnijih takvih konstrukcija jesu zračna luka u Denveru koja objedinjuje najznačajnije karakteristike vlačnih konstrukcija: brzina izvedbe i smanjenje vlastite težine. Naime, konstrukcija je izvedena znatno brže u odnosu na standardne konstrukcije, a težina krova iznosi svega desetinu težine krova standardnih konstrukcija. Uz toliko manju težinu, savršeno ispunjava svoju funkciju, tj. osigurava zaštitu prostora ispod krovništva. Zatim spomenuto krovništvo Olimpijskog kompleksa u Münchenu kod kojeg je autor umjesto gipkog pokrova koristio akrilne ploče, glazbeni paviljon na Bundesgartenschau, Milenijska arena O2 u Londonu, njemački paviljon na izložbi EXPO i mnoge druge.



*Slika 2. Otto Frei, njemački paviljon na izložbi EXPO u Montrealu*

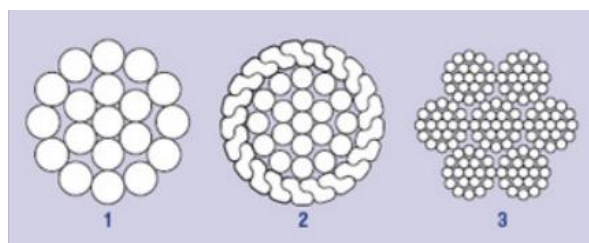
Iako vlačne konstrukcije od užadi odaju dojam nepravilnosti i slobode oblika, njihov je oblik uvjetovan strogim zakonima statike koje ću pobliže objasniti u ovom radu. Nastojat ću objasniti karakteristike konstrukcija od užadi, proces nalaženja oblika kao metode formuliranja konačnog oblika konstrukcije od užadi, objasniti metodu gustoće sile i njenu primjenu pomoću primjera mreže šesterokutnog oblika.

## 2. KARAKTERISTIKE KONSTRUKCIJA OD UŽADI

### 2.1. Svojstva i vrste užadi

Uže je gipki građevinski, strojarski i općenito tehnički element kojem je duljina znatno veća od visine i širine. Pod utjecajem djelovanja ovisno o položaju vanjske koncentrirane sile, uže mijenja svoj oblik tj. ravnotežni položaj. Jedno od svojstava užeta je zanemariva fleksijska krutost zbog čega se u užetu ne mogu pojaviti moment savijanja, poprečna sila kao ni tlačna sila. Jedino se pojavljuje centrična vlačna sila. Stoga, kako bi uravnotežilo poprečno djelovanje, ono mora promijeniti svoj oblik i time aktivirati vlačnu silu. Možemo zaključiti da je sljedeće važno svojstvo užeta vlačna čvrstoća, a osim nje i aksijalna krutost. Bitno je poznavanje aksijalne krutosti užeta pošto je raspodjela sila osjetljiva i na najsitnije pogreške.

Užad se može svrstati u tri osnovne skupine: spiralni snopovi, žičana užad i kabeli unutar krutog omotača. Spiralni snopovi predstavljaju sekundarnu vrstu užeta. Zbog nižeg modula elastičnosti, koji iznosi oko  $170 \text{ kN/mm}^2$ , upotrebljavaju se samo u specifičnim situacijama poput ograda stuba, pješačkih staza i mostova, balkona. Žičana užad, također sa nižim modulom elastičnosti, koristi se za rubne kabele. Nedostatak žičanog užeta je manja trajnost zbog izloženosti atmosferilijama prilikom čega dolazi do korozije, no problem se može riješiti uporabom nehrđajućih čeličnih kabela. Upravo je trajnost jedan od glavnih faktora pri odabiru materijala za uže. Posljednji, kabeli unutar krutog omotača, imaju visok modul elastičnosti za razliku od prethodne dvije vrste. Visoka im je i otpornost na površinski tlak te potpuno zatvorena površina koja osigurava zaštitu od korozije.

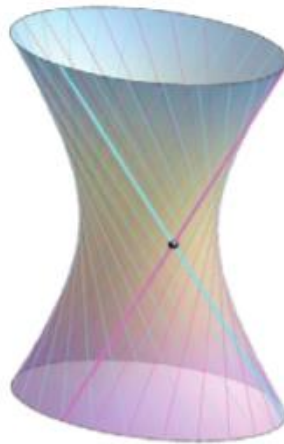


*Slika 3. Spiralni snopovi(1), kabeli unutar krutog omotača(2) i žičano uže(3)*

## 2.2. Mreže užadi

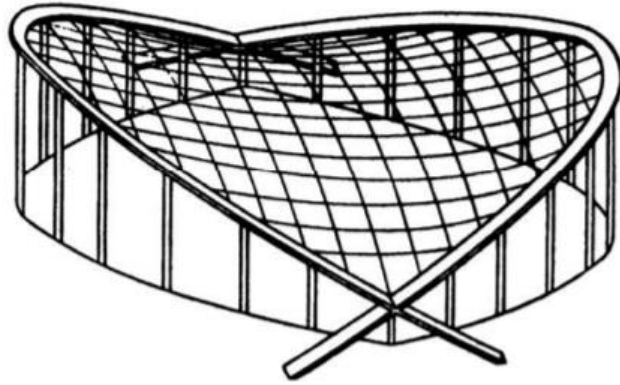
Užad možemo spajati u mreže na nekoliko načina. Ovisno o tome leži li svako uže na svojem pravcu, radi li se o dvije familije užadi koje se sijeku ili je raspored užadi složen, mreže užadi dijelimo na pravčaste, regularne i neregularne mreže.

Pravčaste mreže su mreže kod kojih svako uže leži na svojem pravcu i ne dolazi do lomova u čvorovima. Kod ovakvog tipa mreže nije potrebno nalaženje oblika jer se oblik može neposredno odrediti iz poznatih geometrijskih rubnih uvjeta. Svako uže je samo za sebe u ravnoteži. Ova mreža je specifična jer do gubitka prednapona može doći samo relaksacijom užadi zbog puzanja i plastičnih deformacija, a ne zbog djelovanja poprečnog opterećenja. Primjer pravčaste mreže je rotacijski hiperboloid.



*Slika 4. Primjer pravčaste mreže: rotacijski hiperboloid*

Regularne mreže su mreže sastavljene od dviju familija užadi koje se sijeku i tvore sedlastu plohu. One se u matematičkom modelu sijeku, dok u stvarnosti prelaze jedne preko drugih. Jedna familija užadi, koja predstavlja nosivu užad, je konkavna, dok je druga prednaponska, konveksna. Na kontaktu užadi uravnotežuju se dvije sile kojima kabeli djeluju jedan na drugi.



*Slika 5. Primjer regularne mreže*

Mreže koje se sastoje od više familija užadi ili su složenijeg rasporeda nazivamo neregularnim mrežama. Najveća specifičnost u odnosu na prethodna dva tipa mreže jest to što uže može mijenjati svoju zakrivljenost tako da je na jednom dijelu konkavno, a na drugom konveksno.

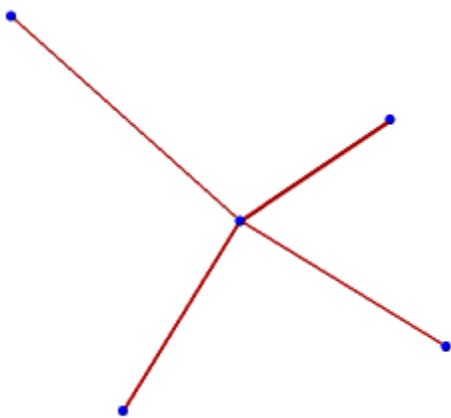


*Slika 6. Neregularna mreža*

### 2.3. Svojstva konstrukcija od užadi

Vlačne konstrukcije kao vrsta laganih konstrukcija pojavljuju se u obliku membranskih vlačnih konstrukcija, pneumatskih konstrukcija i mreža prednapetih kabela koje su najčešće izvedene od užadi. Takve konstrukcije svrstavamo u lagane zbog optimalnog korištenja materijala pomoću kojeg se prenosi vanjsko opterećenje. Lagane konstrukcije, osim vlačnih, mogu biti ljuske, složenice ili rebraste kupole. Sve te konstrukcije sastoje se od kontinuirane, prostorno zakrivljene plohe. Osim navedenih mreža prednapetih kabela, konstrukcije od užadi obuhvaćaju i jednostavne ovješene kabele, prednapetu užad za mostove te prednapete grede i rešetke od užadi.

Vlačne konstrukcije zahtijevaju minimalno četiri ležajne točke od kojih jedna mora biti izvan ravnine koju čine ostale tri. Na taj se način formira sedlasta ili antiklastična ploha tj. ploha negativne Gaussove krivulje. Ta je ploha sačinjena od elemenata suprotne zakrivljenosti što konstrukciji daje stabilnost i nosivost.



*Slika 7. Osnovni primjer mreže koja se sastoji od 4 ležajne točke*

S obzirom da vlačne konstrukcije zbog zanemarive krutosti na savijanje ne mogu prenositi opterećenje savijanjem, tlakom i torzijom, one ga prenose pomoću plohe koja se napreže vlačnim silama. Za razliku od tlačnih elemenata, čija je čvrstoća ograničena pojavom izvijanja pod utjecajem opterećenja, vlačni elementi se mogu opterećivati sve do granice vlačne čvrstoće



materijala. Bez obzira na njihovu vitkost. Baš zbog toga, jedno od svojstava takvih konstrukcija je i potpuna iskorištenost materijala (jer prethodno svojstvo omogućava da se element istanji onoliko koliko mu vlačna čvrstoća dopušta) koja rezultira malom vrijednošću vlastite težine zbog čega se ona može zanemariti. To je velika razlika u odnosu na betonske, drvene i metalne konstrukcije. Osim zanemarive težine, bitno obilježje vlačnih konstrukcija je elegancija i atraktivnost zbog čega su poznate kao atraktivan način natkrivanja velikih raspona.

Prethodno smo spomenuli kako se elementi vlačnih konstrukcija opterećenju odupiru pojavom vlaka u poprečnom presjeku bez pojave savijanja, tlaka ili posmika. Tlak i savijanje se javljaju samo u potpornoj konstrukciji jer ona preuzima reakcije vlačne konstrukcije. Zbog navedenih načina prijenosa opterećenja materijal vlačnih konstrukcija mora imati veliku vitkost i čvrstoću na vlak, ali zanemarivu tlačnu, posmičnu i čvrstoću na savijanje.

Materijal vlačnih konstrukcija najčešće je platno ili uže koji se ističe svojom fleksibilnošću pa se nosivost i stabilnost postiže prednapinanjem i pravilnim oblikovanjem. Prednapinanje se provodi kako bi se vlačne sile u cijeloj mreži održale pri svim kombinacijama djelovanja. Stoga, velike prednaponske sile čine mrežu krućom i smanjuju deformaciju, ali se time povećava trošak gradnje. Prednapinjanje elemenata može se postići sidrenjem kablova u krute grede, fleksibilnim kablovima koji se sidre na oslonce ili izvedbom membrane dostatne težine da stabilizira mrežu kablova i osigura krutost konstrukcije. Možemo zaključiti da će krutost mreže ovisiti o napetosti, poprečnom presjeku i zakrivljenosti kablova te krutosti oslonaca i rubnih elemenata na koje se sidre kablovi.

Kako bi se trošak gradnje smanjio, važno je odabrati najpovoljniji oblik konstrukcije čime se utječe na krutost i cijenu. Možemo zaključiti da su prednaponske sile i geometrijski oblik presudni za ponašanje konstrukcije od užadi.

Vlačne konstrukcije se odabiru kao projektantsko rješenje zbog brzine izvođenja, a zbog vizualne dramatičnosti i akustičnosti često se koriste kod koncertnih hala. Nadalje, prednosti vlačnih konstrukcija su jednostavnost prijevoza elemenata, laka manipulacija te izostanak skele prilikom ugradnje jer su elementi dovoljno lagani da se mogu podići kranom.

## 2.4. Povezivanje kabela

Postoje 3 veze povezivanja kabela: veza kabel-kabel, veza kabel-konstrukcija i veza kabel-podloga.

Vežu kabel-kabel primjenjujemo u slučajevima međusobnog križanja dvaju kabela. Možemo ju usporediti za zglobnom vezom zato što ne dopušta vertikalne ni horizontalne pomake, ali dopušta zaokret. Kako bi se dobila mreža što manjih dimenzija, najčešće se umjesto jednog debljeg koriste dva tanja kabela. Također, time se postiže i jednostavnije montiranje stezaljki. Stezaljke se, ovisno o tipu mreže, montiraju na mjestu izvođenja ili se na kabel pričvršćuju u tvornici. Npr. kod mreža kod kojih su duljine kabela unaprijed definirane i fiksne odabiremo varijantu prefabriciranih stezaljki.

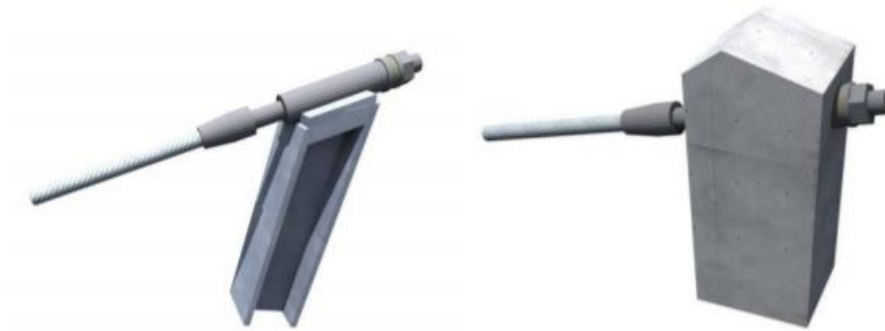


*Slika 8. Jednostruka veza kabel-kabel*



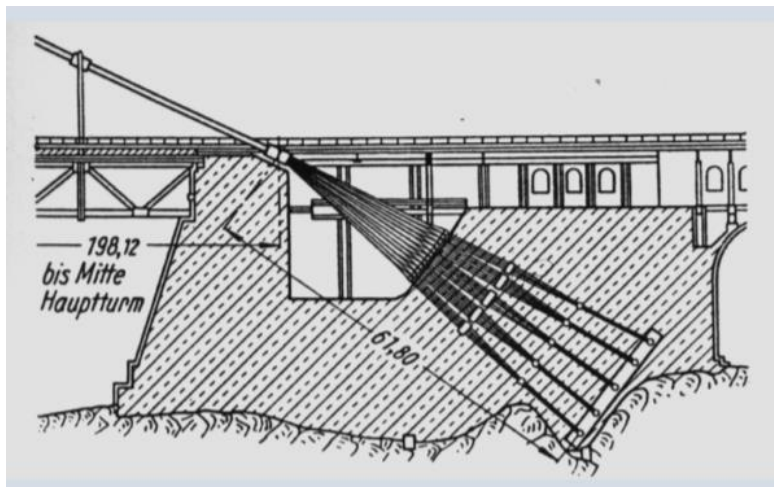
*Slika 9. Dvostruka veza kabel-kabel*

Veza kabel-konstrukcija podrazumijeva sve veze između kabela i krutog nosivog spoja koji može biti od betona ili čelika. Veza se sastoji od dijela u kojem završava kabel te od samog spoja kabela i krutog okvira. Spojevi moraju biti takvi da osiguraju traženu veličinu sile prednapinjanja. Također, kako ne bi došlo do isklizavanja kabela iz spoja, mora postojati dovoljno velika sila trenja. Isklizavanje moramo spriječiti jer i malo isklizavanje može dovesti do gubljenja prednapona.



*Slika 10. Veza kabla sa čeličnim i betonskim stupom*

Vežu kabel-podloga (sidra) upotrebljavamo kada je sile iz kabla potrebno prenijeti izravno u podlogu. Ovisno o vrsti podloge razlikujemo gravitacijska sidra koja vlačnu silu iz užeta uravnotežuju vlastitom težinom te pločasta, gljivasta i slična sidra koja se vlačnim silama odupiru težinom tla.

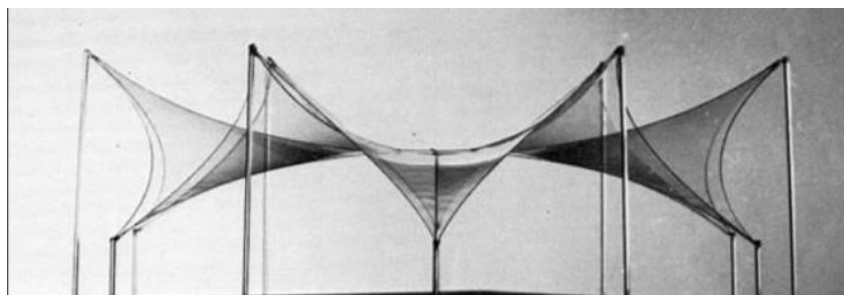


*Slika 11. Primjer gravitacijskog sidrenja kabla kod visećeg mosta*

### 3. NALAŽENJE OBLIKA

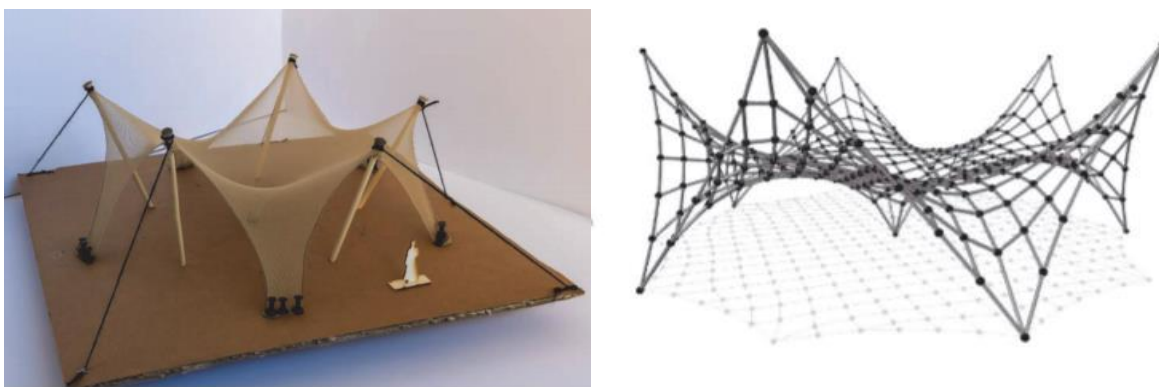
#### 3.1. Osnovni koraci projektiranja

Važno je precizno odrediti geometrijski oblik konstrukcije jer je on bitan za nosivost i veličine uzdužnih sila. Projektiranje konstrukcija od užadi provodi se u tri osnovna koraka: traženje oblika (form finding), geometrijski nelinearni statički proračun i krojenje kabela. Projektiranje konstrukcija od užadi znatno se razlikuje od klasičnog projektiranja u kojem su dimenzije i oblik unaprijed poznati. U ovom slučaju, projektantu su poznati rubni uvjeti i prednaponske sile, dok je nalaženje oblika konstrukcije složen zadatak. Za početak, potrebno je definirati željenu geometriju koja mora zadovoljiti zahtjeve funkcionalnosti, ekonomičnosti i estetike. Potrebno je pronaći osnovni statički položaj mreže kabela koji nastaje samo od utjecaja prednaponskih sila. Dakle, u fazi nalaženja oblika određuje se početna geometrija s kojom se ulazi u geometrijski nelinearni statički proračun. Dva su načina određivanja oblika: fizikalnim i numeričkim modelom. Fizikalni model bila je prva metoda kojom se određivao početni ravnotežni položaj. Njime se služio i već spomenuti Frei Otto izrađujući modele od sapunice, tkanine, žice...Prije računala, to su bili jedini načini određivanja oblika. Iako nam fizikalni modeli daju dovoljno korisnih podataka o ponašanju vlačne konstrukcije, smatra se da oni nisu dovoljno precizni. Zbog toga su danas značajni numerički modeli dok se fizikalni koriste za vizualizaciju konstrukcije. Pojavom računala, a zatim i dugogodišnjim razvojem računalnih programa, omogućeno nam je projektiranje sve složenijih konstrukcija na način da se na temelju ulaznih podataka o ravnotežnom stanju konstrukcije provodi statička i dinamička analiza.



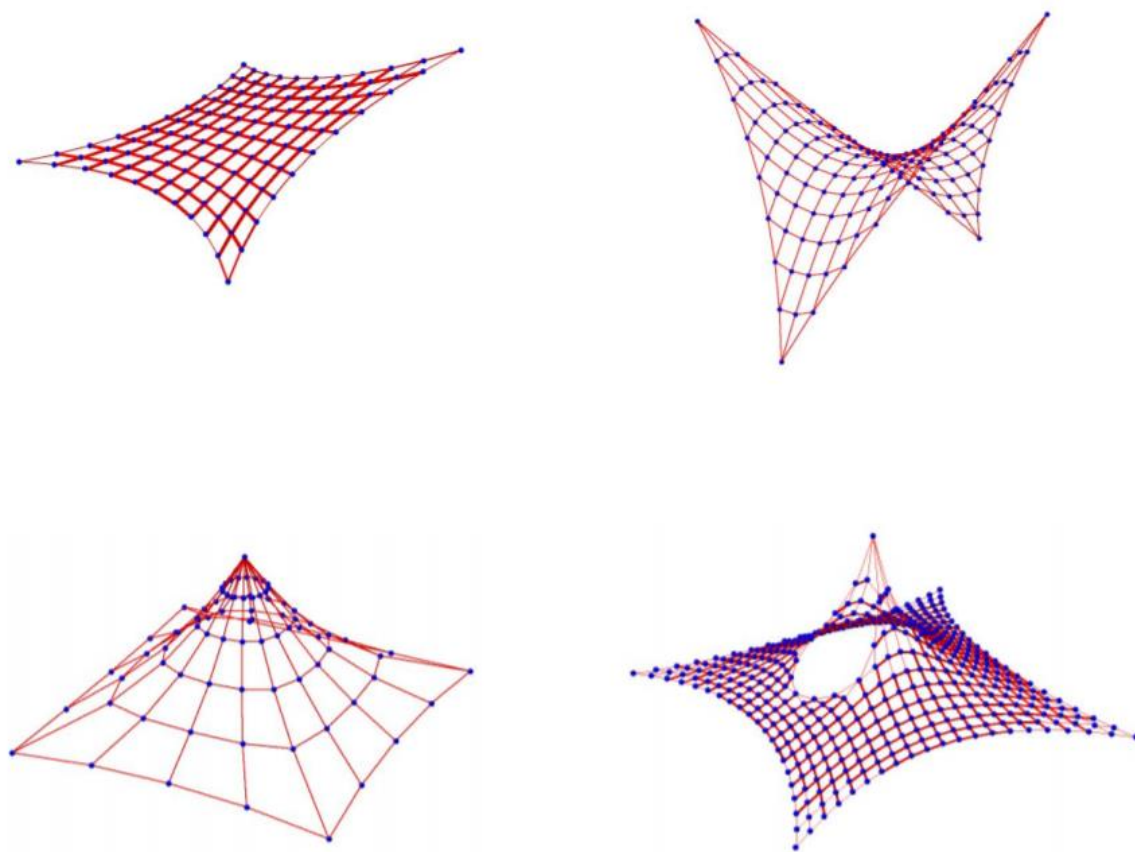
*Slika 12. Fizikalni model vlačne konstrukcije*

Uporabom numeričkog modela možemo postići optimalni oblik konstrukcije, tj. minimalnu mrežu o kojoj slijedi više u nastavku. Zatim, oblik konstrukcije koji je u stanju statičke ravnoteže, ali naprezanja ne moraju biti ista u svim točkama mreže i u svim smjerovima, te oblik koji će aproksimirati stanje potpune statičke ravnoteže. Najčešće numeričke metode jesu metoda dinamičke relaksacije, metoda matrice krutosti, aproksimacija linearne metode, metoda konačnih elemenata te metoda gustoće sila koja je nadalje objašnjena. Konačni oblik mreže određen je trima uvjetima ravnoteže. To su koordinate  $x$ ,  $y$ ,  $z$  svakog slobodnog čvora mreže. Osim koordinata, nepoznanice su i sile u pripadajućim elementima, tj. kabelima koji se sijeku u promatranome čvoru. Broj nepoznanica za  $n$  slobodnih čvorova iznosi  $3n$ , a u konačnici se dobiva sustav od  $3n$  jednažbi sa  $3n+m$  nepoznanica gdje je  $m$  broj elemenata mreže.



*Slika 13. Fizikalni model napravljen od tkanine i numerički model*

Projektiranje završava fazom krojenja kabela što se odnosi na precizno određivanje duljine kabela i njegove pozicije u mreži. Također potrebno je odabrati elemente čiji poprečni presjek, čvrstoća i krutost zadovoljavaju zahtjeve konstrukcija od užadi te pokrov od odgovarajućeg materijala.



*Slika 14. Numerički modeli vlačnih konstrukcija*

### 3.2. Ravnoteža čvora

Čvorove mreže možemo podijeliti na slobodne i ležajne čvorove. U slobodnim se čvorovima križaju unutarnji kabeli i spajaju s rubnim kabelima, dok su u ležajnim čvorovima kabeli spojeni sa krutim rubom. Koordinate ležajnih čvorova su poznat podatak s kojim ulazimo u analizu, dok su koordinate slobodnih čvorova nepoznat podatak i dobijemo ih rješavanjem sustava.

U prethodnom je odlomku navedeno da je konačni oblik mreže određen trima uvjetima ravnoteže što znači da za svaki slobodan čvor možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže. To su jednadžbe ravnoteže projekcije sila u priključenim štapovima na tri koordinatne osi:

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \vec{e}_{i,j} \cdot \vec{k} = 0$$

Vrijednost sile u štapu  $S_{\{i,j\}}$  za vlačnu silu iznosi  $S_{\{i,j\}} > 0$ , a za tlačnu  $S_{\{i,j\}} < 0$ . Jedinični vektor  $\vec{e}_{i,j}$  štapa  $\{i,j\}$  orijentiran od čvora  $i$  prema čvoru  $j$  iznosi:

$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{\{i,j\}}} \vec{k},$$

a duljina štapa

$$l_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}.$$

Od navedenih jednadžbi dobijemo sustav od tri nelinearne jednadžbe ravnoteže svakog čvora mreže:

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \cdot \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

Svaki skup koji sadrži koordinate  $x_i, y_i, z_i, i \in N_f$ , a zadovoljava jednadžbe, tvori ravnotežnu konfiguraciju.



### 3.3. Minimalne i poopćene minimalne mreže

Prethodno smo definirali duljinu kabela  $l_{\{i,j\}} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ . Stoga je ukupna duljina kabela  $L = \sum l_{\{i,j\}} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$ . Izjednačimo li njene derivacije po koordinatama slobodnih čvorova sa 0, dobivamo sustav od  $3n$  jednadžbi s  $3n$  nepoznanica:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \sum_{j \in N_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

A ako pomnožimo sustav sa  $S = S_{\{i,j\}}$ , dobivamo:

$$S \frac{\partial L}{\partial x_i} = S \cdot \sum_{j \in N_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$S \frac{\partial L}{\partial y_i} = S \cdot \sum_{j \in N_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

$$S \frac{\partial L}{\partial z_i} = S \cdot \sum_{j \in N_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0$$

Kako bi sustav postao rješiv, potrebno je uvesti dodatne pretpostavke i ograničenja koja dovode do jedinstvenog rješenja, ali i uvjetuju oblik konstrukcije. Sustav postaje rješiv ako se pretpostavi jednaka sila u svim elementima mreže, a konstrukcija poprima oblik minimalne mreže kod koje je zbroj duljina kabela manji od zbroja duljina kabela u bilo kojem drugom položaju. Oblik minimalne mreže ne ovisi o vrijednosti sile  $S$ , ali za fizički ostvarivo rješenje sila mora biti vlačna, tj.  $S > 0$ . Minimalna mreža ili geodetska mreža je ploha u čijoj su svakoj točki  $i$  u svim smjerovima jednaka naprezanja, a srednja zakrivljenost joj je nula.

Poopćenu minimalnu mrežu dobijemo kada zadamo različite sile u kabelima, ali jednake duž pojedinog kabela.

## 4. METODA GUSTOĆE SILA

### 4.1. Karakteristike metode

Kao što je prethodno navedeno, jedna od numeričkih metoda određivanja oblika konstrukcije od užadi jest metoda gustoće sile. Ta je metoda razvijena sedamdesetih godina prošlog stoljeća od strane Hans-Jörg Scheka, Klause Linkwiza i njihovih suradnika na način da je nelinearan problem nalaženja oblika lineariziran drugačijim udruživanjem veličina. Sustav nelinearnih jednadžbi pretvara u sustav linearnih jednadžbi, a rješenje sustava daje koordinate mreže koja je u ravnoteži. Za postupak nisu potrebne nikakve koordinate, samo gustoća sile svakog elementa. Jednadžbe ravnoteže čvorova koje smo do sada pisali u obliku

$$\sum_{j \in N_i} S_{\{i,j\}} \frac{x_j - x_i}{l_{\{i,j\}}} = 0,$$

sada možemo pisati

$$\sum_{j \in N_i} \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}} (x_j - x_i) = 0.$$

U prethodnom zapisu, omjer  $\frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}}$  gdje je  $S_{\{i,j\}}$  vrijednost sile u štapu, a  $l_{\{i,j\}}$  duljina štapa, predstavlja gustoću sile ili koeficijent sile. Dakle, gustoća sile čija je oznaka  $q_{\{i,j\}}$ , iznosi

$$q_{\{i,j\}} = \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}}.$$

Uvrstimo li vrijednost gustoće sile  $q_{\{i,j\}}$  u štapovima, umjesto vrijednosti sile  $S_{\{i,j\}}$ , nepoznanice će osim koordinata čvorova postati i sile u štapovima. No, te nepoznanice povezuju dodatne  $n_b$  jednadžbe koje ne otežavaju rješavanje sustava. Naime, vrijednosti gustoće sile imaju ulogu konstantnih koeficijenata što te jednadžbe čini linearnima. Rješavanjem sustava dobivamo koordinate slobodnih čvorova pa se mogu izračunati duljine štapova  $l_{\{i,j\}}$ , a potom i vrijednosti sile u štapovima  $S_{\{i,j\}}$ .

Linearni sustav jednadžbi može se još više pojednostaviti uvođenjem jednake vrijednosti gustoće sila za sve elemente mreže čime se dobiva dobra aproksimacija početnog položaja. Mijenjajući vrijednosti gustoće sila u elementima, mijenja se i rješenje sustava, a postupak se ponavlja sve dok se ne dobije zadovoljavajući oblik konstrukcije.

Metoda se pokazala odličnom za sastavljanje i rješavanje jednadžbi ravnoteže mreže prednapetih kabela bez potrebe određivanja početnih koordinata.

## 4.2. Iteracijska primjena metode gustoće sila

Za izračunavanje mreže minimalne duljine, tj. mreže s jednoliko raspodijeljenim vlačnim silama koristimo iteracijski postupak. Iteracija je matematička metoda približnog rješavanja analitički nerješivih jednadžbi uzastopnim uvrštavanjem približnih rješenja i dobivanja sve točnijih rezultata do neke željene dovoljne točnosti. Stoga, u k-tom koraku postupka, gustoća sila  $q_{\{i,j\}}^{(k)}$  u štapu  $\{i,j\}$  računa se :

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}$$

$S_{i,j}^{(k-1)}$  predstavlja vrijednost sile izračunate u prethodnom koraku, a  $\bar{S}$  traženu vrijednost sile.

Prema definiciji  $q_{\{i,j\}} = \frac{S_{\{i,j\}}}{l_{\{i,j\}}}$ , gustoća sile je proporcionalna vrijednosti sile, pa je omjer vrijednosti sila u dva koraka iteracije (uz nepromijenjenu duljinu štapa) jednak omjeru gustoće sila:

$$\frac{S_{i,j}^{(k)}}{S_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}}$$

S obzirom da vrijednost  $S_{i,j}^{(k)}$  predstavlja traženu vrijednost sile  $\bar{S}$ , neposredno dobivamo prethodni izraz. Problem nastaje kada se promjenom gustoće sila mijenja i ravnotežna konfiguracija a time i duljine štapova.

U izrazu  $q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}}$ , član  $\bar{S}_{i,j}$  predstavlja traženu vrijednost sile u štapu  $\{i,j\}$  koja se može razlikovati od vrijednosti sila u drugim štapovima, no za poopćenu minimalnu mrežu sila u štapovima trebaju biti jednake. Iz tog razloga zadajemo jednake vrijednosti sila u štapovima pojedinih kabela. S obzirom da vrijedi  $\frac{q_{\{i,j\}}}{S_{\{i,j\}}} = \frac{1}{l_{\{i,j\}}}$ , gustoću sila možemo računati :

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}}$$

### 4.3. Kinematička ograničenja

U situacijama kada se javlja preveliko klizanje kabela, tj. mogućnost klizanja kabela u jednu točku, potrebno je uvesti kinematička ograničenja. To se najčešće događa u rubnim kabelima neovisno o silama u njima. Kinematičkim se ograničenjima osiguravaju zahtijevane duljine štapova.

Zahtijevanu duljinu  $\bar{l}_{i,j}$  štapa  $(i,j)$  osigurat ćemo tako da gustoću sile računamo prema izrazu:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}.$$

Uz uvjet da su sile nepromijenjene, odnosno vrijedi  $S_{i,j}^{(k)} = S_{i,j}^{(k-1)}$ , te je gustoća sile obrnuto proporcionalna duljini štapova dobivamo:

$$\frac{q_{i,j}^{(k)}}{q_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}},$$

gdje je  $l_{i,j}^{(k-1)}$  duljina štapa izračunata u prethodnom koraku.

Iz toga slijedi da je koeficijent kojim trebamo pomnožiti gustoću sile  $\frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}}$ , te iz

$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \cdot \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{l_{i,j}^{(k)}}$  i  $S_{i,j} = q_{i,j} \cdot l_{i,j}$  dobivamo izraz:

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}.$$

Iteracijski postupak se prekida kada su

$$r_S^{(k)} = \max \left( \left| S_{i,j}^{(k)} - \bar{S}_{i,j} \right| \right) < r_S \quad \text{i} \quad r_l^{(k)} = \max \left( \left| l_{i,j}^{(k)} - \bar{l}_{i,j} \right| \right) < r_l,$$

gdje su  $r_S$  i  $r_l$  propisane točnosti.

Prednosti iteracijske primjene metode gustoće sila u odnosu na druge iteracijske postupke su to što postupak konvergira prema traženom rješenju kroz niz ravnotežnih konfiguracija što znači da čak i ako se iteracijski postupak prekine prije nego su dobivena rješenja koja zadovoljavaju zahtijevanu točnost, dobivena je mreža u ravnoteži. Kod drugih iteracijskih postupaka samo je konačno rješenje uravnoteženo, a oblici dobiveni u prethodnim koracima neuravnotežene aproksimacije traženog oblika. Nadalje, zadane se sile kao i zadane duljine štapova postižu bez uvođenja Lagrangeovih multiplikatora. Zatim, pošto su sustavi jednadžbi linearni, ne treba pretpostavljati prvu aproksimaciju rješenja jer se mogu rješavati direktnim postupcima. Posljednje, postupak je većinom prihvatljivo brz.

## 5. PRIMJER

Postupak pronalaženja oblika provodimo u programskom paketu SageMath. Mreža čiji smo oblik tražili je asimetričan šesterokut, a sastoji se od 119 čvorova [0-118] i 53 kabela [0-52]. Od 119 čvorova, njih 8 su ležajni dok su preostali slobodni. Postupak započinjemo zadavanjem čvorova mreže. Slobodne čvorove nećemo pretpostavljati nego ćemo njihove liste ostaviti prazne.

Čvorove smo zadali pomoću funkcije *make\_empty\_nodes*:

```
nds = make_empty_nodes (119)
```

```
print_indexed (nds)
```

Ležajnim su čvorovima [0,6,10,14,20,24,112,118] koordinate unaprijed određene, a one su:

```
nds[0] = [0, 0, 0]
```

```
nds[6] = [0, 10, 5]
```

```
nds[10] = [10, 17.5, 0]
```

```
nds[14] = [25, 10, 0]
```

```
nds[20] = [20, 0, 5]
```

```
nds[24] = [10, -7.5, 0]
```

```
nds[112] = [10, 2, 10]
```

```
nds[118] = [10, 8, 10].
```

Funkcijom *supps = support\_indices (nds)* navedene čvorove pretvaramo u ležajne. Sada kada smo uveli sve čvorove potrebno ih je povezati u kabele, a zatim kabele podijeliti na elemente.

Kabele povezujemo funkcijom *cbls*. Kao što je već spomenuto, mreža se sastoji od 53 kabela.



```
cbls = [[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]]  
cbls.append ([6, 7, 8, 9, 10])  
cbls.append ([10, 11, 12, 13, 14])  
cbls.append ([14, 15, 16, 17, 18, 19, 20])  
...  
cbls.append ([26, 54, 82, 110, 112])  
cbls.append ([27, 55, 83, 111, 112])
```

Kabele koji prolaze ležajnim čvorovima nazivamo rubnim kabelima, a njih zadajemo pomoću funkcije *bnd\_cbles*. U našoj mreži postoji 13 rubnih kabela.

```
bnd_cbles = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 24, 25, 31, 35, 39, 45, 49]  
int_cbles = others (bnd_cbles, all_of (cbles))  
int_cbles; bnd_cbles
```

Pomoću funkcije *els = make\_elements\_on\_cables (cbles)* rastavili smo kabele na elemente prilikom čega smo dobili 230 elemenata [0-229].

Sljedeći korak je dodavanje vrijednosti gustoće sile pojedinim kabelima. Funkcijom *cbl\_qs* u sve smo kabele uveli jediničnu gustoću sile osim u kabele [0,1,2,3,4,12,24] čije su vrijednosti u nastavku:

```
cbl_qs[0] = 5  
cbl_qs[1] = 2  
cbl_qs[2] = 2
```

`cbl_qs[3] = 5`

`cbl_qs[4] = 2`

`cbl_qs[5] = 2`

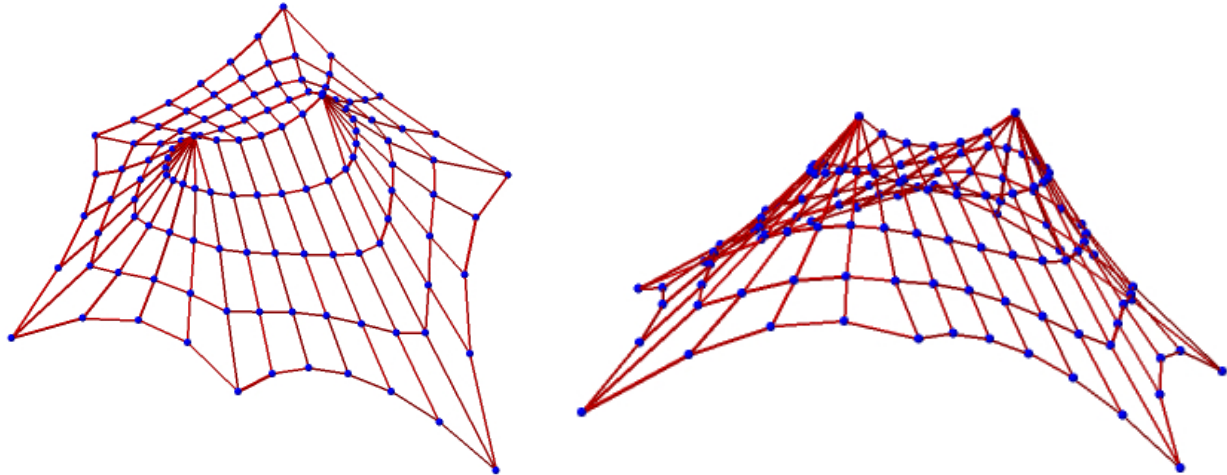
`cbl_qs[12] = 1`

`cbl_qs[24] = 10.`

Proračun metode gustoće sila provodimo funkcijom  $nc = FDM(nds, els, supps, qs)$  koja obuhvaća sve koordinate čvorova (*nds*), elemente (*els*), ležajne čvorove (*supps*) i gustoću sila(*qs*). Kao rezultat dobijemo koordinate svih čvorova:

```
0 : (0.0, 0.0, 0.0)
1 : (1.1290783445409416, 1.7408172793219698, 1.6141470336697556)
2 : (1.74327951606616, 3.390273780958159, 2.8074037723294354)
3 : (1.9398577790862785, 5.0000000000000003, 3.691791700474897)
...
117 : (10.121409618800786, 7.0223698199345925, 9.32156201666436)
118 : (10.0, 8.0, 10.0)
```

Funkcijom  $plt0 = plot3d\_mesh(list(nc), els)$  dobijemo 3D model naše mreže.



Ako odaberemo funkciju  $ll = list\_of\_element\_lengths (els, nc)$ , program će nam ispisati duljine svih elemenata mreže, a ako odaberemo funkciju  $ff = list\_of\_element\_forces (ll, qs)$  dobit ćemo vrijednosti sila u elementima.

Duljine elemenata:

```
0 : 2.628827372499406
1 : 2.1264551427786063
2 : 1.8471609353849432
3 : 1.7427188531980156
...
228 : 2.7424797474800195
229 : 2.6687576496502485,
```

Vrijednosti sile u elementima:

```
0 : 13.144136862497028
1 : 10.632275713893032
2 : 9.235804676924715
3 : 8.713594265990078
...
228 : 2.7424797474800195
229 : 2.6687576496502485
```

Sljedeći korak u pronalaženju oblika bilo je zadavanje vrijednosti sila u kabelima. Funkcijom `cbl_fs = value_list (len (cbls), 1)` zadali smo jediničnu vrijednost sile u svim kabelima osim u kabelima [0,1,2,3,4,5,24] gdje vrijednost sile varira od 5 do 10:

```
cbl_fs[24] = 10
```

```
cbl_fs[0] = cbl_fs[3] = 7
```

```
cbl_fs[1] = cbl_fs[2] = cbl_fs[4] = cbl_fs[5] = 5.
```

Za iteracijsku primjenu metode gustoće sila koristimo funkciju `multistepFDM` koja uzimajući u obzir koordinate čvorova, elemente, ležajne čvorove, zadane gustoće sila, vrijednosti sila u kabelima, duljine kabela te odabrani broj koraka daje matricu tipa  $n_c \times 3$  koja sadrži po redcima svrstane koordinate čvorova, listu konačnih vrijednosti sila u štapovima te listu gustoća sila u štapovima izračunatih u posljednjem koraku:

```
nc1, f1, qs1 = multistepFDM (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints, steps = 1).
```

Vrijednosti sila u elemtima sada su:

```
0 : 7.607358417993082
1 : 6.829116659879914
2 : 6.325213758528145
3 : 6.125324736161925
```

...

```
228 : 0.9287209256541291
229 : 0.813064569290987,
```

Vrijednosti gustoće sila:

```
0 : 2.6627842030359803
1 : 3.2918634675985725
2 : 3.7895994149211583
3 : 4.016712154777285
```

...

```
228 : 0.3646335040099637
229 : 0.3747061859030377,
```

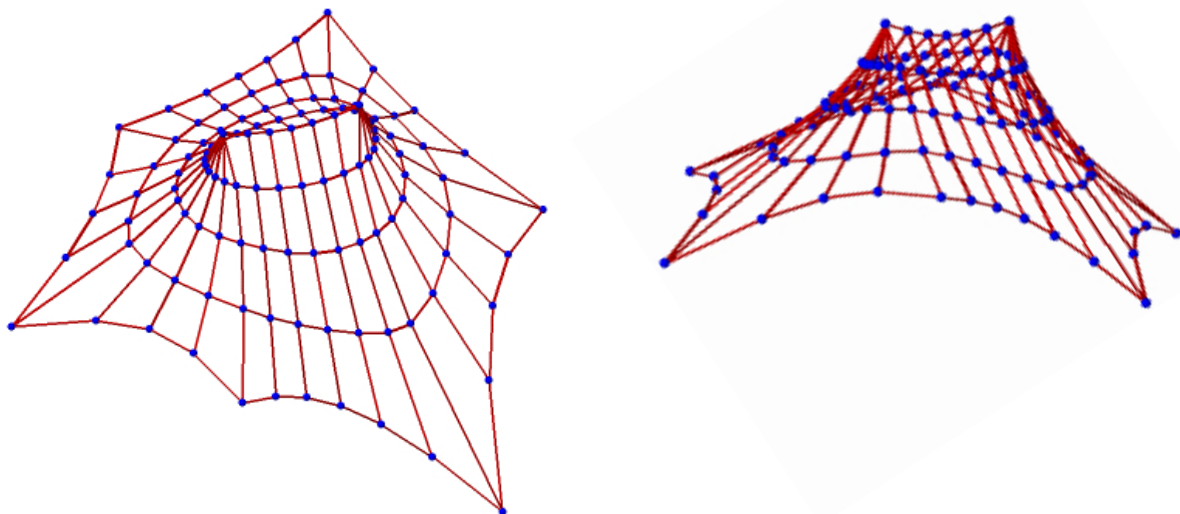
te duljine elemenata:

```
0 : 2.85691886309057
1 : 2.0745443202909573
2 : 1.66909825181608
3 : 1.5249598428099351
```

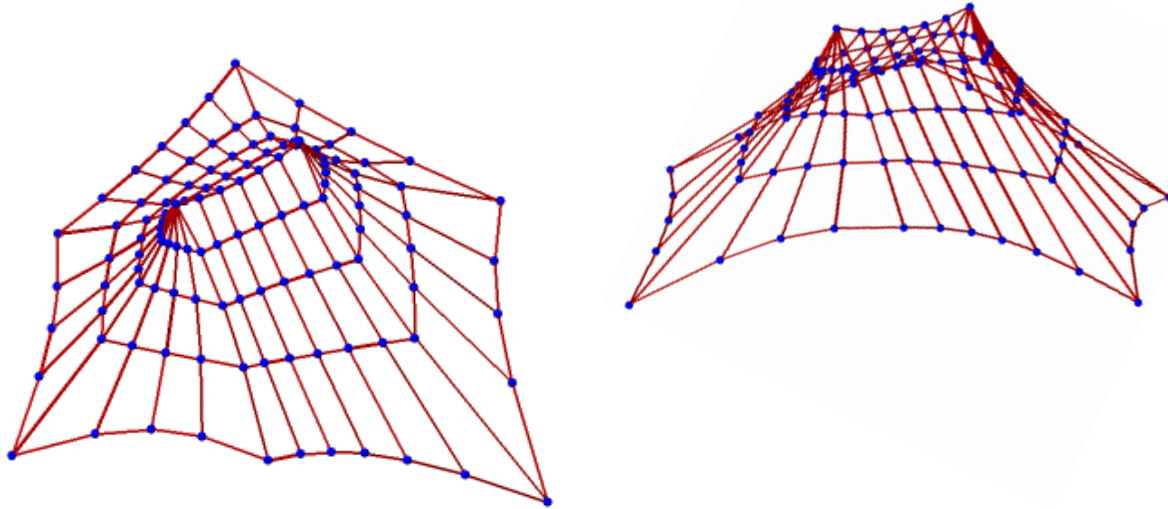
...

```
228 : 2.546998329667346
229 : 2.169872288954906
```

Naša nova 3D mreža dobivena funkcijom *plot3d\_mesh* sada izgleda:



Prethodni proračun napravljen je sa samo jednim korakom. Sljedeća mreža dobivena je nakon 10 koraka:



Vrijednosti sila u elementima nakon 10 koraka iteracijske metode gustoće sila iznose:

```
0 : 8.463923045511775
1 : 7.926459217624759
2 : 7.5588336312420985
3 : 7.367965361964656

...

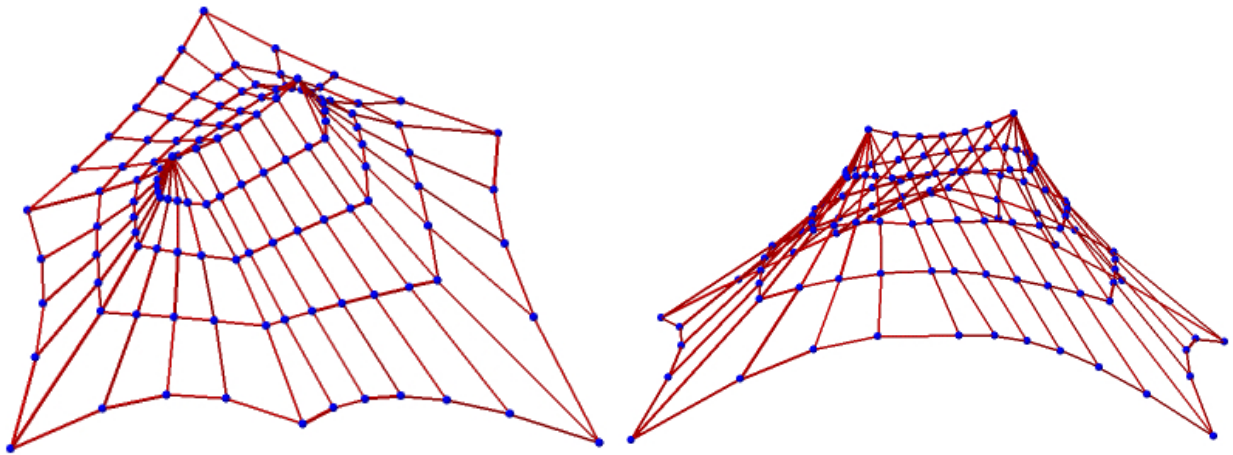
228 : 1.000362447061967
229 : 1.000463053612012.
```

## Konstrukcije od užadi

Iteraciju provodimo dok ne dobijemo zahtijevanu točnost. To postizemo funkcijom *multistepFDM\_wtol*:

```
nc3, f3 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, fcs = force_constraints1, lcs =  
length_constraints, tol_f = 10e-3, tol_l = 10e-2, steps = 1000)
```

Rezultat smo dobili nakon 32 koraka:



Vrijednosti sila sada iznose:

```
0 : 6.578347801927985  
1 : 5.971197800004007  
2 : 5.553385863170288  
3 : 5.361000700332269  
  
...  
  
228 : 1.0000896842853944  
229 : 0.9998865828872971
```

## **6. ZAKLJUČAK**

Vlačne konstrukcije, a samim time i konstrukcije od užadi kao njihov predstavnik, djelovanju opterećenja se odupiru centričnom vlačnom silom dok opterećenje od savijanja, tlaka i posmika ne mogu preuzeti. Bitno obilježje im je zanemariva težina koja predstavlja veliku prednost u odnosu na tradicionalne konstrukcije. Osim toga, konstrukcije od užadi su elegantne i atraktivne i zbog toga čest izbor za natkrivanje velikih raspona. Najčešće se izvode od platna i užadi koji se ističu svojom fleksibilnošću, a nosivost i stabilnost postižu prednapinjanjem.

U ovom smo radu predočili kratku povijest konstrukcija od užadi, od najstarijih ljudskih nastambi do izvanrednih inženjerskih postignuća, svojstva materijala od kojeg se izrađuju te svojstva samih konstrukcija. Također, objasnili smo postupak nalaženja oblika u prošlosti i danas te istaknuli metodu gustoće sila kao najučinkovitiju metodu nalaženja oblika. Osim karakteristika metode, predočili smo i iteracijsku primjenu metode i sve primijenili na primjeru jedne asimetrične šesterokutne mreže pri čemu smo se koristili programskim paketom Sage.

Razvojem materijala i tehnika projektiranja te sve većim brojem inženjera zainteresiranih za projektiranje vlačnih konstrukcija, došlo je do njihova razvoja. One se danas zbog brzine izvođenja, jednostavnosti prijevoza elemenata, lake montaže, vitkosti i elegancije te dobre uklopljenosti u prostor sve češće odabiru kao projektantsko rješenje. Najčešće se koriste za natkrivanje velikih površina kao što su sportske dvorane, stadioni i koncertne dvorane.

Danas one predstavljaju jednako vrijedno rješenje projektnog zadatka, no u većini slučajeva su bolje i efikasnije od tradicionalnih konstrukcija i tehnika građenja. Što se više proučava njihovo ponašanje i smanjuje cijena materijala, to se više izvode navedene konstrukcije i smanjuje cijena izvođenja. Broj ovakvih konstrukcija eksponencijalno raste i uz razvoj novih računalnih softwarea očekuje se daljnji razvitak i još veća primjena u skoroj budućnosti.



## 7. LITERATURA

1. K. Fresl: Građevna statika 2. Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2017.
2. K. Fresl, P. Gidak, R. Vrančić: Poopćene minimalne mreže u oblikovanju prednapetih konstrukcija od užadi, Građevinar 65(2013)8, str. 707-720
3. P. Gidak, E. Šamec, K. Fresl, J. Vukadin: Traženje oblika vlačnih konstrukcija u nastavi na Građevinskom fakultetu, Građevinar 73(2021)4, str. 349-363
4. P. Gidak: Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011., magistarski rad
5. P. Gidak, E. Šamec: Građevna statika 2-vježbe na daljinu, akademska godina 2020/2021
6. K. Gabrić: Konstrukcije od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014., završni rad
7. M. Žužić: Primjena poopćenih minimalnih mreža u oblikovanju konstrukcija od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2015., završni rad
8. R. Vrančić: Proširena metoda gustoća sila, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2013., završni rad
9. I. Grgić: Konstrukcije od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2015., završni rad

## 8. POPIS SLIKA

Slika 1. Indijanski tipi.....3

Izvor: <https://en.wikipedia.org/wiki/Tipi#/media/File:Tipi01.jpg>

Slika 2. Otto Frei, njemački paviljon na izložbi EXPO u Montrealu.....4

Izvor: <https://www.stuttgarter-nachrichten.de/gallery.jahrhundert-architektur-der-deutsche-expo-pavillon-1967-ein-zelt-fuer-swinging-germany.010a65ae-3218-4be3-9c4e-56b436ca21b4.html/id/0e2983c7-d763-4bad-8b21-3aca6a3026f4>

Slika 3. Spiralni snopovi(1), kabeli unutar krutog omotača(2) i žičano užje(3).....5

Izvor: P. Gidak: Primjena metode gustoće sila na oblikovanje prednapetih mreža, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2011., magistarski rad (str.26)

Slika 4. Primjer pravčaste mreže: rotacijski hiperboloid.....6

Izvor: R. Vrančić: Proširena metoda gustoća sila, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2013., završni rad (str.11)

Slika 5. Primjer regularne mreže.....7

Izvor: M. Žužić: Primjena poopćenih minimalnih mreža u oblikovanju konstrukcija od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2015., završni rad (str.10)

Slika 6. Neregularna mreža.....7

Izvor: I. Grgić: Konstrukcije od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2015., završni rad (str.12)

Slika 7. Osnovni primjer mreže koja se sastoji od 4 ležajne točke.....8

Izvor: Programski paket SageMath

Slika 8. Jednostruka veza kabel-kabel.....10

Izvor: K. Fresl: Građevna statika 2. Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2017. (str.158)

Slika 9. Dvostruka veza kabel-kabel.....10

Izvor: K. Fresl: Građevna statika 2. Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2017. (str.158)

Slika 10. Veza kabela sa čeličnim i betonskim stupom.....11

Izvor: K. Fresl: Građevna statika 2. Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2017. (str.153)

Slika 11. Primjer gravitacijskog sidrenja kabela kod visećeg mosta.....11

Izvor: A.Vlašić: Nosive strukture u mostovima, Predavanja, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

Slika 12. Fizikalni model vlačne konstrukcije.....12

Izvor: K. Gabrić: Konstrukcije od užadi, Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2014., završni rad (str.9)

Slika 13.Fizikalni model napravljen od tkanine i numerički model.....13

Izvor: <http://www.casopis-gradjevinar.hr/assets/Uploads/JCE-73-2021-4-2-3168.pdf>

Slika 14. Numerički modeli vlačnih konstrukcija.....14

Izvor: [https://moodle.srce.hr/2020-2021/pluginfile.php/4249484/mod\\_resource/content/1/13-NOVO-studenti.pd](https://moodle.srce.hr/2020-2021/pluginfile.php/4249484/mod_resource/content/1/13-NOVO-studenti.pd)

## **SAŽETAK**

Konstrukcije od užadi su vlačne konstrukcije koje se djelovanju opterećenja odupiru vlačnom silom. U ovom je radu predočena kratka povijest konstrukcija od užadi, od najstarijih ljudskih nastambi do izvanrednih inženjerskih postignuća, svojstva materijala od kojeg se izrađuju te svojstva samih konstrukcija. Također, objašnjen je postupak nalaženja oblika u prošlosti i danas te istaknuta metoda gustoće sila kao najučinkovitija metoda nalaženja oblika. Osim karakteristika metode, predočena je i iteracijska primjena metode, a sve je primijenjeno na primjeru jedne asimetrične šesterokutne mreže pri čemu je korišten programski paket SageMath.

Ključne riječi: konstrukcije od užadi, pronalaženje oblika, metoda gustoća sila, iteracijska primjena metode

## **SUMMARY**

Cable structures are type of tensile structures which elements carry only tension. In this paper, the history of cable structures is presented, from the oldest human accommodations to the outstanding engineering achievements, as well as material properties and properties of cable structures. We have explained the form finding in the past and in present. Also, we have presented the force density method as one of the most efficient methods of form finding. Beside method characteristics, the iterative application of force density method is explained and applied on the example of one asymmetric hexagonal net using SageMath software.

Keywords: cable structures, form finding, force density method, iterative application of method