SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

KLASIFIKACIJA SKLOPOVA ZGLOBNIH ŠTAPOVA

ZAVRŠNI RAD

Student: Elena Franjičić, 0082047555

Mentor: izv. prof. dr. sc. Krešimir Fresl

Rujan, 2015.

Zahvala:

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Krešimiru Freslu, na predloženoj temi, stručnoj pomoći i savjetima tijekom izrade završnog rada.

Sadržaj

1. UVOD

Pojmovi statičke i kinematičke određenosti od iznimne su važnosti za razumijevanje mehanike zglobnih rešetkastih sustava. Statička određenost znači da broj nepoznatih vrijednosti sila u spojevima nije veći od broja jednadžbi ravnoteže, dok kinematička određenost znači da je položaj čvora jedinstveno određen duljinama štapova.

U ovom ćemo se radu baviti mehanikom sklopova zglobnih sustava, posebno onih koji su istovremeno statički i kinematički neodređeni. Ispitat ćemo također mehaničko značenje četiriju linearnoalgebarskih vektorskih potprostora ravnotežne matrice te opisati algoritam za određivanje ranga matrice i baza potprostora. Taj će algoritam dati i pojedinosti o svim stanjima samonaprezanja i svojstvenim oblicima neelastičnih deformacija koje sklopovi mogu posjedovati.

Prvo ćemo se upoznati sa simbolima koji će biti primijenjeni.

LISTA SIMBOLA

$\mathbf{A}$	= ravnotežna matrica
$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$	= transponirana ravnotežna matrica
a, b	= vektori
$\mathbf{B}$	= kinematička matrica
b	= ukupan broj štapova
$\mathbf{d}$	= vektor pomaka zglobnih čvorova
$\mathbf{e}$	= vektor produljenja štapova
$\mathbf{f}$	= vektor čvornih sila
$\mathbf{I}$	= jedinična matrica
J	= broj zglobnih čvorova (isključujući ležajne čvorove)
j	= ukupan broj čvorova
k	= broj kinematičkih ograničenja u ležajnim čvorovima
m	= broj neelastičnih mehanizama
r	= rang matrice
s	= broj stanja samonaprezanja
$\mathbf{s}$	= vektor uzdužnih sila u štapovima
x, y, z	= Kartezijeve koordinate

2. OPĆENITO

Za početak, pogledajmo sliku 1(a): očito je da je taj sustav statički određen, pa se uzdužne sile u svim štapovima mogu odrediti pomoću jednadžbi ravnoteže za dani skup vanjskih sila koje djeluju u čvoru ili, pojednostavljeno rečeno: broj jednadžbi jednak je broju nepoznanica.

Matrica koeficijenata je regularna, a rješenje jedinstveno. Za matricu $\mathbf{A} \in M_n$ kažemo da je regularna (nesingularna) ako i samo ako je rang matrice jednak broju redaka. Za sve nesingularne matrice vrijedi:

1. Ako je $\mathbf{A} \in G_n$ onda je i $\mathbf{A^{-1}} \in G_n$ i $(\mathbf{A^{-1}})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. Ako su $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in G_n$ onda je $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in G_n$ i $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B^{-1}} \cdot \mathbf{A^{-1}}$.
3. $\mathbf{I} \in G_n$ i $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$.
4. $G_n \neq M_n$, preciznije $G_n \subset M_n$.
5. $0_n \notin G_n$,

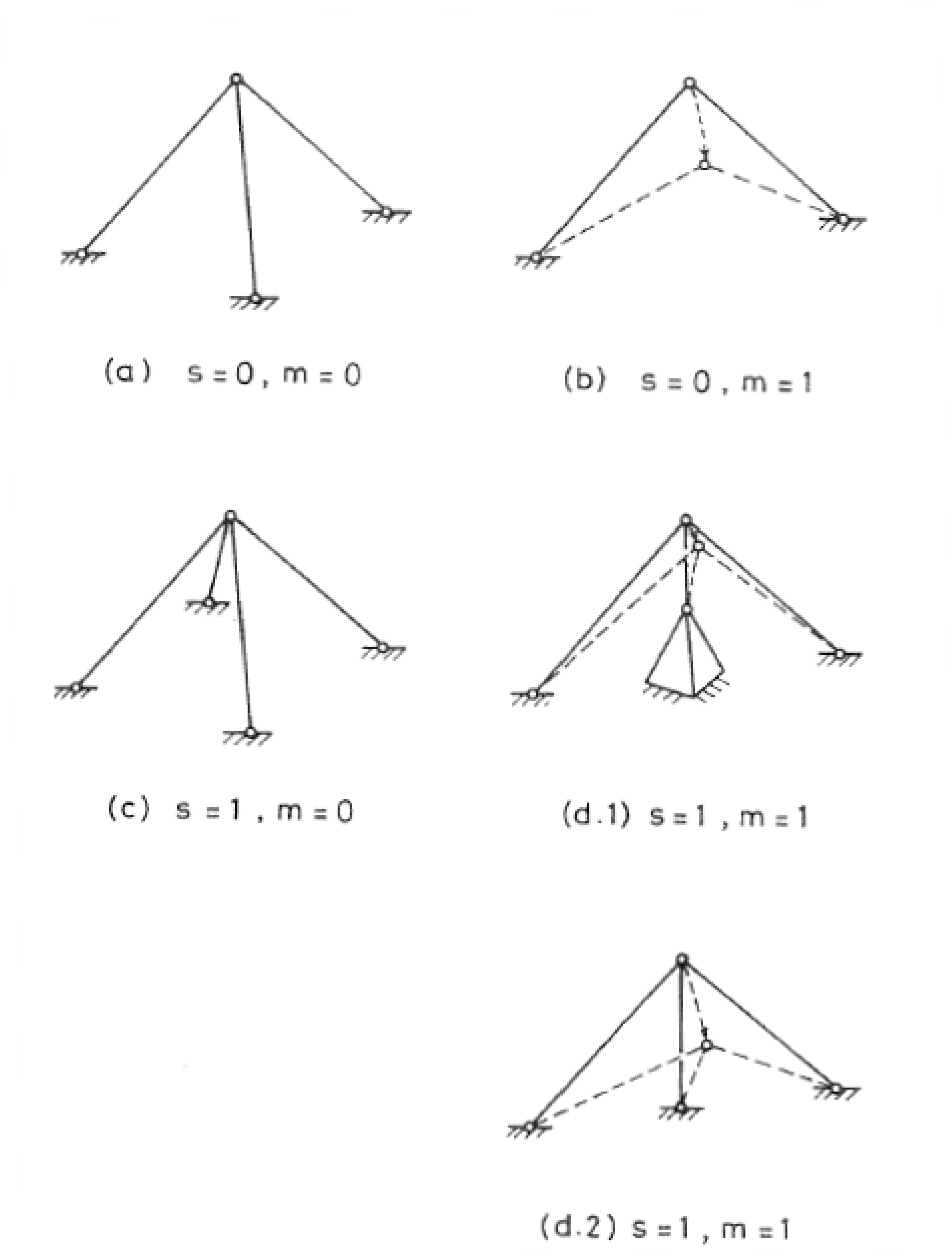
Skup svih nesingularnih matrica n-tog reda označavamo s G_n, a kvadratne matrice n-tog reda s M_n. Red matrice je veličina matrice.

Prikazani sustav je i kinematički određen, u smislu da je položaj čvora jedinstveno određen duljinama štapova.

Ako uklonimo bilo koji štap, kao na slici 1(b), dobivamo mehanizam koji ima jedan stupanj slobode, dakle kinematički je neodređen te sklop sada ima jedan svojstveni oblik neelastične deformacije te se može izobličiti bez promjene duljine štapova. Međutim, ako sustavu sa slike 1(a) dodamo još jedan štap, kao što je prikazano na slici 1(c), sustav će biti statički neodređen, a rješenje za skup uzdužnih sila u štapovima nije jedinstveno. Možemo ga opisivati kao da imamo jedan suvišan štap, međutim bolje je razmišljati o neodređenosti u smislu jednog stanja samonaprezanja, odnosno kao skupu sila u štapovima koje su u statičkoj ravnoteži bez djelovanja vanjskih sila.

U ovom primjeru možemo vidjeti da je zadnji štap mogao biti stavljen u sklop u prednapetom stanju, a tada uvjeti ravnoteže traže da i drugi štapovi također budu u stanju naprezanja.

Pojednostavljeno, možemo zamisliti da je taj novi štap malo kraći od udaljenosti između dvaju čvorova koje će ih povezati, te je potrebna vlačna sila kako bi se osiguralo malo elastično produljenje koje je potrebno da se štap uklopi.



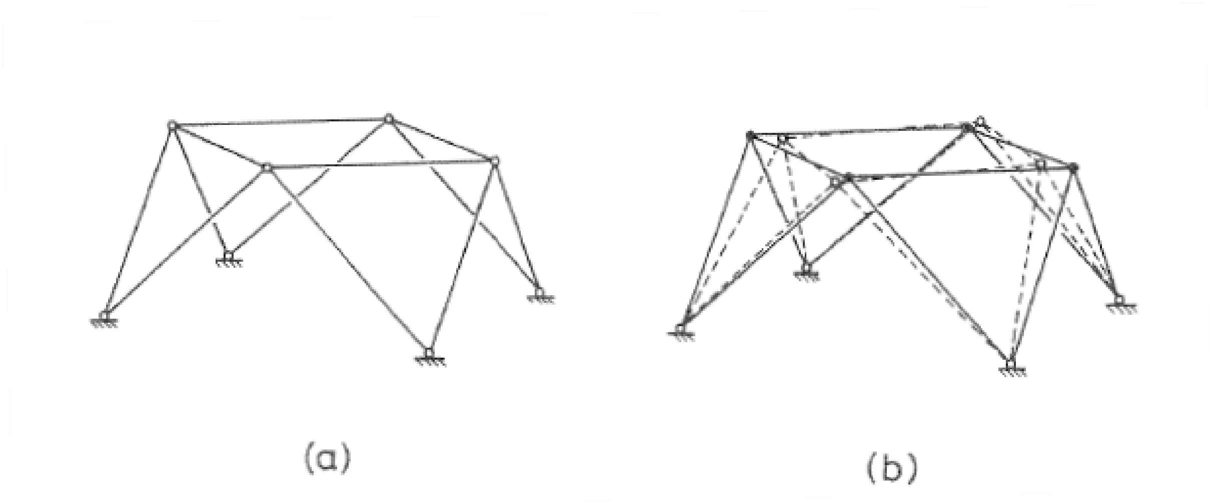
Slika l. Skice sklopova za ilustraciju statičke i kinematičke određenosti i neodređenosti. (a) Tri su ležajna čvora u kutovima kvadrata. (b) Jedan štap je sada uklonjen, a sklop ima svojstveni oblik neelastičnog pomaka u kojem se središnji čvor kreće prema čitatelju. (c) Četvrti štap čini sklop statički neodređenim. (d.1) Treći štap dodan slučaju (b) čini sklop i statički i kinematički neodređenim, ali mogući su samo infinitezimalno mali pomaci neelastičnog mehanizma. (d.2) Kao i u slučaju (d.1), osim što su tri ležajna čvora kolinearna, te je moguće, kao u slučaju (b), slobodno gibanje neelastičnog mehanizma.

Nadopunimo ovaj primjer s formulom poznatom kao Maxwellovo pravilo, koja je nužan uvjet i za statičku i kinematičku određenost sustava, a prostorna verzija formule, za sustave koji su spojeni s podlogom (kao na slikama 1 i 2) glasi:

$$b = 3J \tag{1}$$

gdje je b ukupni broj štapova, a J broj čvorova koji nisu ležajni.

Ovo se pravilo, kao što smo već spominjali, temelji na shvaćanju da broj jednadžbi mora biti jednak broju nepoznanica, kako bi rješenje bilo jedinstveno.



Slika 2. (a) Prstenasti sklop koji zadovoljava Maxwellovo pravilo, ali (b) je statički i kinematički neodređen sa slobodnim pomakom neelastičnog mehanizma

U okviru opće teorije konstrukcijskih sustava, ovakvo razmišljanje je primjereno, ali u odnosu na složenije probleme, ima ozbiljne nedostatke, te je tako već dugi niz godina poznato da neki sustavi zadovoljavaju Maxwellovo pravilo, a ipak su statički i kinematički neodređeni (slike 1(d) i 2).

Također, takvi su sklopovi podložni samonaprezanju, a u nekim slučajevima stanje samonaprezanja može donekle unijeti krutost prvog reda u svojstveni oblik neelastične deformacije.

Linearnoalgebarski odnos između broja jednadžbi i nepoznanica uvodi ideju ranga r matrice ravnoteže i njezine transponirane matrice (kinematičke matrice). Proučimo detaljnije pojmove linearne algebre kako bismo što bolje razumjeli daljnji tok rada.

Broj linearno nezavisnih redaka matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in M_{mn}$ zove se rang po redcima matrice **A**. Broj linearno nezavisnih stupaca matrice **A** zove se rang po stupcima matrice **A**. Kako je rang po redcima jednak rangu po stupcima, govorimo o rangu matrice r(**A**).

Neka je $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matrica tipa m × n. Matrica $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ tipa n × m za koju je $b_{ji} = a_{ij}$ za i = 1, ..., m, j = 1, ..., n je transponirana matrica matrice **A**. Označavamo ju s $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$. Vrijedi

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$$

Primjer:

$$\text{ako je } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \text{ onda je } \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Uvođenjem pojma ranga matrice dolazimo do izraza

$$s = b - r, \quad m = 3J - r \tag{2}$$

i odatle

$$s - m = b - 3J \tag{3}$$

kao zamjene za (1), kada su svi ležajni čvorovi (koje se ne ubrajaju u *J*) zglobno spojeni s podlogom: ovdje je s (≥0) broj neovisnih stanja samonaprezanja, a m (≥0) je broj neovisnih neelastičnih mehanizama. Upravo ove vrijednosti i njihovo određivanje čine prvi korak u mehaničkoj analizi bilo kojeg sustava. Ako se jedna od njih može utvrditi, jednadžba (3) odmah daje jednadžbu (2), budući da se vrijednosti b i J mogu dobiti brojanjem.

U općem slučaju, kako je mađarski inženjer Tarnai istaknuo, vrijednosti s i m ne ovise samo o broju štapova i čvorova, već o potpunoj specifikaciji geometrije sklopa.

Za neke posebne sustave moguće je uočiti vrijednosti s ili m čistom fizičkom intuicijom, ali poželjnije je imati opći algoritam za izravno izračunavanje vrijednosti s i m iz geometrijskih podataka bilo kojeg danog sustava. Takav postupak, naravno, zahtijeva određivanje ranga matrice.

Pri određivanju ranga matrice primjenjujemo elementarne transformacije:

1. zamjena dvaju redaka ili stupaca,
2. množenje retka ili stupca skalarom $\lambda \neq 0$,

3. dodavanje retku ili stupcu matrice linearne kombinacije ostalih redaka ili stupaca matrice.

Matrice su ekvivalentne ako se jedna dobiva iz druge pomoću konačno mnogo elementarnih transformacija.

Primjer elementarnih transformacija nad redcima:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} /:2 \\ \\ /:3 \end{matrix} \quad \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathrm{I} \cdot (-1) + \mathrm{II}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} /:(-2) \quad \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \mathrm{II} \cdot (-1) + \mathrm{III}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \mathrm{r}(\mathbf{A}) = 2$$

Uz određivanje vrijednosti *s* i *m*, također je potrebno u postupku izračunati statičke detalje svih stanja samonaprezanja i kinematičke detalje svih neeleastičnih mehanizama. Spomenuti se postupak koristi standardnom linearnoalgebarskom teorijom vektorskih prostora: sve informacije koje tražimo nalaze se u četiri vektorska potprostora matrice ravnoteže. A što je vektorski prostor i četiri vektorska potprostora?

Neka je V neki neprazan skup na kojem imamo definirane operacije zbrajanja elemenata i množenja elemenata skupa skalarom (realnim brojem) takve da vrijedi :

1. za svaki a ∈ V i svaki λ ∈ R je λ · a ∈ V ,
2. za sve a, b ∈ V je a + b ∈ V ,
3. operacije zbrajanja i množenje skalarom zadovoljavaju sljedeća svojstva:

→ Svojstva zbrajanja vektora:

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (asocijativnost)
2. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (nul vektor je neutralni element u odnosu na zbrajanje vektora)
3. Za svaki vektor $\vec{a}$ postoji vektor $\vec{a'}$ takav da vrijedi $\vec{a} + \vec{a'} = \vec{a'} + \vec{a} = \vec{0}$. Vektor $\vec{a'}$ zovemo suprotni vektor vektora $\vec{a}$, i označavamo ga s $\vec{a'} = -\vec{a}$
4. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komunitativnost)

→ Svojstva množenja vektora skalarom:

1. $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (distributivnost s obzirom na zbrajanje vektora)
2. $(\lambda + \psi) \vec{a} = \lambda\vec{a} + \psi\vec{a}$ (distributivnost s obzirom na zbrajanje skalara)
3. $\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \mu)\vec{a}$ (homogenost)
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (postojanje jedinice)

Tada kažemo da je skup V vektorski prostor.

Neka je V vektorski prostor i neka je L neki podskup od V. Za L kažemo da je vektorski potprostor vektorskog prostora V ako je i sam vektorski prostor (tj. ako vrijede svojstva 1., 2. i 3. iz prethodne definicije).

Proširenje spomenutih zamisli omogućuje nam da razdvojimo *m* mehanizama danog sklopa u dva razreda gibanja krutih tijela i unutarnjih mehanizama (do gibanja krutog tijela dolazi kada je sklop nedostatno vezan za podlogu, do najviše šest stupnjeva slobode u prostoru). U tu će svrhu, u (2) i (3) biti potrebno uvesti dodatni parametar kinematičkih ograničenja vanjskih veza. Također, potrebno je znati na koji način stanje samonaprezanja može, donekle, unijeti krutost prvog reda u neelastični mehanizam. Ova značajka je presudna za djelovanje prednapetih mreža kabela, koje se mogu opisati kao samonapregnuti mehanizmi koji imaju razmjerno veliki broj stupnjeva slobode.

Poznato je da postoje, fizički, dvije različite vrste neelastičnih mehanizama, koji se mogu opisati kao infinitezimalni i konačni. U konačnom mehanizmu (slike 1(b) i (d.2); slika 2) čvorovi se slobodno mogu gibati do neke konačne udaljenosti, bez ikakve promjene duljina štapova. S druge strane, u infinitezimalnom mehanizmu (slika 1(d.1)) općenito postoje male promjene duljine štapova kada se čvorovi pomiču.

Već spominjana linearnoalgebarska analiza je postavljena samo za izvorni geometrijski oblik, te može otkriti neelastične mehanizme, ali ne može razlikovati njihove različite vrste. Tarnai je pretpostavio da samo infinitezimalni neelastični mehanizmi mogu biti ukrućeni zbog stanja samonaprezanja, te je postavio pitanje koji je to kriterij koji određuje ukrućivanje sklopa samonaprezanjem koji je i statički i kinematički neodređen, i kako upotrijebiti matričnu metodu kod utvrđivanja hoće li kinematička neodređenost poprimiti oblik infinitezimalnog ili konačnog mehanizma. Odgovor na to pitanje, međutim, izlazi iz okvira ovog rada.

Prije daljne analize, pretpostavit ćemo da je idealiziranje mehaničkog sistema ili mreže kabela kao "sklopa štapova spojenih u zglobnim čvorovima", opterećenog samo u čvorovima, prikladno. Ako je element mehaničkog sistema uže, kao u mreži kabela, onda je idealizacija zadovoljavajuća samo ako je užad u vlačnom stanju, pa treba provjeriti je li to tako u svakom slučaju, te na sličan način, zanemariti mogućnost izvijanja štapova u tlaku.

Pri oblikovanju matrica za koje se određuju vrijednosti s i m, radit ćemo u kontekstu teorije malih pomaka. Za sklopove za koje je $m > 0$ izvorni oblik nije jedinstven, ali se jednadžbe ravnoteže mogu postaviti u nekom odabranom obliku.

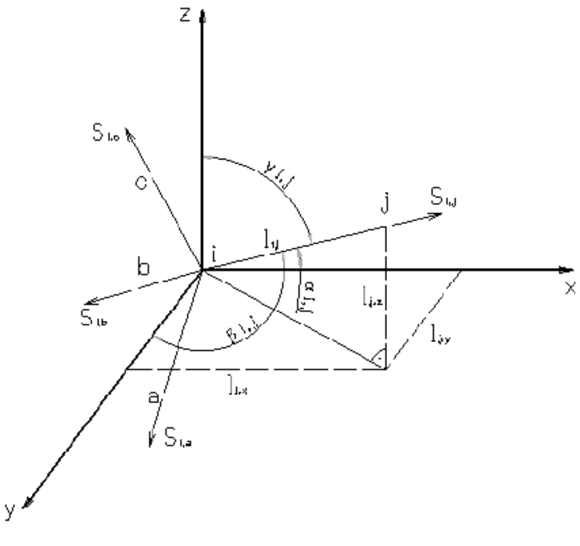
3. LINEARNA ALGEBRA SKLOPOVA ŠTAPOVA SPOJENIH U ZGLOBNIM ČVOROVIMA

Zamislimo sklop koji sadrži ukupno *j* zglobnih čvorova međusobno povezanih sa *b* štapova i s ukupno *k* kinematičkih ograničenja ostvarenih vanjskim vezama.

U obzir uzimamo dva skupa statičkih varijabli: uzdužne sile u štapovima i vanjske sile koje djeluju u čvorovima. Uzdužna sila u svakom štapu je određena jednim brojem, tako da imamo *b* sila, svrstanih u vektor **s.** Silu koja djeluje u nekom čvoru možemo prikazati pomoću tri skalarne komponente. Čvorovi koji su spojeni s podlogom s jednim, dva ili tri kinematička ograničenja, mogu u sklop prenijeti dvije, jednu ili ni jednu komponentu vanjske sile. Stoga imamo ukupno 3*j* - *k* komponenata vanjskih sila, koje ćemo svrstati u vektor **f** duljine 3*j* - *k*.

Za kinematičku analizu također uzimamo dva skupa varijabli: pomake čvorova i produljenja štapova, a svaki ovaj skup odgovara jednoj od statičkih varijabli. Komponente pomaka čvora imaju isti pozitivan smisao kao odgovarajuća vanjska opterećenja. Kinematičke varijable su onda: *b* produljenja, svrstanih u vektor **e**, te 3*j* - *k* pomaka, svrstanih u vektor **d**.

Pogledajmo sliku 3 :



Slika 3

Zbrojevi projekcija uzdužnih sila u štapovima na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži s komponentama vanjskog opterećenja **f**:

$$\sum_j X_{i,j} = -f_{ix},$$

$$\sum_j Y_{i,j} = -f_{iy},$$

$$\sum_j Z_{i,j} = -f_{iz}.$$

Neka su $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, kutovi koje štap između čvorova *i* i *j*, odnosno sila u štapu s_{ij} zatvara s koordinatnim osima *x*, *y*, *z*:

$\alpha_{i,j} = \measuredangle(l_{i,j}, x)$, $\beta_{i,j} = \measuredangle(l_{i,j}, y)$, $\gamma_{i,j} = \measuredangle(l_{i,j}, z)$, pri čemu je $l_{i,j}$ duljina štapa *i*, *j*.

Tada vrijedi:

$$\sum_j s_{i,j} \cos\alpha_{i,j} = -f_{ix},$$

$$\sum_j s_{i,j} \cos\beta_{i,j} = -f_{iy},$$

$$\sum_j s_{i,j} \cos\gamma_{i,j} = -f_{iz}.$$

Kosinusi kutova $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, mogu se izraziti kao

$$\cos\alpha_{i,j} = \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}},$$

$$\cos\beta_{i,j} = \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}},$$

$$\cos\gamma_{i,j} = \frac{(z_j - z_i)}{l_{ij}}.$$

Tada jednadžbe ravnoteže možemo razviti u

$$\sum_j \frac{(x_j - x_i)}{l_{ij}} s_{ij} + f_{ix} = 0,$$

$$\sum_j \frac{(y_j - y_i)}{l_{ij}} s_{ij} + f_{iy} = 0, \tag{4}$$

$$\sum_j \frac{(z_j - z_i)}{l_{ij}} s_{ij} + f_{iz} = 0.$$

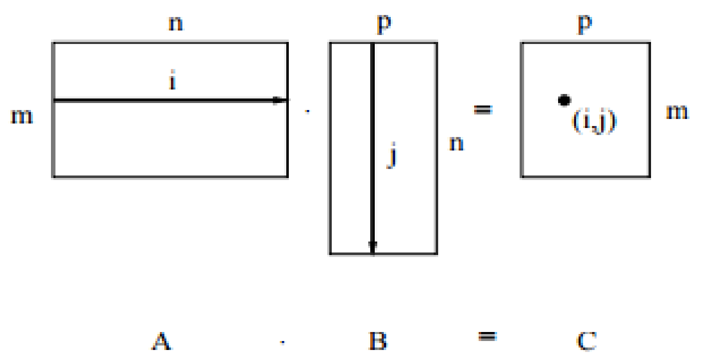
Ovdje su x_i, y_i, z_i su Kartezijeve koordinate čvora i u njegovu izvornom položaju, a f_{ix}, f_{iy}, f_{iz} su komponente vanjske sile.

Jednadžbe ravnoteže možemo zapisati u matričnom obliku.

Za matrice **A** = $[a_{ij}]$, **B** = $[b_{ij}]$ ∈ M_{mn} mogli bismo definirati matricu **C** kao umnožak matrica **A**, **B**, gdje su elementi od **C** dani s $c_{ij} = a_{ij} \; b_{ij}$ za i = 1, ..., m i j = 1, ..., n. Međutim, ovakav izraz i shvaćanje ne pomažu nam kod linearnog sustava, te stoga uvodimo sljedeće:

Umnožak matrica **A** i **B** definira se samo ako matrica **A** ima onoliko stupaca koliko matrica **B** ima redaka. Umnožak **AB** takvih matrica **A** i **B** je matrica čiji je broj redaka jednak broju redaka od **A**, a broj stupaca jednak broju stupaca od **B**.

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ..., a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., p.}$$



Uz ovakvu definiciju množenja matrica linearni sustav od m jednadžbi s n nepoznanica možemo u sažetom obliku pisati kao

$$\mathbf{A\,x = b} \qquad (\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}})$$

gdje su **A** ∈ M_{mn} matrica koeficijenata (dobivamo je tako da redom koeficijente uz nepoznanice svake linearne jednadžbe upisujemo u retke matrice **A**, pa svaka linearna jednadžba daje jedan redak), **b** = $[b_1, ..., b_m]^T$ poznata matrica desnih strana i **x** = $[x_1, ..., x_n]^T$ matrica nepoznanica. Vrijedi:

I. (Kronecker-Capelli) Sustav $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ima barem jedno rješenje ako i samo ako matrica sustava **A** i proširena matrica sustava $\mathbf{A_b}$ imaju isti rang.

II. Ako je r = r(**A**) = r($\mathbf{A_b}$), onda je sustav $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ekvivalentan sustavu koji se dobije uzimanjem bilo kojih r nezavisnih jednadžbi, tj. bilo kojih r linearno nezavisnih redaka u **A**.

III. Ako je n = m, sustav $\mathbf{A}\,\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je **A** regularna. To je rješenje dano s $\vec{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{\mathbf{b}}$.

Na taj način, s malom promjenom oznaka, 3*j* - *k* jednadžbe ravnoteže s *b* nepoznanica mogu biti zapisano kao

$$\mathbf{A\ s = -f}; \tag{5}$$

A je matrica ravnoteže tipa (3*j*-*k)* puta *b*.

Za čvor *i* je

$$- \begin{bmatrix} f_{ix} \\ fiy \\ fiz \end{bmatrix} = \sum_j \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j} \\ \cos\beta_{i,j} \\ \cos\gamma_{i,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i,j} \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{A}_{i,j}^{(l\to g)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{i,j} \\ \cos\beta_{i,j} \\ \cos\gamma_{i,j} \end{bmatrix}$ je transformacija lokalnog koordinatnog sustava štapa *i*, *j* u globalni koordinatni sustav.

Sada ćemo postaviti jednadžbe kinematike malih pomaka sklopa. Za svaki štap postoji jedna jednadžba koja povezuje njegovo produljenje i komponente pomaka čvora na jednom od krajeva (a drugi kraj smatramo nepomičnim).

Neka su $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, kutovi koje štap između čvorova *i* i *j* zatvara s koordinatnim osima *x*, *y*, *z*:

$\alpha_{i,j} = \measuredangle\,(u_{i,j}\,,x)$, $\beta_{i,j} = \measuredangle\,(u_{i,j}\,,y)$, $\gamma_{i,j} = \measuredangle\,(u_{i,j}\,,z)$, pri čemu je $u_{i,j}$ pomak čvora *i* štapa *i*, *j* po njegovoj osi. Tada su

$$\cos\alpha_{\mathrm{i,j}} = \frac{u_{i,j}}{u_i},$$

$$\cos\beta_{\mathrm{i,j}} = \frac{u_{i,j}}{v_i},$$

$$\cos\gamma_{i,j} = \frac{u_{i,j}}{w_i};$$

u_i, w_i, v_i su komponente pomaka koje su usporedne s globalnim osima koordinatnog sustava.

$$u_{i,j} = u_i \cos\alpha_{i,j} + v_i \cos\beta_{i,j} + w_i \cos\gamma_{i,j}$$

ili,

$$[u_{i,j}] = [\ \cos\alpha_{i,j} \quad \cos\beta_{i,j} \quad \cos\gamma_{i,j}\ ] \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{B}_{i,j}^{(g\to l)} = [\ \cos\alpha_{i,j} \quad \cos\beta_{i,j} \quad \cos\gamma_{i,j}\ ]$ je transformacija globalnog koordinatnog sustava u lokalni koordinatni sustav štapa *i*, *j*. Za cijeli je sklop

$$\mathbf{B}\ \mathbf{d} = \mathbf{e}; \tag{6}$$

B je kinematička matrica tipa *b* puta (3*j* – *k*).

Usporedba ovog i prethodnog izraza pokazuje da je

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

Matrica **A** je linearni operator između $\boldsymbol{R}^b$, prostora uzdužnih sila (produljenja ili štapova), i $\boldsymbol{R}^{3j-k}$, prostora opterećenja (pomaka ili čvorova). Teorija linearnih vektorskih prostora pokazuje da su četiri različita vektorska potprostora povezana s matricom **A.**

Funkcija $F : R^n \to R^m$ zove se linearni operator ako vrijedi $F(\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$ za sve $\lambda, \mu \in R$ i sve $\vec{x}, \vec{y} \in R^n$.

Nazivi i dimenzije četiriju potprostora su sljedeći:

	Naziv	Dimenzija	
Prostor štapova $\boldsymbol{R}^b$	{(i) Prostor redaka matrice **A**	r_A	
	{(ii) (Desna) jezgra matrice **A**	s	(8)
Prostor čvorova $\boldsymbol{R}^{3j-k}$	{(iii) Prostor stupaca matrice **A**	r_A	
	{(iv) Lijeva jezgra matrice **A**	m	

Jednadžbe (2) su sada zamijenjene s:

$$s = b - r_A, \quad m = 3j - k - r_A, \tag{9}$$

a (3) je zamijenjena sa:

$$s - m = b - 3j + k \tag{10}$$

Opišimo sad četiri potprostora u redoslijedu (iii), (iv), (ii), (i) uz pretpostavku da su $s > 0$ i $m > 0$.

Prostor stupaca matrice A (iii) je prostor koji razapinju stupci matrice **A**. Postoji r_A neovisnih stupaca matrice **A** koji se mogu uzeti za bazu prostora stupaca matrice **A**, koji time ima dimenziju r_A. Baza je skup nezavisnih vektora koji razapinju (pot)prostor. A dimenzija? Definicija kaže:

Neka su $\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_n} \in \mathrm{R}^m$. Neka je $L(\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_n})$ potprostor od R^m razapet s $\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_n}$. Dimenziju vektorskog prostora $L(\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_n})$ definiramo kao maksimalni broj linearno nezavisnih vektora iz skupa $\{\overrightarrow{a_1}, \ldots \overrightarrow{a_n}\}$.

Svaki od r_A stupaca odgovara određenom štapu u sklopu. Ostalih $b - r_A = s$ štapova je prekobrojno, a kad se uklone, neprekobrojni štapovi tvore statički određen sklop, pa se koeficijenti uzdužnih sila određuju pomoću jednadžbi ravnoteže za dopustivi vektor vanjskog opterećenja.

Kako je $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\mathbf{T}$, postoji i kinematičko tumačenje potprostora. Prostor stupaca matrice **A** uključuje sve oblike deformiranja koji nisu neelastični mehanizmi.

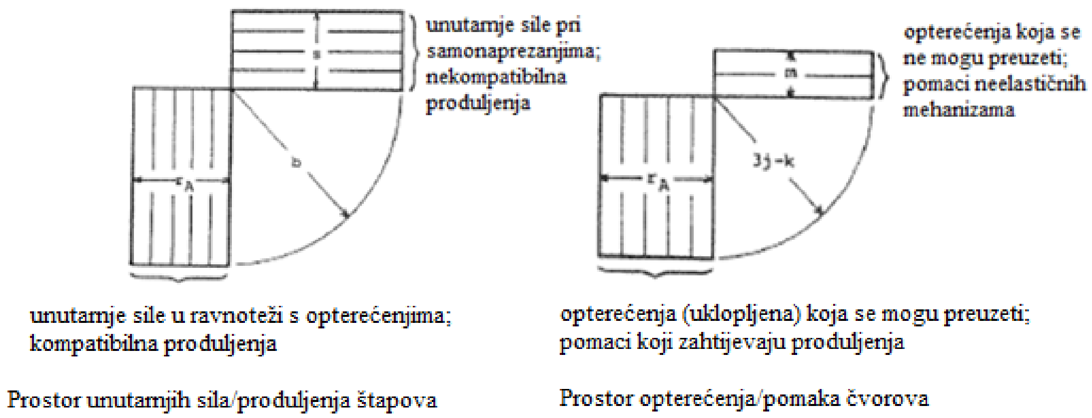
Lijeva jezgra (lijevi nul-prostor) matrice A (iv) predstavlja raspon opterećenja **f** koji sklop u svom izvornom obliku ne može preuzeti. Njezina dimenzija je $3j - k - r_A = m$. Te komponente opterećenja su vezane za neelastične mehanizme sklopa koje će "pobuditi". U kinematičkim terminima lijeva jezgra matrice **A** je upravo prostor sklopa razapet sa m neovisnih neelastičnih mehanizama. Vektore opterećenja u prostoru stupaca matrice **A** možemo nazvati uklopljenim opterećenjima: ona su "uklopljena" u smislu da su u "ravnoteži" i ne "pobuđuju" niti jedan od m mehanizama.

Lijeva jezgra je zapravo ortogonalni komplement prostora stupaca matrice **A**. Definicija je ortogonalnog komplementa:

Neka je V vektorski prostor i L potprostor od V. Ortogonalni komplement potprostora L je $L^{\perp} = \{x \in V : \langle x, v \rangle = 0,\ \forall v \in L\}$. Ortogonalni komplement potprostora L je također potprostor od V.

To je naznačeno na desnom dijelu slike 4. Postoji ukupno $3j$-k elemenata. Baza prostora stupaca sadrži r_A od njih, dok preostalih m tvori bazu lijeve jezgre. Za zorni prikaz ortogonalnosti, nacrtan je dijagram: svaki vektor u lijevoj jezgri okomit je na svaki vektor u prostoru stupaca.

Znači, svako „zabranjeno“ stanje opterećenja okomito je na svako uklopljeno opterećenje, a svaki neelastični mehanizam okomit je na svako od stanja deformacija.



Slika 4. Četiri temeljna potprostora matrice **A**. Baza prostora opterećenja/pomaka uključuje $3j$ - k vektora, a podijeljeni su u dva međusobno okomita potprostora koji sadrže r_A i m vektora. Vektori ortogonalnih potprostora su okomito nacrtani.

Prostor redaka matrice A (i) predstavlja vektore unutarnjih sila u štapovima koji su u ravnoteži s uklopljenjim opterećenjima koja leže u prostoru stupaca matrice **A**. Dimenzija mu je r_A. Za bilo koje uklopljeno opterećenje koje sklop prenosi bez samonaprezanja, vektor unutarnjih sila u štapovima je linearna kombinacija vektora baze tog prostora. Kinematičko tumačenje tog potprostora je: potprostor popunjava svih r_A neovisnih skupova produljenja štapova koji su geometrijski kompatibilni.

Jezgra matrice A (ii) predstavlja sva stanja unutarnjih sila sklopa koja su u ravnoteži s nultim opterećenjem, odnosno sva stanja samonaprezanja sklopa. Dimenzija tog potprostora je b - r_A = s. Tih s stanja samonaprezanja okomito je na sve vektore u prostoru redaka matrice **A**, kao što je prikazano na lijevom dijelu slike 4. Kinematičko tumačenje tog potprostora je da sadrži sve kombinacije produljenja štapova, koje su zabranjene zbog uvjeta geometrijske kompatibilnosti sklopa.

4. PRORAČUNSKI POSTUPAK

Opisat ćemo algoritam za izračunavanje vrijednosti r_A (a time, prema (9), vrijednosti m i s) i baza za četiri temeljna potprostora matrice **A**. No prije ćemo podsjetiti na osnove teorije matrica kako bismo lakše pratili postupak. Za početak, što je jedinična matrica?

Skalarna matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali se zove jedinična i označava sa **I.**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Sljedeći bitan pojam jest Hermiteova forma matrice. Neka je $\mathbf{A} \in M_{mn}$, $\mathbf{A} \neq 0$. Primjenom elementarnih transformacija nad redcima i stupcima u konačno mnogo koraka dolazimo do njoj ekvivalentne matrice $\mathbf{H} \in M_{mn}$ koja je oblika

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{I_r} & \mathbf{0_1} \\ \mathbf{0_2} & \mathbf{0_3} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0_1}$, $\mathbf{0_2}$, $\mathbf{0_3}$ su nul matrice (matrice čiji su svi elementi jednaki nuli).
Kako je r(**A**) = r(**H**) = r, ovim smo dobili algoritam za računanje ranga matrice **A**. Matrica **H** je Hermiteova forma matrice **A**. No, matricu ne treba prevoditi do konačne/potpune Hermiteove forme. Štoviše, znatno više informacija dobivamo prevedemo li matricu u „stepeničasti“ ili u reducirani „stepeničasti“ oblik. U oba se slučaja elementarne transformacije provode samo nad redcima. Prva komponenta u svakom retku matrice u oba oblika, koja je različita od nula, ima vrijednost 1; tu komponentu nazivamo uporišnom komponentom. Stupac s uporišnom komponentom je uporišni ili bazni stupac (ti stupci razapinju prostor stupaca matrice **A**). U „stepeničastom“ su obliku u baznim stupcima nule ispod uporišne komponente, dok su u reduciranom „stepeničastom“ obliku nule ispod i iznad nje. Matrica se u „stepeničasti“ oblik prevodi Gaussovom, a u reducirani oblik Gauss–Jordanovom eliminacijom.

Za sustav kažemo da je homogen ako je $b_1 = ... = b_m = 0$. Ako je barem jedan $b_i \neq 0$, $i = 1, ..., m$, sustav je nehomogen**.**

Ako sustav ima barem jedno rješenje kažemo da je sustav moguć. Ako sustav nema rješenja, kažemo da je nemoguć.

Sada možemo prikazati postupak.

Prvo matricu **A** proširujemo odgovarajućom jediničnom matricom **I** dimenzije $3j$ - k, kao što je prikazano na slici 5(a). Zatim nastavljamo s radom na redovima proširene matrice **A | I**, s ciljem pretvaranja matrice **A** u „stepeničasti“, kao što je prikazano na slici 5(b). Kao što smo rekli, pretvorba se provodi pomoću Gaussove eliminacije s elementarnim transformacijama samo nad redcima. Matrica **I** povezana s matricom **A** naziva se i matricom zapisa.

U prvoj fazi cilj je imati unos različit od nule u polju (1,1) s nulama u ostatku stupca. Zamjenjujemo redak 1 matrice **A | I** s retkom koji u prvom stupcu sadrži najveći unos, a onda ga upotrebljavamo kao uporišni redak za transformiranje redaka ispod njega. Zatim obavljamo slične operacije na matrici, zanemarujući prvi redak i prvi stupac, kako bismo osigurali unos različit od nule u polju (2,2) uz nule u donjem dijelu drugog stupca, kao što je prikazano na slici 5(b).

Provođenjem postupka, ponekad se događa da se stožerni element ne može pronaći u trenutno obrađivanom stupcu. Tada prenosimo postupak po jedan stupac udesno, dok ne nađemo stožerni element ili dok se stupac b ne obradi.

Po završetku, donjih je $m = 3j - k - r_A$ redova matrice **A** popunjeno nulama. Tako su u transformiranoj matrici $\mathbf{\tilde{A}}$ | $\mathbf{\tilde{I}}$, prikazanoj na slici 5(b), uporišni elementi nađeni u stupcima 1, 2 i 5, ali ne i u stupcima 3, 4, 6 i 7. Ti stupci označeni su sa *, što označava r_A linearno nezavisnih stupaca izvorne matrice, koji su također označeni sa *. Elementi vektora **s**, koji odgovaraju stupcima koji nisu označeni sa *, prekobrojni su štapovi.

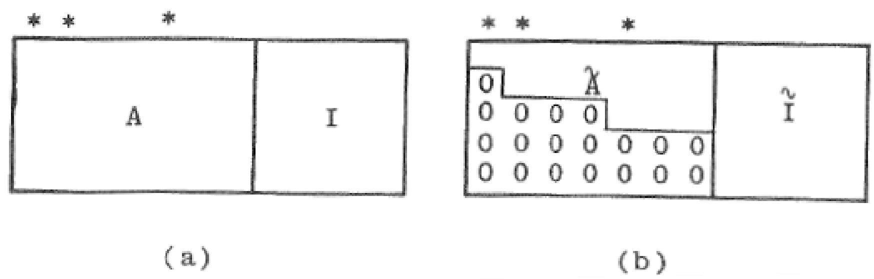
Sada možemo odrediti baze četiri opisana potprostora.

Prostor stupaca matrice A. Rekli smo već da r_A stupaca matrice **A**, označenih sa *, tvore bazu ovog potprostora.

Lijeva jezgra matrice A. Donjih m (= $3j - k - r_A$) redaka matrice $\mathbf{\tilde{I}}$ tvore bazu ovog prostora. Iz činjenice da su jednadžbe $\mathbf{\tilde{A}}\ \mathbf{s} = -\mathbf{\tilde{I}}\ \mathbf{f}$ jednake izvornim jednadžbama (5), a donjih m redaka tada izražava da je svaki od donjih m redaka matrice $\mathbf{\tilde{I}}$ okomit na **f**.

Prostor redaka matrice A. Gornjih r_A redaka matrice $\mathbf{\tilde{A}}$ tvore bazu ovog prostora.

Jezgra matrice A. Uzmimo da je **Ã s** = **0**, te stavimo da je *s* = 1 za prvi prekobrojni štap i odredimo vrijednosti unutarnjih sila u neprekobrojnim štapovima. Dobiveni vektor **s** vektor je baze ove jezgre. Preostalih *s* - 1 vektora baze dobiva se na sličan, uzimajući *s* = l za svaki od prekobrojnih štapova. Budući da su jednadžbe **A s** = **-f** i **Ã s** = - **Ĩ f** ekvivalentne, rješenja **Ã s** = **0** daju *s* nezavisnih stanja samonaprezanja sklopa.



Slika 5. Dijagram koji pokazuje kako se matrica ravnoteže **A**, zajedno s jediničnom matricom **I**, operacijama nad redcima transformira u „stepeničasti“ oblik **Ã** | **Ĩ**. Bazni stupci su 1, 2 i 5.

5. PRIMJER

Pogledajmo sliku 6 koja prikazuje sklop od tri jednaka štapa (I, II, III), svaki je duljine l, a povezani su u pravcu za podlogu u čvorovima C i D. Uzet ćemo da je riječ o ravninskom sklopu, pa izraz 3j - k treba zamijeniti sa 2j - k.

Imamo b = 3, 2j - k = 8 - 4 = 4, k = 2 × 2 = 4, jer su zglobovi C i D u nepomični u ravnini. Komponente vanjske sile/pomaka na dijagramu su označene s 1-4.

Sustav jednadžbi ravnoteže

$$\mathbf{A\ s = -f}$$

dan je s

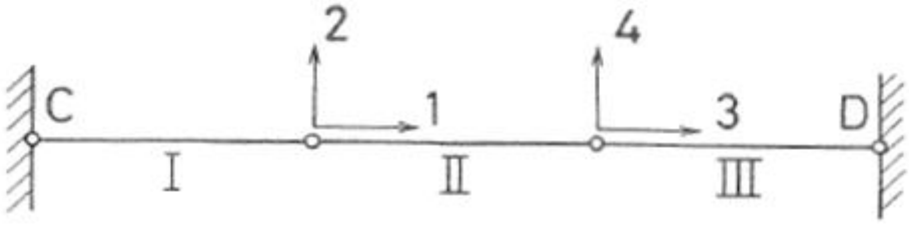
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_I \\ s_{II} \\ s_{III} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \tag{11}$$

pa je

$$\mathbf{A} \,|\, \mathbf{I} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{12}$$

Slijedeći opisani postupak (koja uključuje zamjenu retka 2 sa [1 × (redak 3) - 0 × (redak 2)] te zamjenu retka 3 sa [1 × (redak 2) - 0 × (redak 3)], dobivamo:

$$\bar{\mathbf{A}} \,|\, \bar{\mathbf{I}} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$



Slika 6. Sklop štapova i zglobova u ravnini

Očito je da je $r_A = 2$ te su, prema (9), $s = 1$ i $m = 2$. Štap III je prekobrojan. Jezgra matrice **A** - odnosno 1. stanje samonaprezanja - dobiva se supstitucijom unazad iz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_I \\ s_{II} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

pa je

$$\begin{bmatrix} s_I \\ s_{II} \\ s_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Druga tri potprostora prikazana su na slici 7.

Sve različite značajke istaknute na slici 4 mogu se potvrditi pregledom, a ortogonalnost odgovarajućih potprostora može se izravno provjeriti.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad s = 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{r_A = 2}$$

prostor štapova (3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad m = 2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{r_A = 2}$$

prostor čvorova (4)

Slika 7.

6. PRIMJENA

Postupci su provedeni primjenom simboličkog programskog paketa ***Sage***.

Dijelovi postupka se ponešto razlikuju od opisanoga u teorijskom prikazu i u prethodnom primjeru: program matricu prevodi u "reducirani stepeničasti" oblik, u kojem su bazni stupci ispunjeni nulama ispod i iznad uporišne jedinice. Prednosti su te modifikacije: ako se ravnotežna matrica proširi vektorom vanjskih sila, tada nakon redukcije stupac u kojem je bio taj vektor (posljednji stupac proširene matrice) sadrži rješenje, pa nije potrebno "uvrštavanje unazad", a to znači i da je određivanje vektora baze jezgre, koje uključuje uzastopna rješavanja sustava, lakše.

Primjer 1.

Naredbom *joints = { oznakai: (xi, yi, zi) }* zadajemo koordinate čvorova. Prvi argument je oznaka čvora, drugi argument su njegove koordinate.

```
joints = { 0: (0.0, 0.0, 0.0), 1: (2.0, 0.0, 0.0), 2: (0.0, 0.0, 2.0) }
```

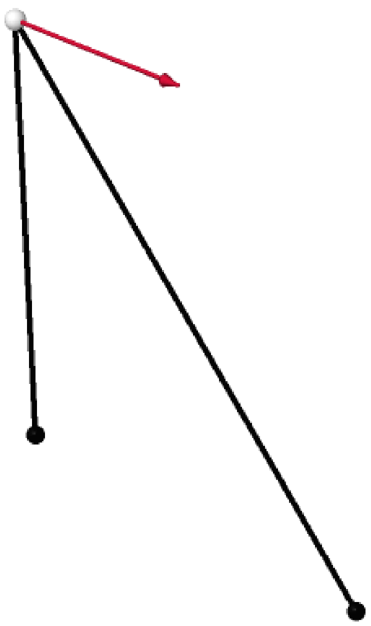
Ležajni čvorovi su `supports = [0, 1]`.

Nakon definiranja čvorova, naredbom *bars = { oznakai: (čvor0i, čvor1i) }* povezujemo ih u štapove.

Zadajemo opterećenje u čvoru 2 u vrijednosti od 100kN u smjeru *x*:

```
loads = { 2: (100.0, 0.0, 0.0) }
```

Naredbom `plot_truss (joints, bars, supports, loads)` dobivamo sliku:



Naredbom *free_joints = others (supports, joints)* nalazimo slobodan čvor.

[2]

Sada provjerimo zadovoljava li ovaj sklop Maxwell-ovo pravilo:

- 3*nj* = *nb*, *nj* — broj slobodnih čvorova, *nb* — broj štapova

Naredbom *maxwells_rule (joints, supports, bars)* dobijemo:

3 * 1 - 2 == 1 != 0

Proširena je ravnotežna matrica:

Ab = augmented_equil_matrix (joints, bars, loads, free_joints)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.0 & 0.707106781187 & -100.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.0 \\ -1.0 & -0.707106781187 & -0.0 \end{array}\right)$$

Reducirana je matrica:

Abr, pivots = rref_wpp (Ab)

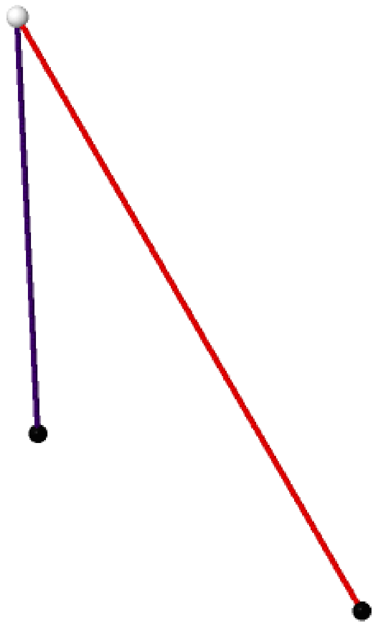
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.0 & 0.0 & 100.0 \\ 0.0 & 1.0 & -141.421356237 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{array}\right)$$

Ako sustav ima manje nepoznanica nego jednadžbi, tada samo dio posljednjeg stupca reducirane proširene matrice sadrži rješenja (3 jednadžbe s 2 nepoznanice, pa su rješenja samo prve dvije komponente posljednjeg stupca).

Naredbom *dict_bar_force (bars, forces)* pridružujemo rješenja štapovima:

0: 100.0

1: -141.421356237



Ravnotežna je matrica:

A = equilibrium_matrix (joints, bars, free_joints)

$$\begin{pmatrix} 0.0 & 0.707106781187 \\ 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & -0.707106781187 \end{pmatrix}$$

Pogledajmo sada potprostore ravnotežne matrice:

- rezultat funkcije *subspaces()* je rječnik s komponentama
    - 'basis' — lista vektorâ baze potprostora
    - 'degree' — broj skalarnih komponenata vektorâ baze
    - 'dimension' — dimenzija potprostora (broj vektorâ baze)
    - 'name' — naziv potprostora

rs, cs, rk, lk = subspaces (A)

Potprostor redaka je:

print_subspace (rs)

Row space:
  Vector space of degree 2 and dimension 2
  Basis:
   (1.0, 0.0)
   (0.0, 1.0)

Potprostor stupaca je:

print_subspace (cs)

Column space:
  Vector space of degree 3 and dimension 2
  Basis:
   (1.0, 0.0, 0.0)
   (0.0, 0.0, 1.0)

Jezgra:

Kernel:

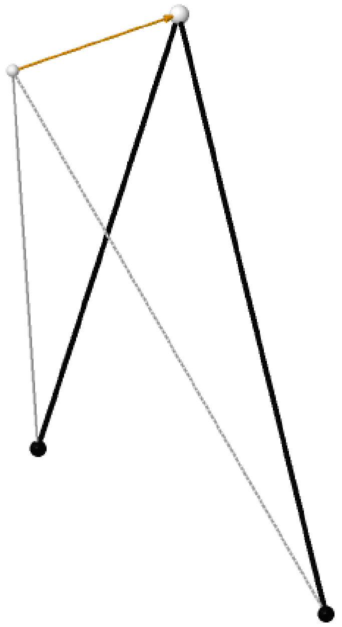
  Vector space of degree 2 and dimension 0

Lijeva jezgra:

print_subspace (lk)

Left kernel:
  Vector space of degree 3 and dimension 1
  Basis:
   (0.0, 1.0, 0.0)

Naredbom *plot_truss_with_displacements()* prikazujemo pomake mehanizama:



Rešetka je u ravnini *xz*, pa može preuzeti opterećenja u toj ravnini (vektor **b** je sila usporedna s osi *x*: (-100.0, -0.0, -0.0)). Leži li **b** u prostoru stupaca provjerava se funkcijom

is_in_subspace (b, csb)

gdje je

csb = cs['basis']

Sila **c** (0, 100, 0) je usporedna s osi *y*, pa leži u lijevoj jezgri *(lkb = lk['basis'])*, tako da

is_in_subspace (c, lkb)

daje True.

Sila **c2** (50, 100, 0) ima *x* i *y* komponente, pa nije ni u prostoru stupaca ni u lijevoj jezgri. No, dovoljno je da ima samo jednu komponentu u lijevoj jezgri, pa da je rešetka ne može preuzeti; provjera

has_component_in_subspace (c2, lkb)

daje True.

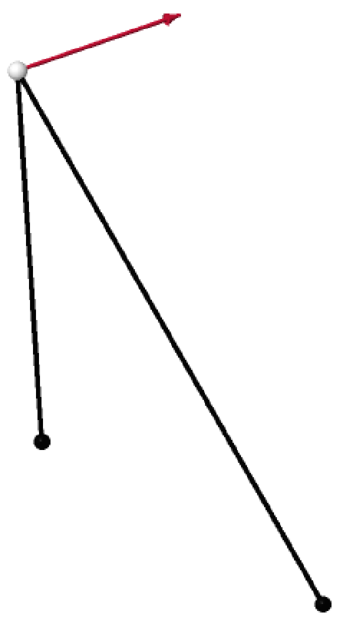
Sila **b** je "cijela" u prostoru stupaca, pa nema komponente u lijevoj jezgri i

has_component_in_subspace (b, lkb)

daje False.

Ako se zada opterećenje koje nije u prostoru stupaca, u reduciranoj proširenoj matrici je i posljednji stupac bazni, a to znači da sustav nema rješenja.

loads2 = { 2: (0.0, 100.0, 0.0) }



pivots2

[0, 1, 2]

Primjer 2.

Zadajmo čvorove:

joints = { 0: (-2.0, 0.0, 0.0), 1: (0.0, 0.0, 0.0), 2: (2.0, 0.0, 0.0), 3: (0.0, 0.0, 2.0) }

te ih povežimo u štapove:

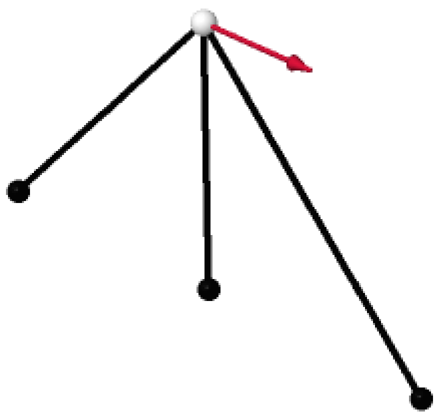
bars = { 0: (0, 3), 1: (1, 3), 2: (2, 3) }

Ležajni čvorovi su supports = [0, 1, 2].

Opterećenje nanosimo na čvor 3 u vrijednosti 100 kN u smjeru *x*:

loads = { 3: (100.0, 0.0, 0.0) }

Grafički prikazano to je:



Slobodni je čvor:

free_joints = others (supports, joints)

free_joints

[3]

Provjerimo zadovoljava li sklop Maxwell-ovo pravilo:

maxwells_rule (joints, supports, bars)

3 * 1 - 3 == 0

Vidimo da sustav zadovoljava pravilo, ali...

Znamo da u statički i kinematički određenom prostornom sistemu tri štapa ne smiju ležati u istoj ravnini. Zadani je sistem, kao prostorni, mehanizam, dok je kao ravninski statički neodređen, ali, naravno, može preuzeti opterećenje u svojoj ravnini, poput zadanoga.

Reduciranjem proširene matrice nalazi se jedno moguće stanje ravnoteže – sila u trećem štapu jednaka je nuli. Drugim riječima, reduciranje matrice određuje osnovni sistem, a u osnovnom sistemu ostaju štapovi koji odgovaraju baznim stupcima.

Proširena je ravnotežna matrica:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -0.707106781187 & 0.0 & 0.707106781187 & -100.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 \\ -0.707106781187 & -1.0 & -0.707106781187 & -0.0 \end{array}\right)$$

Reduciranjem dobivamo:

```
Abr, pivots = rref_wpp (Ab)
```

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1.0 & 0.0 & -1.0 & 141.421356237 \\ 0.0 & 1.0 & 1.41421356237 & -100.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{array}\right)$$

U osnovnom sistemu ostaju:

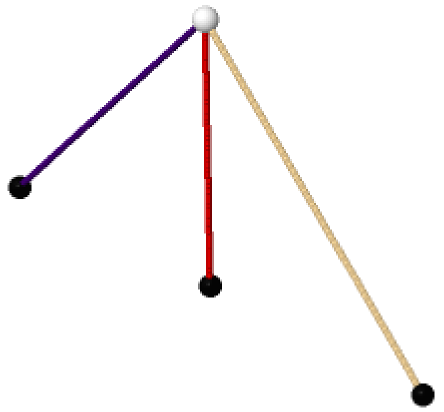
```
primary_system_bars = pivots
primary_system_bars
[0, 1]
```

Treći štap je proglašen prekobrojnim:

```
redundant_bars = others (pivots, bars)
redundant_bars
[2]
```

Pridružimo sile štapovima i naredbom *plot_truss_with_forces (joints, bars, supports, bar_forces)* grafički prikažimo:

```
bar_forces = dict_bar_force (bars, rref_solution (Abr))
print_dict (bar_forces)
0:   141.421356237
1:   -100.0
2:   0.
```



Komponente baznih vektora jezgre ravnotežne matrice vrijednosti su sila u pojedinim stanjima samonaprezanja – uzima se da sila u prekobrojnom štapu ima vrijednost 1, a sile u ostalim štapovima je uravnotežuju.

Ravnotežna matrica je:

$$\begin{pmatrix} -0.707106781187 & 0.0 & 0.707106781187 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.707106781187 & -1.0 & -0.707106781187 \end{pmatrix}$$

Potprostor redaka je:

```
Row space:
  Vector space of degree 3 and dimension 2
  Basis:
    (1.0, 0.0, -1.0)
    (0.0, 1.0, 1.414213562373095)
```

Potprostor stupaca je:

```
Column space:
  Vector space of degree 3 and dimension 2
  Basis:
    (1.0, -0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 1.0)
```

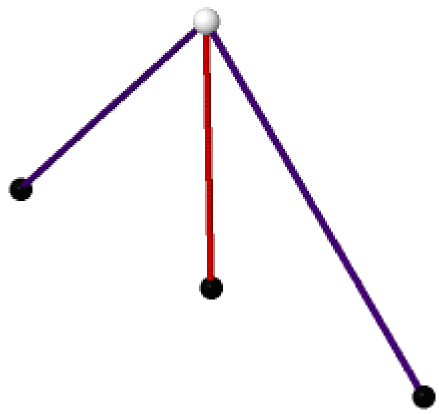
```
b = load_vector (loads, free_joints)
(-100.0, -0.0, -0.0)
```

Provjera leži li b u prostoru stupaca funkcijom *is_in_subspace (b, cs['basis'])*:

```
True
```

Jezgra:

Kernel:
  Vector space of degree 3 and dimension 1
  Basis:
    (1.0, -1.414213562373095, 1.0)



Lijeva jezgra:

Left kernel:
  Vector space of degree 3 and dimension 1
  Basis:
    (0.0, 1.0, 0.0)

Pomak mehanizma:

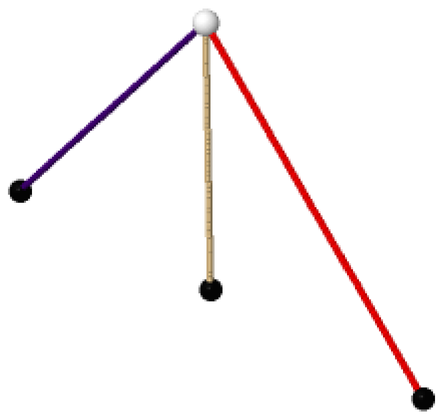
Promijenjenimo li redoslijed štapova, tako da je srednji štap treći, on će biti proglašen prekobrojnim. Usporedit ćemo dijagrame N_0 i n_1 koje dobijemo s ovakvim rasporedom s prethodnim dijagramima:

N_0

0: 141.421356237

1: -100.0

2: 0.0

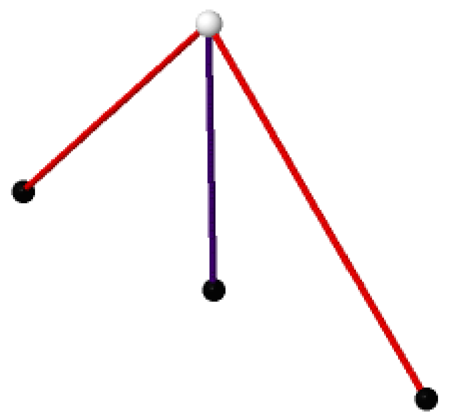


n_1

0: -0.707106781187

1: -0.707106781187

2: 1.0



U prvom osnovnom sistemu sila je nula u desnom kosom štapu, dok je u drugom osnovnom sistemu sila nula u vertikalnom (srednjem) štapu. A vrijednosti sila u jediničnim dijagramima promijenile su se.

Primjer 3.

Zadajemo čvorove i spajamo ih u štapove:

joints:

0: (-2.00000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)

1: (0.000000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)

2: (2.00000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)

3: (0.000000000000000, -2.00000000000000, 0.000000000000000)

4: (0.000000000000000, 2.00000000000000, 0.000000000000000)

5: (0.000000000000000, 0.000000000000000, 2.00000000000000)

bars:

0: (0, 5)

1: (1, 5)

2: (2, 5)

3: (3, 5)

4: (4, 5)

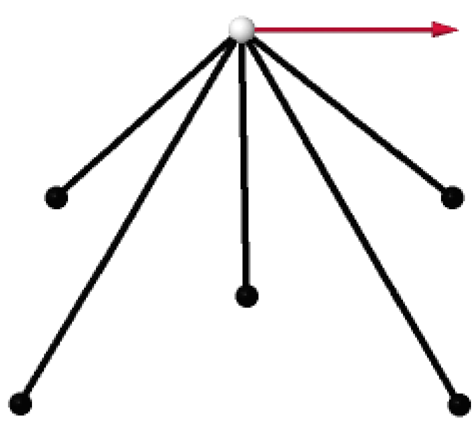
Ležajni su čvorovi supports: [0, 1, 2, 3, 4].

Opterećenje je u čvoru 5:

loads:

5: (100.000000000000, 100.000000000000, 0.000000000000000)

Naredbom *plot_truss (joints, bars, supports, loads)* crtamo sistem:



Naredbom *free_joints = others (supports, joints)* nam pokazuje da je čvor [5] slobodni čvor.

Maxwell-ovo pravilo:

3 * 1 - 5 == -2 != 0

Sistem je dva puta statički neodređen.

Proširena je ravnotežna matrica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.707106781187 & 0.0 & 0.707106781187 & -100.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.0 \\ -0.707106781187 & -1.0 & -0.707106781187 & -0.0 \end{array}\right)$$

a reducirana je matrica:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 & 141.421356237 \\ 0.0 & 1.0 & 1.41421356237 & 0.0 & 1.41421356237 & -200.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & -1.0 & 141.421356237 \end{array}\right)$$

Osnovni sustav čine:

primary_system_bars = pivots

[0, 1, 3]

Štapovi 2 i 4 su prekobrojni.

Sile u štapovima su:

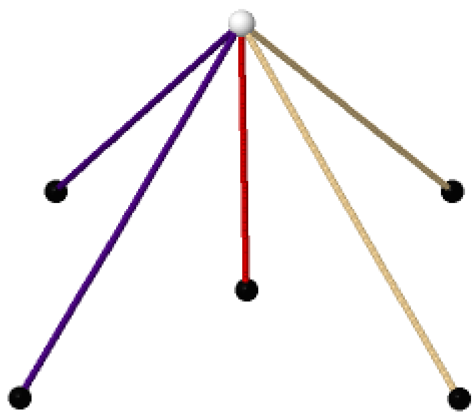
0: 141.421356237

1: -200.0

2: 0.0

3: 141.421356237

4: 0.0



Naredbom *A = equilibrium_matrix (joints, bars, free_joints)* određujemo ravnotežnu matricu:

$$\begin{pmatrix} -0.707106781187 & 0.0 & 0.707106781187 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.707106781187 & 0.707106781187 \\ -0.707106781187 & -1.0 & -0.707106781187 & -0.707106781187 & -0.707106781187 \end{pmatrix}$$

Njezini su potprostori:

Row space:
  Vector space of degree 5 and dimension 3
  Basis:
   (1.0, 0.0, -1.0, 0.0, 0.0)
   (0.0, 1.0, 1.41421356237, 0.0, 1.41421356237)
   (0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -1.0)

Column space:
  Vector space of degree 3 and dimension 3
  Basis:
   (1.0, 0.0, 0.0)
   (0.0, 1.0, 0.0)
   (0.0, 0.0, 1.0)

Jezgra sadrži dva bazna vektora – dva stanja samonaprezanja.

Kernel:
  Vector space of degree 5 and dimension 2
  Basis:
   (1.0, -1.41421356237, 1.0, -0.0, 0.0)
   (-0.0, -1.41421356237, 0.0, 1.0, 1.0)

Prvo je stanje:

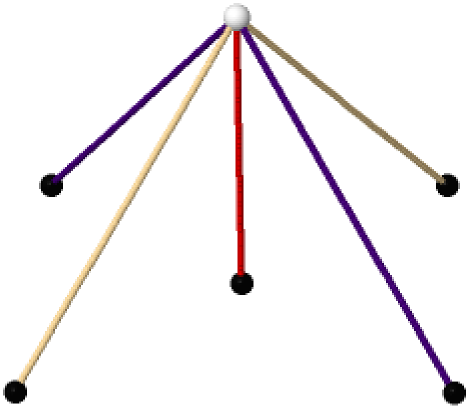
0: 1.0

1: -1.41421356237

2: 1.0

3: -0.0

4: 0.0



Drugo je stanje samonaprezanja:

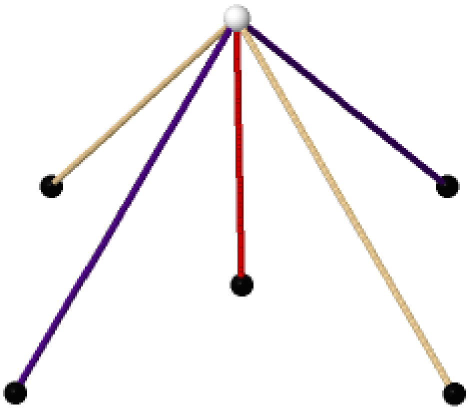
0: -0.0

1: -1.41421356237

2: 0.0

3: 1.0

4: 1.0



Lijeva jezgra:

Left kernel:
  Vector space of degree 3 and dimension 0

Primjer 4.

Proučavamo Schwedlerovu kupolu tipa 1.

Upoznajmo se s pojmovima koji su potrebni za proračun:

- schwedler_1 (*r0*, [*h1*, *h2*, ...], *n*)
    - *r0* — radijus ležajnog prstena
    - *h1*, *h2*, ... — visine na kojima su prsteni (0 < *h1* < *h2* < ...); uzima se da je za ležajni prsten *h0* = 0; posljednji *h* je visina kuglina odsječka na kojem su čvorovi; posljednji *h* mora biti ≤ *r0*
    - *n* — broj polja; *n* mora biti paran broj

Definirajmo kupolu, uz napomenu da broj polja kod ovog tipa kupole mora biti paran.

```
joints, bars, supports = schwedler_1 (10., [7.5, 10.], 4)
joints:
  0:  (10.0000000000000, 0.000000000000000, 0.000000000000000)
  1:  (6.12323399573676e-16, 10.0000000000000, 0.000000000000000)
  2:  (-10.0000000000000, 1.22464679914735e-15, 0.000000000000000)
  3:  (-1.83697019872103e-15, -10.0000000000000, 0.000000000000000)
  4:  (6.61437827766148, 0.000000000000000, 7.50000000000000)
  5:  (4.05013859304395e-16, 6.61437827766148, 7.50000000000000)
  6:  (-6.61437827766148, 8.10027718608790e-16, 7.50000000000000)
  7:  (-1.21504157791318e-15, -6.61437827766148, 7.50000000000000)
bars:
  0:  (0, 4)
  1:  (1, 5)
  2:  (2, 6)
  3:  (3, 7)
  4:  (4, 5)
  5:  (5, 6)
  6:  (6, 7)
  7:  (7, 4)
  8:  (0, 5)
  9:  (2, 7)
  10:  (0, 7)
```

11: (2, 5)

Ležajni su čvorovi supports: [0, 1, 2, 3].

Slobodni čvorovi su [4, 5, 6, 7].

Kupola zadovoljava Maxwell-ovo pravilo:

3 * 4 - 12 == 0

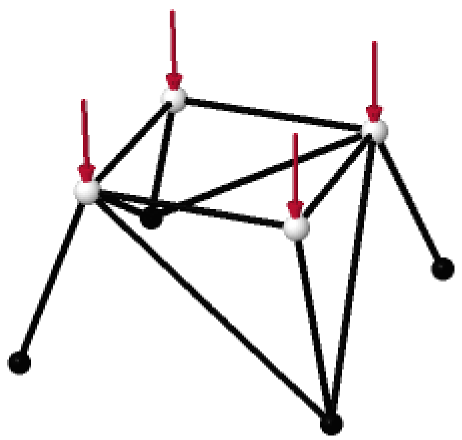
Naredbom *make_loads* (*generator*) zadajemo opterećenje.

generator — *lista uređenih trojki* (*nl*, *j*0, (*Fx*, *Fy*, *Fz*)), gde je *nl* broj čvorova opterećenih silom (*Fx*, *Fy*, *Fz*), a *j*0 je oznaka prvoga u nizu opterećenih čvorova.

load_gen = [(4, 4, (0.0, 0.0, -100.0))]

loads = make_loads (load_gen)

Naredbom *plot_truss()* prikazujemo sistem i opterećenje:



Izračunavanje vrijednosti sila u štapovima:

bar_forces = truss3D (joints, bars, supports, loads)

print_dict (bar_forces)

0: -109.716754071

1: -109.716754071

2:   -109.716754071

3:   -109.716754071

4:   -31.919947712

5:   -31.919947712

6:   -31.919947712

7:   -31.919947712

8:   -2.51214793389e-15

9:   5.02429586779e-15

10: -1.67342668648e-30

11: -2.51214793389e-15

Za pregledniji prikaz može se pomoću funkcije *chop()* male brojeve pretvoriti u nulu.

print_dict (map_dict (chop(), bar_forces))

0:   -109.716754071

1:   -109.716754071

2:   -109.716754071

3:   -109.716754071

4:   -31.919947712

5:   -31.919947712

6:   -31.919947712

7:   -31.919947712

8:   0.0

9:   0.0

10: 0.0

11: 0.0

Proširena je ravotežna matrica:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\
-0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 100.0 \\
0.0000 & 2.519 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4677 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4677 & -0.0000 \\
0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5303 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5303 & 100.0 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 5.039 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 100.0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -7.558 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & 0.4677 & 0.4677 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5303 & -0.5303 & 0.0000 & 100.0
\end{array}\right)$$

Indekse jednadžbi ravnoteže (i odgovarajuće retke matrice) dobivamo naredbom *dict_equation_index (free_joints):*

4: 0

5: 3

6: 6

7: 9

Navedeni su redni brojevi prve jednadžbe (ravnoteža u smjeru x) u svakom čvoru.

Indekse nepoznanica dobivamo naredbom *dict_unknown_index (bars):*

0: 0

1: 1

2: 2

3: 3

4: 4

5: 5

6: 6

7: 7

8: 8

9: 9

10: 10

11: 11

Reducirana je matrica:

Abr, piv = rref_wpp (Ab)

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|r}
1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -2.512 \times 10^{-15} \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 5.024 \times 10^{-15} \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & -1.673 \times 10^{-30} \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & -2.512 \times 10^{-15}
\end{array}\right)$$

pa su sile u štapovima (uz primjenu funkcije *chop()*):

bar_forces = dict_bar_force (bars, map (chop(), rref_solution (Abr)))

0: -109.716754071

1: -109.716754071

2:   -109.716754071

3:   -109.716754071

4:   -31.919947712

5:   -31.919947712

6:   -31.919947712

7:   -31.919947712

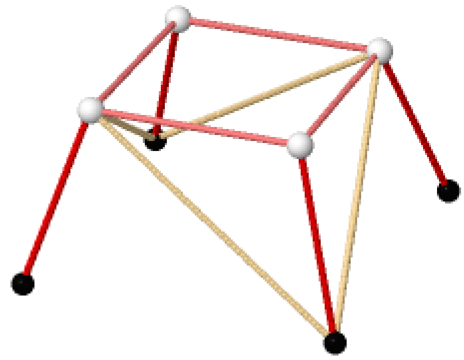
8:   0.0

9:   0.0

10: 0.0

11: 0.0

i, grafički:



Redukcija ravnotežne matrice proširene jediničnom:

A = equilibrium_matrix (joints, bars, free_joints)

$$\begin{pmatrix}
0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 2.519 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 \\
0.0000 & 0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4677 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4677 \\
0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5303 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5303 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 5.039 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -7.558 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & 0.4677 & 0.4677 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5303 & -0.5303 & 0.0000
\end{pmatrix}$$

Parametar funkcije *rref_ext_wpp()* je ravnotežna matrica. Reducirana ravnotežna matrica je *.subdivision (0, 0),* a reducirana jedinična matrica *.subdivision (0, 1)*.

```
Ar, piv = rref_ext_wpp (A)
show (Ar.subdivision (0, 0))
```

$$
\begin{pmatrix}
1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0
\end{pmatrix}
$$

show (Ar.subdivision (0, 1).apply_map (NDC(4)))

$$
\begin{pmatrix}
0.0000 & 0.0000 & -1.097 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.4114 & 0.4114 & -0.1857 & 0.0000 & 0.8229 & -0.7257 & 0.4114 & 0.4114 & -0.1857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.097 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.4114 & -0.4114 & -0.1857 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.4114 & -0.4114 & -0.1857 & 0.0000 & -0.8229 & -0.7257 \\
-0.7071 & 0.7071 & -0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & -0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
-0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.7071 & -0.7071 & 0.3192 & 0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & 0.3192 & -0.7071 & 0.7071 & -0.3192 \\
0.7071 & 0.7071 & 0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & -0.3192 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & -0.7071 & -0.7071 & 0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000
\end{pmatrix}
$$

Potprostori su ravnotežne matrice:

Potprostor redaka je:

Row space:
  Vector space of degree 12 and dimension 12
  Basis:
    (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)

Potprostor stupaca je:

```
Column space:
  Vector space of degree 12 and dimension 12
  Basis:
    (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
-2.77555756156e-17, -1.11022302463e-16)
    (0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
-2.77555756156e-17, -1.11022302463e-16)
    (0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
-1.38777878078e-17, -5.55111512313e-17)
    (0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0,
1.11022302463e-16, 1.11022302463e-16)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0,
-1.11022302463e-16, -1.11022302463e-16)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0,
-5.55111512313e-17, -5.55111512313e-17)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0,
1.11022302463e-16, -1.23259516441e-32)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0,
-2.22044604925e-16)
    (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
-5.55111512313e-17, 1.0)
```

Jezgra:

```
Kernel:
  Vector space of degree 12 and dimension 0
```

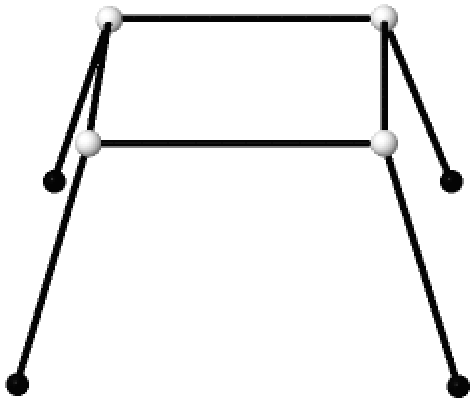
Lijeva jezgra:

```
Left kernel:
  Vector space of degree 12 and dimension 0
```

Primjer 5.

Sljedeći primjer koji proučavamo jest pseudo-Schwedlerova „kupola” bez dijagonalnih štapova.

Naredbom *joints, bars, supports = schwedler_kind (10., [7.5, 10.], 4)* i povezivanjem čvorova u štapove dobivamo kupolu izgleda:



Maxwell-ovo pravilo za ovaj primjer kupole daje:

3 * 4 - 8 == 4 != 0

Slobodni čvorovi su [4, 5, 6, 7].

Ravnotežna je matrica:

$$\begin{pmatrix}
0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 \\
-0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 2.519 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 5.039 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -7.558 \times 10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000
\end{pmatrix}$$

Ar, piv = rref_ext_wpp (A, is_zero_f = is_zz_tol())

show (Ar.subdivision (0, 0))

Parametrom *is_zero_f* određuje se funkcija koja ispituje "jednakost" „realnih“ brojeva (u računalu prikazanih približno, s konačnim brojem znamenaka) s nulom – naime, vrlo male brojeve treba smatrati jednakima nuli.

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$$

show (Ar.subdivision (0, 1).apply_map (ND(4)))

$$\begin{pmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -1.097 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.097 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.097 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.097 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & -0.3192 & -0.0000 & -1.414 & -7.818 \times 10^{-17} & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -1.414 & -0.0000 & -0.6384 & -0.7071 & 0.7071 & 0.3192 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 1.000 & 0.4514 & 1.000 & 1.000 & -0.4514 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.000 & 0.0000 & 0.4514 & 1.665 \times 10^{-16} & -1.000 & -0.4514 & 0.0000 & -1.000 & -5.528 \times 10^{-17} & 1.000 & 0.0000 & -8.292 \times 10^{-17} \\ 1.000 & 0.0000 & 0.4514 & 1.000 & 1.110 \times 10^{-16} & 5.551 \times 10^{-17} & 0.0000 & 1.000 & 5.528 \times 10^{-17} & 0.0000 & 1.000 & -0.4514 \\ -1.000 & 1.000 & -0.4514 & -1.000 & 1.000 & 0.4514 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

Potprostor redaka je:

Row space:
Vector space of degree 8 and dimension 8
Basis:
(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)

Potprostor stupaca je:

Column space:
Vector space of degree 12 and dimension 8
(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 2.21525043702, 0.0, 0.0, 2.21525043702, 0.0, 0.0, 2.21525043702)
(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, -2.21525043702, 0.0, 0.0, -2.21525043702,

-1.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 2.21525043702, 0.0, 0.0, 4.43050087404, 1.0, 0.0, 2.21525043702)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -2.21525043702, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 2.21525043702, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 2.21525043702, 1.0, 0.0, 2.21525043702)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 2.21525043702)

Jezgra:

Kernel:
  Vector space of degree 8 and dimension 0

Lijeva jezgra:

Left kernel:
  Vector space of degree 12 and dimension 4
(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.451416229645, 1.0, 1.0, -0.451416229645, 0.0, 0.0, 0.0)
(1.0, 0.0, 0.451416229645, 0.0, -1.0, -0.451416229645, 0.0, -1.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)
(1.0, 0.0, 0.451416229645, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0, -0.451416229645)
(-1.0, 1.0, -0.451416229645, -1.0, 1.0, 0.451416229645, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)

Pomaci mehanizma:

plot_truss_with_displacements (joints, bars, supports, lk['basis'][0], displ_scale = 2.5) . rotateZ (pi/12)

```
plot_truss_with_displacements (joints, bars, supports, lk['basis'][1], displ_scale = 2.5) . rotateZ (pi/9)
```

```
plot_truss_with_displacements (joints, bars, supports, lk['basis'][2], displ_scale = 2.5) . rotateZ (pi/9)
```

```
plot_truss_with_displacements (joints, bars, supports, lk['basis'][3], displ_scale = 2.5) . rotateZ (pi/9)
```

Zadajmo opterećenje:

loads = { 4: (0.0, 0.0, -100.0), 5: (0.0, 0.0, -100.0), 6: (0.0, 0.0, -100.0), 7: (0.0, 0.0, -100.0), }

Vektor **b**:

(-0.0, -0.0, 100.0, -0.0, -0.0, 100.0, -0.0, -0.0, 100.0, -0.0, -0.0,100.0)

Leži li **b** u prostoru stupaca:

is_in_subspace (b, cs['basis'], is_zero_f = is_zz_tol())

True

Ima li **b** komponentu u lijevoj jezgri:

has_component_in_subspace (b, lk['basis'], is_zero_f = is_zz_tol())

False

Proširena je ravnotežna matrica:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.0000 \\
-0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 100.0 \\
0.0000 & 2.519\times10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 100.0 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 5.039\times10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & -0.7071 & 0.0000 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 100.0 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -7.558\times10^{-17} & 0.0000 & 0.0000 & -0.7071 & 0.7071 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7071 & 0.7071 & -0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9114 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 100.0
\end{array}\right)$$

Reducirana matrica s uređenim zaokruživanjem brojevima konačno daje:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -109.7 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & 0.0000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.000 & -31.92 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000
\end{array}\right)$$

Vrijednosti su sila:

0: -109.716754071

1: -109.716754071

2: -109.716754071

3: -109.716754071

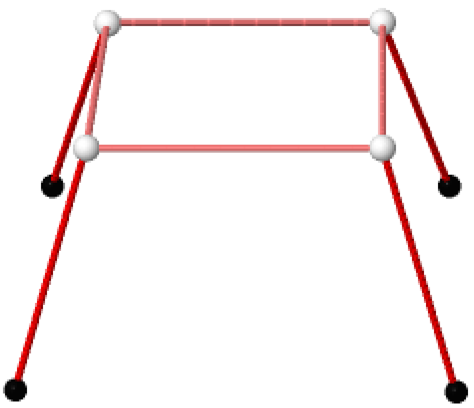
4: -31.919947712

5: -31.919947712

6: -31.919947712

7: -31.919947712

Grafički:

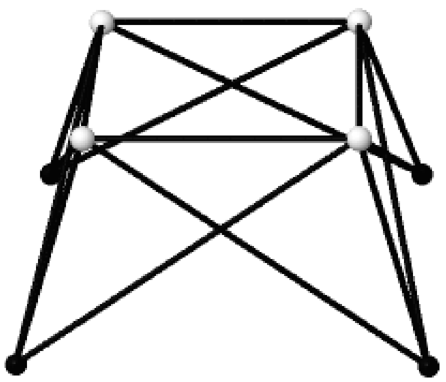


Uspoređujući prethodni i ovaj primjer, zaključujemo da za zadano opterećenje dijagonalni štapovi ne sudjeluju u prijenosu opterećenja (vrijednosti sila su nula) i da su vrijednosti sila u ostalim štapovima u prethodnom i u ovom primjeru jednake.

Primjer 6.

Sljedeći primjer koji ćemo proučiti jest pseudo-Schwedlerova „kupola” s ukriženim dijagonalama.

Naredbom *joints, bars, supports = schwedler_sind (10., [7.5, 10.], 4)* i *plot_truss (joints, bars, supports)* definiramo kupolu.



Sustav je četiri puta statički neodređen:

3 * 4 - 16 == -4 != 0

Slobodni čvorovi su [4, 5, 6, 7].

Funkcija *subspaces()* može osim četiri potprostora vratiti i listu indeksa baznih stupaca ako se u pozivu navede

    subspaces (..., return_pivots = True)

To je pogodno za statički neodređene sisteme.

rs, cs, rk, lk, pivots = subspaces (A, is_zero_f = is_zz_tol(), return_pivots = True)

redundant_bars = others (pivots, bars)

[12, 13, 14, 15]

Potprostor redaka je:

Row space:
  Vector space of degree 16 and dimension 12
  Basis:
   (1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.5818609561, 0.5818609561, 0.0, -4.56787749588e-17)
   (0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
0.5818609561, 0.5818609561, 0.0)
   (0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,

0.0, 0.5818609561, 0.5818609561)
(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.5818609561, 0.0, 0.0, 0.5818609561)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, -7.85046229342e-17)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0, 7.85046229342e-17)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -1.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, -1.0, -0.0, -0.0, 7.85046229342e-17)

Potprostor stupaca je:

Column space:
Vector space of degree 12 and dimension 12
Basis:
(1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)

Jezgra:

Kernel:
Vector space of degree 16 and dimension 4
Basis:
(-0.5818609561, -0.0, -0.0, -0.5818609561, -0.0, -0.0, -0.0, -1.0, -0.0, -0.0, -0.0, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)

(-0.5818609561, -0.5818609561, -0.0, -0.0, -1.0, -0.0, -0.0, -0.0, 1.0, -0.0, -0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0)
(-0.0, -0.5818609561, -0.5818609561, -0.0, -0.0, -1.0, -0.0, -0.0, -0.0, 1.0, -0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 0.0)
(4.56787749588e-17, -0.0, -0.5818609561, -0.5818609561, -0.0, -0.0, -1.0, 7.85046229342e-17, -0.0, -7.85046229342e-17, 1.0, -7.85046229342e-17, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0)

Lijeva jezgra:

Left kernel:
Vector space of degree 12 and dimension 0

Ispis sila u štapovima za stanja samonaprezanja:

bar_forces_ss0 = dict_bar_force (bars, rk['basis'][0])

print_dict (filter_dict (lambda x : not is_zz_tol()(x), bar_forces_ss0))

0: -0.5818609561

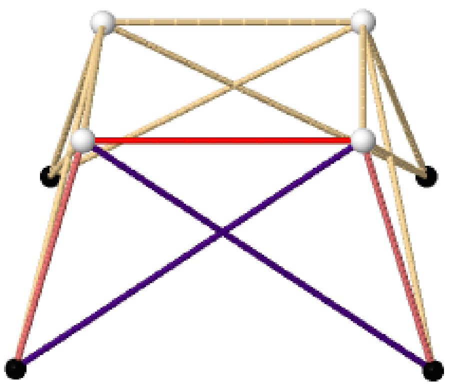
3: -0.5818609561

7: -1.0

11: 1.0

12: 1.0

plot_truss_with_forces (joints, bars, supports, bar_forces_ss0)



bar_forces_ss1 = dict_bar_force (bars, rk['basis'][1])

print_dict (filter_dict (lambda x : not is_zz_tol()(x), bar_forces_ss1))

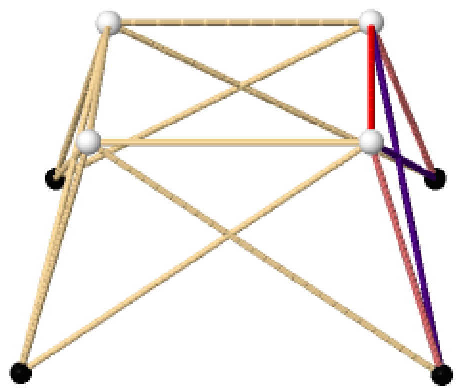
0: -0.5818609561

1: -0.5818609561

4: -1.0

8: 1.0

13: 1.0



bar_forces_ss2 = dict_bar_force (bars, rk['basis'][2])

print_dict (filter_dict (lambda x : not is_zz_tol()(x), bar_forces_ss2))

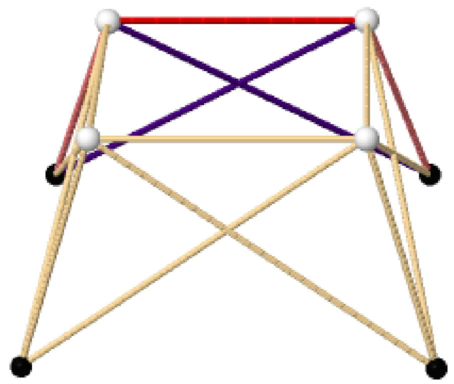
1:   -0.5818609561

2:   -0.5818609561

5:   -1.0

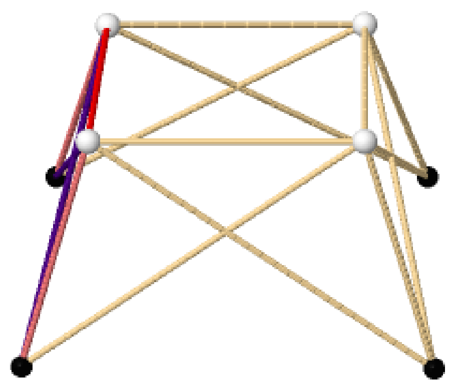
9:   1.0

14: 1.0



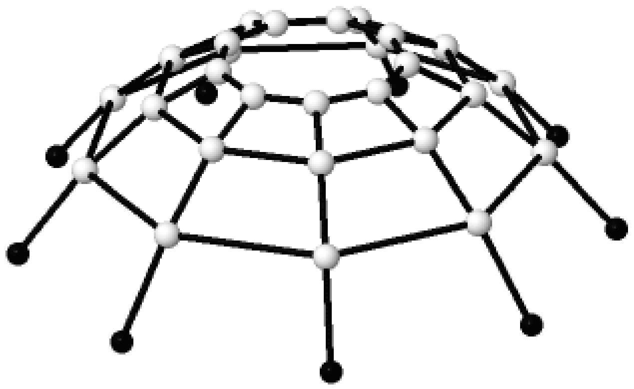
bar_forces_ss3 = dict_bar_force (bars, rk['basis'][3])

print_dict (filter_dict (lambda x : not is_zz_tol()(x), bar_forces_ss3))



Primjer 7.

Promatramo Schwedlerovu kupolu koju čine 27 slobodnih čvorova i 54 štapa.



Maxwell-ovo pravilo kaže:

3 * 27 - 54 == 27 != 0

Ravnotežna matrica je tipa:

81 x 54

Pogledajmo sada potprostore ravnotežne matrice:

Potprostor redaka je:

Row space:
  Vector space of degree 54 and dimension 54

Potprostor stupaca je:

Column space:
  Vector space of degree 81 and dimension 54

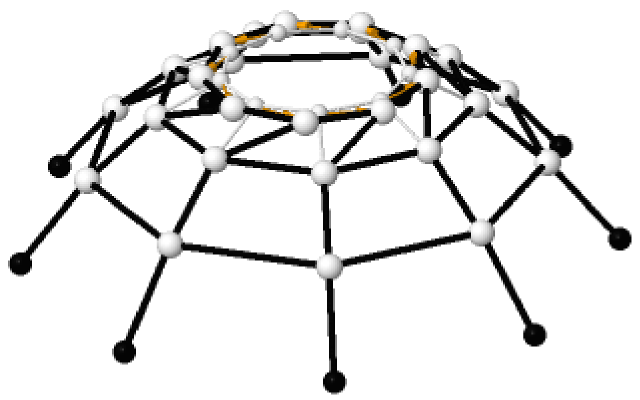
Jezgra:

Kernel:
  Vector space of degree 54 and dimension 0

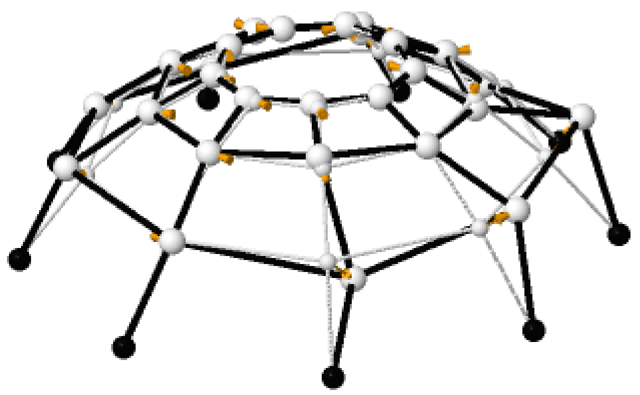
Lijeva jezgra:

Left kernel:
  Vector space of degree 81 and dimension 27

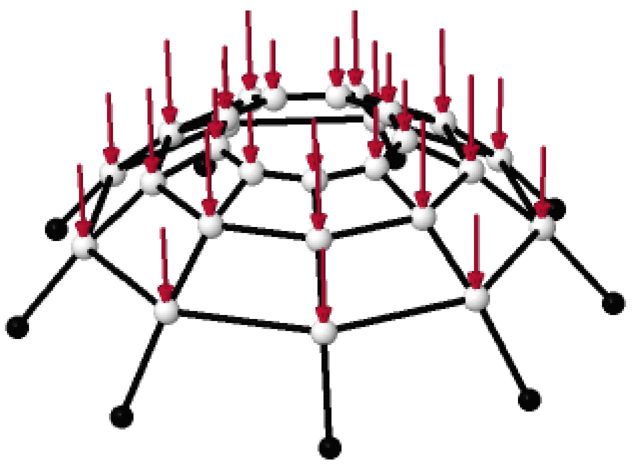
Naredbom *plot_truss_with_displacements()* prikažimo pomak sistema za bazni vektor 1:



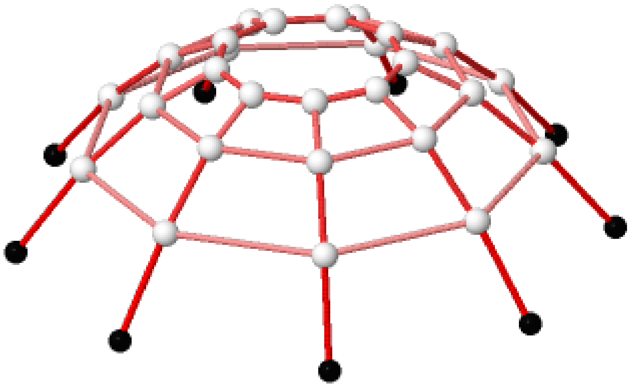
Bazni vektor 16:



Naredbom *plot_truss()* prikazujemo opterećenje na sistem:

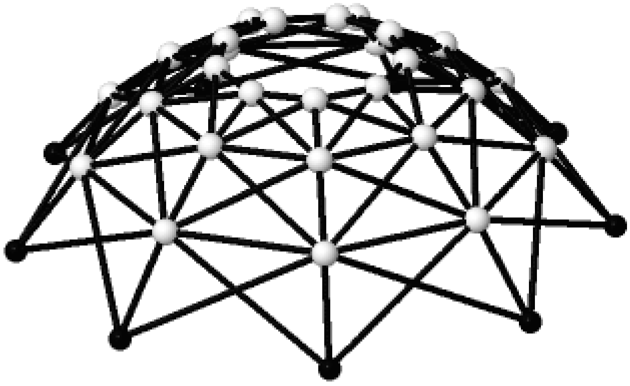


te tako imamo sliku sila u štapovima:



Primjer 8.

Proučavamo Schwedlerovu kupolu s ukriženim dijagonalama koju čine 27 slobodnih čvorova i 108 štapova.



Maxwell-ovo pravilo pokazuje:

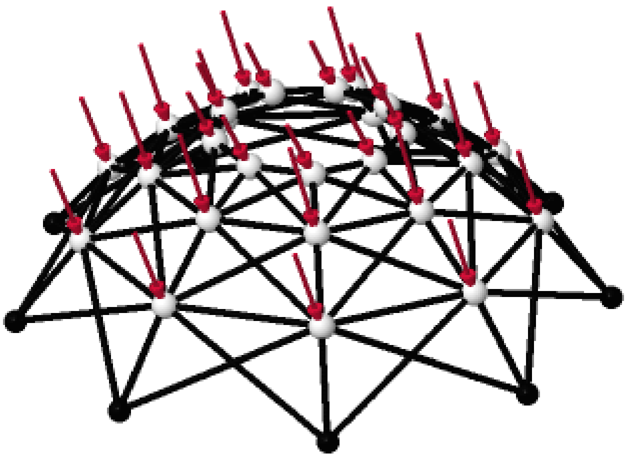
3 * 27 - 108 == -27 != 0

Sustav je 27 puta statički neodređen.

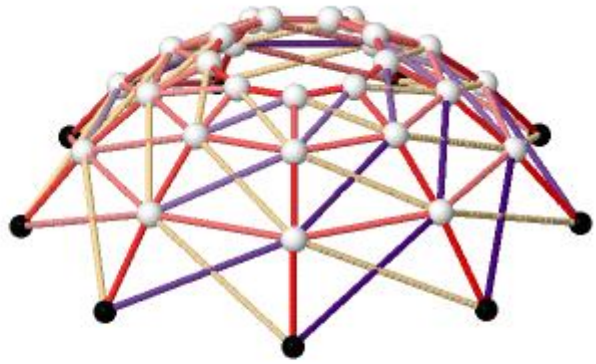
Proširena ravnotežna matrica je tipa:

81 x 109

Zadane su kose sile, tako da sile u dijagonalama neće biti nula:



te naredbom *plot_truss_with_forces()* prikažimo sile u štapovima:



Žuti štapovi su prekobrojni, tako da iz ove slike možemo i vidjeti odabrani osnovni sistem.

Potprostori ravnotežnih matrica:

Potprostor redaka je:

Row space:
  Vector space of degree 108 and dimension 81

Potprostor stupaca je:

Column space:
  Vector space of degree 81 and dimension 81

Jezgra:

Kernel:
  Vector space of degree 108 and dimension 27

Jezgra sadrži 27 baznih vektora – 27 stanja samonaprezanja.

Ispis sila u štapovima za dva stanja samonaprezanja:

Bazni vektor 0:

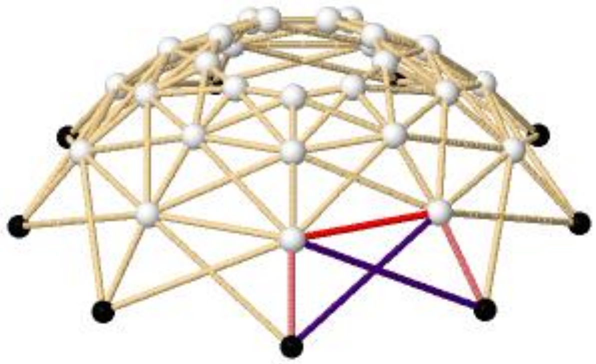
0:   -0.518148701952

8:   -0.518148701952

17: -0.979755108904

26: 1.0

27: 1.0



Bazni vektor 18:

53: -0.585699003535

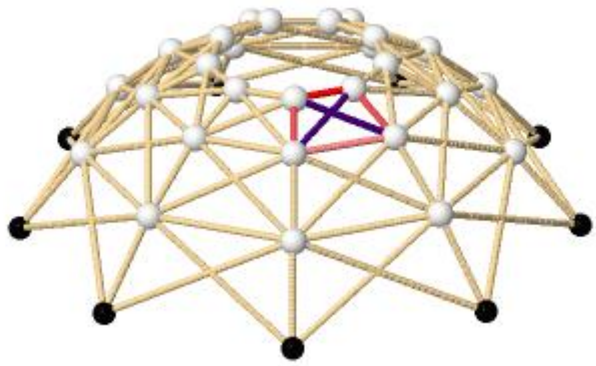
72: -0.649050938719

80: -0.649050938719

89: -0.988106306234

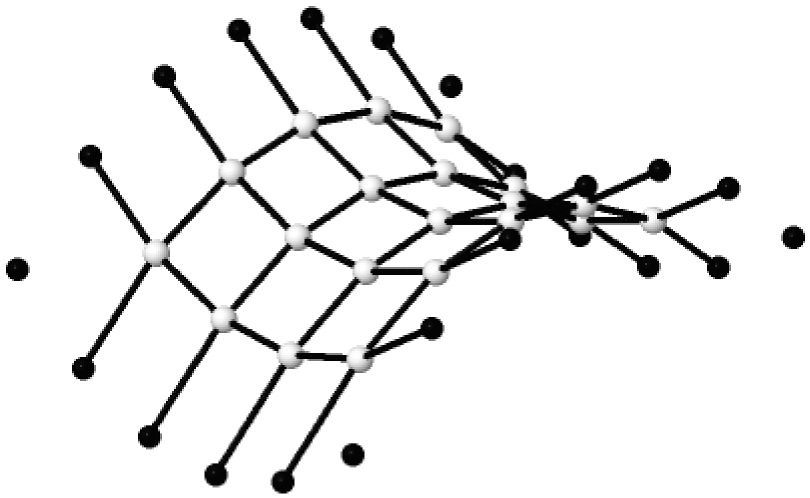
98: 1.0

99: 1.0



Primjer 9.

U ovom primjeru je prikazana mreža kabela koju čine 20 slobodnih čvorova i 49 štapova, u kojoj čvorovi leže na hiperboličnom paraboloidu, a mreža je tlocrtno kvadratična. Kabeli spajaju čvorove koji leže na parabolama.



Maxwell-ovo je pravilo:

3 * 20 - 49 == 11 != 0

Slobodni čvorovi su:

[7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34]

Ravnotežna je matrica tipa:

60 x 49

Potprostori ravnotežne matrice:

Potprostor redaka je:

Row space:
 Vector space of degree 49 and dimension 48

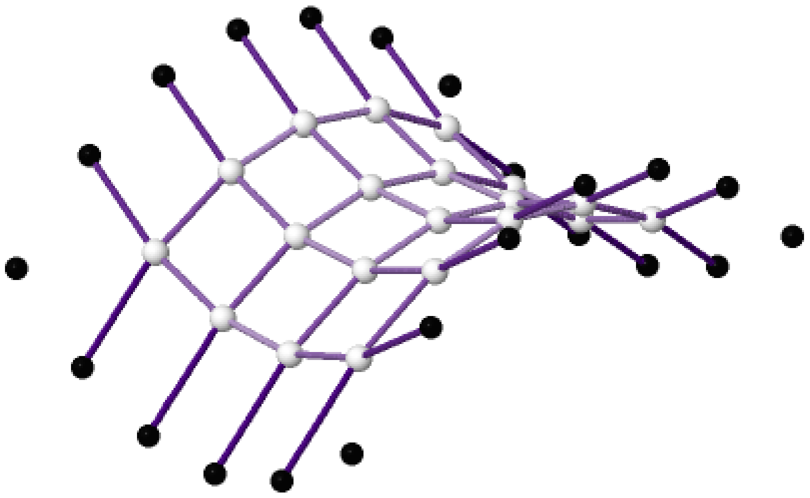
Potprostor stupaca je:

Column space:
 Vector space of degree 60 and dimension 48

Jezgra:

Kernel:
 Vector space of degree 49 and dimension 1

Primjećujemo da mreža ima samo jedno stanje samonaprezanja.

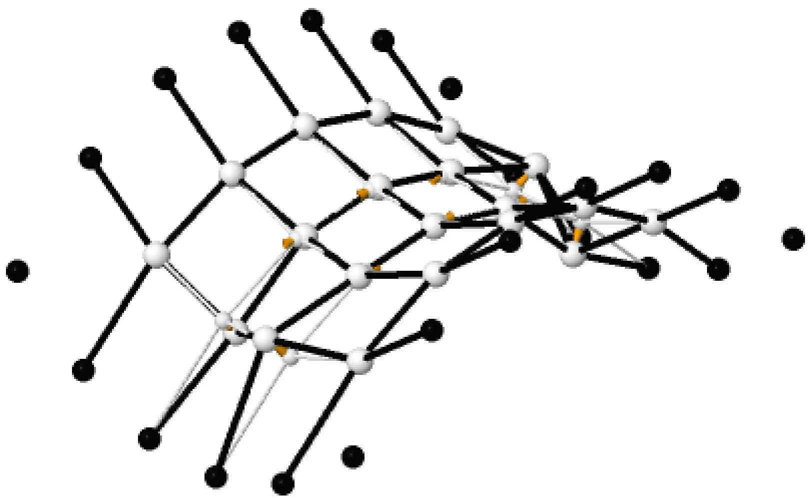


Lijeva jezgra:

Left kernel:
  Vector space of degree 60 and dimension 12

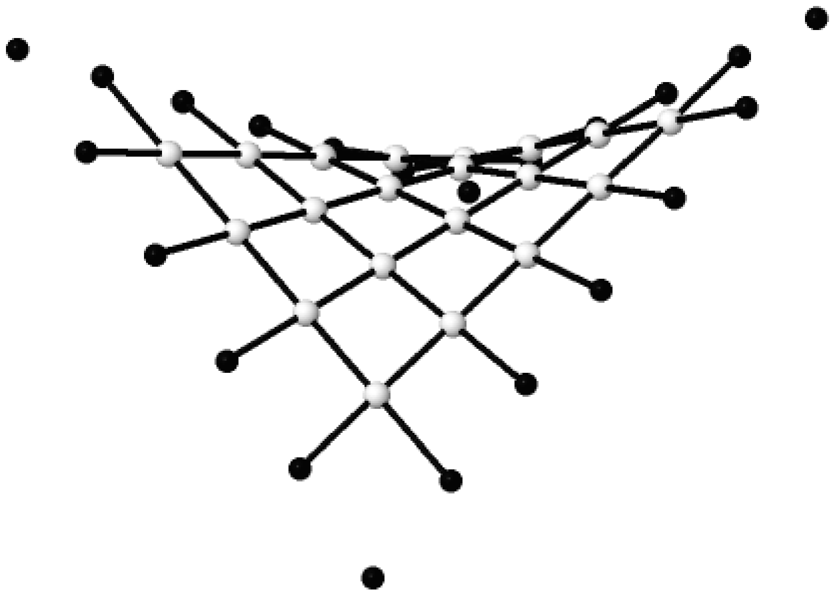
Mreža ima 12 stupnjeva slobode.

Slika pomaka:



Primjer 10.

Sljedeća mreža kabela ima jednaki broj slobodnih čvorova i štapova kao prethodni primjer, ali kabeli spajaju čvorove koji leže na pravcima.



Upravo zbog jednakog broja čvorova i štapova, Maxwell-ovo pravilo daje isti broj kao u prethodnom primjeru:

3 * 20 - 49 == 11 != 0

Ravnotežna je matrica:

60 x 49

Potprostor redaka je:

Row space:
  Vector space of degree 49 and dimension 40

Potprostor stupaca je:

Column space:
  Vector space of degree 60 and dimension 40

Jezgra:

Kernel:
  Vector space of degree 49 and dimension 9

Analiza potprostora pokazuje da se prethodna i ova mreža bitno razlikuju: sada imamo 9 stanja samonaprezanja.

Prikažimo neka od njih:

Bazni vektor 0:

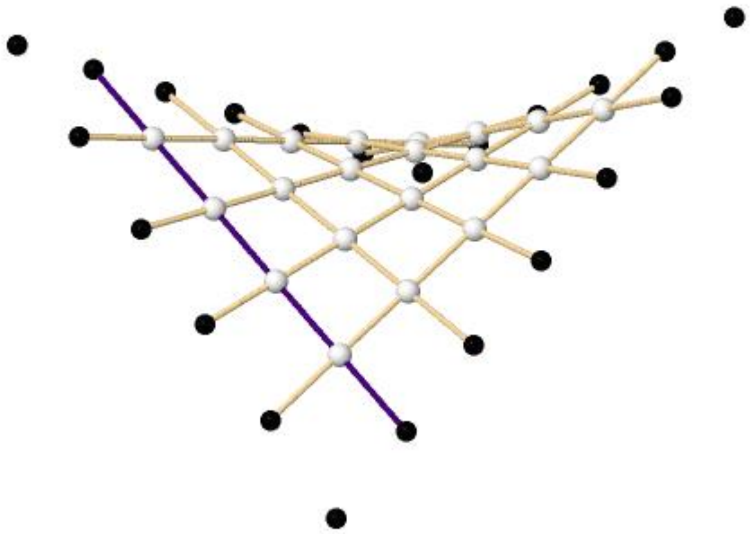
0: 1.0

1: 1.0

2: 1.0

3: 1.0

4: 1.0



Bazni vektor 8:

43: 1.0

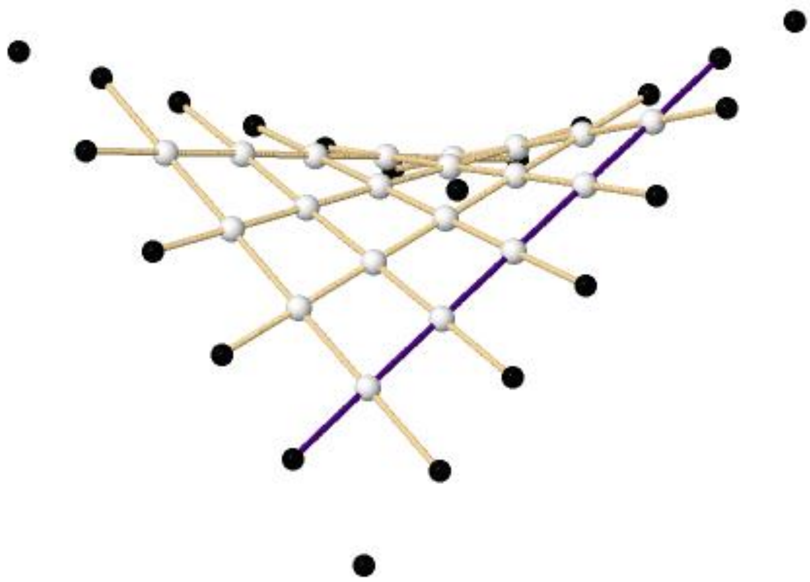
44: 1.0

45: 1.0

46: 1.0

47: 1.0

48: 1.0



Lijeva jezgra:

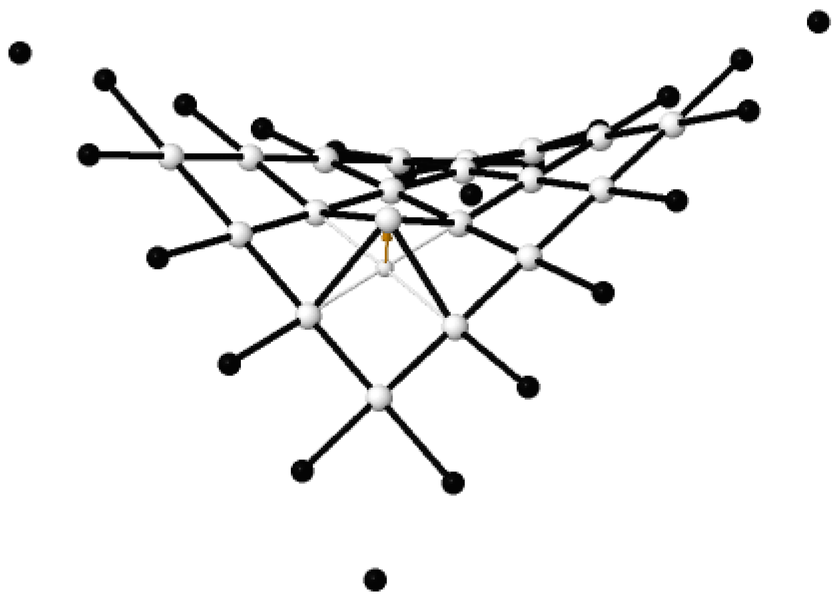
Left kernel:

Vector space of degree 60 and dimension 20

Ovdje također imamo bitnu razliku: imamo 20 stupnjeva slobode.

Slika pomaka mehanizma:

Za svaki stupanj slobode pomiče se samo jedan čvor.



7. ZAKLJUČAK

U radu smo se bavili sklopovima zglobnih štapova i njihovom statičkom i kinematičkom određenosti. Opisali smo jednadžbe statičke ravnoteže i jednadžbe kinematike malih sklopova te četiri potprostora ravnotežne matrice.

Proučavajući kako odrediti bazu za svaki od četiriju potprostora, zaključili smo kako ne postoji jedinstvena baza za bilo koji od četiriju potprostora: bilo koja linearna kombinacija linearno nezavisnih vektora će predstavljati jednako valjanu bazu.

Također smo opisali algoritam za izračunavanje vrijednosti r_A, a time i vrijednosti s i m i to smo predočili primjerom.

Na detaljno obrađenim primjerima vidjeli smo kako način povezivanja elemenata u sklop određuje njegovu statičku i kinematičku određenost/neodređenost, preuzimanje opterećenja te njegov prijenos na konstrukciju.

Na kraju možemo zaključiti kako postoje sustavi koji će zadovoljiti glavno pravilo za određenost pod imenom Maxwell-ovo pravilo, ali to nije dovoljno, te su oni statički i kinematički neodređeni, stoga je važno u proučavanju sustava i izvođenja konstrukcija i to uzeti u obzir jer su takvi sklopovi podložni samonaprezanju.

8. LITERATURA

[1] Pellegrino, S.; Calladine, C.R.: *Matrix analysis of statically and kinematicaly indeterminate frameworks*, International Journal of Solids and Structures 22 (4), 409-428, 1986.

[2] Došlić, T.; Sandrić, N.: *Matematika 1.: Skripta*, dostupno na mrežnoj stranici predmeta

[3] Fresl K.; Simović V.: *Građevna statika 1.: bilješke i skice s predavanja*, dostupno na mrežnoj stranici predmeta

[4] Smokrović, N.: *Metoda gustoće sile: završni rad*, Građevinski fakultet, Zagreb, 2011.

[5] Programski paket *Sage*, dostupno na adresi `www.sagemath.org`