GRAĐEVINSKI FAKULTET

sveučilište u zagrebu
university of zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

VLADIMIRA GIDAK

ZAVRŠNI RAD

KANIJEVA METODA

Zagreb, 2009.

SADRŽAJ:

1. UVOD

U ovom ćemo radu prikazati razlike između tri metoda relaksacije (Crossova metoda, Werner-Csonka metoda i Kanijeva metoda) i detaljno opisati Kanijevu metodu relaksacije, te njezinu primjenu prikazati u primjeru.

Kad se kod metode pomaka pojave više od dvije nepoznanice, rješavanje zadataka može zahtijevati veći računski rad. Stoga je u slučaju većeg broja nepoznanica često povoljno rješavati zadatak postupnim približavanjem tj. iteracijom. Pod iteracijom podrazumijevamo postupak za rješavanje nepoznatih veličina iz više jednadžbi u ponavljanom nizu računskih koraka. Pri tome se vrijednosti sve više približavaju konačnom rezultatu. Pošto svaki korak daje popravljene približne vrijednosti nepoznanica, to se u više koraka, unošenjem vrijednosti iz prethodnog koraka u jednadžbe, rezultati mogu proizvoljno točno približiti točnim vrijednostima. Potreban broj koraka ovisi o većoj ili manjoj brzini približavanja pojedinih rezultata točnim vrijednostima.

2. BIOGRAFIJA GAŠPARA KANIJA

(Zemun, 16.11.1910. – Lake Simcoe, Ontario, Kanada, 29.9.1968.)

Gašpar Kani, inženjer, sveučilišni profesor, rođen je u Zemunu, 1910. godine. Diplomirao je 1937. na Građevinskom odjelu Tehničkog fakulteta u Zagrebu. Od jeseni 1937. je asistent, a od svibnja 1943. docent na istom fakultetu, za predmete Čvrstoća i Elastičnost. U listopadu 1945. otpušten je iz državne službe. Odmah iza toga napušta Hrvatsku i zapošljava se u Institutu za ispitivanje materijala na Tehničkoj visokoj školi u Stuttgartu kao asistent znamenitog profesora Otta Grafa. Nakon toga se pridružuje profesoru Mörschu i radi u njegovom Institutu za čelične i masivne građevine. Kratko vrijeme imao je vlastitu tvrtku
Kani & Horvat koja je radila na poslijeratnoj obnovi Stuttgarta, a od 1949. radi u jednom od vodećih građevinskih poduzeća Wolfer & Goebel, specijalizirajući se za prednapete mostove. Krajem 1951. osniva vlastitu inženjersku tvrtku Kani & Holzapfel u kojoj je projektirao mnoge mostove i druge konstrukcije. Doktorirao je 1951. na Tehničkoj visokoj školi u Stuttgartu. Na temelju njegovog inženjerskog i znanstvenog rada, potvrđenoga u objavljivanim člancima i knjigama, izabran je za izvanrednog profesora na Građevinskom odjelu Sveučilišta u Torontu, gdje se i zaposlio 1960. Uskoro je unaprijeđen u zvanje redovitog profesora. Nastavio se intenzivnije baviti znanstvenim istraživanjima u teoriji konstrukcija. Objavljuje brojne radove. U nas je najpoznatiji po, u svijetu vrlo poznatoj, Kanijevoj metodi za proračun okvirnih konstrukcija.

Bio je veliki ljubitelj prirode, bavio se i sportom. Kao pasionirani jedriličar, nesretnim slučajem utopio se u rujnu 1968. u Lake Simcoe, jezeru udaljenom 100 km sjeverno od Toronta.

3. METODE RELAKSACIJE

3.1. CROSSOVA METODA

Crossova metoda je postupak statičkog proračuna okvirnih konstrukcija i kontinuiranih nosača, gdje se kod konstrukcija sa spriječenim translacijskim pomacima želi izbjeći iterativno rješavanje sustava jednadžbi metode pomaka, zamjenjujući ga uravnoteživanjem momenata u čvorovima. Cross je uočio da se to može napraviti ako se u osnovnom sistemu (gdje su svi čvorovi ukrućeni) otpušta po jedan čvor, dok svi ostali čvorovi ostaju ukrućeni. Otpuštati (relaksirati) čvor ovdje znači dati mu mogućnost zaokretanja. Nakon otpuštanja čvora momente u njemu priključenih štapova dobivene na osnovnom sistemu (momenti upetosti) uz dodatak vanjskog momenta (ako postoji) treba uravnotežiti te dio momenata koji nastaju tim uravnotežavanjem na krajevima štapova u tom čvoru prebaciti (prenijeti) na suprotne krajeve tih štapova. Razdioba neuravnoteženog momenta u čvoru provodi se pomoću razdjelnih koeficijenata koji se dobivaju iz omjera krutosti pojedinog štapa i sumarne krutosti svih štapova priključenih u čvoru. Prebacivanje se obavlja uz pomoć prijenosnih koeficijenata kojim je određeno koliki se dio momenta prebacuje na drugi kraj štapa kad se otpusti prvi kraj. Kod štapova s konstantnim mehaničkim i geometrijskim svojstvima po čitavoj duljini prijenosni koeficijent je ½. Postupak se ponavlja za svaki čvor i opetuje onoliko puta koliko je potrebno da se dobije rješenje zadovoljavajuće točnosti. Idući od čvora do čvora, postupak vrlo brzo konvergira za uobičajene dimenzije štapnih sustava.

Kod Crossove metode pretpostavlja se da je svaki put oslobođena potpuna upetost jednog čvora, zadržavajući pri tome potpunu upetost susjednih čvorova. Na taj se način oslobođeni rezultirajući moment upetosti raspodjeljuje na štapove koji se sastaju u čvoru, a potom se dio momenta prenosi na drugi kraj štapa. Nakon što se oslobođeni čvor ponovno upne, može se isti postupak ponoviti na sljedećem najpovoljnijem čvoru. Taj postupak treba ponavljati dok na svim čvorovima neuravnoteženi moment praktički ne postaje nula. Zbroj momenata upetosti za slučaj potpune upetosti krajeva štapa, uravnotežavajućih momenata i prenesenih momenata na svakom kraju štapa daje konačni moment.

Izvorno je Crossova metoda razrađena za konstrukcije sa spriječenim translacijskim pomacima čvorova. Međutim, može se primijeniti i na konstrukcijske sustave s mogućim translacijskim pomacima čvorova tako da se u prvoj fazi dodaju veze koje sprečavaju neovisne translacijske pomake, a iz uvjeta da nema sila u tim dodanim vezama dođe se do jednadžbi (ima ih onoliko koliko je dodano veza) iz kojih se izračunaju stvarni pomaci, pa iz njih i konačne vrijednosti momenata u štapovima. Crossov postupak se provodi na idealiziranoj shemi konstrukcije, što je vrlo zoran prikaz čitavog postupka s jasnim pregledom međurezultata i konačnih rezultata.

3.2. METODA WERNER-CSONKE

Metoda Werner-Csonka je iterativni postupak statičkog proračuna poluokvira opterećenog u čvorovima silama koje djeluju u smjeru grede, a okomito na stup. U ovoj metodi prvi korak je odabir osnovnog sistema u kojemu se spriječeni kutovi zaokreta, a translacijski pomaci čvorova nisu spriječeni. U tom prvom koraku (na osnovnom sistemu) ponašaju se grede poluokvira kao apsolutne krute. Svaka greda je sa stupom kruto spojena, a na drugoj strani ima zglobni ležaj pomičan okomito na pravac stupa. Na takvom osnovnom sistemu odrede se početni momenti (momenti upetosti) u čvorovima. Tako se u svakom čvoru pojavljuju gornji i donji momenti upetosti. Daljnji postupak proračuna provodi se tako što se postupno otpušta pojedini čvor, dok svi ostali ostaju sa spriječenim zaokretanjem, a neuravnoteženi moment u tom otpuštenom čvoru raspodijeli se na gredu i stupove. Ta se razdioba provodi s pomoću razdjelnih koeficijenata. Otpuštati čvor u ovom slučaju znači omogućavati zaokretanje čvora uz dopuštanje translacijskih pomaka na pravcu koji se poklapa s gredom. Iz tih uvjeta te iz mehaničkih i geometrijskih svojstava štapova dobiju se iznosi razdjelnih koeficijenata. Razlike momenata u stupovima prenose se na druge krajeve tih stupova. S obzirom na to da je čvor translacijski pomičan okomito na stup, prijenosni koeficijent je -1. Postupak za uobičajene dimenzije elemenata poluokvira vrlo brzo konvergira. Ova metoda se može primijeniti i za višeetažne i višepoljne okvire s bilo kakvim opterećenjem. U tom slučaju treba je kombinirati sa Crossovom metodom.

3.3. KANIJEVA METODA

Metoda je ograničena na sustave sa štapovima kojima je os ravna i čija su mehanička i geometrijska svojstva simetrična s obzirom na polovište osi. Unutar toga su obuhvaćeni proizvoljni sustavi s translacijski nepomičnim čvorovima i pravokutni okviri s neovisno pomičnim etažama. Kod Kanijeve metode najprije promatramo kruto upeti čvor, a svi susjedni se smatraju oslobođenima. Uravnotežavajući momenti svih susjednih krajeva štapova, koji na taj način djeluju na čvor, zbrajaju se s rezultirajućim momentom upetosti. Nakon ponovnog upinjanja susjednih čvorova i oslobađanja promatranog čvora uravnotežuje se zbroj momenata na krajevima štapova koje se sastaju u čvoru. Ovaj postupak treba nastaviti tako dugo dok uravnotežavajući momenti ne zadrže konstantnu vrijednost.

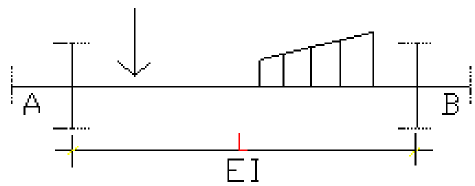
Osnovne nepoznanice Kanijeva postupka proporcionalne su s nepoznanicama metode pomaka. Umjesto kuta zaokreta čvora zapisuje se čvorni moment, tj. zbroj momenata koji pri zaokretu čvora djeluje na priključene štapove. Umjesto mjere relativnog pomaka krajeva greda jednog kata uvodi se katni moment, tj. zbroj svih momenata koji djeluju na krajeve štapova jednog kata pri relativnom pomaku greda. Pri provođenju iteracije ne zapisuju se osnovne nepoznanice nego podaci o momentima na krajevima pojedinih štapova. Zbog simetrije, na krajevima se štapova pri pomaku pojavljuju jednaki momenti, pa je dovoljno zapisati samo jedan podatak. Doprinosi od zaokreta zapisuju se samo za krajeve uz pripadni čvor; pri čemu je posebnost što se zapisuje samo polovični iznos, dok se uz suprotni kraj štapa ne zapisuje pripadni moment. Pri određivanju nove vrijednosti za neki zaokret pribrajaju se momentima upetosti podatci zapisani uz krajeve štapova koji se nalaze uz priključene čvorove i raspoređuju na krajeve uz promatrani čvor. Zbog zapisivanja polovičnog iznosa, zbroj koeficijenata raspodjele čvora iznosi $\frac{1}{2}$. Zbroj momenata upetosti, dvostrukog uravnotežavajućeg momenta na kraju štapa neposredno do čvora i jednostrukog uravnotežavajućeg momenta na drugom kraju štapa daje traženi moment na kraju štapa.

4. KANIJEVA METODA

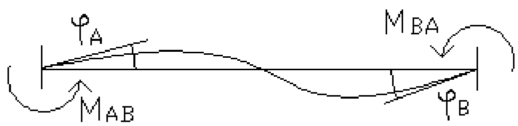
4.1. OSNOVNI POJMOVI

4.1.1. ELEMENTI BEZ TRANSLACIJSKI POMIČNIH LEŽAJEVA

Neka AB prikazuje gredu u okviru ili kontinuiranom nosaču pod vertikalnim opterećenjem (slika 1.). Za sada pretpostavljamo da ležajevi nemaju translacijskih pomaka i da se krajevi A i B zaokreću za kutove φ_A i φ_B. Krajnje momente grede AB označi ćemo sa M_{AB} i M_{BA}.



Slika 1.



Slika 2. Opće stanje pomaka elementa pod opterećenjem

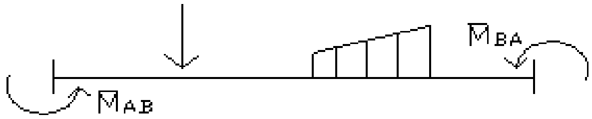
DOGOVOR O PREDZNACIMA

Slijedimo isti dogovor o predznacima kao u metodi pomaka:

1. Zaokreti krajeva suprotni od vrtnje kazaljke na satu su pozitivni
2. Momenti na krajevima koji vrte obrnuto od kazaljke na satu su pozitivni

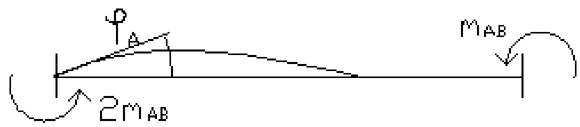
Stvarni momenti u gredi AB mogu se smatrati momentima koji su nastali zbrajanjem sljedećih triju komponenata:

1) Momente upetosti za stanje potpune upetosti označavamo sa M_{AB} i M_{BA} na krajevima A i B



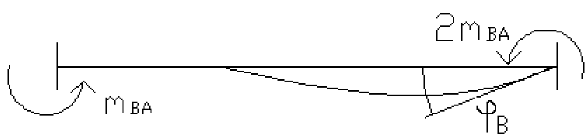
Slika 3.

2) Ležaj A zaokreće se za kut φ_A izazivajući moment $2m_{AB}$ na ležaju A i m_{AB} na ležaju B; moment m_{AB} nazivamo rotacijskim momentom ležaja A



Slika 4.

3) Ležaj B zaokreće se za kut φ_B i izaziva moment $2m_{BA}$ na ležaju B i moment m_{BA} na ležaju A; moment m_{BA} nazivamo rotacijskim momentom ležaja B



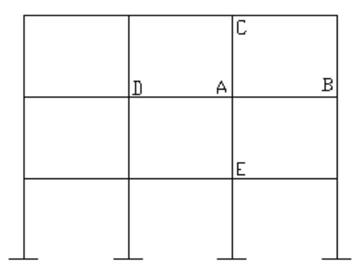
Slika 5.

Konačni momenti M_{AB} i M_{BA} mogu se izraziti kao superpozicija triju momenata:

$$M_{AB} = M_{AB} + 2m_{AB} + m_{BA}$$

$$M_{BA} = M_{BA} + 2m_{BA} + m_{AB} \tag{1}$$

Za element AB, kada se odnosimo na moment M_{AB} na ležaju A, ležaj A smatramo bližim krajem, a ležaj B kao daljnji i obrnuto. Prema tome, u jednadžbi za konačni moment M_{AB} može se reći da je pravi moment na bližem kraju algebarski zbroj momenta upetosti na bližem kraju zbog primijenjenog opterećenja, dvostrukog rotacijskog momenta bližeg kraja i rotacijskog momenta daljnjeg kraja.



Slika 6. Višekatni okvir

Analizirajući višekatni okvir, ako se ne događaju translacije ležaja, jednadžba (1) primjenjuje se za sve elemente. Uzimamo u obzir različite elemente u čvoru A.

Momenti u A za elemente koji se sastaju u A su:

$M_{AB} = M_{AB} + 2m_{AB} + m_{BA}$,

$M_{AC} = M_{AC} + 2m_{AC} + m_{CA}$,

$M_{AD} = M_{AD} + 2m_{AD} + m_{DA}$,

$M_{AE} = M_{AE} + 2m_{AE} + m_{EA}$. (2)

Zbog ravnoteže čvora A, suma krajnjih momenata u A mora biti nula:

$\Sigma M_{AB} = 0$ ili

$\Sigma M_{AB} + 2\Sigma m_{AB} + \Sigma m_{BA} = 0$, (3)

gdje su:

- ΣM_{AB} - algebarski zbroj momenata upetosti u čvoru A od svih elemenata koji se sastaju u A,
- Σm_{AB} - algebarski zbroj rotacijskih momenata u čvoru A od svih elemenata koji se sastaju u A,
- Σm_{BA} - algebarski zbroj rotacijskih momenata daljnjih krajeva elemenata koji se sastaju u A.

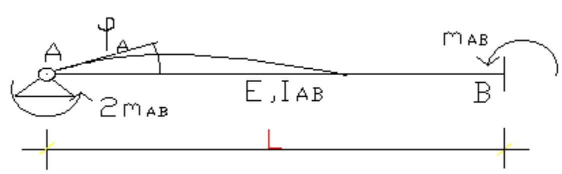
Iz jednadžbe (3) dobivamo:

$\Sigma m_{AB} = (-\frac{1}{2}) \cdot (\Sigma M_{AB} + \Sigma m_{BA})$ ili

$\Sigma m_{AB} = (-\frac{1}{2}) \cdot (M_A + \Sigma m_{BA})$,

gdje je $M_A = \Sigma M_{AB}$ – zbroj momenata upetosti u čvoru A.

Iz odnosa moment-rotacija za gredu imamo:



Slika 7.

$2m_{AB} = \frac{4 \cdot E \cdot I \cdot \varphi_A}{L} = 4 \cdot E \cdot k_{AB} \cdot \varphi_A$,

gdje je : $k_{AB} = \frac{I_{AB}}{L_{AB}}$ - relativna krutost elementa AB,

$m_{AB} = 2 \cdot E \cdot k_{AB} \cdot \varphi_A$. (4)

U čvoru A svi elementi su podvrgnuti istoj rotaciji φ_A, a pretpostavljajući da je E isti za sve dobivamo:

$$\Sigma m_{AB} = 2 \cdot E \cdot \varphi_A \cdot \Sigma k_{AB} \tag{5}$$

Dijeleći jednadžbu (4) jednadžbom (5) dobivamo:

$\frac{m_{AB}}{\Sigma m_{AB}} = \frac{k_{AB}}{\Sigma k_{AB}}$ ili

$$m_{AB} = \frac{k_{AB}}{\Sigma k_{AB}} \cdot \Sigma m_{AB}\text{, te} \tag{6}$$

$$m_{AB} = (-\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{k_{AB}}{\Sigma k_{AB}} \cdot (M_A + \Sigma m_{BA}). \tag{7}$$

Izraz $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{k_{AB}}{\Sigma k_{AB}}$ poznat je kao rotacijski koeficijent za element AB u čvoru A.

Označit ćemo ga sa μ_{AB}

$$\mu_{AB} = (-\tfrac{1}{2}) \cdot \frac{k_{AB}}{\Sigma k_{AB}}. \tag{8}$$

Jednadžbu (7) sada možemo pisati:

$$m_{AB} = \mu_{AB} \cdot (M_A + \Sigma m_{BA}). \tag{9}$$

U ovoj je jednadžbi zbroj momenta upetosti M_A poznata veličina. Momenti m_{BA} na daljnjim krajevima nisu poznati i zbog toga se mogu uzeti kao nula. Sa sličnom pretpostavkom, rotacijski momenti ostalih elemenata su također određeni. S približnim vrijednostima rotacijskih momenata, mogu se odrediti točnije vrijednosti rotacionih momenata u A za element AB prema jednadžbi (9).

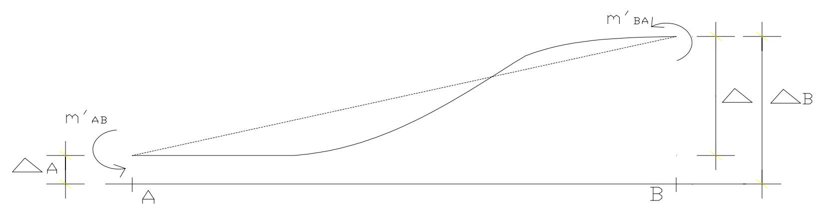
Spomenuti se postupak provodi dok se ne dobiju željene približne vrijednosti rotacijskih momenata. Nakon dobivenog željenog stupnja točnosti vrijednosti rotacijskih momenata, konačni momenti se mogu izračunati pomoću jednadžbe (2).

NEKE VAŽNE UPUTE:

1) Suma rotacijskih koeficijenata u čvoru je $(-\frac{1}{2})$.
2) Ako je ležaj elementa upet, rotacija tog kraja je nula, pa je i rotacijski moment nula.
3) Ako je ležaj elementa zglobno pridržan, smatramo ga fiksnim i uzimamo relativnu krutost kao $(\frac{3}{4})\,\frac{I}{L}$.

4.1.2. ELEMENTI S TRANSLACIJSKI POMIČNIM LEŽAJEVIMA

Slika 8. prikazuje element AB u okviru koji ima poprečne pomake u A i B tako da je relativni pomak $\Delta = (\Delta_B - \Delta_A)$. Treba napomenuti da su u ležajevima spriječene rotacije.



Slika 8.

Momenti na krajevima koji odgovaraju ovom pomaku su:

$$m'_{AB} = m'_{BA} = -\ \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{L^2}. \tag{10}$$

Kada se translacija ležaja događa s rotacijom, ukupni momenti na krajevima su:

$$M_{AB} = M_{AB} + 2m_{AB} + m_{BA} + m'_{AB}\ , \tag{11}$$
$$M_{BA} = M_{BA} + 2m_{BA} + m_{AB} + m'_{BA}\ . \tag{12}$$

Izraz $m'_{AB} = m'_{BA}$ nazivamo momentom pomaka ili translacijskim momentom elementa AB.

Ako je A čvor u kojem se sastaju više elemenata, onda jednadžba ravnoteže momenta za čvor A glasi

$$\Sigma M_{AB} = 0 \qquad \text{tj.}$$
$$\Sigma M_{AB} + 2\Sigma m_{AB} + \Sigma m_{BA} + \Sigma m'_{AB} = 0, \text{ pa je} \tag{13}$$
$$\Sigma m_{AB} = \left(-\ \frac{1}{2}\right) \cdot (\Sigma M_{AB} + \Sigma m_{AB} + \Sigma m'_{AB}), \tag{14}$$

iz čega slijedi:

$$m_{AB} = \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} \cdot \Sigma m_{AB} \ \text{ ili} \tag{15}$$
$$m_{AB} = \frac{k_{AB}}{\sum k_{AB}} \cdot \left(-\ \frac{1}{2}\right) \cdot (\Sigma M_{AB} + \Sigma m_{AB} + \Sigma m'_{AB})\ , \tag{16}$$

te je, na kraju,

$$m_{AB} = \mu_{AB} \cdot (M_A + \Sigma m_{BA} + \Sigma m'_{AB}),$$
$$m_{BA} = \mu_{AB} \cdot (M_B + \Sigma m_{AB} + \Sigma m'_{BA}). \tag{17}$$

Pomoću ovog izraza momenti rotacije se mogu odrediti iteracijskim postupkom. Ako su bočni pomaci poznati, momenti pomaka mogu se odrediti iz jednadžbe (10). Ako bočni pomaci nisu poznati treba primijeniti dodatne jednadžbe.

4.2. OKVIR

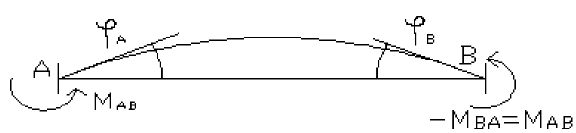
4.2.1. OKVIRI BEZ BOČNIH POMAKA LEŽAJA

Okviri kojima su bočni pomaci spriječeni analiziramo isto kao kontinuiranu gredu. Bočni pomak je spriječen ili odgovarajućim vezama ili zbog simetrije okvira i opterećenja.

4.2.2. SIMETRIČNI OKVIRI POD SIMETRIČNIM OPTEREĆENJEM

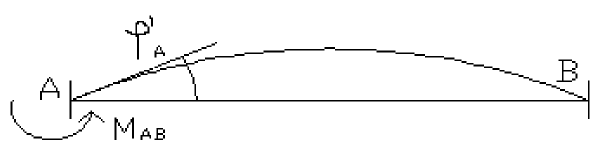
Imamo dva slučaja simetričnosti : okviri u kojima os simetrije prolazi kroz polovište greda i okviri u kojima os simetrije prolazi kroz stupove u sredini etaže.

SLUČAJ 1. Os simetrije prolazi kroz polovište grede.

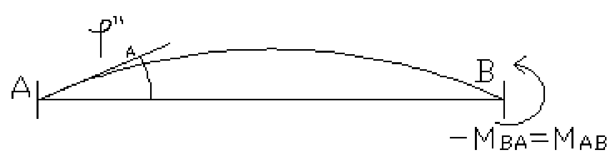


Slika 9.

Neka je AB bilo koji horizontalni element okvira kroz koji prolazi os simetrije i neka su M_{AB} i M_{BA} krajnji momenti. Zbog simetrije deformacija, M_{AB} i M_{BA} su po iznosu isti, ali različitog smisla vrtnje.



Slika 10. Rotacija ležaja A zbog M_{AB}



Slika 11. Rotacija ležaja A zbog M_{BA}

Kut zaokreta u A, φ_A dobiva se superpozicijom rotacija zbog M_{AB} i $-M_{BA}$, pa imamo

$$\varphi_A = \varphi'_A + \varphi''_A. \tag{18}$$

Iz odnosa momenata rotacije:

$$\varphi'_A = \frac{M_{AB} \cdot L}{3EI}, \tag{19}$$

$$\varphi''_A = - \frac{M_{BA} \cdot L}{6EI} = \frac{M_{AB} \cdot L}{6EI}, \tag{20}$$

$$\varphi_A = \varphi'_A + \varphi''_A = \frac{M_{AB} \cdot L}{2EI}. \tag{21}$$

Neka element AB bude zamijenjen elementom AB' čiji se kraj A zaokreće za φ_A zbog momenta M_{AB} primijenjenog na kraju A dok je kraj B' nepomičan.

Slika 12. Zamijenjeni član AB'

Za ovakvo stanje odnos sila pomaka je

$$\varphi_A = \frac{M_{AB} \cdot L'}{4EI}. \tag{22}$$

Odnos rotacije originalne grede i zamijenjene

$$\varphi_A = \frac{M_{AB} \cdot L}{2EI} = \frac{M_{AB} \cdot L'}{4EI}, \tag{23}$$

ili $$\frac{I}{L} = \frac{2I}{L'}, \tag{24}$$

$$k = 2 \cdot k' \qquad k' = \frac{k}{2} \tag{25}$$

Ako je k relativna krutost originalnog elementa AB, onda taj element možemo zamijeniti elementom AB' krutosti k/2. Sa zamijenjenim elementom AB', potrebna analiza se može provesti samo za pola okvira s obzirom na os simetrije kao upeti kraj.

SLUČAJ 2. Os simetrije prolazi kroz etaže.

Ovaj se slučaj događa kada je broj etaža paran. Zbog simetrije opterećenja i okvira, ležajevi na osi simetrije se neće rotirati. Stoga, analiziramo samo pola okvira.

4.2.3. OKVIRI S BOČNIM POMACIMA LEŽAJEVA

4.2.3.1. VERTIKALNO OPTEREĆENJE

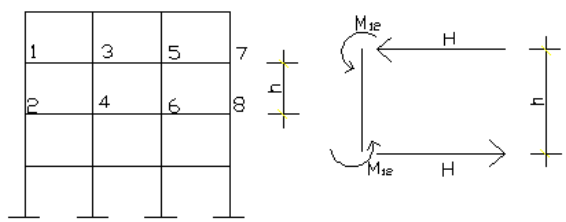
Neka 1-2 predstavlja vertikalni element kata u višekatnom okviru (slika 13.). M_{12} i M_{21} su krajnji momenti u 1 i 2.

Horizontalnu silu ostvarenu u okviru na 1-2 označimo sa H, a visinu kata sa h.
Iz jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na dno (ili na vrh) stupa,

$$M_{12} + M_{21} + H(h) = 0, \tag{26}$$

dobivamo

$$H = -\frac{(M_{12}+M_{21})}{h}. \tag{27}$$



Slika 13.

Ako primijenimo jednadžbu (27) za sve stupove kata bit će:

$$\Sigma H = -\frac{(\Sigma M_{12}+\Sigma M_{21})}{h}. \tag{28}$$

Općenito, ΣH predstavlja zbroj poprečnih sila u svim stupovima kata. Ako sa Q_n označimo zbroj poprečnih sila u n-tom katu, možemo pisati

$$\Sigma Q_n = -\frac{(\Sigma M_{12}+\Sigma M_{21})}{h_n}, \tag{29}$$

gdje je: h_n - visina stupa n-tog kata,

ΣM_{12} - zbroj momenata na gornjem kraju svih stupova na n-tom katu,

ΣM_{21} - zbroj momenata na donjem kraju svih stupova na n-tom katu.

Očito je $Q_n = 0$ kada je vanjsko opterećenje vertikalno.

Svi stupovi n-tog kata su iste visine h, pa je

$$\Sigma M_{12} + \Sigma M_{21} = 0 \quad \text{za n-ti kat} \tag{30}$$

Znamo da je osnovni izraz za krajnje momente za element 1-2:

$$M_{12} = M_{12} + 2m_{12} + m_{21} + m'_{12},$$
$$M_{21} = M_{21} + 2m_{21} + m_{12} + m'_{21}. \qquad (31)$$

Za stup vrijedi $M_{12} = M_{21} = 0$ zato što je opterećenje na okvir vertikalno.

Stoga je

$$\Sigma M_{12} + \Sigma M_{21} = 3\Sigma m_{12} + 3\Sigma m_{21} + 2\Sigma m'_{12}, \qquad (32)$$

a kako je $\Sigma M_{12} + \Sigma M_{21} = 0$, (33)

slijedi $3\Sigma m_{12} + 3\Sigma m_{21} + 2\Sigma m'_{12} = 0$ (34)

Ili $\Sigma m'_{12} = -\frac{3}{2} \cdot (\Sigma m_{12} + \Sigma m_{21})$ (35)

Ova jednadžba daje odnos rotacijskih i translacijskih momenata.

Znamo da je bočni pomak Δ isti za sve stupove na bilo kojem katu, pa je prema tome translacijski moment za bilo koji stup:

$$m'_{12} = \frac{6EI \cdot \Delta}{h^2}. \qquad (36)$$

Translacijski moment stupa na katu proporcionalan je relativnoj krutosti k=I/h pa imamo:

$$\frac{m'_{12}}{\Sigma m'_{12}} = \frac{k_{12}}{\Sigma k_{12}} \quad \text{ili} \quad m'_{12} = \frac{k_{12}}{\Sigma k_{12}} \cdot \Sigma m'_{12} \qquad (37)$$

Uvođenjem $\Sigma m'_{12}$ iz jednadžbe (35) možemo pisati jednadžbu (37):

$$m'_{12} = \frac{k_{12}}{\Sigma k_{12}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (\Sigma m_{12} + \Sigma m_{21}) \quad \text{ili} \qquad (38)$$
$$m'_{12} = \upsilon_{12} \cdot (\Sigma m_{12} + \Sigma m_{21}), \qquad (39)$$

gdje je: $\upsilon_{12} = \frac{k_{12}}{\Sigma k_{12}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ - translacijski koeficijent elementa 1-2.

Može se primijetiti da u jednadžbi (39) $(\Sigma m_{12} + \Sigma m_{21})$ predstavlja sumu rotacijskih momenata na gornjem i donjem kraju stupa kata koji se analizira.

Σk_{12} - zbroj relativne krutosti svih stupova kata koji se analizira.

Očito će zbroj translacijskih koeficijenata svih stupova kata biti jednak $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

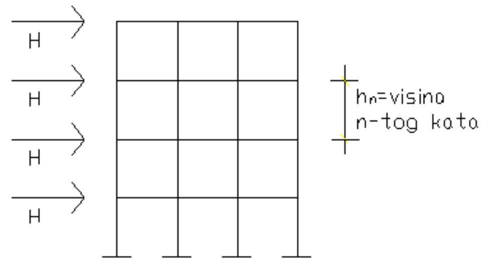
Sumiranjem svega, različiti odnosi dobiveni prije su:

$$m_{12} = \mu_{12} \cdot (M_1 + \Sigma m_{21} + \Sigma m'_{12}),$$
$$m_{21} = \mu_{21} \cdot (M_2 + \Sigma m_{12} + \Sigma m'_{21}), \qquad (40)$$
$$m'_{12} = m'_{21} = \upsilon_{12} \cdot (\Sigma m_{12} + \Sigma m_{21}), \qquad (41)$$
$$M_{12} = M_{12} + 2m_{12} + m_{21} + m'_{12},$$
$$M_{21} = M_{21} + 2m_{21} + m_{12} + m'_{21}. \qquad (42)$$

Upotrebom jednadžbi (40) i (41) rotacijski i translacijski momenti mogu se odrediti iteracijom svih katova po redu. Kada su prihvatljivi iznosi rotacijskih i translacijskih momenata poznati, konačni momenti mogu se odrediti pomoću jednadžbi (42).

4.2.3.2. HORIZONTALNO OPTEREĆENJE U ČVOROVIMA

Za okvir pod horizontalnim opterećenjem vrijedi $\Sigma H = Q_n$.



Slika 14.

Ako su svi stupovi visine h_n, možemo pisati:

$\Sigma M = 0$,

$\Sigma M_{12} + \Sigma M_{21} + Q_n \cdot h_n = 0$ ili (43)

$Q_n \cdot h_n = -(\Sigma M_{12} + \Sigma M_{21})$. (44)

Ako koristimo jednadžbu (31) i ako znamo da za stupove vrijedi $M_{12} = M_{21} = 0$, imamo:

$Q_n \cdot h_n = -\sum_n (3 \cdot (m_{12} + m_{21}) + 2m'_{12})$ (45)

ili

$\frac{Q_n \cdot h_n}{3} = -\sum_n [(m_{12} + m_{21}) + \frac{2}{3} m'_{12}]$, (46)

pa je

$\Sigma m'_{12} = -\frac{3}{2} \cdot [\frac{Q_n x h_n}{3} + \sum_n [(m_{12} + m_{21})]$, (47)

ili

$\Sigma m'_{12} = -\frac{3}{2} \cdot [M_n + \sum_n [(m_{12} + m_{21})]$, (48)

gdje je

$M_n = \frac{Q_n \cdot h_n}{3}$ katni moment, pozitivan kada Q djeluje s desna na lijevo.

Iz jednadžbe (38) možemo pisati:

$m'_{12} = \frac{k_{12}}{\Sigma k_{12}} \text{ x } (-\frac{3}{2}) \text{ x } [M_n + \sum_n [(m_{12} + m_{21})]$ (49)

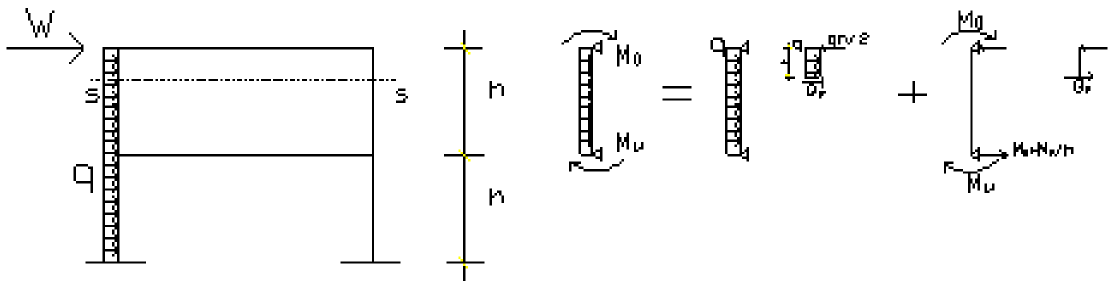
ili

$m'_{12} = \upsilon_{12} \cdot [M_n + \sum_n [(m_{12} + m_{21})]$ (50)

Analiza višekatnog okvira s horizontalnim opterećenjem razlikuje se od okvira s vertikalnim opterećenjem samo po činjenici da u obavljanju temeljne operacije za određivanje translacijskih momenata zbroj rotacijskih momenata svih elemenata kraja kata mora sadržavati katni moment M_n.

4.2.3.3. HORIZONTALNO OPTEREĆENJE NA STUPOVIMA

Horizontalno opterećenje na stupu uzrokuje promjenu poprečne sile po duljini stupa. Ako stup presiječemo, moramo voditi računa o poprečnoj sili na mjestu presjeka. Zbog opterećenja u polju dobivamo na proizvoljnom mjestu na udaljenosti y od gornjeg kraja stupa poprečnu silu Q_{0y}, a zbog opterećenja krajnjim momentima poprečnu silu Q_M.



Slika 15. Okvir s opterećenjem na stupu

Jednadžba ravnoteže na proizvoljnom mjestu glasi:

$$\Sigma Q_M = \Sigma P_n + \Sigma(Q_{0y} + Q_M) = 0. \tag{51}$$

Ako momente na krajevima štapa označimo sa M_0 i M_n, možemo pisati

$$\Sigma Q_M = \frac{\Sigma(M_0+M_n)}{h}. \tag{52}$$

Potrebno je odrediti Q_{0y} tako da odredimo onaj poprečni presjek grede na dva ležaja u kojem je Q_{0y} jednak nuli.

Jednadžba ravnoteže glasi:

$$\Sigma H = \sum_{s-s} P_n + \Sigma Q_M = \sum_{s-s} P_n + \frac{\Sigma(M_0+M_n)}{h} = 0, \tag{53}$$

$$\Sigma H = \Sigma P_n + \Sigma Q_{0y} + \Sigma Q_M = 0, \tag{54}$$

gdje je

$$\Sigma P_n = W + q\cdot y\ , \tag{55}$$

$$\Sigma Q_{0y} = \frac{q\cdot y}{2} - q\cdot y\ , \tag{56}$$

pa imamo

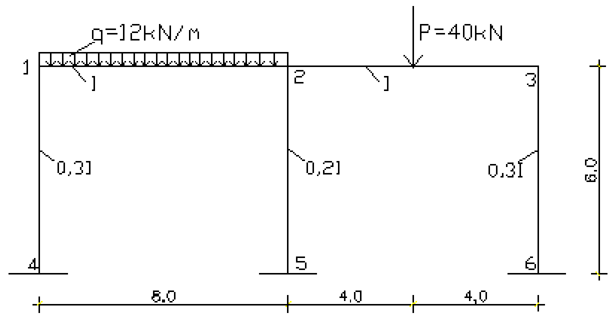
$$\Sigma H = W + q\cdot y + \frac{q\cdot y}{2} - q\cdot y + \frac{\Sigma(M_0+M_n)}{h} = W + \frac{q\cdot y}{2} + \frac{\Sigma(M_0+M_n)}{h} = 0. \tag{57}$$

Jednadžba (57) ujedno je i jednadžba za određivanje položaja nul-točaka poprečne sile zbog opterećenja u polju, te za njih, kao i za točke presjeka, postavimo uvjet za ravnotežu ΣH = 0.

5. PRIMJENA KANIJEVE METODE U ZADATKU

5.1. ZADATAK 1

Za šesterostruko statički neodređen okvir, prikazan na slici 16, treba za dano opterećenje odrediti dijagram momenata savijanja. Odnosi momenata inercije određeni su već prethodnim dimenzioniranjem.



Slika 16. Okvir s tri stupa i vertikalnim opterećenjem

Momenti inercije i krutosti štapova

$I = 800\ cm^4$ $\qquad$ $I = \frac{b \cdot h^3}{12}$

$k_{12} = k_{23} = \frac{800}{800} = 1{,}0$ $\qquad$ $k_{ij} = \frac{I}{h}$

$k_{14} = k_{36} = \frac{0{,}3 \cdot 800}{600} = 0{,}4$

$k_{25} = \frac{0{,}2 \cdot 800}{600} = 0{,}267$

Translacijski koeficijent elementa, za slučaj kada su stupovi jednakih duljina, računamo iz odnosa krutosti jednog stupa prema zbroju krutosti svih stupova u sustavu ili iz odnosa momenata inercije jednog stupa prema zbroju momenata inercije svih stupova.

$\upsilon_{14} = \upsilon_{36} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}3}{0{,}3+0{,}2+0{,}3} = -0{,}562$

$\upsilon_{25} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}3+0{,}2+0{,}3} = -0{,}376$

Kontrola: $\Sigma\upsilon = -0{,}562 \cdot 2 - 0{,}376 = -1{,}5$.

Rotacijski koeficijent za pojedine elemente računamo prema jednadžbi (8):

$\mu_{ij} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}$.

$\mu_{14} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}4}{0{,}4+1{,}0} = -0{,}143$ $\qquad$ $\mu_{12} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}0}{0{,}4+1{,}0} = -0{,}357$

$\mu_{21} = \mu_{23} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1,0}{1,0+0,267+1,0} = -0,2205$ $\mu_{25} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,267}{1,0+0,267+1,0} = -0,059$

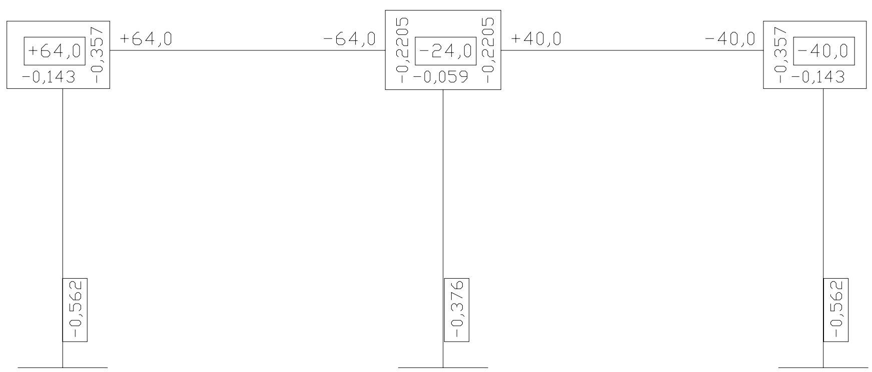
$\mu_{32} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1,0}{1,0+0,4} = -0,357$ $\mu_{36} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,4}{0,4+1,0} = -0,143$

Momenti upetosti, za odgovarajuće elemente, iznose:

$$M_{12} = -M_{21} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{12 \cdot 8^2}{12} = 64 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -M_{32} = \frac{P \cdot l}{8} = \frac{40 \cdot 8}{8} = 40 \text{ kNm}$$

Vrijednosti momenata upetosti upisujemo na kraj štapa pokraj pripadajućeg čvora, a vrijednosti rotacijskog koeficijenta u shemu prema slici 17. Zbroj momenata upetosti u svakom čvoru upisujemo pokraj rotacijskih koeficijenata. Translacijske koeficijente zapisujemo na odgovarajući stup.



Slika 17. Momenti upetosti, faktori translacije i rotacijski faktori

Rotacijske momente računamo prema jednadžbi (17) provođenjem iteracije.

ČVOR 1

$m_{14} = \mu_{14} \cdot (M_{14} + \Sigma m_{41} + \Sigma m'_{14}) = -0,143 \cdot (64) = -9,2$ kNm

$m_{12} = -0,357 \cdot (64) = -22,8$ kNm

ČVOR 3

$m_{36} = -0,143 \cdot (-40) = +5,7$ kNm

$m_{32} = -0,357 \cdot (-40) = +14,3$ kNm

ČVOR 2

$m_{25} = -0,059 \cdot (-24-22,8+14,3) = +2,0$ kNm

$m_{23} = m_{21} = -0,2205 \cdot (-24-22,8+14,3) = +7,4$ kNm

STUPOVI

$m'_{14} = m'_{36} = -0{,}562\cdot(-9{,}2+2{,}0+5{,}7) = +0{,}8$ kNm

$m'_{25} = -0{,}376\cdot(-9{,}2+2{,}0+5{,}7) = +0{,}6$ kNm

ČVOR 1

$m_{12} = -0{,}357\cdot(64+7{,}4) = -25{,}8$ kNm

$m_{14} = -0{,}143\cdot(64+7{,}4) = -10{,}3$ kNm

ČVOR 3

$m_{32} = -0{,}357\cdot(-40+7{,}4+0{,}8) = +11{,}6$ kNm

$m_{36} = -0{,}143\cdot(-40+7{,}4+0{,}8) = +4{,}6$ kNm

ČVOR 2

$m_{25} = -0{,}059\cdot(-24-25{,}8+14{,}3) = +2{,}1$ kNm

$m_{21} = m_{23} = -0{,}2205\cdot(-24-22{,}8+14{,}3) = +7{,}7$ kNm

STUPOVI

$m'_{14} = m'_{36} = -0{,}562\cdot(-3{,}6) = +2{,}1$ kNm

$m'_{25} = -0{,}376\cdot(-3{,}6) = +1{,}4$ kNm

ČVOR 1

$m_{12} = -0{,}357\cdot(64+7{,}7+2{,}1) = -26{,}4$ kNm

$m_{14} = -0{,}143\cdot(64+7{,}7+2{,}1) = -10{,}6$ kNm

ČVOR 3

$m_{32} = -0{,}357\cdot(-40+7{,}7+2{,}1) = +10{,}6$ kNm

$m_{36} = -0{,}143\cdot(-40+7{,}7+2{,}1) = +4{,}3$ kNm

ČVOR 2

$m_{25} = -0{,}059\cdot(-24-26{,}4+1{,}4+10{,}6) = +2{,}26$ kNm

$m_{21} = m_{23} = -0{,}2205\cdot(-24-26{,}4+1{,}4+10{,}6) = +8{,}3$ kNm

STUPOVI

$m'_{14} = m'_{36} = -0{,}562\cdot(-10{,}6+2{,}2+4{,}3) = +2{,}3$ kNm

$m'_{25} = -0{,}376\cdot(-10{,}6+2{,}2+4{,}3) = +1{,}54$ kNm

ČVOR 1

m_{12} = -0,357·(64+8,3+2,3) = -26,6 kNm

m_{14} = -0,143·(64+8,3+2,3) = -10,7 kNm

ČVOR 3

m_{32} = -0,357·(-40+8,3+2,3) = +10,4 kNm

m_{36} = -0,143·(-40+8,3+2,3) = +4,2 kNm

ČVOR 2

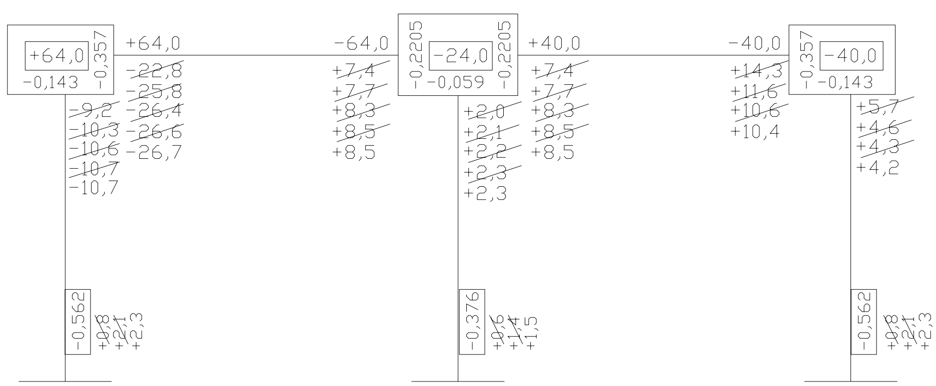
m_{25} = -0,059·(-24-26,6+1,5+10,4) = +2,3 kNm

m_{21} = m_{23} = -0,2205·(-24-26,6+1,5+10,4) = +8,5 kNm

STUPOVI

m'_{14} = m'_{36} = -0,562·(-10,7+2,3+4,2) = +2,3 kNm

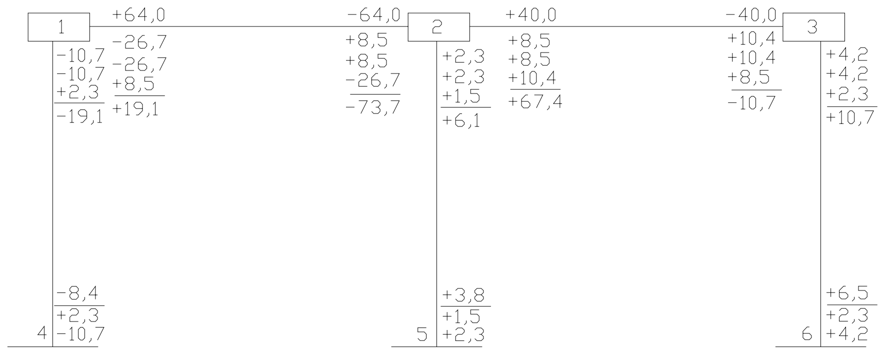
m'_{25} = -0,376·(-10,7+2,3+4,2) = +1,5 kNm



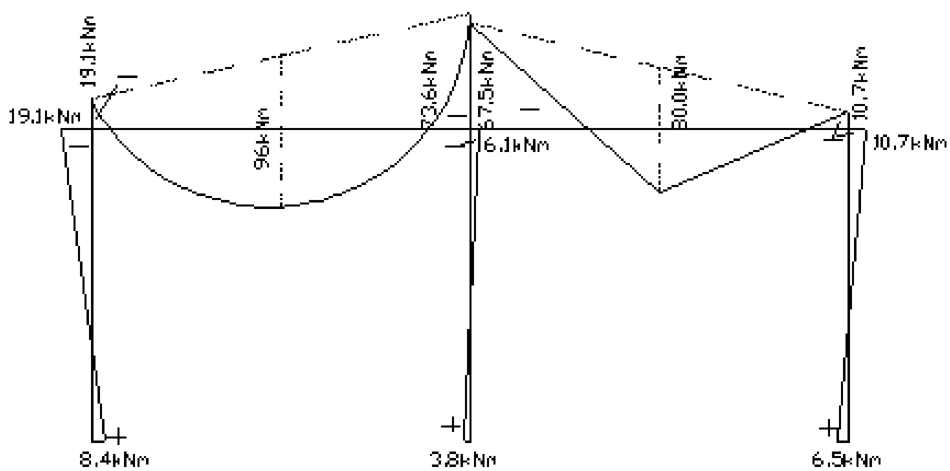
Slika 18. Određivanje momenata rotacije čvorova i štapova

Nakon izračunavanja ovih vrijednosti iteracija se prekida, jer se više ne očekuju neke bitne promjene numeričkih vrijednosti. Slika 19 prikazuje posljednje izračunate vrijednosti momenata rotacije čvorova i štapova, a zatim su izračunati momenti na krajevima štapova prema jednadžbi (1).

$$M_{ij} = M_{ij} + 2m_{ij} + m_{ji}$$



Slika 19. Određivanje momenata na krajevima štapova



Slika 20. Dijagram momenata savijanja od vertikalnog opterećenja

Kontrolu ravnoteže sustava provest ćemo pomoću jednadžbe (54), uzimajući u obzir da je ΣP_h=0.

$\Sigma H = \Sigma P_n + \Sigma Q_{0y} + \Sigma Q_M = 0$

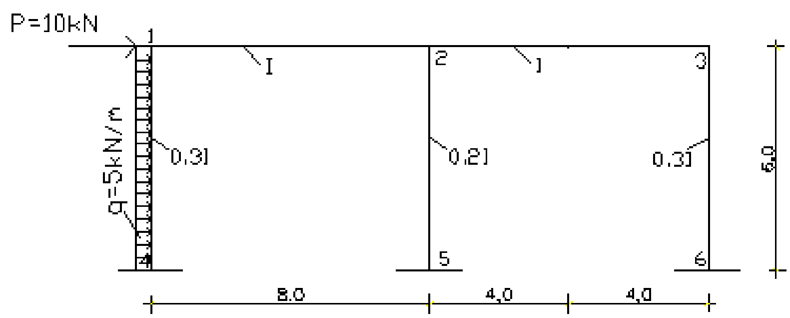
$0 = (-19{,}1 - 8{,}4) + (6{,}1+3{,}8) + (10{,}7 + 6{,}5)$

$0 \approx 0{,}4$

5.2. ZADATAK 2

Okvir analiziran u primjeru 1 neka bude opterećen vjetrom (horizontalno opterećenje) kako prikazuje slika 21. Potrebno je odrediti dijagram momenata savijanja.

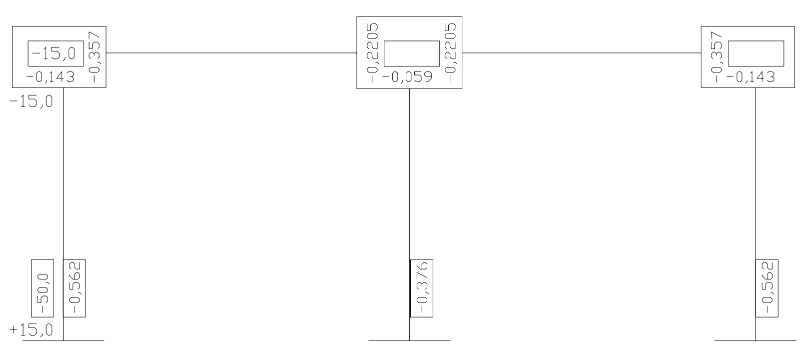
Vrijednosti rotacijskih i translacijskih koeficijenata preuzete su iz prethodnog primjera i zapisane u shemu (slika 22).



Slika 21. Okvir s tri stupa opterećen vjetrom

Momenti upetosti za zadano opterećenje:

M_{14} = - M_{41} =- $\frac{q \cdot l^2}{12}$ = -15 kNm



Slika 22. Momenti upetosti i stupa, faktori rotacije i translacije

Prema jednadžbi (51) horizontalna sila stupa iznosi

$$Q = P + \frac{q \cdot h}{2} = 10 + \frac{5 \cdot 6{,}0}{2} = 25 \text{ kN},$$

a prema jednadžbi $M_n = \frac{Q_n \cdot h_n}{3}$ katni moment ili moment na stupu iznosi

$$M_{14} = \frac{25 \cdot 6{,}0}{3} = 50{,}0 \text{ kNm}.$$

Ova vrijednost unosi se pokraj lijevog stupa. Iteracija sada započinje određivanjem momenata rotacije štapova.

STUPOVI

$m'_{14} = m'_{36} = -0{,}562 \cdot (-50) = +28{,}1$ kNm

$m'_{25} = -0{,}376 \cdot (-50) = +18{,}8$ kNm

ČVOR 1

$m_{14} = -0{,}143 \cdot (-15+28{,}1) = -1{,}9$ kNm

$m_{12} = -0{,}357 \cdot (-15+28{,}1) = -4{,}7$ kNm

ČVOR 2

$m_{21} = m_{23} = -0{,}2205 \cdot (0-4{,}7+18{,}8) = -3{,}1$ kNm

$m_{25} = -0{,}059 \cdot (0-4{,}7+18{,}8) = -0{,}8$ kNm

ČVOR 3

$m_{32} = -0{,}357 \cdot (0+28{,}1-3{,}1) = -8{,}9$ kNm

$m_{36} = -0{,}143 \cdot (0+28{,}1-3{,}1) =- 3{,}6$ kNm

STUPOVI

$m'_{14} = m'_{36} = -0{,}562 \cdot (-50-1{,}9-0{,}8-3{,}6) = +31{,}7$ kNm

$m'_{25} = -0{,}376 \cdot (-50-1{,}9-0{,}8-3{,}6) = +21{,}2$ kNm

ČVOR 1

$m_{14} = -0{,}143 \cdot (-15-3{,}1+31{,}7) = -2{,}0$ kNm

$m_{12} = -0{,}357 \cdot (-15-3{,}1+31{,}7) = -4{,}9$ kNm

ČVOR 2

$m_{21} = m_{23} = -0{,}2205 \cdot (-4{,}9+21{,}2-8{,}9) = -1{,}6$ kNm

$m_{25} = -0{,}059 \cdot (-4{,}9+21{,}2-8{,}9) = -0{,}4$ kNm

ČVOR 3

$m_{32} = -0{,}357 \cdot (-1{,}6+31{,}7) = -10{,}8$ kNm

$m_{36} = -0{,}143 \cdot (-1{,}6+31{,}7) = -4{,}3$ kNm

STUPOVI

$m'_{14} = m'_{36} = -0{,}562 \cdot (-50-2{,}0-0{,}4-4{,}3) = +31{,}8$ kNm

m'_{25} = -0,376·(-50-2,0-0,4-4,3) = +21,3 kNm

ČVOR 1

m_{14} = -0,143·(-15-1,6+31,8) =-2,2 kNm

m_{12} = -0,357·(-15-1,6+31,8) = -5,4 kNm

ČVOR 2

m_{21} = m_{23} = -0,2205·(-5,4+21,3-10,8) = -1,1 kNm

m_{25} = -0,059·(-5,4+21,3-10,8) = -0,3 kNm

ČVOR 3

m_{32} = -0,357·(-1,1+31,8) = -11,0 kNm

m_{36} = -0,143·(-1,1+31,8) = -4,4 kNm

STUPOVI

m'_{14} = m'_{36} = -0,562·(-50-2,2-0,3-4,4) = +32,0 kNm

m'_{25} = -0,376·(-50-2,2-0,3-4,4) = +21,4 kNm

ČVOR 1

m_{14} = -0,143·(-15-1,1+32,0) = -2,3 kNm

m_{12} = -0,357·(-15-1,1+32,0) = -5,7 kNm

ČVOR 2

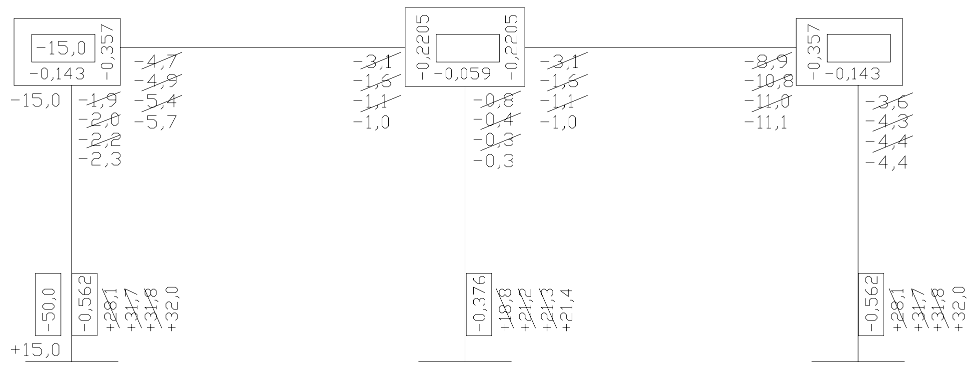
m_{21} = m_{23} = -0,2205·(-5,7+21,4-11,0) = -1,0 kNm

m_{25} = -0,059·(-5,4+21,4-11,0) = -0,3 kNm

ČVOR 3

m_{32} = -0,357·(-1,0+32,0) = -11,1 kNm

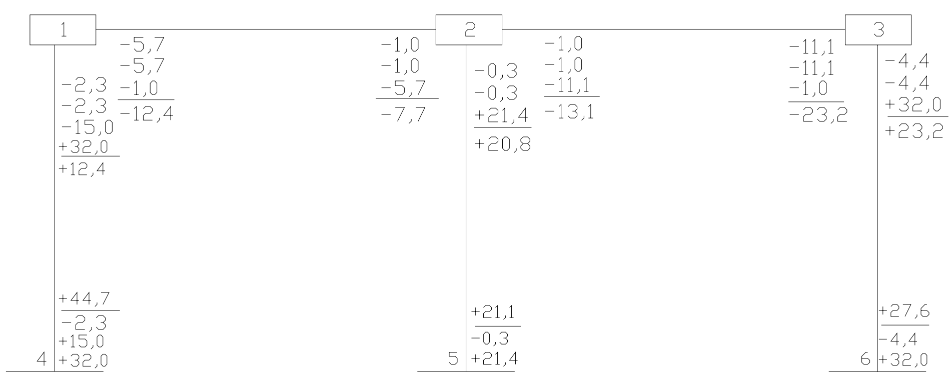
m_{36} = -0,143·(-1,0+32,0) = -4,4 kNm



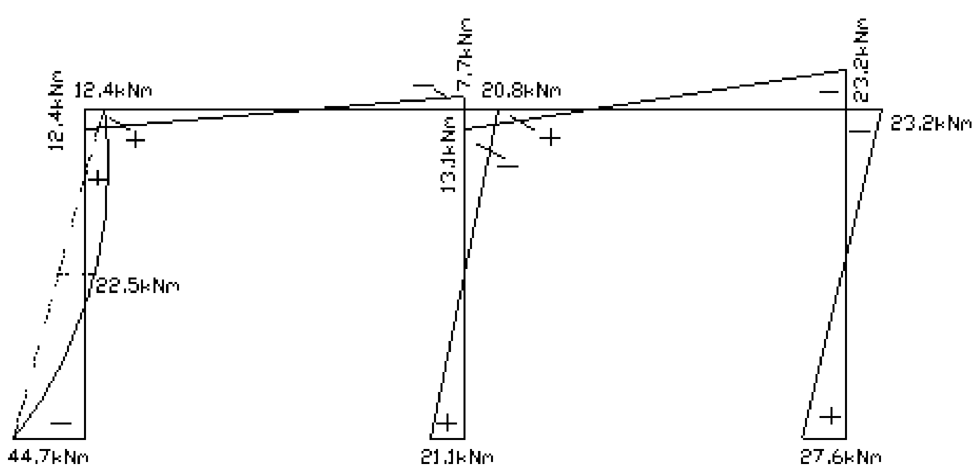
Slika 23. Određivanje momenata rotacije čvorova i štapova

Momente na krajevima štapova računamo prema jednadžbi (1).

$$M_{ij} = M_{ij} + 2m_{ij} + m_{ji}$$



Slika 24. Određivanje momenata na krajevima štapova



Slika 25. Dijagram momenata savijanja od opterećenja vjetrom

Kontrolu ravnoteže sustava provest ćemo pomoću jednadžbe (57).

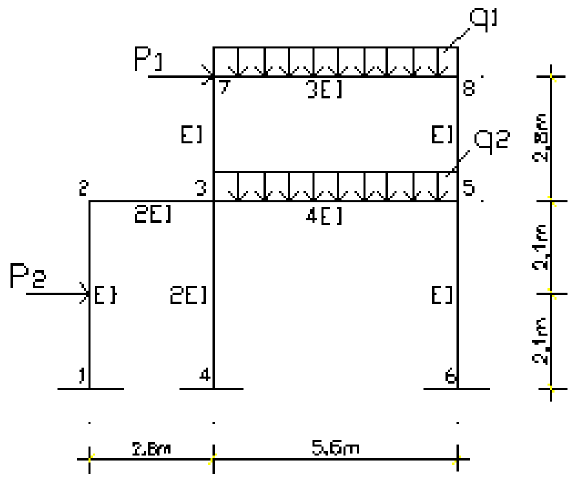
$$P + \frac{g \cdot h}{2} = - \Sigma \frac{M_0 + M_u}{h}$$

$$10 + \frac{5 \cdot 6}{2} = - \frac{1}{6} \cdot (-12{,}4 - 44{,}7 - 20{,}8 - 21{,}1 - 23{,}1 - 27{,}6)$$

$$25 \approx 24{,}97$$

5.3. ZADATAK 3

Za statički neodređen okvir, prikazan na slici 26, treba za dano opterećenje (horizontalno i vertikalno) odrediti dijagram momenata savijanja.



Slika 26. Dvoetažni okvir sa horizontalnim i vertikalnim opterećenjem

Zadano opterećenje:

$P_1 = P_2 = 50$ kN

$q_1 = 10$ kN/m'

$q_2 = 20$ kN/m'

Vrijednosti koeficijenata krutosti:

$k_{12} = \frac{I}{4,2} = 0,24I$ $\qquad$ $k_{23} = \frac{2I}{2,8} = 0,71I$

$k_{34} = \frac{2I}{4,2} = 0,48I$ $\qquad$ $k_{35} = \frac{4I}{5,6} = 0,71I$

$k_{56} = \frac{I}{4,2} = 0,24I$ $\qquad$ $k_{58} = \frac{I}{2,8} = 0,36I$

$k_{73} = \frac{I}{2,8} = 0,36I$ $\qquad$ $k_{78} = \frac{3I}{5,6} = 0,54I$

Vrijednosti rotacijskih koeficijenata:

$\mu_{ij} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{k_{ij}}{\sum k_{ij}}$

$\mu_{21} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,24I}{0,95I} = -0,13$ $\qquad$ $\mu_{23} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,71I}{0,95I} = -0,37$

$\mu_{32} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,71I}{2,26I} = -0,16$ $\qquad$ $\mu_{37} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,36I}{2,26I} = -0,08$

$\mu_{35} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,71I}{2,26I} = -0,16$ $\mu_{34} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,48I}{2,26I} = -0,10$

$\mu_{53} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,71I}{1,31I} = -0,27$ $\mu_{56} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,24I}{1,31I} = -0,09$

$\mu_{58} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,36I}{1,31I} = -0,14$

$\mu_{78} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,54I}{0,9I} = -0,3$ $\mu_{73} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,36I}{0,9I} = -0,2$

$\mu_{87} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,54I}{0,9I} = -0,3$ $\mu_{85} = (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{0,36I}{0,9I} = -0,2$

Vrijednosti translacijskih koeficijenata:

$$\upsilon_{ij} = \frac{k_{ij}}{\Sigma k_{ij}} \cdot (-\frac{3}{2})$$

PRVI KAT

$\upsilon_{12} = \frac{0,24I}{0,24I+0,48I+0,24I} \cdot (-\frac{3}{2}) = -0,375$

$\upsilon_{34} = \frac{0,48I}{0,24I+0,48I+0,24I} \cdot (-\frac{3}{2}) = -0,75$

$\upsilon_{56} = \frac{0,24I}{0,24I+0,48I+0,24I} \cdot (-\frac{3}{2}) = -0,375$

DRUGI KAT

$\upsilon_{37} = \frac{0,36I}{0,36I+0,36I} \cdot (-\frac{3}{2}) = -0,75$

$\upsilon_{58} = \frac{0,36I}{0,36I+0,36I} \cdot (-\frac{3}{2}) = -0,75$

Momenti upetosti za zadano opterećenje:

$M_{12} = - M_{21} = \frac{P_2 \cdot h}{8} = \frac{50 \cdot 4,2}{8} = 26,3$ kNm ,

$M_{23} = - M_{32} = \frac{q_2 \cdot l^2}{12} = \frac{20 \cdot 5,6^2}{12} = 52,3$ kNm ,

$M_{78} = - M_{87} = \frac{q_1 \cdot l^2}{12} = \frac{10 \cdot 5,6^2}{12} = 26,1$ kNm.

Translacijske sile i momenti katova su:

PRVI KAT

$Q_I = P_1 + P_2/2 = 75$ kN

$M_I = \frac{Q_I \cdot h}{3} = \frac{75 \cdot 4,2}{3} = 105$ kNm

DRUGI KAT

$Q_{II} = P_1 = 50$ kN

$M_{II} = \frac{Q_{II} \cdot h}{3} = \frac{50 \cdot 2,8}{3} = 46,7$ kNm

POSTUPAK ITERACIJE:

STUPOVI I

$m'_{12} = m'_{56} = -0,375 \cdot (-105,0) = +39,37$ kNm

$m'_{34} = -0,75 \cdot (-105,0) = +78,75$ kNm

STUPOVI II

$m'_{73} = m'_{85} = -0,75 \cdot (-46,7) = +35,0$ kNm

ČVOR 2

$m_{21} = -0,13 \cdot (-26,3+39,37) = -1,7$ kNm

$m_{23} = -0,37 \cdot (-26,3+39,37) = -4,8$ kNm

ČVOR 3

$m_{32} = m_{35} = -0,16 \cdot (52,3+78,75-4,8+35,0) = -25,8$ kNm

$m_{34} = -0,10 \cdot (52,3+78,75-4,8+35,0) = -16,12$ kNm

$m_{37} = -0,08 \cdot (52,3+78,75-4,8+35,0) = -12,9$ kNm

ČVOR 5

$m_{53} = -0,27 \cdot (-52,3+35,0-25,8+39,37) = +1,0$ kNm

$m_{56} = -0,09 \cdot (-52,3+35,0-25,8+39,37) = +0,33$ kNm

$m_{58} = -0,14 \cdot (-52,3+35,0-25,8+39,37) = +0,52$ kNm

ČVOR 7

$m_{73} = -0,2 \cdot (26,1+35,0-12,9) = -9,64$ kNm

$m_{78} = -0,3 \cdot (26,1+35,0-12,9) = -14,46$ kNm

ČVOR 8

$m_{87} = -0,3 \cdot (-26,1-14,46+35,0+0,52) = +1,51$ kNm

$m_{85} = -0,2 \cdot (-26,1-14,46+35,0+0,52) = +1,0$ kNm

STUPOVI I

$m'_{12} = m'_{56} = -0,375 \cdot (-105,0-1,7-16,12+0,33) = +45,9$ kNm

$m'_{34} = -0,75 \cdot (-105,0-1,7-16,12+0,33) = +91,8$ kNm

STUPOVI II

$m'_{73} = m'_{85} = -0,75 \cdot (-46,7-9,54-12,9+1,0+0,52) = +41,0$ kNm

ČVOR 2

m_{21} = -0,13·(-26,3-25,8+45,9) = +0,8kNm

m_{23} = -0,37·(-26,3-25,8+45,9) = +2,3 kNm

ČVOR 3

m_{32} = m_{35} = -0,16·(52,3+2,3+91,8+1,0+41,0-9,54) = -28,61 kNm

m_{34} = -0,10·(52,3+2,3+91,8+1,0+41,0-9,54) = -17,9 kNm

m_{37} = -0,08·(52,3+2,3+91,8+1,0+41,0-9,54) = -14,3 kNm

ČVOR 5

m_{53} = -0,27·(-52,3-28,6+45,9+41,0+1,0) = -1,9 kNm

m_{58} = -0,14·(-52,3-28,6+45,9+41,0+1,0) = -0,98 kNm

m_{56} = -0,09·(-52,3-28,6+45,9+41,0+1,0) = -0,63 kNm

ČVOR 7

m_{73} = -0,2·(26,1+1,51+41,0-14,3) = -10,8 kNm

m_{78} = -0,3·(26,1+1,51+41,0-14,3) = -16,3 kNm

ČVOR 8

m_{87} = -0,3·(-26,1-16,3+41,0-0,98) = +0,7 kNm

m_{85} = -0,2·(-26,1-16,3+41,0-0,98) = +0,5 kNm

STUPOVI I

m'_{12} = m'_{56} = -0,375·(-105,0+0,8-17,9-0,63) = +46,0 kNm

m'_{34} = -0,75·(-105,0+0,8-17,9-0,63) = +92,0 kNm

STUPOVI II

m'_{73} = m'_{85} = -0,75·(-46,7-14,3-10,8+0,5-0,98) = +54,2 kNm

ČVOR 2

m_{21} = -0,13·(-26,3-28,6+46,0) = +1,15 kNm

m_{23} = -0,37·(-26,3-28,6+46,0) = +3,3 kNm

ČVOR 3

m_{32} = m_{35} = -0,16·(52,3+3,3+92,0-1,9+54,2-10,8) = -30,25 kNm

m_{34} = -0,10·(52,3+3,3+92,0-1,9+54,2-10,8) = -18,91 kNm

m_{37} = -0,08·(52,3+3,3+92,0-1,9+54,2-10,8) = -15,13 kNm

ČVOR 5

m_{53} = -0,27·(-52,3-30,25+46,0+54,2+0,5) = -5,0 kNm

m_{58} = -0,14·(-52,3-30,25+46,0+54,2+0,5) = -2,5 kNm

m_{56} = -0,09·(-52,3-30,25+46,0+54,2+0,5) = -1,6 kNm

ČVOR 7

m_{73} = -0,2·(26,1+0,7+54,2-15,13) = -13,17 kNm

m_{78} = -0,3·(26,1+0,7+54,2-15,13) = -19,76 kNm

ČVOR 8

m_{87} = -0,3·(-26,1-19,76+54,2-2,5) = -1,75 kNm

m_{85} = -0,2·(-26,1-19,76+54,2-2,5) = -1,17 kNm

STUPOVI I

m'_{12} = m'_{56} = -0,375·(-105,0+1,15-18,9-1,6) = +46,6 kNm

m'_{34} = -0,75·(-105,0+1,15-18,9-1,6) = +93,3 kNm

STUPOVI II

m'_{73} = m'_{85} = -0,75·(-46,7-13,7-15,13-1,17-2,5) = +59,4 kNm

ČVOR 2

m_{21} = -0,13·(-26,3-30,25+46,6) = +1,3 kNm

m_{23} = -0,37·(-26,3-30,25+46,6) = +3,7 kNm

ČVOR 3

m_{32} = m_{35} = -0,16·(52,3+3,7+93,3-5,0+59,4-13,17) = -30,5 kNm

m_{34} = -0,10·(52,3+3,7+93,3-5,0+59,4-13,17) = -19,0 kNm

m_{37} = -0,08·(52,3+3,7+93,3-5,0+59,4-13,17) = -15,24 kNm

ČVOR 5

m_{53} = -0,27·(-52,3-30,5+46,6+59,4-1,17) = -5,8 kNm

m_{58} = -0,14·(-52,3-30,5+46,6+59,4-1,17) = -3,0 kNm

m_{56} = -0,09·(-52,3-30,5+46,6+59,4-1,17) = -1,9 kNm

ČVOR 7

m_{73} = -0,2·(26,1-1,75-15,24+59,4) = -13,7 kNm

m_{78} = -0,3·(26,1-1,75-15,24+59,4) = -20,5 kNm

ČVOR 8

m_{87} = -0,3·(-26,1-20,5+59,4-3,0) = -3,0 kNm

m_{85} = -0,2·(-26,1-20,5+59,4-3,0) = -2,0 kNm

STUPOVI I

m'_{12} = m'_{56} = -0,375·(-105,0+1,3-19,0-1,9) = +46,7 kNm

m'_{34} = -0,75·(-105,0+1,3-19,0-1,9) = +93,4 kNm

STUPOVI II

m'_{73} = m'_{85} = -0,75·(-46,7-13,7-15,24-2,0-3,0) = +60,5 kNm

ČVOR 2

m_{21} = -0,13·(-26,3-30,5+46,7) = +1,3 kNm

m_{23} = -0,37·(-26,3-30, 5+46,7) = +3,7 kNm

ČVOR 3

m_{32} = m_{35} = -0,16·(52,3+3,7+93,4-5,8+60,5-13,7) = -30,5 kNm

m_{34} = -0,10·(52,3+3,7+93,4-5,8+60,5-13,7) = -19,0 kNm

m_{37} = -0,08·(52,3+3,7+93,4-5,8+60,5-13,7= -15,2 kNm

ČVOR 5

m_{53} = -0,27·(-52,3-30,5+46,7+60,5-2,0) = -6,0 kNm

m_{58} = -0,14·(-52,3-30,5+46,7+60,5-2,0) = -3,1 kNm

m_{56} = -0,09·(-52,3-30,5+46,7+60,5-2,0) = -2,0 kNm

ČVOR 7

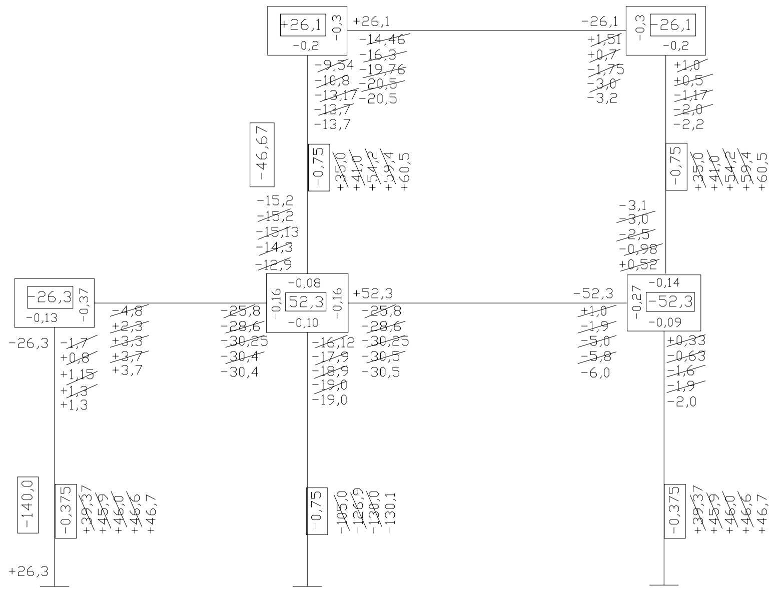
m_{73} = -0,2·(26,1-3,0+60,5-15,2) = -13,7 kNm

m_{78} = -0,3·(26,1-3,0+60,5-15,2) = -20,5 kNm

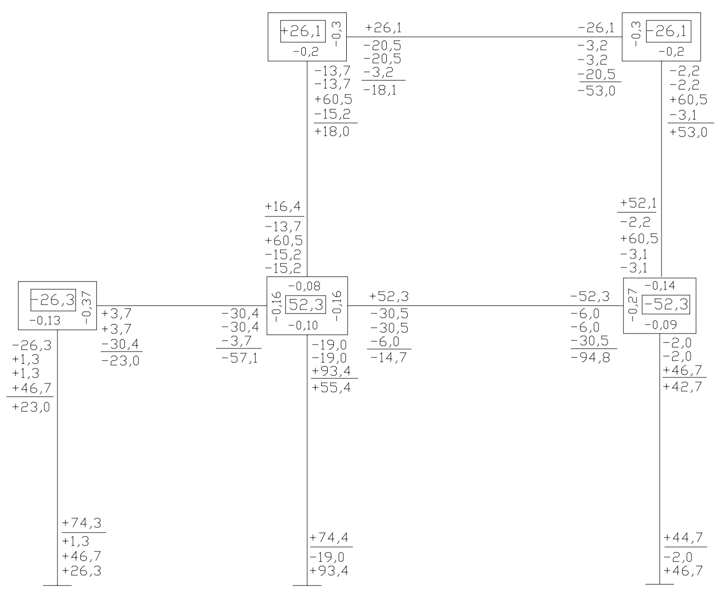
ČVOR 8

m_{87} = -0,3·(-26,1-20,5+60,5-3,1) = -3,2kNm

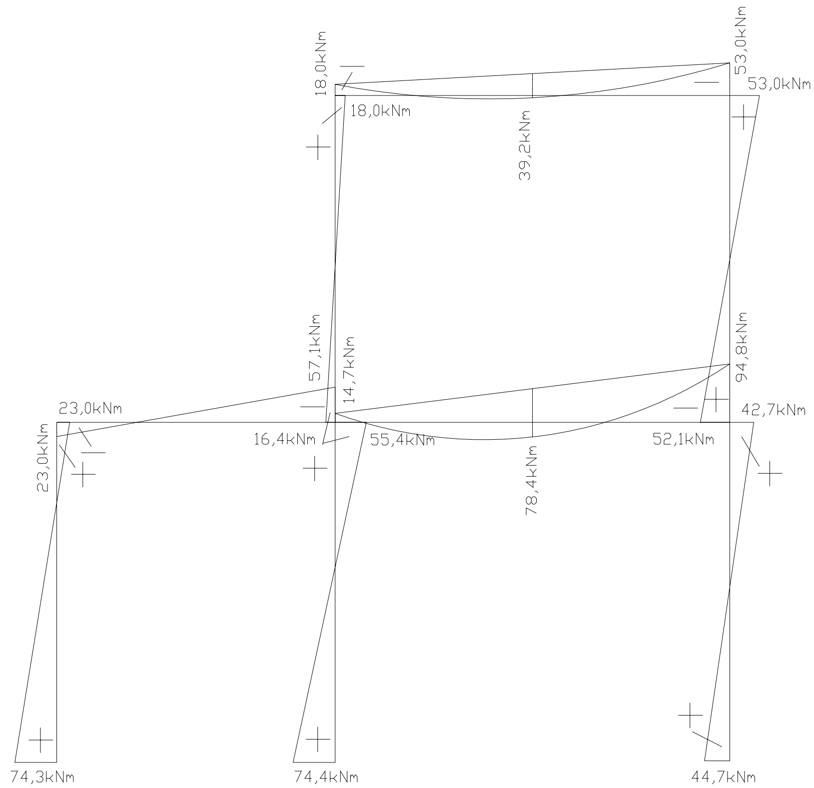
m_{85} = -0,2·(-26,1-20,5+60,5-3,1) = -2,2 kNm



Slika 27. Određivanje momenata rotacije i translacije



Slika 28. Određivanje momenata na krajevima štapova



Slika 29. Dijagram momenata savijanja

6. ZAKLJUČAK

Kod postupaka uravnotežavanja momenata od kojih su Crossov i Kanijev najpoznatiji, možemo odustati od neposrednog postavljanja jednadžbi kompatibilnosti ili jednadžbi ravnoteže čvorova. Pomoću dane računske sheme i propisanog toka proračunavanja te jednadžbe se rješavaju iteracijom. Treba napomenuti da vrijednosti u Crossovom postupku teže ka nuli, a one u Kanijevoj metodi jednoj određenoj vrijednosti. U oba se postupka pretpostavlja da se čvorovi nosive konstrukcije ne okreću i ne pomiču, i pod tom pretpostavkom se odrede momenti upetosti za slučaj potpune upetosti krajeva čvorova.

U osnovi su oba iteracijska postupka zasnovana na metodi pomaka. Kanijev postupak koristi neposrednu iteraciju u kojoj se članove od opterećenja provlače do kraja proračuna. To znači da svaki novi dobiveni broj daje rezultat koji je točniji od prethodnog, koji sada više nije potreban. Ovdje, za razliku od Crossove metode, otpada zbrajanje pojedinih iteracijom dobivenih međuvrijednosti. Postupak omogućuje da se poslije naknadne promjene opterećenje ili dimenzija štapova, započeti proračun nekog sistema samo produži. Pri daljem računanju nestaju i moguće greške učinjene u korekturnim vrijednostima. Dakle, proračun se može provjeriti samo s na kraju izračunatim numeričkim vrijednostima.

7. LITERATURA

[1] R.Vagner: *Praktična građevinska statika, dio 4*, Građevinska knjiga, Beograd, 1968.
[2] V.Simović,uv.: *Leksikograf građevinarstva*, Masmedia, Zagreb, 2002.
[3] V.Vagner i G.Erlhof : *Praktična građevinska statika, dio 3*, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
[4] C.S.Reddy: *Basic Structural Analysis*, McGraw-Hill, New Delhi, 1981.
[5] G.Kani: *Die Berechnung mehrstöchiger Rahmen*, Verlag konrad Wittwe, Stuttgart, 1949.
[6] V. Simović, K. Fresl: *Građevna statika II*, bilješke i skice s predavanja, Građevinski fakultet, Zagreb, http://www.grad.hr/nastava/gs/bilj2/index.html