

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

Građevinski fakultet

Romana Vrančić

**ITERACIJSKA PRIMJENA METODE GUSTOĆA
SILA U OBLIKOVANJU KONSTRUKCIJA OD UŽADI**

Zagreb, 2014.

Ovaj rad izrađen je na Zavodu za tehničku mehaniku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu pod vodstvom prof. dr. sc. Krešimira Fresla, dipl. ing. građ., i predan je na natječaj za dodjelu Rektorove nagrade u akademskoj godini 2013./2014.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Razvoj vlačnih konstrukcija od užadi.....	2
3. Postupak projektiranja mreža užadi	6
3.1. Definirajte željenog oblika.....	6
3.2. Nalaženje oblika.....	8
3.3. Statička i dinamička analiza	9
3.4. Minimalno prednapinjanje i geometrijska krutost	10
3.5. Odabir elemenata i materijala.....	12
3.6. Određivanje duljine kabela	13
3.7. Rješavanje detalja spojeva.....	14
3.8. Montaža	16
3.9. Geometrijska nelinearnost.....	17
4. Metoda gustoća sila.....	20
4.1. Formiranje sustava jednadžbi ravnoteže čvorova.....	20
4.2. Poopćena geodetska mreža.....	21
4.3. Zašto baš minimalne mreže?	22
4.4. Metoda gustoća sila	24
4.5. Matrična formulacija metode gustoća sila.....	24
4.6. Analogija s metodom pomaka	27
4.7. Ovisnost izbora gustoće sila i izgleda mreže	28
4.8. Iteracijska primjena metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža	29
4.9. Uvođenje kinematičkih ograničenja	31
4.10. Zadavanje nerastegnutih duljina odabranih štapova	33
5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža	35
5.1. Primjer primjene kinematičkih ograničenja	35
5.2. Mreža s izdignutim središnjim dijelom	41
5.3. Tornjevi od mreže kabela	48
6. Zaključak.....	57
7. Literatura.....	58
8. SAŽETAK/SUMMARY	60

1. Uvod

Iako prednapete konstrukcije od užadi i platna spadaju među prve konstrukcije koje je čovjek izgradio, dugo se nije znalo mnogo o njihovom ponašanju. Projektiranje ovakvih konstrukcija složenije je od onoga uobičajnih građevina. Dok su kod ostalih konstrukcija oblik i okvirne dimenzije unaprijed poznati, kod prednapetih konstrukcija to nije slučaj. Jedna od najznačajnijih karakteristika prednapetih konstrukcija je međuovisnost njihovog oblika i unutarnjih sila. Naime, osnovni element ovih konstrukcija je uže, element zanemarive fleksijske i poprečne krutosti koji može preuzimati samo centrične vlačne sile i koji će uslijed djelovanja opterećenja promijeniti svoj oblik kako bi se u njemu razvile uravnotežujuće vlačne sile.

Dakle, prije same analize prednapete vlačne konstrukcije pri djelovanju vanjskih opterećenja mora se odrediti njezin početni oblik koji ovisi o silama prednapinjanja (uz zanemarenje vlastite težine). Postupak određivanja početnog oblika naziva se nalaženje oblika, odnosno form finding.

Postoji nekoliko metoda nalaženja oblika prednapetih vlačnih konstrukcija od užadi, a u ovom ćemo radu obraditi jednu od njih – metodu gustoća sila. Razvili su je H. J. Schek i K. Linkwitz početkom sedamdesetih godina za potrebe proračuna Olimpijskog kompleksa u Munchenu. Njezina je posebnost u tome što nelinearan problem nalaženja oblika svodi na linearan. Do danas su razvijena brojna proširenja ove metode koja omogućuju zadavanje dodatnih ograničenja koja nam otvaraju veće mogućnosti u oblikovanju prednapetih mreža.

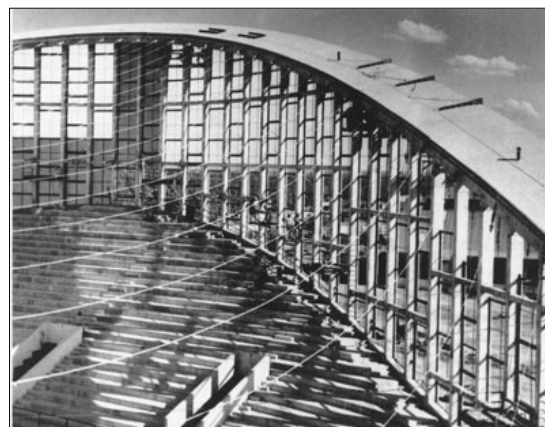
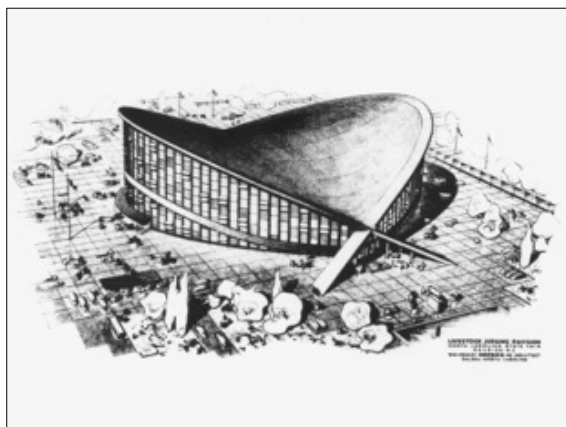
U radu je detaljnije obrađena proširena iteracijska metoda gustoća sila utemeljena na linearnoj metodi gustoća sila, koja omogućuje postizanje konstantne sile u kabelima mreže, te samim time postizanje minimalne ili poopcene minimalne mreže. Prikazano je i kako se uvođenjem kinematičkih ograničenja, točnije, zadavanjem duljina pojedinih elemenata u konačnom ili nedeformiranom stanju, mogu prevladati neki problemi koji se javljaju kod klasične metode (npr. približavanje čvorova ili općenitije prekomjerno klizanje).

2. Razvoj vlačnih konstrukcija od užadi

Zbog svoje sposobnosti da premoste velike raspone uz istovremenu eleganciju i konstruktivnu učinkovitost, vlačne su konstrukcije oduvijek intrigirale građevinare i arhitekte. Početak primjene užadi kao konstrukcijskih elemenata seže daleko u prošlost, kada su nomadska plemena izrađivala svoje šatore od užadi učvršćene o središnji stup te sidrene u tlo, a kasnije prekrivene životinjskom kožom. Ovakve su im konstrukcije zbog njihove male težine te mogućnosti jednostavne montaže i demontaže bile najpogodnije za njihov nomadski način života [1].

Prvi viseći mostovi bili su načinjeni od dva užeta između kojih bi bile postavljene daske, te eventualno dodatna užad kao zaštitna ograda. Mostovi od užadi načinjene od bambusa, izgrađeni u Kini, uz redovito održavanje trajali su i po nekoliko stoljeća [2]. Kao i tada, i danas su kabeli i užad zaslužni za premošćivanje najvećih raspona. Zanimljiva je činjenica da se među deset najduljih mostova s jednim rasponom nije našao niti jedan koji nije viseći [3]. Najveći od njih, Akashi Kaikyo, premošćuje raspon od čak 1991 m. Ukupna duljina njegovih kabela je oko 300,000 kilometara, što je dovoljno da se 7 puta omotaju oko Zemlje (!) [4].

Najveći pomak u razvoju vlačnih konstrukcija od užadi i platna dogodio se u zadnjih šezdesetak godina. Prvi izvedeni primjer podržavanja krovnog sistema mrežom kabela bila je Raleight Arena (Sjeverna Karolina, 1952.g). Konceptcija konstrukcije se sastojala od dva parabolična luka koja su se međusobno križala i u koje su bili usidreni kabeli koji su tvorili oblik sedla, te teškog pokrova. Arena postoji i danas, te se u njoj održavaju sajmovi, koncerti i sportska natjecanja.



Slika 1. Raleight Arena

Jedna od najznačajnijih osoba za razvoj vlačnih konstrukcija namijenjenih natkrivanju prostora je Frei Otto, utemeljitelj Instituta za lagane konstrukcije Sveučilišta u Stuttgartu, na čijem je čelu bio sve do mirovine. Značajan je zbog uvođenja fizikalnog modela u proces određivanja ravnotežnog stanja, odnosno u postupak pronalaženja oblika. Njegova najpoznatija i najznačajnija djela su krov Njemačkog paviljona izloženog 1967. u Montrealu na svjetskoj izložbi Expo '67 te krov olimpijskog stadiona u Münchenu iz 1972. [5]

Iako mu je trebalo par godina da razvije sistem krova Njemačkog paviljona, samo je šest tjedana bilo potrebno da konstrukcija bude postavljena. Konstrukcijski sustav sastojao se od čelične mreže pričvršćene na osam vitkih čeličnih stupova različitih visina te tlocrtno nepravilno postavljenih. Užad čelične mreže bila je usidrena u tlo, a preko mreže bilo je postavljeno transparentno platno. Na krovu, tj. mreži, nalazilo se i par "prozora" koji su dodatno pridonjeli prozračnosti same konstrukcije. Svojim je jedinstvenim oblikom bila pozitivan odmak od uobičajnih pravokutnih konstrukcija. Pošto je bila jedinstveni projekt, bila je i prilično skupa. No, odmah je uočen njezin ogroman potencijal, budući da je krov težio samo 150 tona, što je odprilike jedna trećina ili jedna petina težine koju bi imao da je bio pokriven uobičajnim materijalima za prekrivanje [6]. Također, koncepcija šatora koja je ovdje primijenjena lako se prilagođava bilo kakvom nepravilnom terenu, što je jako velika prednost.



Slika 2. Njemački paviljon na svjetskoj izložbi Expo'67 u Montrealu 1967.g

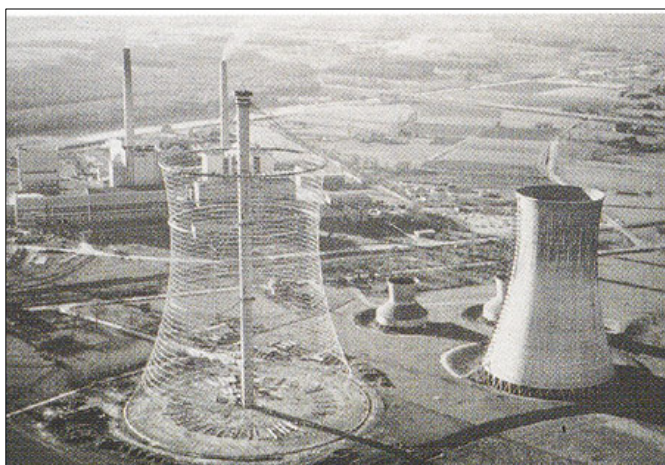
Otto je, ponukan uspjehom u Montrealu, u suradnji s Guntherom Behnischem primijenio istu koncepciju na prikriivanje Olimpijskog stadiona u Münchenu. Glavna zamisao koncepcije bila je imitacija Alpi te kontrast s olimpijskim igrama koje se 1936.g. bile održane u Berlinu za vrijeme nacističkog režima.



Slika 3. Olimpijski stadion u Munchenu

Danas se prednapete konstrukcije od užadi i kabela koriste za natkrivanje velikih raspona stadiona, sportikih dvorana, izložbenih paviljona i sl., odnosno, tamo gdje je cilj prekriti veliku površinu bez zadiranja velikog broja elemenata u tu površinu koji bi npr. ometali pogled. Dodatne prednosti, koje ovaj tip konstrukcija čine još konkurentnijim su njihova mala težina, te mogućnost prefabriciranja i brza montaža.

Jedan od značajnih primjera uporabe prednapete užadi je i rashladni toranj nuklearnog reaktora THTR-300 u Njemačkoj. Ploha reaktora ima oblik katenoida, plohe koja nastaje rotacijom lančаницe oko osi. Učinkovitost dotadašnjih tornjeva od armiranobetonske ljuske u obliku hiperboličkog paraboloida dovedena je u pitanje nakon otkazivanja nekoliko rashladnih tornjeva zbog djelovanja vjetrova. Nedostaci tornjeva od armiranobetonskih ljuski su i osjetljivost na diferencijalno slijeganje oslonaca te opasnost od pojave izvijanja zbog manjih netočnosti u izvedbi. Tornjevi od mreže užadi prevladavaju sve ove nedostatke [7]. Nuklearna elektrana je 1991. godine zbog političkih i sigurnosnih razloga zatvorena, a kasnije i srušena.



Slika 4. Toranj nuklearnog reaktora THTR-300

2. Razvoj vlačnih konstrukcija od užadi

Jedan od najpoznatijih primjera sustava krova od mreže kabela izvedenih u zadnjih nekoliko godina svakako je velodrom u Londonu izgrađen 2011.g. za potrebe Olimpijskih igara 2012.g. Kabeli su postavljeni tako da tvore antiklastičnu plohu, odnosno plohu negativne zakrivljenosti. Kako bi se izbjegli kabeli velikih promjera, mreža je izvedena sa po dva usporedna tanja kabela promjera 36mm. Ukupna duljina kabela je oko 16km, a samo je osam tjedana bilo potrebno da se mreža montira.



Slika 5. Olimpijski velodrom u Londonu

3. Postupak projektiranja mreža užadi

3.1. Definiirajte željenog oblika

Uže je gipko, te će zbog djelovanja sila promijeniti svoj ravnotežni oblik. Kako bi se postigao stalan oblik, užad se slaže u mrežu koja tvori sedlastu (antiklastičnu) plohu i prednapinje. U fazi definiranja oblika cilj je definirati željenu geometriju koja će zadovoljavati zahtjeve funkcionalnosti, ekonomičnosti i estetike.

S obzirom na načine spajanja kabela, razlikujemo tri tipa mreža [8]:

Pravčaste mreže

Tip mreže kod kojeg se osi kabela podudaraju s izvodnicama neke pravčaste plohe, odnosno svaki kabel svojom cijelom duljinom leži na pravcu. Posljedica toga je da ovakav tip mreže ne zahtijeva postupak nalaženja oblika, jer ga možemo unaprijed odrediti iz poznatih geometrijskih rubnih uvjeta.

Primjeri ovakvih mreža su hipar i rotacijski paraboloid.

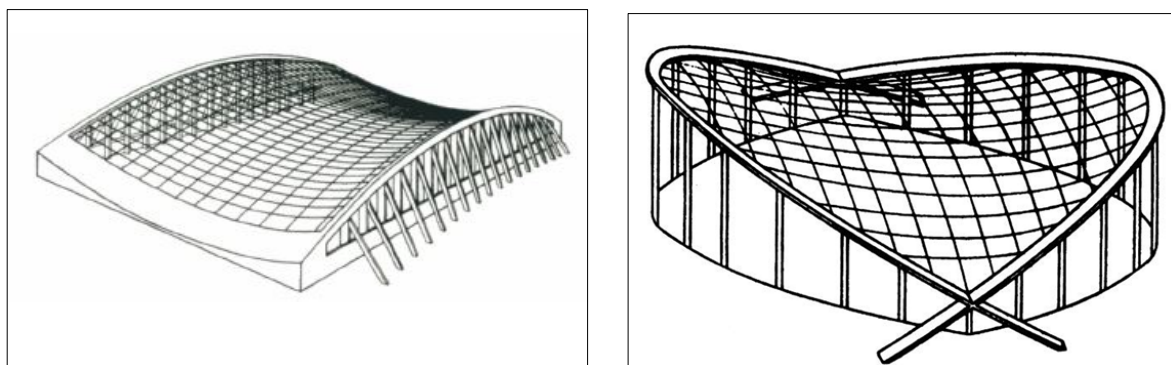


Slika 6. Model pravčaste mreže od konca – hipar

Regularne mreže

Čine ih dvije familije užadi koje tvore sedlastu plohu. Jedna familija užadi je konkavna, a druga konveksna. Nazivamo ih još nosiva i prednaponska užad, iako zbog djelovanja opterećenja suprotnog smisla (npr. odižući vjetar) oni mijenjaju uloge, pa tako prednaponska

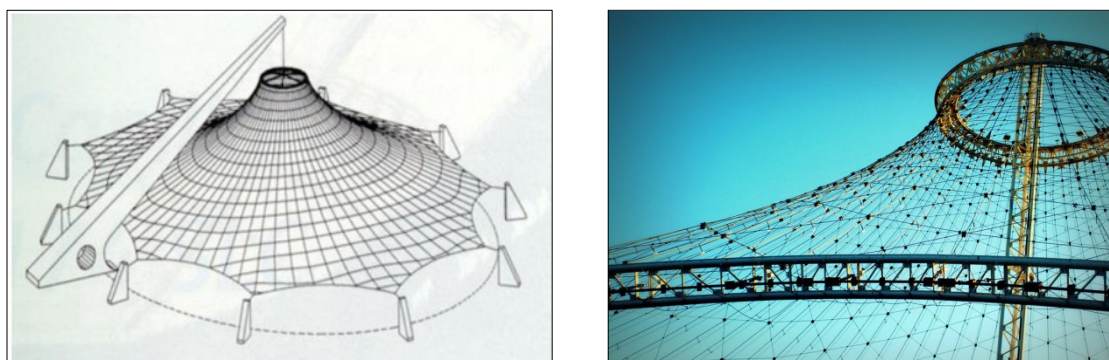
užad postaje nosiva i obratno. Na njihovim kontaktima nastaju dvije međusobno uravnotežene sile međudjelovanja kabela.



Slika 7. Primjeri regularnih mreža, lijevo: Hakametsä Stadion, Finska, desno: Raleigh arena, Sjeverna Karolina

Neregularne mreže

U ovaj tip spadaju mreže s više familija užadi i složenijeg rasporeda kod kojih užad može mijenjati svoju zakrivljenost, a isto se tako može i prekinuti u nekom čvoru.



Slika 8. Primjeri neregularnih mreža, desno: Expo'74 US paviljon

Fizikalni modeli

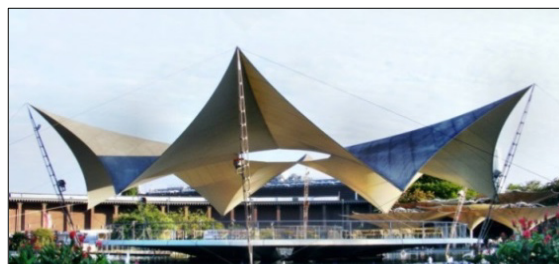
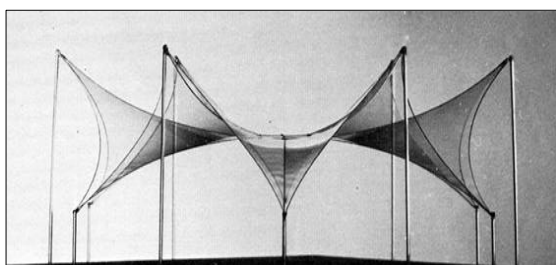
Fizikalni modeli u prošlosti su bili jedini način određivanja ravnotežnog položaja mreže užadi (ali i konstrukcija od platna), ponajprije zbog svojih kompleksnih prostornih oblika te složenih matematičkih modela. Danas, s razvojem numeričkih metoda rješavanja, fizikalne modele više ne možemo smatrati dovoljno preciznima, te se zato uglavnom upotrebljavaju za vizualizaciju konstrukcije.

Veoma značajnu ulogu u području izrade fizikalnih modela imali su Antonio Gaudi, Heinz Isler i Otto Frei koji su primjenom različitih materijala kao što su sapunica, tkanina i žica,

provodili razne eksperimente s oblicima vlačnih konstrukcija te tlačnih na temelju tlačno-vlačne analogije [5].



Slika 9. Fizikalni model od tkanine



Slika 10. Tanzbrunnen (Köln, Njemačka), lijevo: fizikalni model od sapunice, desno: izvedena konstrukcija

3.2. Nalaženje oblika

Za razliku od “uobičajenih” konstrukcija kod kojih su oblik i okvirne dimenzije unaprijed poznate, vlačnim se konstrukcijama oblik ne može unaprijed nametnuti, već ga moramo “pronaći” pomoću neke od metoda nalaženja oblika [8] [9] [10]. Zbog ovisnosti opterećenja i oblika mreže, zahtijeva se bliža suradnja građevinara i arhitekata nego kod projektiranja ostalih konstrukcija.

Uz metodu gustoće sila kojom ćemo se baviti u ovom radu, postoje još i: metoda dinamičke relaksacije, metoda prijelazne matrice krutosti, metoda konačnih elemenata.... Prikaz i usporedbe postupaka nalaženja oblika prednapetih konstrukcija od užadi dani su u [11] i [12].

3.3. Statička i dinamička analiza

Nakon što smo odredili ravnotežno stanje konstrukcije dok na nju ne djeluje nikakvo opterećenje (osim, naravno, sile prednapona u kabelima), provodimo statičku i dinamičku analizu konstrukcije za djelovanja stalnih, promjenjivih i izvanrednih djelovanja.

Djelovanja koja djeluju na mrežu užadi ne razlikuju se od onih koja djeluju na ostale, konvencionalne građevine. No, kod ovih je konstrukcija posebno važno sa što većom točnošću odrediti raspodjelu tih opterećenja po konstrukciji. Naime, mreže kabela "osjetljivije" su na nejednoliko raspodjeljeno opterećenje nego na jednoliko raspodjeljeno. Određivanje raspodjele opterećenja nije nimalo lak zadatak, kojeg dodatno otežava složena geometrija mreže te njezina mala težina i veliki rasponi. Uz to, u propisima gotovo i ne postoje nikakve smjernice.

U stalna opterećenja spadaju vlastita težina te sile prednapinjanja. Vlastita težina užadi je mala, te kao takva neće imati veliki utjecaj. Za razliku od nje, sile prednapinjanja su puno većih iznosa i imat će veliki utjecaj i na oblik mreže i na ponašanje konstrukcije. O minimalnoj sili prednapinjanja te o njezinim gubicima bit će više riječi u nastavku.

S obzirom na malu težinu mreže, mjerodavno promjenjivo opterećenje je vjetar. Zbog složenih oblika mreža, iznos i smjer pritiska bit će različiti po površini. Koeficijent pritiska vjetra koji ovisi o obliku, veličini, ploštini, okolini, brzini vjetra te o njegovom smjeru trebat će zbog složene međuovisnosti ovih parametara odrediti ispitivanjem na modelu u vjetrovnom tunelu.

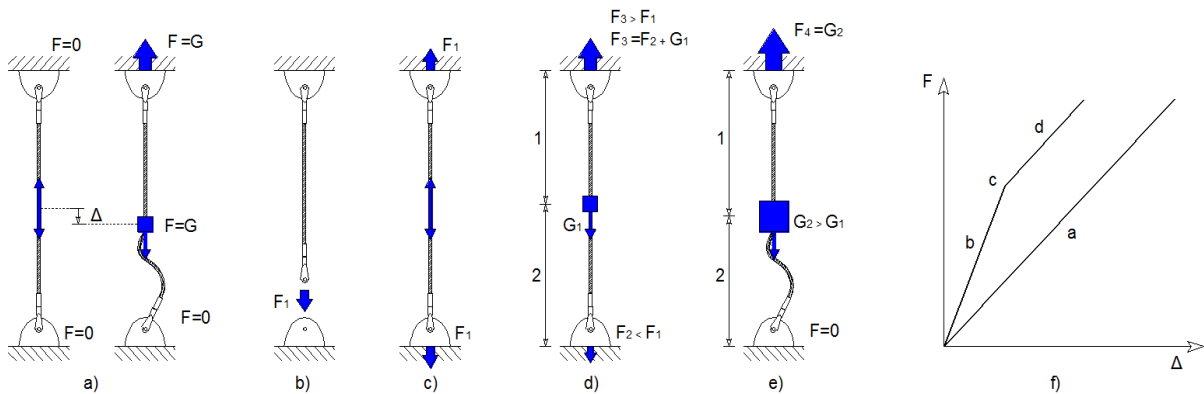
Uz vjetar, dominantno promjenjivo opterećenje je i snijeg. Kao i u slučaju s vjetrom, u propisima nisu dane smjernice koje bi pomogle u određivanju opterećenja snijegom na krov od mreže kabela ili membrane. Naime, propisi pokrivaju samo tradicionalne oblike krovova, koji su daleko od oblika mreža kabela. Zbog fleksibilnosti ovakvih krovova, teško je odrediti na kojem dijelu će doći do nakupljanja snijega. Mjesta gomilanja snijega mogu se odrediti ispitivanjima u vjetrovnom tunelu.

U izvanredna djelovanja spada djelovanje od potresa. Odgovor konstrukcije na dinamičko opterećenje određuje se uglavnom metodom konačnih elemenata. Analize provedene ovom metodom pokazuju da mreže kabela imaju dugi perion vibracije. Uz to, potporne konstrukcije su mnogo kruće i teže od mreže kabela. Dakle, potporna konstrukcija će pojačati više frekvencije potresa, dok će se niže značajnije reducirati kada dođu do mreže kabela. [11]

3.4. Minimalno prednapinjanje i geometrijska krutost

Pri odabiru iznosa sile prednapinjanja trebamo nastojati da taj iznos bude što manji kako bi dimenzije užadi bile manje, detalji sidrenja i spajanja jednostavniji, a sile na komplementarnu konstrukciju što manje. No, istovremeno, odabrani iznos sile prednapinjanja mora biti takav da čak i za djelovanja najvećeg opterećenja ne dođe do toga da neki kabeli olabave.

Promotrimo sljedeće slike:



Slika 11. Minimalno prednapinjanje (prema [13])

Kada bi na nenapeti kabel objesili uteg, ono bi se zbog djelovanja težine utega G_1 deformiralo. Gornji dio užeta nosio bi sav teret dok bi donji bio neopterećen i labav. Prikaz ovisnosti deformacije takvog užeta i općenito neke sile F koja je uzrokovala tu deformaciju dana je linijom a na grafu na slici 11. (f).

Na slici 11. (b) prikazan je kabel čija je duljina manja od razmaka dviju kuka o koje će se zakvačiti. Kako bismo zakvačili kabel za donju kuku, potrebno je na njega djelovati silom F_1 zbog čijeg će se djelovanja on produljiti, te ćemo ga moći zakvačiti za kuku. Nakon što ga zakvačimo, u njemu će i dalje djelovati ta sila, sila prednapinjanja $P = F_1$ (slika 11. c).

Promotrimo zatim što će se dogoditi ako na ovako zategnuti kabel objesimo uteg težine G_1 . Na dijelu kabela iznad točke ovješavanja utega, sila će porasti, te će iznositi $P + G_1$, odnosno taj dio kabela će se dodatno zategnuti. U drugom dijelu, dijelu ispod točke ovješavanja, doći će do smanjenja sile u kabelu te će on biti manje zategnut. Odnosno, gornji i donji dio kabela ravnomjerno će sudjelovati u prijenosu opterećenja pa će deformaciji biti dvostruko manja nego kada se optereti nenapeti kabel (linija b na grafu).

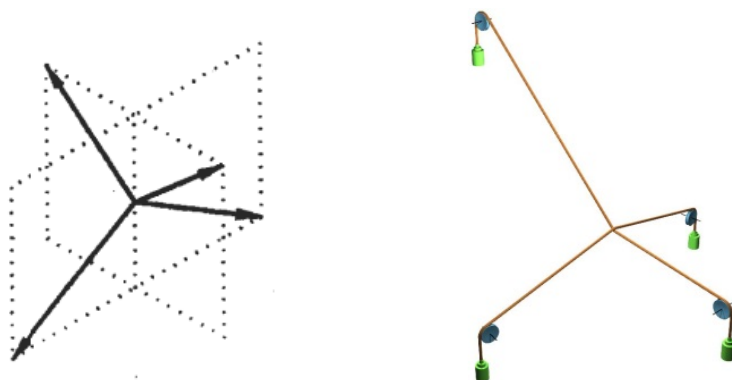
Povećavanjem mase utega, sila u gornjem dijelu kabela opet će se povećavati, a u donjem smanjivati. Za određenu težinu utega G_2 sila prednapona u donjem dijelu kabela će

iščeznuti, te će taj dio kabela postati labav. Odnos opterećenja i deformacija bit će isti kao i kod nenapetog kabela (linija d na grafu paralelna s linijom a).

Kabel sa slike 11.d možemo promatrati i na sljedeći način. Dio kabela iznad točke ovješnja promatramo kao da je nosivo uže, a dio ispod te točke kao prednaponsko, stabilizirajuće uže. Povećavanjem težine utega s vrijednosti G_1 na vrijednost G_2 , stabilizirajuće će se uže olabaviti, te više neće vršiti svoju funkciju, odnosno, uteg će se moći njihati. Sustav će, dakle, biti nestabilan.

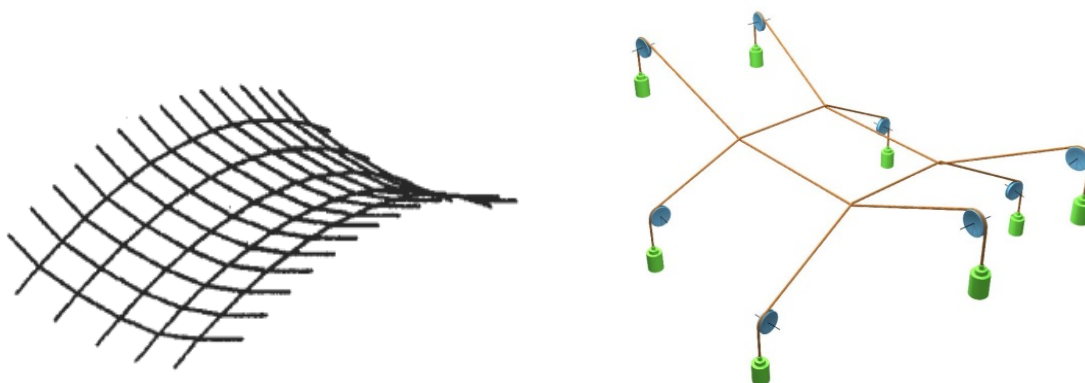
Osim toga što dovode do nestabilnosti, labavi kabeli u konstrukciji nam mogu prouzročiti i oštećenje pokrova te dovesti do pojave "vitoperenja" tih labavih dijelova na vjetru, što se ne tolerira, osim u privremenim objektima.

Uže ovješeno između dviju točaka preuzimat će opterećenje promjenom svog oblika, dok će se dva kabela koja se sijeku (slika 12.) stabilizirati zajedničku točku u kojoj se sijeku.



Slika 12. Dva kabela koji se sijeku stabiliziraju zajedničku točku

Slično, antiklastična mreža užadi suprotstavit će se vanjskom opterećenju zahvaljujući svojoj negativnoj zakrivljenosti i prednaponu (slika 13.).



Slika 13. Antiklastične mreže

3.5. Odabir elemenata i materijala

Projektiranje obuhvaća i odabir odgovarajućih materijala kabela (odabir poprečnog presjeka, čvrstoće i krutosti), te odabir materijala pokrova (cladding).

U nastavku ćemo dati kratak prikaz osnovnih tipova kabela i njihovih svojstava.

UŽAD

Glavna svojstva užeta su njegova mala fleksijska i poprečna krutost zbog čega ne može prenositi momente savijanja i poprečne sile već samo centričnu vlačnu silu. Posljedica toga, a ujedno i jedna od prednosti užeta je ta što će do njegovog sloma doći samo ukoliko se u njegovom najslabijem poprečnom presjeku prekorači vrijednost vlačne čvrstoće.

Možemo ih podijeliti na tri tipa [14]:

- **Spiralni snopovi**

Ovaj tip čine kabeli koji su sastavljeni na način da se oko jezgre koja se sastoji od ravne čelične žice namota sloj od šest žica, a u svaki sljedeći sloj ide šest žica više nego u prethodni.

Moduli elastičnosti ovog tipa kabela kreću se između vrijednosti $E = 145 - 170\text{GPa}$.

Vrstu snopa određuje način navijanja žica oko jezgre.

Glavne vrste su :

- snop s jednim ili dva sloja žica omotanih oko jezgre,
- snop s dva sloja žica istog promjera i popunjujućim slojem (Filler),
- snop s dva sloja žica s različitim polumjerima u zadnjem vanjskom sloju (Warrington),
- snop s više slojeva (kombinirani),
- žičana užad s čeličnom jezgrom.

Ovaj tip kabela primjenjuje se kada je potreban vrlo fleksibilan kabel, npr. kao rubni kabeli membrane, kabeli kod visećih mostova, stabilizirajući kabeli kod mreža kabela, vlačni elementi u stabilizacijskim vezovima i o sl.

- **Kabeli unutar krutog omotača**

Kabel se sastoji od dvije vrste žica: žice kružnog oblika I žice posebnog Z-oblika. Žice kružnog poprečnog presjeka namataju se u nekoliko slojeva I čine jezgru kabela, a žice Z-

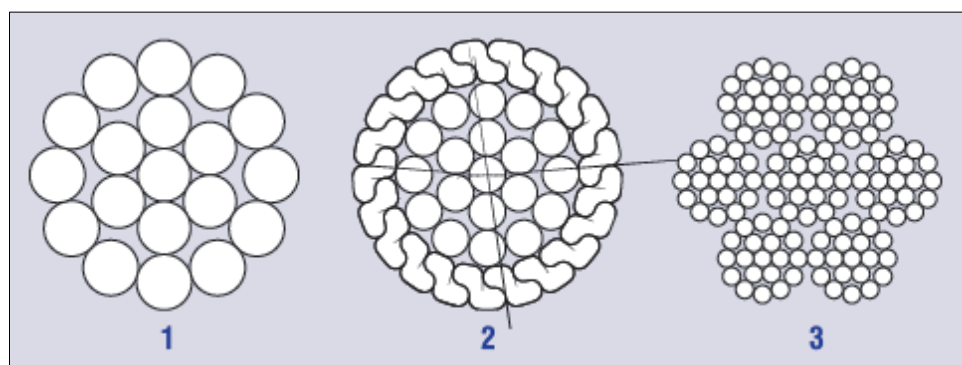
oblika čine vanjski sloj kabela. Zbog svog posebnog oblika, žice koje čine vanjski sloj mogu se međusobno jako dobro povezati. Njihovim namatanjem kabel postaje kompaktan, a površina ravna i bez ikakvih otvora koji bi omogućili eventualni prodor neželjenih tvari u kabel te time moguće problem s trajnosti kabela.

Obilježje ovakvih kabela je relativno visok modul elastičnosti $E=160-180$ Gpa te visoka otpornost na površinski tlak.

Upotrebljavaju se kao stabilizirajuća užad kod mreža, mostova, tornjeva ili pilona I sl.

- **Žičana užad**

Karakteristike ovog tipa užadi su niski modul elastičnosti, manja otpornost na koroziju te površina koja je podložnija oštećivanju. Uglavnom se koristi samo za specijalne namjene kao što su kabeli dizala, kabeli stepeništa, balkona I pješečkih prolaza.



Slika 14. Vrste kabela: 1) spirani snop, 2) kabel unutar krutog omotača, 3) žičana užad (preuzeto iz [13])

3.6. Određivanje duljine kabela

Zbog pojave puzanja, kabeli se moraju rezati otprilike $\varepsilon = 0,35\%$ kraći [13]. Deformacije zbog puzanja realizirat će se u cijelosti tek nakon nekog vremena, tako da je moguće da će u fazi montaže biti potrebne veće sile prednapona.

Vrijeme od početka do kraja puzanja ovisi o više faktora među kojima su: veličina opterećenja, količina opterećenja te temperatura.

Vrijednost od $\varepsilon = 0,35\%$ je iskustvena, te je za konstrukcije osjetljivije geometrije potrebno ispitati ponašanje zbog točne deformacije od puzanja.

3.7. Rješavanje detalja spojeva

Detalji međusobnog spajanja unutarnjih kabela - stezaljke

Ovi detalji moraju biti izvedeni tako da onemoguće relativne vertikalne i horizontalne pomake kabela koje spajaju, no istovremeno trebaju omogućiti relativne zaokrete. Dakle, na temelju ovih uvjeta, ove bi detalje mogli poistovjetiti sa zglobnom vezom [15].

Općenito, stezaljke možemo podijeliti na dvije vrste:

Prvu vrstu čine prefabricirane stezaljke koje se u tvornici pričvršćuju na kabele. Pogodno ih je rabiti kod mreža kod kojih su duljine kabela između čvorova fiksne i unaprijed odabrane, jer će uvelike olakšati montažu.

Drugu vrstu čine stezaljke koje se montiraju na licu mjesta. Njihova prednost nad prefabriciranim stezaljkama se očituje u tome što se eventualne greške mogu ispravljati na samom mjestu izvedbe. Naime, kod prefabriciranih stezaljki postoji mogućnost grešaka pri proizvodnji ili montaži, koje se kasnije ne mogu ispravljati na mjestu montaže. Sile u kabelima su jako osjetljive čak i na relativno malo razlike u duljinama kabela od onih projektiranih.

Eventualno rješenje tog problema u slučaju prefabriciranih stezaljki je upotreba zatega (španera) koji se najčešće postavljaju na krajevima kabela i koji omogućuju fino podešavanje duljine kabela, te tako ispravljanje nedostataka. No, ovo rješenje je dosta skupo, pa su zato stezaljke koje se montiraju na licu mjesta bolje rješenje.



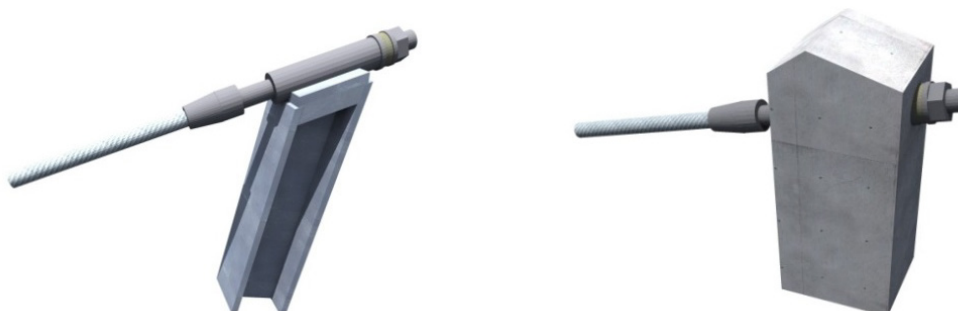
Slika 15. Lijevo: stezaljke postavljene na kabele u tvornici, sredina: dvostruka U stezaljka za spojeve s dva kabela, desno: detalj spoja s rubnim užetom; (prema [15])

Veza kabel-konstrukcija

U ovu vrstu spadaju sve veze između kabela i krutog nosivog sklopa (npr. betonskog ili čeličnog) [15]. Veza se sastoji od dijela u kojem završava kabel te od samog spoja kabela i krutog okvira.

Čelični dio u kojem završava kabel (čelična čašica) nalazi se na samom kraju kabela te drži žice. Vanjski izgled može biti različit, ovisno o estetskim zahtjevima pojedine mreže, no osnovne unutarnje dimenzije čašice ovise o promjeru kabela. Načelno je duljina čašice 5,5 do 6 puta veća od promjera kabela, a promjer joj je 2 do 3 puta veći.

Spojevi kabela i krutog okvira moraju biti takvi da osiguraju traženu veličinu sile prednapinjanja u kabelu. Isto tako, mora se paziti na to da kabeli ne iskliznu iz spoja. Naime, i malo isklizavanje može dovesti do gubljenja prednapona, a time i do labave konstrukcije. Kako se to ne bi dogodilo, mora postojati dovoljno velika sila trenja koja će spriječiti isklizavanje. Uz navedeno, treba voditi brigu i o tome da se spriječi prodiranje vlage u kabel na mjestu spoja.



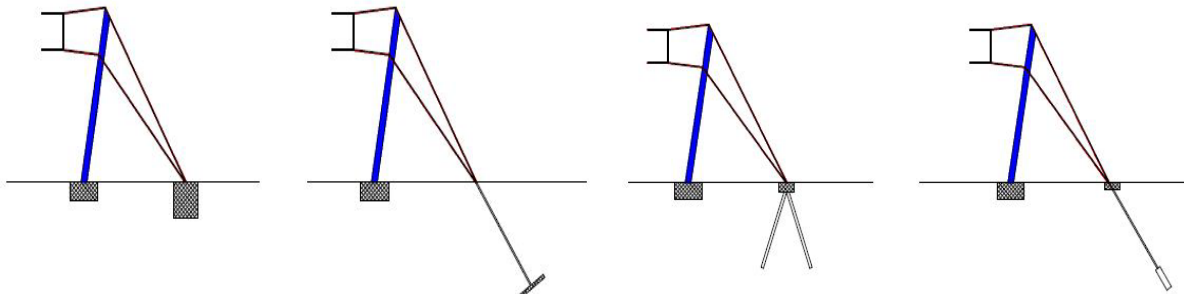
Slika 16. Priključak na čelični stup i betonski stup, (prema [15])

Veza kabel-podloga (sidra)

Ove veze upotrebljavamo kada sile iz kabela treba prenijeti izravno u podlogu [15]. Postoje različiti načini sidrenja kabela, a konačan odabir ovisi o vrsti podloge (tla) u koje se sidri. Tako razlikujemo:

Gravitacijska sidra koja svojom vlastitom težinom uravnotežuju vertikalnu komponentu vlačne sile iz užeta, dok horizontalnu komponentu preuzima samo tlo. Ovu vrstu sidara upotrebljavamo kod tla slabe nosivosti, kao što su na primjer pijesak ili šljunak.

Pločasta, gljivasta i slična sidra koriste se samom težinom tla iznad njih kako bi se oduprla vlačnim silama iz kabela. Ovakvu vrstu sidra upotrebljavamo npr. u glini.



Slika 17. Vrste sidara: gravitacijsko, pločasto, piloti, sidro

3.8. Montaža

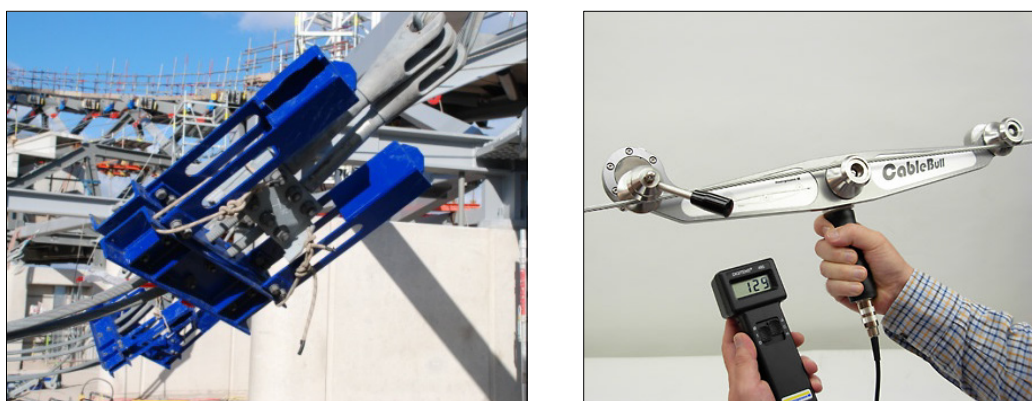
Postoje dvije mogućnosti za montažu mreža kabela: sastavljanje mreže na tlu i postavljanje u konačan položaj, te montaža u zraku.

Jedna od prednosti ovih konstrukcija je ta što je za njihovu montažu potrebna mala ili nikakva skela. Uz to, montaža je vrlo brza. No, unatoč ovim prednostima, montaža mreže kabela nije nimalo lak zadatak. Naime, svaki korak montaže zahtijeva prethodnu kontrolu te proračunavanje sile prednapinjanja kabela u toj fazi, kao i kompjutorsku kontrolu prednapona u trenutku prednapinjanja, kako ne bi došlo do preopterećenja potpornih konstrukcija.

Za vrijeme montaže na mrežu će djelovati neka opterećenja koja se inače neće javljati za vrijeme njenog korištenja. Ta opterećenja i njihove utjecaje također treba prethodno odrediti te provjeriti da naprezanja u kabelima, ali i u potpornim konstrukcijama, ne premašuju ona dopuštena. Dakle, za svaki korak faze montaže treba odrediti geometriju te sile u kabelima.

Za mreže s rubnim kabelima pogodnija je metoda slaganja mreže na tlu i naknadno dizanje, dok se za mreže s krutim rubovima (npr. tlačni prsten i sl.) mogu primijeniti obje metode.

Ovdje ćemo samo nadodati kako male "greške" u duljinama kabela mogu značajno utjecati na veličine sila u kabelima. No, čak i uz veliki oprez, često će biti potrebno provesti dodatne modifikacije nakon što se mreža postavi u konačni položaj. Ti se prepravci izvode umetanjem zatezaljki (španera) na krajevima kabela kako bi se fino kontrolirale duljine te tako spriječila pojava različitih sila u kabelima od onih projektiranih.



Slika 18. lijevo: uređaj za prednapinjanje kabela na olimpijskom velodromu u Londonu; desno: kontroliranje sile prednapinjanja u kabelu

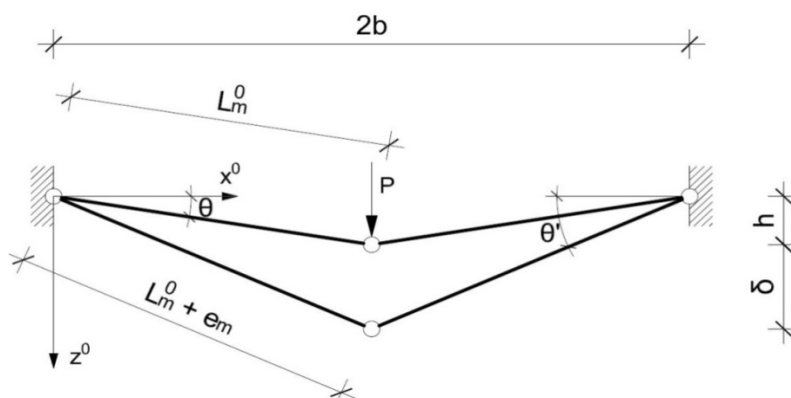
Samo prednapinjanje kabela može se provesti na dva načina: izravno preko kabela ili preko terminala. Uređajem za mjerenje sile u kabelima mjere se sile prednapinjanja te se bilježe za dokumentaciju.

3.9. Geometrijska nelinearnost

Vlačne konstrukcije od užadi spadaju u kategoriju konstrukcija kod kojih su pomaci veliki čak i pri napreznjima ispod granice elastičnosti, te ih ne smijemo zanemariti.

Geometrijska nelinearnost nije obilježje samo konstrukcija od platna i užadi. U nastavku dajemo primjer jednostavne konstrukcije kod koje pri djelovanju opterećenja također može doći do velikih pomaka [9].

Sustav se sastoji od dva linearno elastična štapa zglobno spojena na krajevima i u sredini.



Slika 19. Geometrijska nelinearnost

Iz uvjeta ravnoteže svih sila u smjeru osi z slijedi

$$\begin{aligned}
 P &= 2K e_m \sin \theta' \\
 &= 2K e_m \frac{\sqrt{(L_m^0 + e_m^0)^2 - b^2}}{L_m^0 + e_m^0}, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

gdje su:

L_m^0 - početna duljina štapova,

e_m^0 - produljenje svakog štapa,

$K = \frac{EA}{L_m^0}$ - elastična krutost ,

E - Youngov modul elastičnosti ,

A - površina poprečnog presjeka ,

θ' - kut koji štapovi zatvaraju s osi x nakon deformacije.

Ako raspišemo izraz (3.1) dobit ćemo

$$\begin{aligned}
 P &= 2K e_m \frac{\sqrt{(L_m^0 + e_m^0)^2 - b^2}}{L_m^0 + e_m^0} = 2K \frac{e_m}{L_m^0 + e_m^0} (\delta + h) \\
 &= 2K \left(1 - \frac{L_m^0}{L_m^0 + e_m^0} \right) (\delta + h) = 2K \left(\delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} \right) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Gornji izraz nam predočuje nelinearan odnos opterećenja P i pomaka δ .

Ako raspišemo član u zagradi moći ćemo pokazati pod kojim uvjetima odnos opterećenja i pomaka postaje linearan.

$$\begin{aligned}
 \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{(\delta + h)^2 + b^2}} &= \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{\delta^2 + 2\delta h + h^2 + b^2}} \\
 &= \delta + h - \frac{L_m^0 (\delta + h)}{\sqrt{h^2 + b^2}} \left(1 + \frac{2\delta h + \delta^2}{h^2 + b^2} \right)^{-1/2} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Razvijajući izraz u zagradama u red i uzimajući u obzir da je $(L_m^0)^2 = h^2 + b^2$, dobivamo

$$\begin{aligned}
 &\approx \delta + h - (\delta + h) \left(1 - \frac{1}{2(L_m^0)^2} (2\delta h + \delta^2) \dots \right) \\
 &= \frac{h^2}{(L_m^0)^2} \delta \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Ako ovaj izraz vratimo u (3.2) dobit ćemo izraz

$$P = 2K \frac{h^2}{(L_m^0)^2} \delta \quad (3.5)$$

koji opisuje linearan odnos opterećenja i pomaka, pošto je $\frac{h^2}{(L_m^0)^2}$ konstanta.

Ovim smo primjerom pokazali da je za velike pomake odnos opterećenje-pomak nelinearan, dok je za male pomake linearan (ti pomaci moraju biti toliko mali da dozvoljavaju uzimanje u obzir samo prvih članova u razvoju u red).

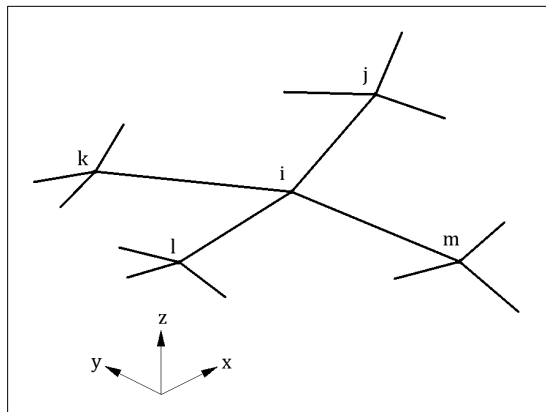
Rješavanje geometrijski nelinearnog problema provodi se primjenom različitih numeričkih metoda. Jedna od njih je metoda prijelazne matrice krutosti [9].

4. Metoda gustoća sile

4.1. Formiranje sustava jednačbi ravnoteže čvorova

Uvodimo sljedeće pretpostavke:

- mreža sa sastoji od kabela čiji su elementi između čvorova ravni te međusobno spojeni zglobno,
- elementi mogu preuzeti samo vlak,
- zanemaruje se vlastita težina kabela,
- nema vanjskog opterećenja,
- topologija mreže, odnosno povezanost pojedinih štapova i čvorova, unaprijed nam je poznata.



Slika 20. Čvor i sa susjednim čvorovima i priključenim štapovima

Promatramo čvor i na slici 20. Uvjete ravnoteže i -tog čvora možemo izraziti na sljedeći način:

Zbrojevi projekcija svih sila prednapona u štapovima priključenim u i -ti čvor na osi koordinatnog sustava moraju biti u ravnoteži :

$$\sum_{j=1}^{n_i} S_{ij} \cdot \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} S_{ij} \cdot \frac{(y_i - y_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 , \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} S_{ij} \cdot \frac{(z_i - z_j)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0 ,$$

gdje su:

- n_i - broj užadi pričvršćenih na i-ti čvor,
- $S_{i,j}$ - sila u štapu koji povezuje čvorove i i j,
- $l_{i,j}$ - duljina štapa,
- x_i, y_i, z_i - koordinate čvora.

4.2. Poopćena geodetska mreža

Ukupnu duljinu svih kabela mreže možemo zapisati kao:

$$L = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (4.2)$$

Kad bismo za vrijeme prednapinjanja omogućili klizanje kabela, iznos sila bi u svim kablama bio jednak, a duljina užadi minimalna. Minimizacijom ukupne duljine kabela, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z_i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pomnožimo li te jednadžbe s $S = S_{ij}$, dobit ćemo :

$$\begin{aligned} S \frac{\partial L}{\partial x_i} &= S \sum_{j=1}^{n_i} \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ S \frac{\partial L}{\partial y_i} &= S \sum_{j=1}^{n_i} \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \\ S \frac{\partial L}{\partial z_i} &= S \sum_{j=1}^{n_i} \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Gornji sustav jednadžbi jednak je sustavu jednadžbi ravnoteže čvorova (4.1). Dakle, rješavanjem sustava (4.4), uz uvjet da su sve sile S međusobno jednake, dobit ćemo da je ravnotežno stanje ekvivalentno minimizaciji ukupne duljine svih štapova pomnoženih s uzdužnom silom prednapinjanja $S = S_{ij}$. Dobivena mreža je minimalna mreža.

Kad bismo u rješavanju sustava zadali uvjet da su sile u kabelima međusobno različite, ali jednake duž pojedinog kabela, ravnotežno bi stanje bilo ekvivalentno minimizaciji duljine svih štapova pomnoženih pripadnim uzdužnim silama. Ovako dobivenu mrežu nazivamo poopćenom minimalnom mrežom.

Gornji sustav jednadžbi je nelinearan, te zahtijeva primjenu neke od iterativnih metoda rješavanja [16]. Pri tome je potrebno započeti s dobrom aproksimacijom rješenja kako algoritam rješavanja ne bi divergirao, odnosno, početna aproksimacija treba biti takva da leži unutar područja konvergencije. Samo područje konvergencije je nepravilnog oblika što može rezultirati time da iteracija iz možda prividno bolje aproksimacije sporije konvergira nego neka prividno lošija. Može se pokazati da područje konvergencije ima karakteristike fraktala [17].

4.3. Zašto baš minimalne mreže?

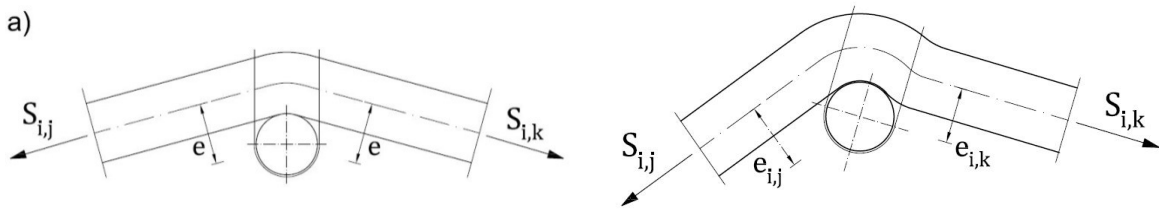
Postoji nekoliko pogodnosti pri primjeni minimalnih mreža u oblikovanju mreža od užadi. Osnovna svojstva minimalnih mreža su jednake sile u svim kabelima te minimalna duljina kabela. Posljedica toga je da su svi kabeli u mreži duž svoje duljine, ali i međusobno, jednako napregnuti. Dakle, neće postojati kritična mjesta na mreži s ekstremnim naprezanjima gdje bi inače najprije moglo doći do popuštanja, odnosno otkazivanja. Nadalje, zbog toga što je duljina kabela minimalna, bit će potrebno i manje materijala.

Uz gore navedeno, valja napomenuti kako kod minimalne mreže oblik mreže ne ovisi o svojstvima materijala kabela, već samo o silama prednapinjanja, odnosno o njihovom omjeru u slučaju poopćenih minimalnih mreža.

Problem izobličavanja čvorova

Kad bismo spojili dva kabela koji se mimoilaze u nekom čvoru, a sile uzduž pojedinog kabela ne bi bile izjednačene, došlo bi do izobličenja spoja. Naime, za razliku od situacije kad su sile uzduž pojedinog kabela jednake i kad spoj dvaju kabela prenosi samo normalne kontaktne sile, u slučaju nejednakih sila uzduž kabela spoj mora prenositi još i tangencijalnu silu koja sprečava klizanje užadi. Ta situacija nije pogodna zato što već u fazi prednapinjanja

spojevi moraju prenositi velike sile, koje se mogu još dodatno povećati kad je mreža opterećena nekim vanjskim opterećenjem. Posljedica spriječenog klizanja je izobličavanje čvora (slika 21.a).



Slika 21. a) Ekscentricitet, b) izobličenje čvora

U svakom čvoru mreže mora vrijediti sljedeće:

$$S_i e_i = S_k e_k \quad (4.5)$$

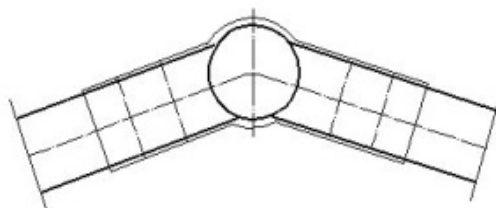
gdje su:

- S_i i S_k - sile u i-tom i k-tom štapu istog užeta,
- e_i i e_k - krakovi sila S_i i S_k i odnosu na središte donjeg kabela

Pošto su kod mreža u kojima je spriječeno klizanje veličine sile uzduž pojedinih kabela različite, a mora vrijediti ravnoteža momenata, krakovi sila će se smanjiti ili povećati sve dok se to ne postigne slika 21.b.

Ovaj se problem može pojaviti pri nalaženju oblika metodom gustoća sile ako pretpostavimo da je vrijednost gustoća sile u kabelima jednaka jedinici (ili nekoj drugoj vrijednosti). Tada će, naime, sile u štapovima (pojedinačnih) kabela biti različite ako su duljine tih štapova biti različite. Oblikovanjem minimalne mreže kojoj dopuštamo klizanje kabela za vrijeme prednapinjanja izbjeći ćemo ovaj problem jer su, kao što smo već rekli, u takvoj mreži sile uzduž pojedinačnih kabela jednake, pa će izraz 4.5 vrijediti i bez izobličavanja čvora.

Pri različitim iznosima sila jedno je od mogućih rješenja centriranje čvorova posebno oblikovanim detaljima.



Slika 22. Moguće rješenje problema izobličavanja čvora

4.4. Metoda gustoća sile

Da bismo riješili nelinearni sustav jednačbi ravnoteže čvorova (4.4), treba primijeniti neku od numeričkih metoda uz pretpostavljenu aproksimaciju početnog rješenja.

Ideja metode gustoća sile razvijene za potrebe proračuna Olimpijskog kompleksa u Munchenu [8] [18] [19], jest linearizacija nelinearnog sustava jednačbi ravnoteže čvorova. Sustav linearnih jednačbi dobit ćemo ako za omjer vlačne sile u užetu $S_{i,j}$ i njegove duljine $l_{i,j}$, odaberemo vrijednost $q_{i,j}$ koju nazivamo "gustoća sile":

$$q_{i,j} = S_{i,j}/l_{i,j} \quad (4.6)$$

Sustav (4.4) će pritom prijeći u oblik

$$\sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (x_i - x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (y_i - y_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j} \cdot (z_i - z_j) = 0 \quad (4.7)$$

Nepoznate su nam vrijednosti sile u štapovima i koordinate čvorova, dakle $m + 3n$ nepoznanica, te $3n$ jednačbi. No, uz to, imamo m dodatnih jednačbi (4.6) čiji su koeficijenti konstantni, pa će nam preostati sustav s $3n$ jednačbi i $3n$ nepoznanica, čija su rješenja koordinate slobodnih čvorova mreže. Poznavanjem koordinata čvorova mreže, mogu se izračunati duljine elemenata mreže primjenom izraza

$$L = \sum l_{i,j} = \sum \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}, \quad (4.8)$$

a zatim i sile u njima prema izrazu (*br). Nedostatak metode gustoća sile je što se na izvedenoj konstrukciji mora zadovoljiti pretpostavka da čvorovi padaju točno u projektirane točke.

4.5. Matrična formulacija metode gustoća sile

Na početku se nacrtava mreža sa svim numeriranim čvorovima (od 1 do n_s) i elementima (od 1 do m). Ukupan broj čvorova, n_s , sastoji se od ležajnih (fiksni) čvorova kojih ima n_f , te od slobodnih čvorova kojih ima n . Ukupan broj čvorova je tako $n_s = n + n_f$.

Idući je korak tvorba matrice povezanosti C_s , koja opisuje topološku vezu čvorova i elemenata u mreži.

Elementi matrice C_s su

$$c_s(j, i) = \begin{cases} +1 & \text{za } i = k \\ -1 & \text{za } i = l \\ 0 & \text{ostali slučajevi} \end{cases} \quad (4.9)$$

gdje su k i l , početni i krajnji čvor nekog elementa j .

Matricu povezanosti C_s možemo podijeliti na dvije matrice

$$C_s = [C \ C_f] , \quad (4.10)$$

gdje su

- C matrica povezanosti slobodnih čvorova,
- C_f matrica povezanosti rubnih (fiksni) čvorova.

Projekcije duljina elemenata u smjeru osi x možemo zapisati kao

$$\begin{Bmatrix} L_{1,x} \\ L_{2,x} \\ L_{3,x} \\ L_{4,x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ x_5^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^0 - x_5^0 \\ x_2^0 - x_5^0 \\ x_3^0 - x_5^0 \\ x_4^0 - x_5^0 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Analogno se dobije i zapis za projekcije u smjerovima osi y i z .

Skraćeno možemo pisati:

$$\begin{aligned} L_{m,x} &= C_s x_s = Cx + C_f x_f , \\ L_{m,y} &= C_s y_s = Cy + C_f y_f , \\ L_{m,z} &= C_s z_s = Cz + C_f z_f , \end{aligned} \quad (4.12)$$

gdje su

- x, y, z - vektori koordinata slobodnih čvorova,
- x_f, y_f, z_f - vektori koordinata fiksnih čvorova.

Komponente unutarnjih sila u kabelima $Q_{m,x}$, $Q_{m,y}$, $Q_{m,z}$ možemo izraziti preko produkta matrice gustoća sile Q i projiciranih duljina elemenata

$$\begin{aligned} Q_{m,x} &= QL_{m,x} , \\ Q_{m,y} &= QL_{m,y} , \\ Q_{m,z} &= QL_{m,z} , \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdje je Q dijagonalna matrica

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Za svaki slobodni čvor možemo napisati tri jednadžbe ravnoteže:

$$\sum Q_{m,x} = 0, \quad \sum Q_{m,y} = 0, \quad \sum Q_{m,z} = 0 \quad (4.15)$$

Ako u zadnji izraz uvrstimo izraze (4.12), (4.13) i (4.14), dobit ćemo

$$\begin{aligned} C^T Q C_s x_s &= 0, \\ C^T Q C_s y_s &= 0, \\ C^T Q C_s z_s &= 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

uz napomenu da se sumacija iz izraza (4.12) može izvesti množenjem $Q_{m,x}$, $Q_{m,y}$, $Q_{m,z}$ sa C^T .

Izraz (4.16) možemo pisati i kao

$$\begin{aligned} C^T Q C x_s + C^T Q C_f x_s &= 0, \\ C^T Q C y_s + C^T Q C_f y_s &= 0, \\ C^T Q C z_s + C^T Q C_f z_s &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Ako uvedemo

$$\begin{aligned} D &= C^T Q C, \\ D_f &= C^T Q C_f, \end{aligned} \quad (4.18)$$

Slijedi

$$\begin{aligned} D x &= -D_f x_f, \\ D y &= -D_f y_f, \\ D z &= -D_f z_f. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Rješenje ovog sustava jednadžbi je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}_f\mathbf{x}_f, \\ \mathbf{y} &= -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}_f\mathbf{y}_f, \\ \mathbf{z} &= -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}_f\mathbf{z}_f. \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.6. Analogija s metodom pomaka

Nepoznanice u metodi pomaku su pomaci i kutovi zaokreta čvorova koje dobivamo rješavanjem sustava jednadžbi ravnoteže. U metodi gustoće sile nepoznanice su koordinate čvorova. Unatoč ovoj razlici između metode pomaka i metode gustoće sile, može se pokazati da među njima postoji određena analogija [20]. Naime, matrica krutosti u metodi pomaka ima istu strukturu kao i matrica $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}$ koju smo ranije izveli u metodi gustoće sile.

U matrici krutosti elementi na dijagonali jednaki su zbroju koeficijenata krutosti svih elemenata povezanih u neki čvor. Elementi izvan dijagonale jednaki su odgovarajućim koeficijentima krutosti ili nuli, ovisno o tome kakav utjecaj na odgovarajuću statičku veličinu ima određeni pomak.

Elementi matrice \mathbf{D} na dijagonali su zbrojevi gustoća sile kabela koji se sijeku u nekom čvoru, a elementi izvan dijagonale negativne su vrijednosti gustoće sile u kabelu između dva odgovarajuća čvora. Ako čvorovi nisu međusobno povezani, tada će odgovarajući element matrice \mathbf{D} biti nula.

Dakle, gustoća sile q analogna je koeficijentima krutosti u metodi pomaka. Isto tako, povezanost čvorova je u obje matrice definirana isti način.

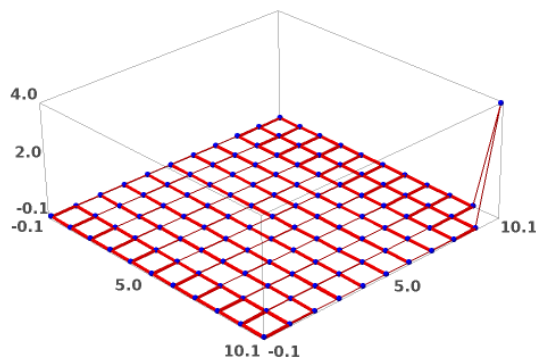
Matrična formulacija metode gustoće sile koju smo prethodno izveli formalni je opis metode, no rješavanje problema na ovaj način zahtijeva više računalnog vremena te troši više memorije. Razlog tome su složene i dugotrajne matrične operacije koje zahtijeva postupak.

S druge strane, primjenom analogije s metodom pomaka, zaobilazimo te nedostatke. Naime, matrica krutosti može se sklopiti direktno, bez ikakvih predradnji ili množenja s matricom povezanosti i njezinom transponiranom matricom. Također, ne postoji potreba za nekom određenom podjelom slobodnih i rubnih (fiksni) čvorova. Uz to, sustav jednadžbi možemo riješiti Gaussovom eliminacijom umjesto inverzom matrice.

4.7. Ovisnost izbora gustoće sile i izgleda mreže

Promatramo mrežu razepetu nad područjem 10x10 m, s 121 čvorom. Mreža ima 4 fiksna rubna čvora (u uglovima), od kojih se tri nalaze u istoj ravnini, a četvrti je izdignut na visinu od 4 m.

Pokazat ćemo kako variranjem odnosa gustoća sile u rubnim i unutrašnjim kabelima možemo utjecati na izgled mreže.



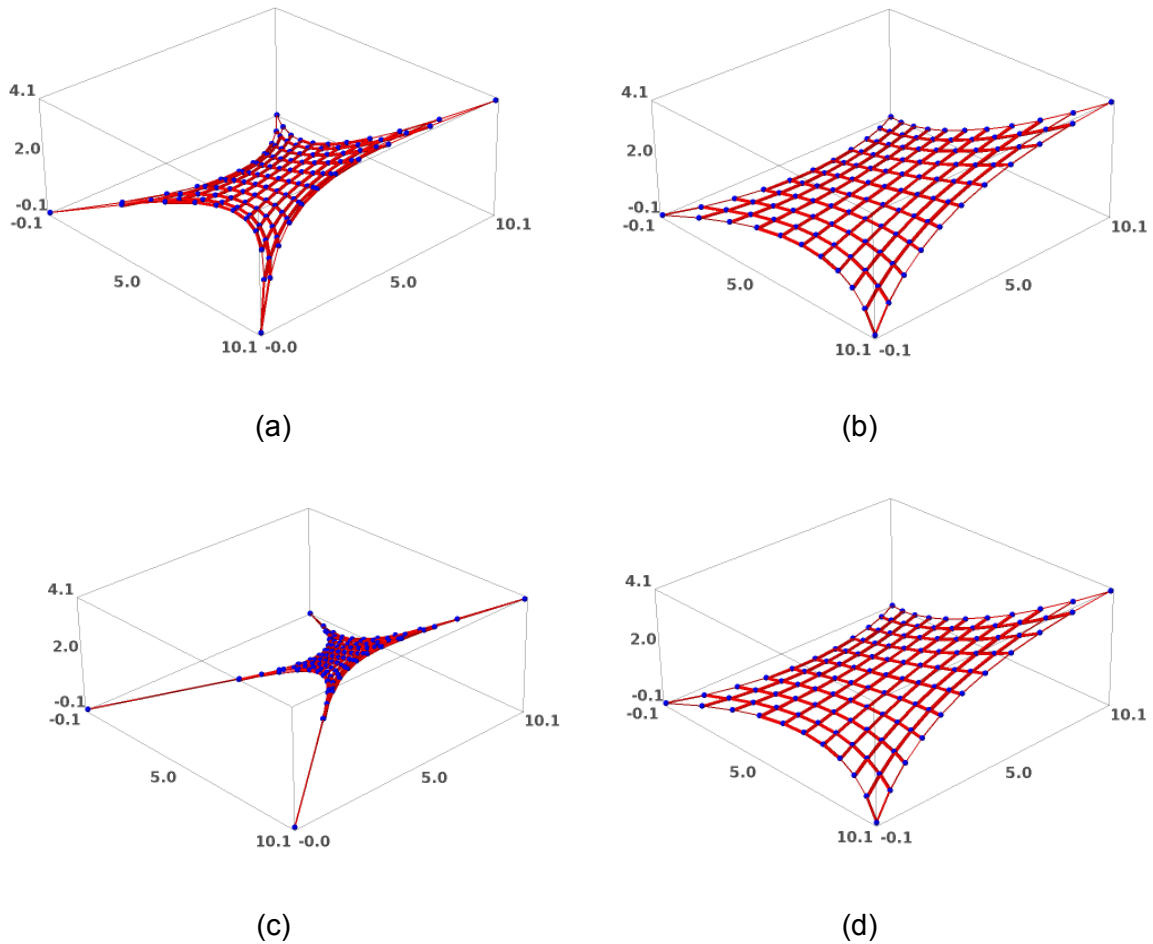
Slika 23. Zadana početna mreža

Na slici 24.a) iznosi su gustoća sile u unutrašnjim i rubnim kabelima jednaki i iznose 1. Na istoj slici pod b) povećan je iznos gustoća sile u rubnim kabelima, dok je u unutrašnjim kabelima ostala ista vrijednost. Posljedica toga je "proširenje" mreže u odnosu na onu sa slike 24.a). Slično, povećemo li iznos gustoće sile u unutrašnjim kabelima mreža će se "skupiti".

Variranje iznosa gustoća sile u rubnim i unutrašnjim kabelima, uz zadržavanje istih omjera tih dviju veličina, rezultirat će istim ravnotežnim stanjem. Dakle, oblik mreže ovisi samo o omjeru gustoća sile u rubnim i unutrašnjim kabelima, a ne o njihovoj pravoj vrijednosti. Prava vrijednost utjecat će na krutost mreže koja nas zanima pri kontroli deformacija mreže zbog djelovanja nekog vanjskog opterećenja na nju.

Tablica 1. Omjeri gustoća sile unutarnjih i rubnih kabela

	a)	b)	c)	d)
$q_{unutarjni}$	1	1	5	5
q_{rubni}	1	5	1	25



Slika 24. Mreže s različitim omjerima gustoća sile

4.8. Iteracijska primjena metode gustoća sile na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža

U članku [21] autori uvode "iteracijsku metodu utemeljenu na metodi gustoća sile koja omogućava postizanje konstantne sile u unutarnjim štapovima mreže", dakle, metodu kojom se može postići minimalna mreža.

Gustoća sile u štapu (i,j) unutarnjeg kabla u k-tom koraku računa se kao:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}}{S_{i,j}^{(k-1)}}, \quad (4.21)$$

gdje su

$q_{i,j}^{(k-1)}$ - gustoća sile iz k-1 koraka,

\bar{S} - tražena vrijednost sile,

$S_{i,j}^{(k-1)}$ - vrijednost sile izračunata u k-1 koraku.

Pojašnjenje postupka je:

Pretpostavimo da je sila izračunata u $k - 1$ koraku iteracije $S_{i,j}^{(k-1)}$, različita od tražene vrijednosti \bar{S} . Vrijednost \bar{S} dobit ćemo množenjem vrijednosti sile $S_{i,j}^{(k-1)}$ koeficijentom $s_{i,j}^k$, tj. $\bar{S} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)}$.

Vrijednost sile u k -tom koraku bit će

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k)}. \quad (4.22)$$

Ako je

$$l_{i,j}^{(k)} = l_{i,j}^{(k-1)}, \quad (4.23)$$

tj., ako se duljina štapa nije promijenila, onda će vrijediti i

$$S_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}. \quad (4.24)$$

Ako je uz to i $S_{i,j}^{(k)}$ konačna, tražena vrijednost sile onda je i

$$S_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot S_{i,j}^{(k-1)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot q_{i,j}^{(k-1)} \cdot l_{i,j}^{(k-1)}. \quad (4.25)$$

Ako ovaj izraz usporedimo s izrazom (4.24) dobit ćemo

$$q_{i,j}^{(k)} = s_{i,j}^{(k)} \cdot q_{i,j}^{(k-1)}. \quad (4.26)$$

Dakle, kad se duljina štapa ne bi mijenjala, gustoća sile iz izraza (4.21) bi odmah dala traženu vrijednost sile.

No, ravnotežna konfiguracija najčešće se mijenja promjenom gustoća sile, a samim time se mijenjaju i duljine štapova. Zbog toga rješavanje zadatka zahtijeva primjenu iteracijskog proračuna kojim se postupno približavamo zahtijevanoj veličini sile u užetu.

Autori se u članku ne bave štapovima rubnih kabela, iako navode kako se u "klasičnoj" metodi gustoće sile "...konstantna vrijednost daje gustoćama sile u unutarnjim elementima, a različite vrijednosti rubnim elementima."

Mogućnošću zadavanja različitih vrijednosti kabela u različitim kabelima, znatno nam se povećava broj mogućih oblika mreža užadi. Gornji postupak lako možemo proširiti kako bi u različitim štapovima dobili različite vrijednosti sile.

Gustoću sile u štapu (i,j) u k-tom koraku možemo računati prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{\bar{S}_{i,j}}{S_{i,j}^{(k-1)}}, \quad (4.27)$$

gdje je

$\bar{S}_{i,j}$ – zahtijevana vrijednost sile u štapu (i,j).

Vrijednost sile $\bar{S}_{i,j}$ ne mora biti ista kao i sile u ostalim štapovima. No, ako želimo oblikovati poopcenu minimalnu mrežu, moramo paziti da su sile u svim štapovima pojedinog kabla jednake.

Ako u gornji izraz uvrstimo odnos $\frac{q_{i,j}}{S_{i,j}} = \frac{1}{l_{i,j}}$, dobit ćemo još jedan izraz za gustoću sile

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{\bar{S}_{i,j}}{l_{i,j}^{(k-1)}}. \quad (4.28)$$

4.9. Uvođenje kinematičkih ograničenja

Potreba za uvođenjem kinematičkih ograničenja javlja se u situacijama kada dva ili više čvorova "otkližu" u jednu točku (slika), odnosno, općenito kod prevelikog klizanja kabela. Najčešće će se to dogoditi na rubnim kabelima i to neovisno o silama u njima (veće sile u rubnima kabela mogu eventualno usporiti klizanje)(slika 25. i slika 26.). Uvođenjem kinematičkih ograničenja osiguravamo zahtijevane duljine štapova.

To ćemo napraviti na sljedeći način.

Gustoću sile u štapu (i,j) koji ima zahtijevanu duljinu $\bar{l}_{i,j}$, računat ćemo prema izrazu

$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}. \quad (4.29)$$

Kako vrijedi da je, uz $S_{i,j}^{(k)} = S_{i,j}^{(k-1)}$,

$$\frac{q_{i,j}^k}{q_{i,j}^{k-1}} = \frac{l_{i,j}^{k-1}}{l_{i,j}^k}, \quad (4.30)$$

slijedi da je koeficijent kojim treba pomnožiti gustoću sile iz predhodnog koraka $\frac{l_{i,j}^{k-1}}{l_{i,j}^k}$, odnosno

$$q_{i,j}^k = q_{i,j}^{k-1} \frac{l_{i,j}^{k-1}}{l_{i,j}^k}. \quad (4.31)$$

Iz gornjeg izraza i iz izraza

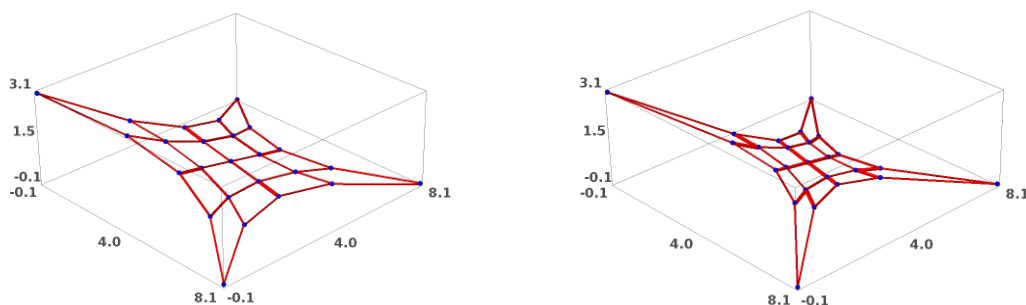
$$S_{i,j} = q_{i,j} l_{i,j}, \quad (4.32)$$

dobit ćemo

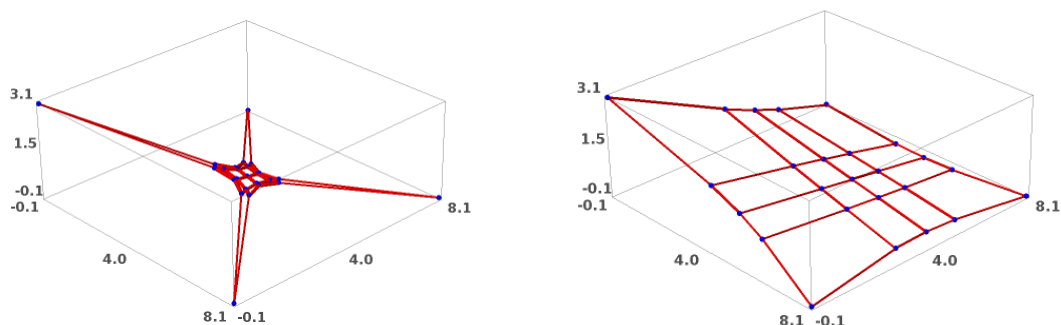
$$q_{i,j}^{(k)} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}}. \quad (4.33)$$

Jedna od prednosti ovog iteracijskog proširenja je to što za razliku od nelinearnih metoda, ovdje nije potrebna početna aproksimacija rješenja pošto je dobiven sustav jednadžbi linearan. Dakle, ne moramo se brinuti da li će nam početna aproksimacija upasti u područje konvergencije. Sustav jednadžbi se rješava direktnim metodama te je sam postupak razmjerno brz.

Uz to, mreža iz svakog koraka ove metode je uravnotežena, što nije slučaj kod ostalih iteracijskih metoda, gdje je samo konačno rješenje uravnoteženo.



Slika 25. Klizanje kabela, lijevo: mreža nakon prvog koraka, desno: mreža nakon drugog koraka



Slika 26. Lijevo: mreža nakon četiri koraka, desno: mreža s deset puta većom gustoćom sile u rubnim kablama nakon 100 koraka

4.10. Zadavanje nerastegnutih duljina odabranih štapova

Metoda se može proširiti i tako da se omogući zadavanje nerastegnutih duljina odabranih štapova mreže. Pojašnjenje ovakvog proširenja je sljedeće:

Normalna naprezanja općenito možemo napisati kao:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4.34)$$

gdje su:

- σ – normalno naprezanje u štapu
- E – modul elastičnosti materijala štapa
- ε – relativna deformacija

Daljnijim raspisom dobit ćemo

$$\frac{S}{A} = E \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4.35)$$

$$Sl_0 = AE(l - l_0) \quad (4.36)$$

gdje su:

- S – sila prednapinjanja u užetu,
- A – površina poprečnog presjeka odabranog štapa,
- l_0 – nedeformirana duljina,
- l – deformirana duljina.

Početna, nedeformirana duljina nekog štapa bit će stoga

$$l_0 = \frac{AE}{AE + S} l, \quad (4.37)$$

a deformirana duljina

$$l = \frac{AE + S}{AE} l_0. \quad (4.38)$$

Deformiranu duljinu nekog štapa (i,j) u k-1 –om koraku računat ćemo kao

$$\overline{l_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{\overline{A_{i,j}} \overline{E_{i,j}} + S_{i,j}^{(k-1)}}{\overline{A_{i,j}} \overline{E_{i,j}}} \overline{l_{i,0}} \quad (4.39)$$

pri čemu su nedeformirana duljina $\overline{l_{i,0}}$ i "krutost" štapa $\overline{A_{i,j}} \overline{E_{i,j}}$ zadani. U postupku nalaženja oblika "krutost" AE ne mora odgovarati stvarnoj krutosti kabela. To je u stvari parametar koji nam pruža dodatnu kontrolu.

Gustoća sile u k-tom koraku bit će sad:

$$q_{i,j}^{(k)} = q_{i,j}^{(k-1)} \frac{l_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}^{(k-1)}} = \frac{S_{i,j}^{(k-1)}}{\bar{l}_{i,j}^{(k-1)}} \quad (4.40)$$

Primijetimo da, ako zadajemo sve veću krutost štapa AE , zapravo težimo $l = l_0$, odnosno, zadavanju duljina kao u prethodnom poglavlju 4.9.

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Postupci nalaženja oblika provedeni su u simboličkom programskom paketu Sage.

Dani su primjeri oblikovanja dvaju tipova mreža.

Prvi tip čine mreže s izdignutim središnjim dijelom te s unutrašnjom petljom. Dana su dva primjera oblikovanja ovakvog tipa mreže: mreža s dijagonalnim kabelima te ekvivalentna ekvidistantna mreža kako bi se mogle usporediti vrijednosti sila u njima.

Drugi tip mreže čine tornjevi od mreža kabela. Dana su dva tipa ovakvih mreža: mreža s "vertikalnim" i "dijagonalnim" kabelima.

Uz to, na početku je dan jednostavan primjer primjene proširene metode gustoće sila s kinematičkim ograničenjima s cjelovitim postupkom kako bi se kasnije lakše mogli pratiti složeniji primjeri čiji cjeloviti postupci ovdje nisu dani zbog velike količine izlaznih podataka, nego se nalaze na priloženom CD-u.



Slika 27. Lijevo: Institut za lagane konstrukcije, Stuttgart, desno: toranj Killesberg, Stuttgart

5.1. Primjer primjene kinematičkih ograničenja

Promatramo mrežu dimenzija 8,0 x 8,0 m, s 25 čvora te 10 kabela. Kabeli su postavljeni u dva smjera, paralelno s rubovima, na svaka 2,0 m. Četiri čvora su fiksirana, s time da se jedan od njih nalazi na visini od 3,0 m. Elementi su definirani presjecištima kabela i ima ih 20.

Funkcijom *make_nodes* (*nnds*, *nd1*, *d*) zadajemo koordinate čvorova. Prvi argument funkcije je broj čvorova koje želimo generirati, drugi je koordinata prvog čvora, a treći predstavlja korak po osima koordinatnog sustava.

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

```
nds = make_nodes (5, [0., 0., 0.], [2., 0., 0.])
nds.extend (make_nodes (5, [0., 2., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (5, [0., 4., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (5, [0., 6., 0.], [2., 0., 0.]))
nds.extend (make_nodes (5, [0., 8., 0.], [2., 0., 0.]))
nds[0] = [0., 0., 3.]
```

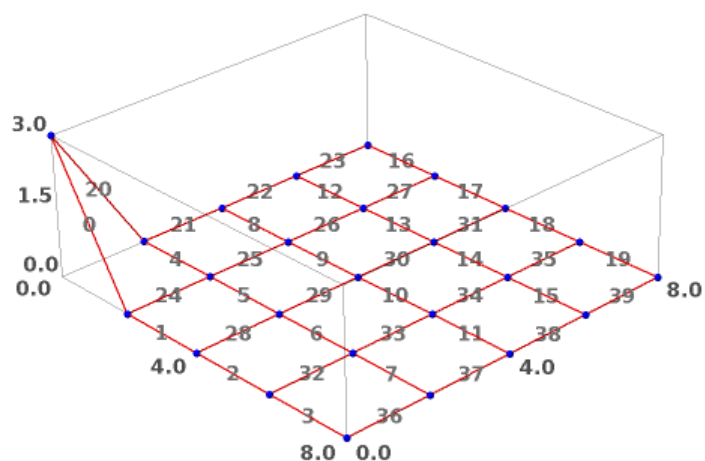
Rubni čvorovi su `supps = [0, 4, 20, 24]`, a rubni kabeli su `bnd_cbles = [0, 4, 5, 9]`.

Nakon definiranja čvorova, funkcijom `cable(nd1, nnds, step = 1)` povezujemo ih u kabele, a kabele nakon toga dijelimo na elemente omeđene s dva čvora funkcijom `make_elements_on_cables(cbles)`.

```
cbles = [cable (0, 5, 1)]
cbles.append (cable (5, 5, 1))
cbles.append (cable (10, 5, 1))
cbles.append (cable (15, 5, 1))
cbles.append (cable (20, 5, 1))
cbles.append (cable (0, 5, 5))
cbles.append (cable (1, 5, 5))
cbles.append (cable (2, 5, 5))
cbles.append (cable (3, 5, 5))
cbles.append (cable (4, 5, 5))
```

```
els = make_elements_on_cables (cbles)
```

Na slici 28. je dana mreža pretpostavljenih koordinata s označenim brojevima elemenata



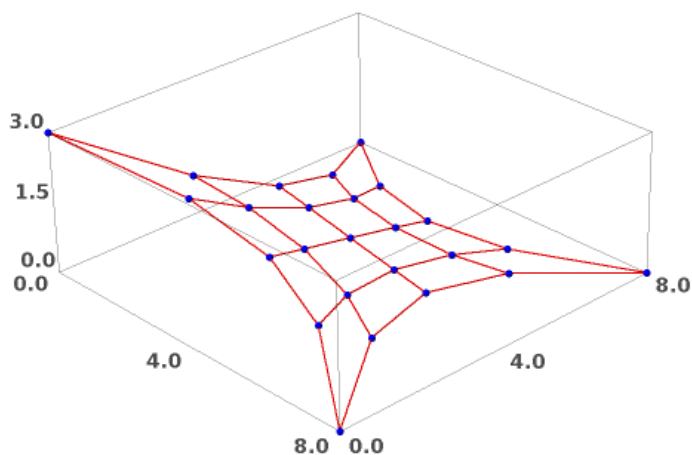
Slika 28.

Na unutrašnjim i na rubnim kabelima zadat ćemo jediničnu gustoću sile:

```
qs = make_force_densities (len (els), 1.)
```

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Provodimo prvi korak iteracije $nc = FDM (nds, els, supps, qs)$ te dobivamo mrežu prikazanu na slici 29.



Slika 29.

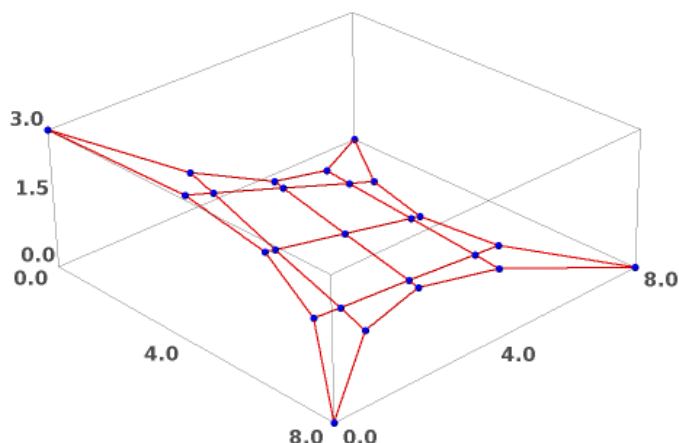
Kad bismo nastavili s iteracijama, već bi u drugom koraku užad počela klizati, odnosno dobili bismo mrežu kao na slici 25. Da spriječimo klizanje, zadat ćemo kinematička ograničenja tako što ćemo fiksirati duljine rubnih kabela na duljine iz prvog koraka iteracije.

Duljine rubnih kabela iz prvog koraka iteracije su:

```
bels = get_values_on_cables ([0, 4, 5, 9], tcei, l1)
[2.92754070299248, 1.97138423883114, 1.91928692243480, 2.75259641206185,
2.71053496078786, 1.83773755251011, 1.84078338668250, 2.70308430879313,
2.92754070299248, 1.97138423883114, 1.91928692243480, 2.75259641206185,
2.71053496078786, 1.83773755251011, 1.84078338668250, 2.70308430879313]
```

Duljine ćemo fiksirati funkcijom $length_constraints = element_constraints (beis, bels)$, gdje je $beis$ lista elemenata na rubnim kabelima, a $bels$ lista duljina rubnih kabela iz prvog koraka. Uz to unutrašnjim elementima zadajemo jedinične sile s funkcijom $force_constraints = element_constraints (ieis, [1.] * len(ieis))$, gdje je $ieis$ lista unutrašnjih elemenata.

Zadavanjem ovih uvjeta, nastavljamo s iteracijom, $f = multistepFDM (nds, els, supps, qs, fs = force_constraints, ls = length_constraints, steps = 20)$. Mreža nakon 20 koraka dana je na slici 30.



Slika 30.

Sile u unutrašnjim elementima su (dani su parovi odgovarajućih unutrašnjih elemenata i sila u njima):

[(4, 1.00026600172329), (5, 0.999905422431170), (6, 0.999903572033049),
 (7, 1.00004086604694), (8, 1.00200684112718), (9, 0.999693770596685),
 (10, 0.999735784750120), (11, 1.00127655196685), (12, 1.00016556589964),
 (13, 0.999900198239109), (14, 0.999926926288242), (15, 1.00003002677579),
 (24, 1.00026600172329), (25, 0.999905422431172), (26, 0.999903572033049),
 (27, 1.00004086604694), (28, 1.00200684112718), (29, 0.999693770596686),
 (30, 0.999735784750122), (31, 1.00127655196685), (32, 1.00016556589964),
 (33, 0.999900198239108), (34, 0.999926926288244), (35, 1.00003002677578)]

Očito je da ovakva mreža ne zadovoljava, iako su sile u unutrašnjim kabelima gotovo jednake, odnosno razlika u vrijednostima je manja od 0.001. Taj ćemo problem pokušati riješiti tako da zadamo da je vrijednost gustoća sila u rubnim kabelima veća od one u unutrašnjim kabelim. Zadajemo vrijednost gustoće sila rubnih kabela 10, te ponavljamo postupak.

Nakon 334 koraka postignuta je poopćena minimalna mreža s točnostima u iznosu sila i duljina od 0.001, ili točnije

maximal force error: 0.000103985188382505

maximal length error: 0.000996042053809099

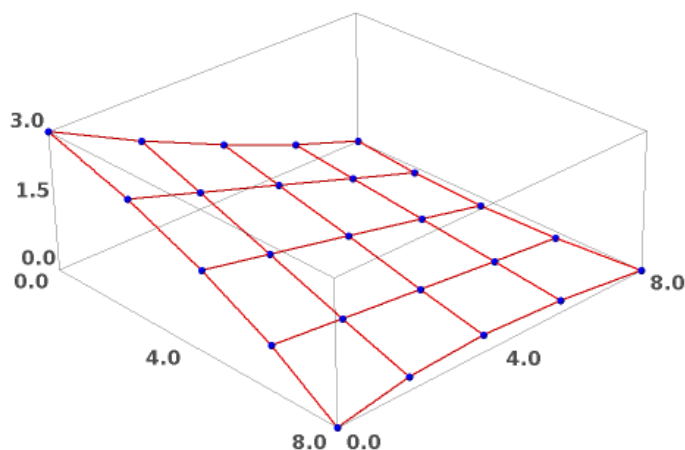
Sile u unutrašnjim elementima su:

[(4, 0.999924662537125), (5, 1.00000417189377), (6, 1.00000616027624),
 (7, 0.999945644180581), (8, 0.999896014811617), (9, 1.00000411806135),

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

(10, 1.00000531143145), (11, 0.999921617023010), (12, 0.999925110187939),
(13, 1.00000355086431), (14, 1.00000401149299), (15, 0.999942638668090),
(24, 0.999924662537124), (25, 1.00000417189377), (26, 1.00000616027624),
(27, 0.999945644180582), (28, 0.999896014811618), (29, 1.00000411806135),
(30, 1.00000531143145), (31, 0.999921617023010), (32, 0.999925110187939),
(33, 1.00000355086431), (34, 1.00000401149299), (35, 0.999942638668090)]

Konačna mreža dana je na slici 31.



Slika 31.

Duljine rubnih kabela (ali i bilo kojih drugih elemenata) mogli smo zadati i kao nerastegnute duljine. Prikazat ćemo samo dio koji se odnosi na zadavanje nerastegnutih duljina pošto je ostatak postupka isti.

Kao i maloprije, i ovdje ćemo zadavati duljine rubnih kabela, no u ovom ćemo slučaju nećemo zadavati duljine s obzirom na duljine iz prvog koraka iteracije (iako bismo i to mogli), već se odlučujemo za zadavanje neke proizvoljne konkretne duljine. Vrijednosti nerastegnutih duljina zadat ćemo na sljedeći način. Na kablom koji su horizontalni, duljine elemenata bit će 2,0m. Na dva kabela koji se spajaju u čvoru 0 duljinu elemenata dobit ćemo kao četvrtinu duljine spojnica čvorova 0 i 4, odnosno 0 i 20. Ta duljina iznosi 2,14 m.

```
lels2 = [2.14 for i in els2]
```

```
lels3 = [2. for i in els3]
```

gdje je *els2* lista elemenata s zadanom nerastegnutom duljinom 2,14 m, a *els3* lista elemenata s duljinom 2,0 m.

Uz to, zadat ćemo i pseudokrutost *ae* te je pridružiti rubnim elementima.

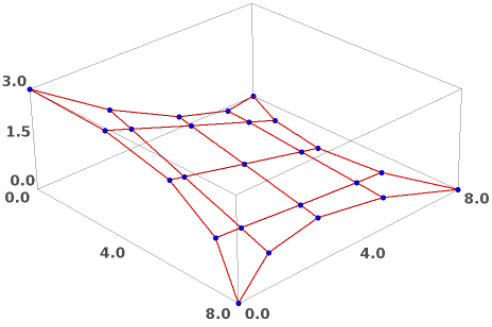
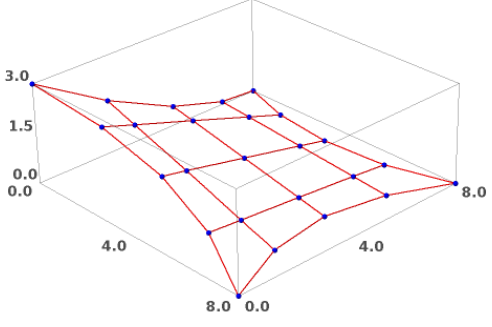
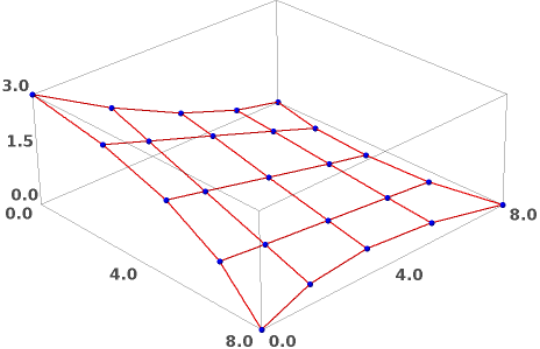
5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

```
l0_ae = zip (lels2, [ae]*len (els2))
```

```
l0_ae.extend (zip (lels3, [ae]*len (els3)))
```

Ovdje ćemo dati primjer kako variranjem veličine pseudokrutosti dodatno možemo utjecati na konačan oblik mreže. Promatrat ćemo mreže s pseudokrutostima rubnih elemenata u vrijednostima od: 50, 100 i 300. Rezultati su prikazani u tablici 2.

Tablica 2.

Mreža nakon iteracije	Pseudokrutost	Tolerancija	Broj koraka
	50	0,001	49
	100	0,001	57
	300	0,001	96

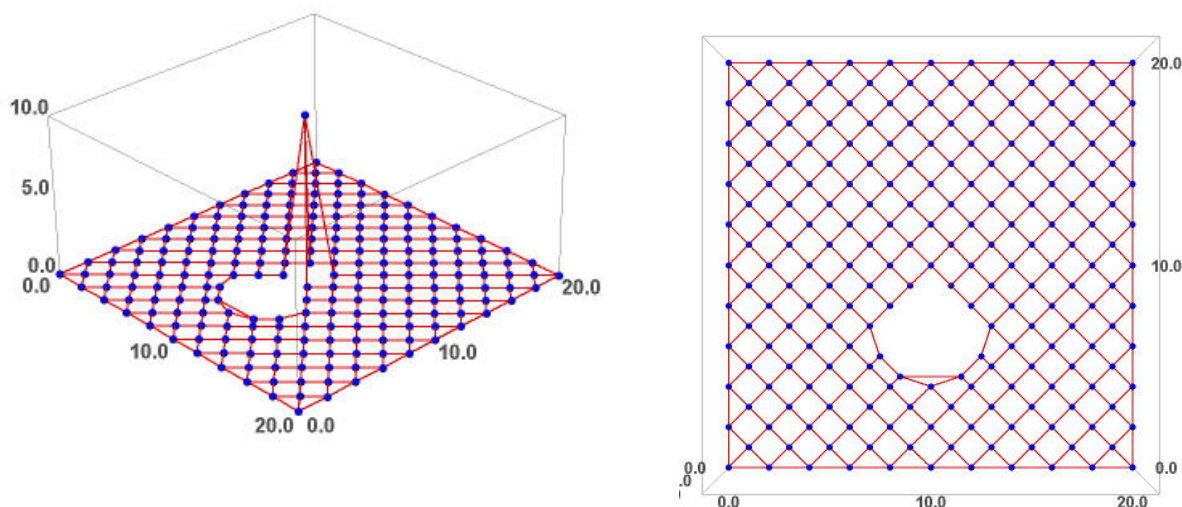
5.2. Mreža s izdignutim središnjim dijelom

5.2.1. Mreža s dijagonalnim kabelima

Mreža je dimenzija 20,0 x 20,0m. Sastoji se od 221 čvora, te od 5 dijagonalno postavljenih kabela na međusobnoj udaljenosti 2,0m, te od dodatne unutrašnje petlje. Fiksirano je pet čvorova: četiri rubna, te središnji čvor koji je izdignut na visinu od 10,0m. Iz vrha izlazi petlja o koju se pričvršćuju ostali kabeli. Elementi kabela su definirani presjecištima s ostalim kabela. Cijela mreža ima 428 elemenata.

Funkcijom `make_nodes(nnds, nd1, d)` zadali smo čvorove mreže. Nakon definicije čvorova, funkcijom `cable(nd1, nnds, step =1)` povezali smo ih u kabele, a same kabele nakon toga podijelili na elemente funkcijom `make_elements_on_cables(cbls)`. Posebno su definirani fiksni čvorovi. Također su zadani i rubni kabeli; u ovom su primjeru to četiri vanjska rubna kabela, unutrašnja petlja, te dijagonalni kabeli koji se protežu od rubnih fiksnih čvorova prema izdignutom čvoru.

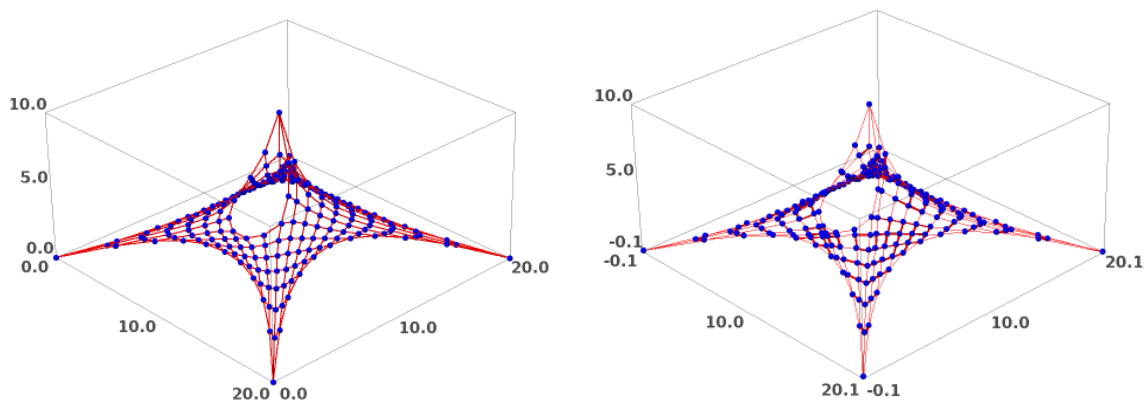
Na slici 32. je prikazana mreža pretpostavljenih koordinata.



Slika 32.

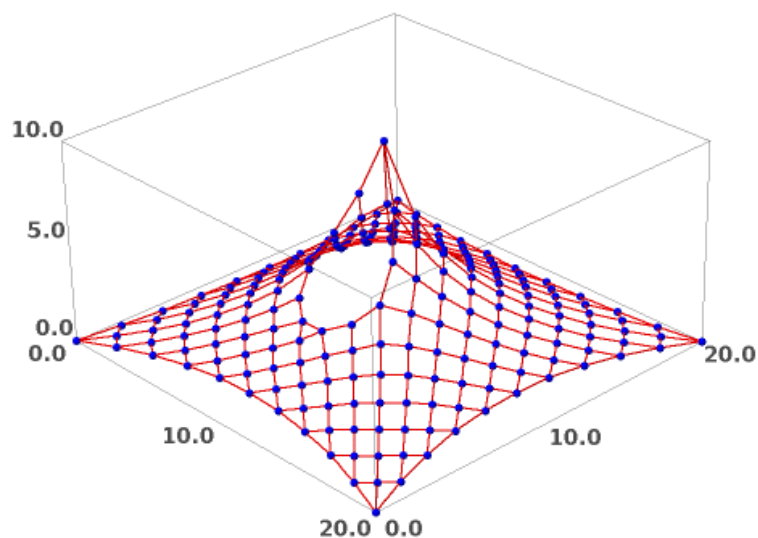
Prvi korak nakon zadavanje potrebne geometrije i definiraja međusobne povezanosti elemenata, je zadavanje gustoća sile. Za početak ćemo u svim kablama zadati jediničnu vrijednost gustoće sile. Na slici 33. je prikazan izgled takve mreže nakon jednog i nakon pedeset koraka.

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža



Slika 33.

Pošto dobiveni oblik mreže ne zadovoljava izgledom, pridružit ćemo različite vrijednosti gustoća sile različitim kabelima. Unutrašnjim je kabelima pridružena jedinična gustoća sile, dok je vanjskim rubnim kabelima pridružena s vrijednošću 10, a unutarnjoj petlji s vrijednosti 2. Nakon ovoga provodimo prvu iteraciju. Mreža dobivena nakon prve iteracije prikazana je na slici 34.



Slika 34.

Sile u unutrašnjima kabelima nakon prvog koraka iteracije su:

```
[0.973217858281133, 0.976601672673802, 1.02917143529717, 1.01681316514294,
1.02040158185231, 1.03957756644690, 1.08489912549598, 1.06982469445585,
1.06263571927178, 1.06653932137111, 1.08132621545843, 1.10373766313606,
1.14491453448940, 1.12353898242289, 1.11458689851323, 1.11032169265555,
1.11455850506517, 1.12764501248196, 1.14788251386586, 1.17130723069233,
1.21674313573846, 1.18231617375173, 1.15807688992855, 1.16548407426488,
1.16373138330138, 1.16732508885332, 1.17898332011003, 1.19817210310877,
1.21967595569058, 1.24123807486593, 1.30214714297620, 1.26093562966507,
1.21487065591563, 1.16952359370002, 1.23799644904960, 1.24374534401636,
```

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

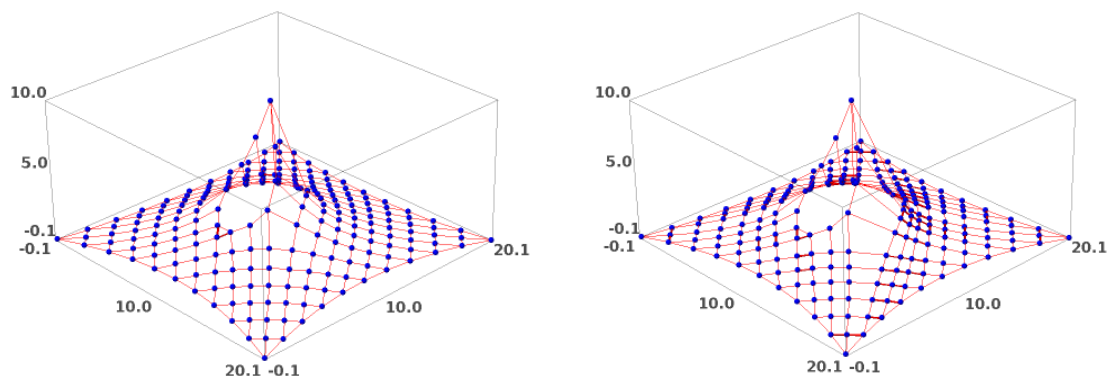
1.23734586588807, 1.24153062974328, 1.25721035136365, 1.27420438816510,
1.29209673670521, 1.31297473408116, 1.39633585001054, 1.35451826468768,
1.31333097225883, 1.25233923310170, 1.08625766459873, 1.40316181967983,
1.33287611515591, 1.33183352708392, 1.33569254706445, 1.34475662109440,
1.36311803674205, 1.39282986919809, 1.50414330136910, 1.44862295954498,
1.40979524820917, 1.38903033438174, 1.41627705239576, 1.29782168775229,
1.43490556712419, 1.42764599185776, 1.40364909855582, 1.39531245389904,
1.40774973292690, 1.44079038988473, 1.49435315083361, 1.64636395071727,
1.55201967425904, 1.48967282892621, 1.45274582847542, 1.42537307815170,
1.32164633924989, 1.95805696131425, 1.77215245369572, 1.57731789300142,
1.....itd]

Sile u rubnim kabelima su:

[21.8106146019248, 20.8837205260412, 20.2523151167630,
19.8438332972305, 19.6383265267201, 19.6383265267201, 19.8438332972304,
20.2523151167630, 20.8837205260413, 21.8106146019247, 21.7838691167132,
20.8679011553930, 20.2551962082088, 19.8701569300844, 19.6826077065813,
19.6826077065813, 19.8701569300844, 20.2551962082089, 20.8679011553931,
21.7838691167134, 21.8466572272706, 20.9264073076527, 20.3046832770366,
19.9052703204234, 19.7004716687038, 19.6847249573072, 19.8609832640094,
20.2394777938409, 20.8492719970696, 21.7648099590395, 21.8466572272706,
20.9264073076527, 20.3046832770366, 19.9052703204233, 19.7004716687038,
19.6847249573072, 19.8609832640095, 20.2394777938409, 20.8492719970696,
21.7648099590396, 6.09039630217518, 4.51443903785998, 3.95749103811129,
3.03781539178833, 2.79424280746253, 2.56967118041366, 2.79424280746246,
3.03781539178831, 3.95749103811129, 4.51443903785998, 6.09039630217521,
1.86347534254209, 1.68161739283083, 1.57415828519163, 1.51314218232503,
1.49671849888806, 1.55514992417578, 1.83092085253512, 3.95690352089486,
2.21871009962951, 1.68979678742146, 1.51029641931816, 1.45270670623523,
1.45167812951356, 1.48764020402547, 1.55779940956799, 1.67103051304056,
1.85724354932741, 1.86347534254209, 1.68161739283083, 1.57415828519163,
1.51314218232503, 1.49671849888807, 1.55514992417578, 1.83092085253513,
3.95690352089485, 2.21871009962951, 1.68979678742146, 1.51029641931816,
1.45270670623523, 1.45167812951356, 1.48764020402547, 1.55779940956797,
1.67103051304057, 1.85724354932743]

Budući da sile u kabelima nisu jednake, treba nastaviti s iteracijom.

No, kad nastavimo s iteracijom (uz zadavanje duljina rubnih kabela iz prvog koraka), vidi se kako kabele iz okolice vrha počinju klizati prema dolje. To je i za očekivati, pošto teže svojoj minimalnoj duljini. To ćemo spriječiti uvođenjem kinematičkih ograničenja, odnosno zadavanjem nerastegnutih duljina određenih kabela i elemenata.

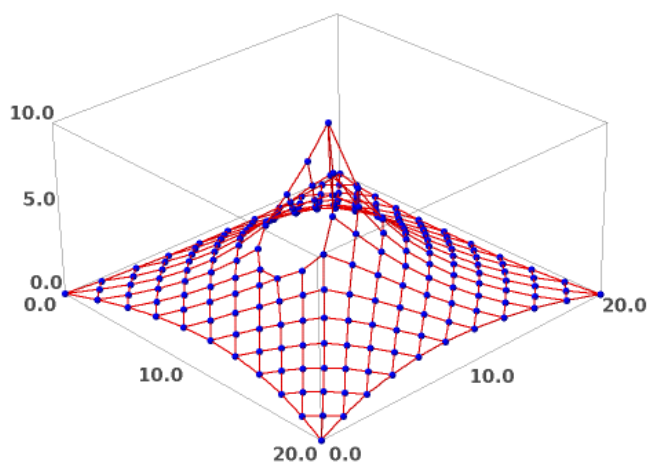


Slika 35. Klizanje kabela, lijevo: nakon 5 iteracija, desno: nakon 30 iteracija

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Zadat ćemo nerastegnute duljine elemenata na dijagonalama tako što ćemo im zadati vrijednosti dobivene u prvom koraku iteracije. Isto tako, zadat ćemo i duljine elemenata petlje koji se nalaze izvan dijagonala iz rubova mreže prema vrhu (jer smo vrijednosti duljina elemenata na dijagonalama već zadali). Nerastegnute duljine ovih elemenata zadat ćemo kao srednju vrijednost njihovih duljina iz prvog koraka iteracije. Pri zadavanju nerastegnutih duljina, potrebno je zadati i pseudokrutost kabela. Ovdje smo uzeli vrijednost krutosti 300.

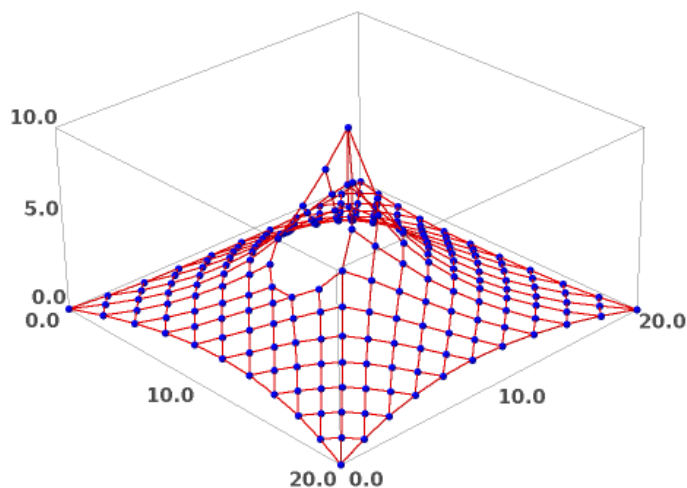
Ponovno provodimo iteraciju. Radimo 5 koraka kako bismo vidjeli kakav su učinak imala ograničenja duljina koja smo zadali. Izgled mreže dan je na slici 36.



Slika 36.

Već smo nakon ovih pet koraka postigli prilično zadovoljavajuće rezultate što se tiče izgleda i jednakosti sila u kabelima. No, postaviti ćemo još jedan dodatan uvjet. Zadati ćemo željenu toleranciju u iznosima sila i nerastegnutih duljina elemenata, odnosno razlike u tim vrijednostima, uz ograničenje na određeni broj koraka. Odabiremo željenu toleranciju s vrijednošću 0.01 i s maksimalnim brojem koraka iteracije 250. To činimo pomoću funkcije $f = \text{multistepFDM_wtol}(\text{nds}, \text{els}, \text{supps}, \text{qs}, \text{force_constraints}, \text{length_constraints}, \text{IO_constraints}, \text{tol}_f = 1e-2, \text{tol}_l = 1e-2)$.

Nakon 40 koraka postigli smo željene tolerancije u silama i duljinama. Maksimalna razlika u silama je 0.004502 (najveća sila u nekom elementu je 1.00111593647319, a najmanja 0.995497823100062), a u nerastegnutim duljinama 0.0098338. Ovime smo nakon 40 koraka postigli pooptčenu minimalnu mrežu prikazanu na slici 37.

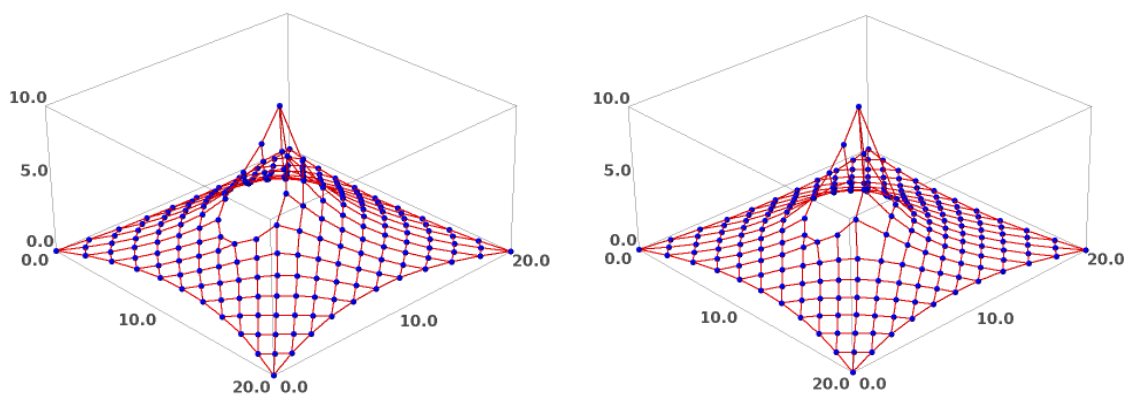


Slika 37.

5.2.2. Ekvidistantna mreža

Početa, zadana geometrija mreže ista je kao i u prethodnom primjeru. Isto tako, rubni i središnji čvorovi su fiksni te imaju iste koordinate kao i prije. Razlika u oblikovanju ove mreže bit će u tome što ćemo svim unutrašnjim elementima zadati nerastegnute duljine. Na kraju ćemo dobivenu mrežu i vrijednosti sila u njoj usporediti s mrežom i silama iz prethodnog primjera.

Izgled mreže nakon zadavanja čvorova, kabela, elemenata te gustoća sile dan je na slici 38. Vrijednosti gustoća sile iste su kao i prethodnom primjeru, dakle u vanjskim kabelima je to vrijednost 10, u petlji 2, a u unutrašnjim elementima 1. Ova je mreža ista kao i u prethodnom primjeru, a iste su i sile i duljine kabela. Odnosno, znamo da mreža nije minimalna.



Slika 38. Lijevo: mreža nakon prvog koraka, desno: mreža nakon 5 koraka

Zadat ćemo duljine elemenata rubnih kabela i elemenata petlje tako da im zadajemo vrijednosti dobivene u prvom koraku iteracije.

Za rubne kabele

```
beis = select_elements_on_cables ([0, 1, 2, 3], tcei)
bels = get_values_on_cables ([0, 1, 2, 3], tcei, l1)
length_constraints = element_constraints (beis, bels)
```

i za petlju

```
beis4 = select_elements_on_cables ([4], tcei)
bels4 = get_values_on_elements (beis4, l1)
length_constraints = add_element_constraints (beis4, bels4, length_constraints)
```

Provodimo iteraciju. Mreža nakon 5 koraka dana je na slici 38. Opet primjećujemo klizanje kabela u okolici šiljka.

Klizanje ćemo pokušati spriječiti zadavanjem nerastegnutih duljina svih unutrašnjih kabela. Za početak ćemo zadati duljinu od 0,9m i pseudokrutost 250.

Odabir unutrašnjih elemenata i zadavanje nerastegnute duljine

```
unut = select_elements_on_cables (int_cbls, tcei)
lcls2e = [0.9 for i in lcls2] ,
```

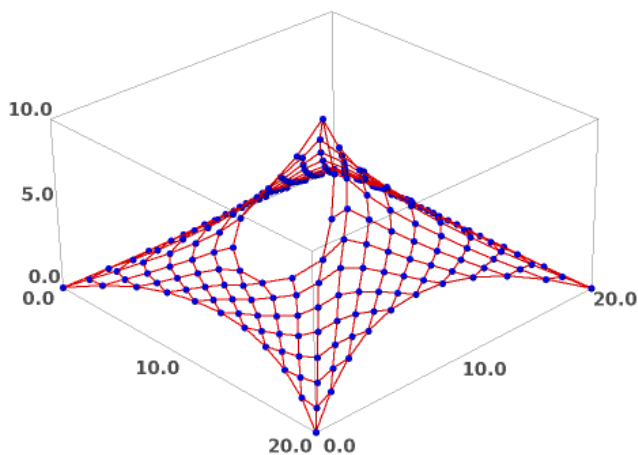
zadavanje pseudokrutosti

```
ae = 250.
l0_ae = zip (lcls2e, [ae]*len (unut)) ,
```

te na kraju zadavanje ograničenja nerastegnute duljine

```
l0_constraints = element_constraints (unut, l0_ae).
```

Ponovno provodimo iteraciju. Nakon 5 koraka dobit ćemo mrežu na slici 39.

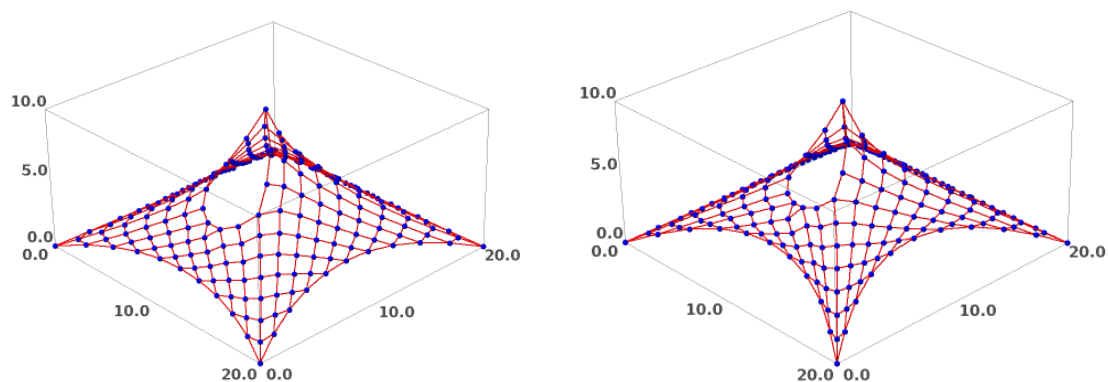


Slika 39.

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Vrijednosti sila u unutrašnjim kabelima ovakve mreže veoma su različite duž pojedinih kabela ali i međusobno. Tako je najveća sila u nekom unutrašnjem elementu 64.9883019877461 , a najmanja 1.37163141243027 . Dakle, mreža je daleko od minimalne, pa čak i nakon puno više koraka.

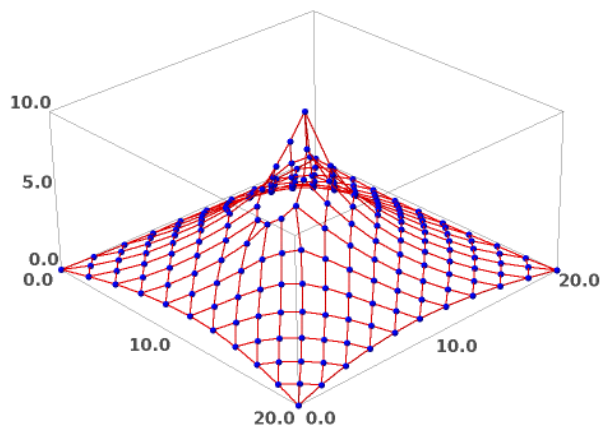
Pokušat ćemo sad svesti mrežu da što više liči na konačnu mrežu iz prethodnog primjera. U tu svrhu ćemo povećati vrijednosti gustoća sile u rubnim kabelima i u petlji. U rubnim kabelima zadajemo vrijednost 20, a u petlji 5. Mreža je dana na slici 40.



Slika 40. Lijevo: mreža nakon 5 koraka, desno: mreža nakon 15 koraka

Maksimalna sila u nekom unutrašnjem elementu je 66.0152774532677 , a minimalna 1.73121822695645 . Kada bismo nastavili s iteracijom, npr s 15 koraka, dobili bismo mrežu prikazanu na slici 40, u kojoj je maksimalna sila čak 472.677992707434 , a minimalna 0.906739912948793 .

Zaključujemo kako s napredovanjem iteracije nećemo postići ništa, čak suprotno, pogoršavat ćemo stvari. Zato ćemo se zadržati na prvom koraku iteracije u kojem je maksimalna sila u unutrašnjim kabelima 3.70550931180007 , a minimalna 1.09289509813533 . Ta je mreža dana na slici 41.



Slika 41.

5.3. Tornjevi od mreže kabela

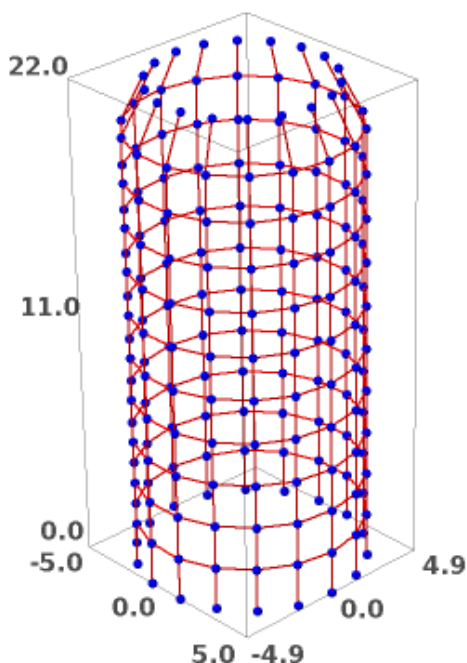
U nastavku će biti dana dva primjera tornjeva od mreže užadi. Primjeri takvih izvedenih građevina dani su na slici 4. i slici 27. Jedna od značajnih mogućnosti primjene ovakvih mreža je primjena za rashladne tornjeve nuklearnih elektrana. Tornjevi izvedeni od mreža užadi nisu osjetljivi na diferencijalna slijeganja tla ili na problem izvijanja te time nude alternativu klasičnim armiranobetonskim tornjevima.

5.3.1 Tornjevi s vertikalnim i prstenastim kabelima

Mreža se sastoji od 28 kabela: 18 vertikalnih i 10 prstenastih. Fiksni čvorovi vertikalnih čvorova na visini 0,0m čine kružnicu radijusa 10,0m, a čvorovi na visini 22,0m kružnicu radijusa 8,0m. Mreža ukupno ima 216 čvorova i 377 elemenata.

Kao i u prijašnjim primjerima, funkcijom *make_nodes(nds, nd1, d)* zadali smo čvorove mreže. Nakon definicije čvorova, funkcijom *cable(nd1, nds, step =1)* povezali smo ih u kabele, a same kabele nakon toga podijelili na elemente funkcijom *make_elements_on_cables(cbls)*. Rubni kabele nisu posebno zadani.

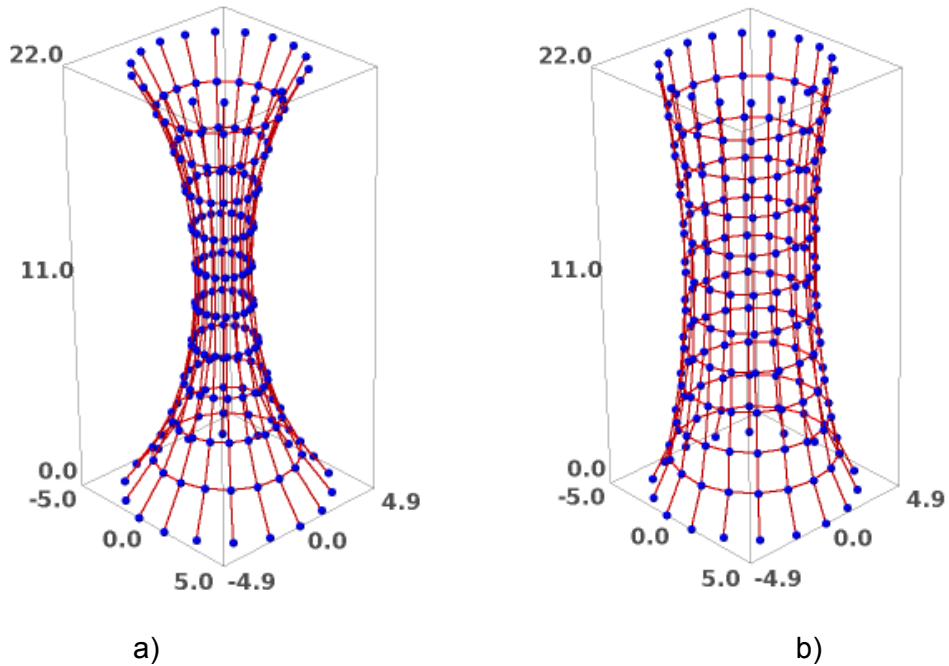
Mreža pretpostavljenih koordinata dana je na slici 42.



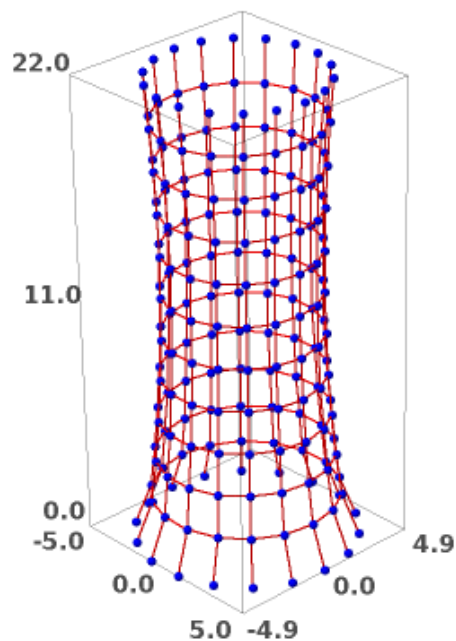
Slika 42. Pretpostavljene koordinate

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Nakon zadavanje geometrije i definiranja međusobne povezanosti elemenata zadajemo gustoće sile. U prstenastim kabelima zadat ćemo jedinične gustoće sile, dok ćemo vertikalnima zadati nekoliko vrijednosti i odlučiti se za onu koja nam daje oblik najbliži traženom. Na slici 43. dane su mreže s različitim vrijednostima gustoća sile u vertikalnim kabelima.



Slika 43. Različite gustoće sile u vertikalnim kabelima, a) 1, b) 5

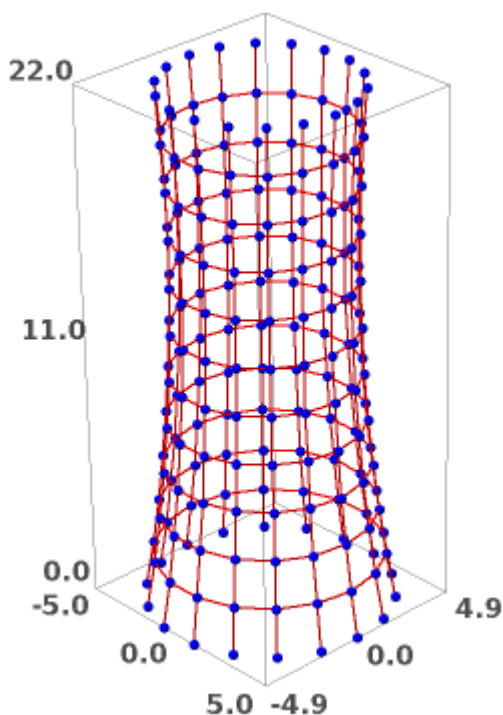


Slika 44. Odabrana mreža s gustoćom sile 10 u vertikalnim kabelima

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Nakon odabira mreže zadat ćemo nerastegnute duljine elemenata na vertikalnim kabelima. Kada ne bismo zadali ova ograničenja prstenasti bi kabeli počeli klizati prema sredini mreže, odnosno mreža bi težila svojoj minimalnoj duljini, a to je kada se svi prstenasti kabeli skupe u "točku" i mreža poprima oblik stošca. Elementima vertikalnih kabela zadat ćemo nerastegnute duljine od 2,0 m. Za vrijednost pseudokrutosti odabiremo vrijednost 200.

Provodimo iteraciju. Zadajemo mali broj koraka kako bi vidjeli kakav utjecaj imaju zadana ograničenja. Mreža nakon 5 koraka iteracije prikazana je na slici 45.



Slika 45. Mreža nakon 5 koraka iteracije

Najveća i najmanja sila u vertikalnim kabelima ovakve mreže su

$$\max(f_v)$$

14.6391330438578

$$\min(f_v)$$

14.4419465277420 ,

A najveća i najmanja sila u prstenastim kabelima su

$$\min(f_r)$$

0.995929637632880

$$\max(f_r)$$

0.999283018480710

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Dakle kada bismo zahtijevali manju točnost, već bi nas ova mreža nakon samo pet koraka mogla zadovoljiti. No postaviti ćemo strože uvjete tolerancija sila i duljina elemenata. Zadat ćemo traženu toleranciju 0,01.

Funkcijom $nc, f = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, force_constraints, length_constraints, l0_constraints, tol_f = 1e-2, tol_l = 1e-2)$ provodimo iteraciju do zadovoljenja postavljenih zahtjeva tolerancije.

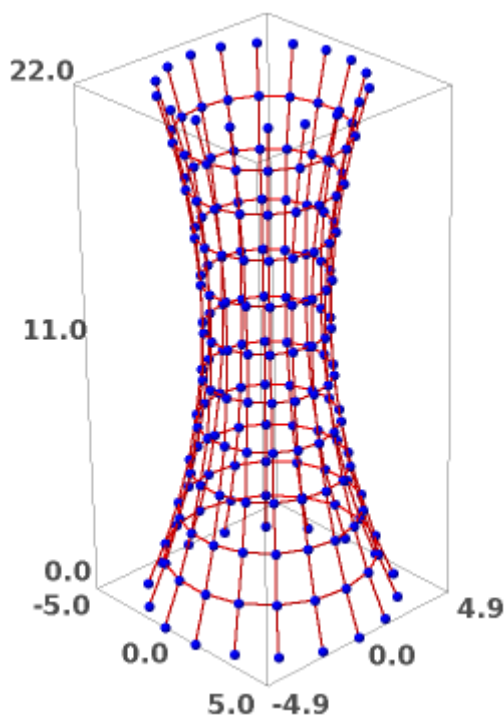
```
nc, f = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, force_constraints, length_constraints, l0_constraints, tol_f = 1e-2, tol_l = 1e-2)
```

steps: 46

maximal force error: 0.00407036236712044

maximal unstrained length error: 0.00999278137290882

Mreža nakon 46 koraka iteracije dana je na slici 46.



Slika 46. Mreža nakon 46 iteracija

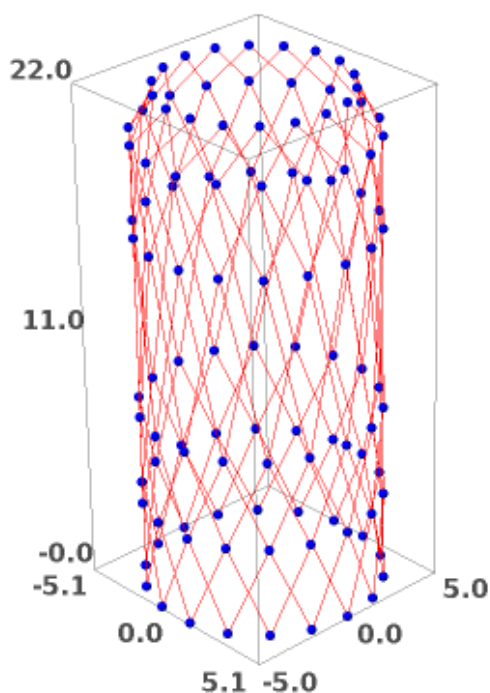
Primjećujemo kako se mreža prilično suzila u središnjem dijelu u odnosu sliku 45. na kojoj je prikazana mreža nakon 5 koraka. Ako bismo htjeli smanjiti tu pojavu, trebali bismo zadati još veće gustoće sile vertikalnih kabela ili varirati odnose gustoća sile prstenastih i vertikalnih kabela dok ne bismo postigli mrežu kakvu želimo.

5.3.2 Tornjevi s dijagonalnim kablom

Mreža se sastoji od 36 kabela koji tvore romboidnu mrežu. Fiksni čvorovi vertikalnih čvorova na visini 0,0 m čine kružnicu radijusa 10,0 m, a čvorovi na visini 22,0 m kružnicu radijusa 8,0 m. Mreža ukupno ima 108 čvorova i 180 elemenata. Kod prethodne je mreže zbog samog načina slaganja kabela u mrežu bilo nužno zadavanje kinematičkih ograničenja kako ne bi došlo do prevelikog klizanja kabela (prstenasti kabela su klizali prema sredini mreže), odnosno, u krajnjem slučaju, do degeneracije mreže u stožac. Pokazat ćemo da kod mreže u kojoj su kabela postavljena tako da tvore romboidnu mrežu to neće biti potrebno. No, pokazat ćemo da se isto tako mogu i zadati nerastegnute duljine elemenata (npr zbog lakše prefabrikacije mreža) i postići minimalna mreže.

Na isti način kao i prije, definirali smo čvorove i kabele mreže. Elementi su definirani sjecištima kabela. Fiksni čvorovi su kao i u prethodnom primjeru čvorovi na visini 0,0 m i 22,0 m. Pošto su svi krajnji čvorovi kabela fiksni, nema rubnih kabela.

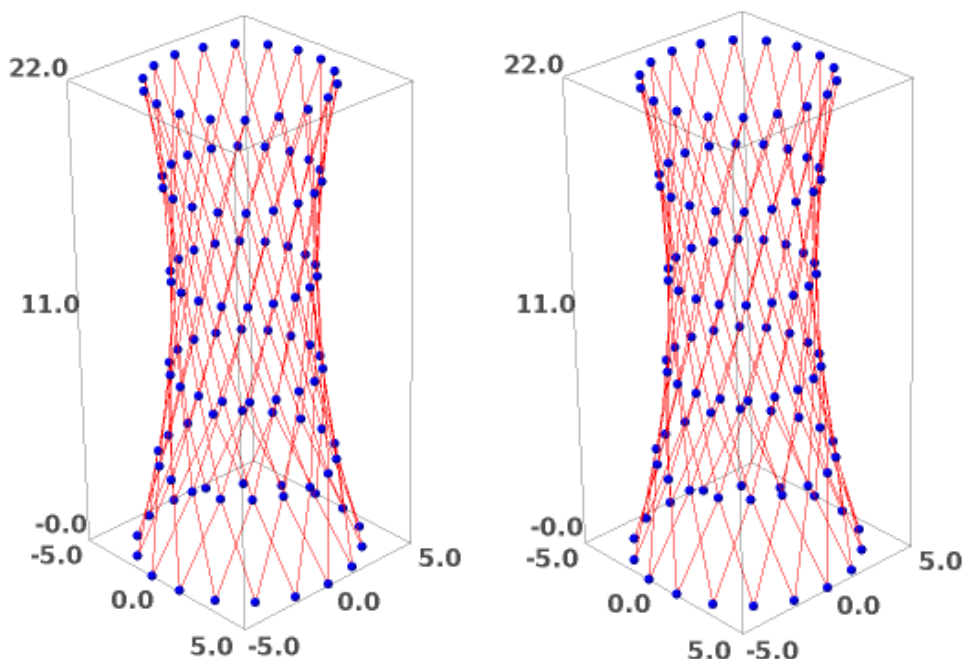
Mreža pretpostavljenih koordinata dana je na slici 47.



Slika 47. Romboidna mreža tornja

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Svim kabelima zadat ćemo jediničnu vrijednost gustoća sile. Nakon toga provodimo prvi korak iteracije. Mreža nakon prvog koraka dana je na slici 48.



Slika 48. Lijevo: mreža nakon prve iteracije, desno: mreža nakon dvije iteracije

Maksimalna sila u nekom elementu ovakve mreže je

$$\max (f_1)$$

4.78836451227859 ,

a minimalna

$$\min (f_1)$$

4.54221735261974

Ova nam mreža već nakon samo jednog koraka daje gotovo jednake sile u svim kabelima, pa bismo mogli stati i na tom koraku. No, svejedno ćemo nastaviti iteraciju da vidimo koliko će se tada sile razlikovati od sila iz prvog koraka.

Provodimo drugi korak iteracije. Već nakon tog koraka sile u kabelima su se smanjile otprilike 4 puta, a izgled mreže ostao je gotovo isti.

Maksimalna sila u nekom elementu ovakve mreže je

$$\max (f_2)$$

1.03109473206346,

a minimalna

$$\min (f_2)$$

0.983208674577959 .

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Naposlijetku, zadajemo željenu vrijednost tolerancije sila u kabelima te ograničenje u broju koraka iteracije do ostvarenja te tolerancije. Na primjer, zadat ćemo vrijednost tolerancije 0,0001, a broj koraka ograničit ćemo na 250.

```
nc, f = multistepFDM_wtol2 (nds, els, supps, qs, ieifs, beils, 1.e-4, 500)
```

```
steps: 95
```

```
maximal relative error: 0.0000996525339497234
```

Dakle, traženu toleranciju postići ćemo nakon 95 koraka iteracije. Minimalna i maksimalna sila u elementima su oko 4,5 puta manje od sila iz prvog koraka.

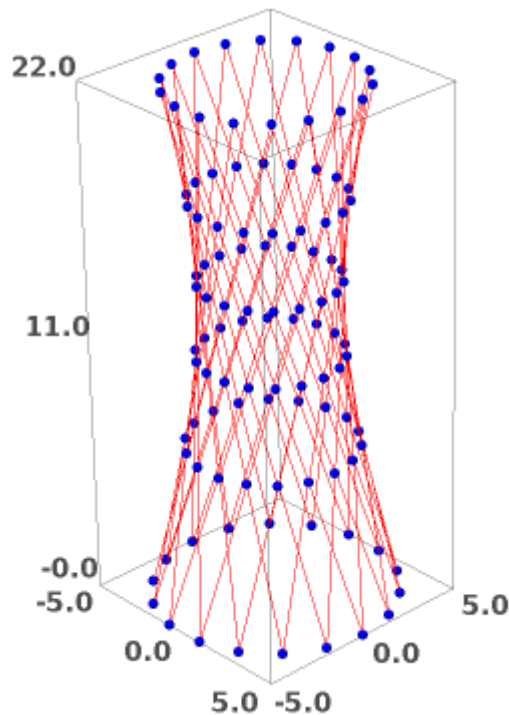
```
max (f)
```

```
1.00008931894667
```

```
min (f)
```

```
0.999900347466050
```

Mreža nakon 95 koraka dana je na slici 49.



Slika 49. Mreža nakon 95 koraka

Na kraju ćemo na istoj ovoj mreži pokazati zadavanje nerastegnutih duljina elemenata.

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

Duljinu elemenata zadat ćemo tako da ćemo prvo pogledati kolike su vrijednosti duljina elemenata iz prvog koraka iteracije.

11

[4.78722600200539, 4.61178861899153, 4.54221735261974, 4.54634207013527, 4.62678253472921, 4.78788699026850, 4.61208952892717, 4.54237563776811, 4.54637100898904, 4.62601211892252, 4.78678776964976, 4.61172141379568, 4.54225457209746, 4.54637855119157, 4.62543751054404, 4.78794868182101, 4.61227277551771, 4.54253512221900, 4.54670549584175, 4.62681131788633, 4.78734577639222, itd...]

Vrijednosti se kreću oko vrijednosti 4,5 m i 4,8 m. Odabiremo vrijednost duljine nerastegnutig elemenata 4,7 m, a za vrijednost pseudokrutosti usvajamo vrijednost 200. Način zadavanja ovih ograničenja isti je kao i u svim prethodnim primjerima.

Prvo ćemo provesti dva koraka iteracije, kako bismo mogli usporediti vrijednosti sila s vrijednostima iz drugog koraka s početka primjera.

Maksimalne i minimalne vrijednosti sila u elementima su

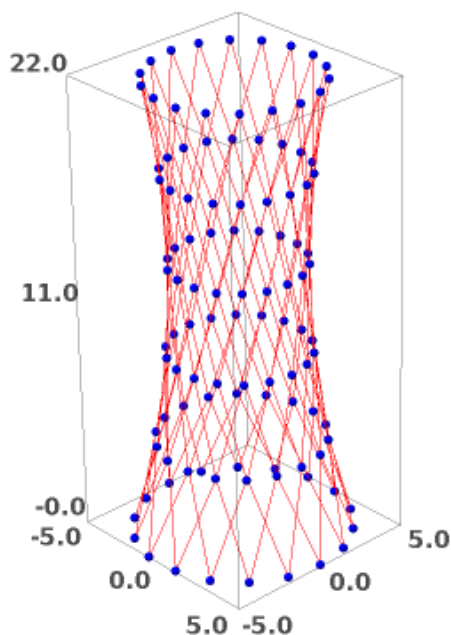
$\max (f_2)$

4.62368800381314

$\min (f_2)$

4.36223744042224

Mreža je dana na slici 50.



Slika 50. Mreža sa zadavanjem duljina nakon dva koraka

5. Primjena metode gustoća sile na oblikovanje mreža

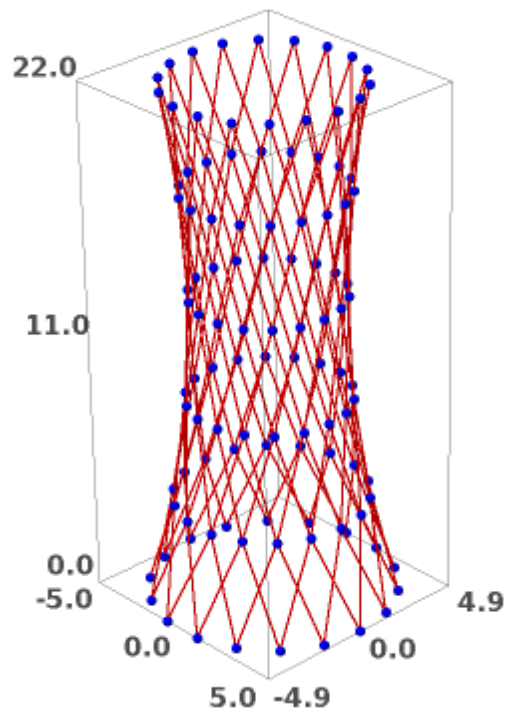
Postavljamo zahtjev za tolerancijom nerastegnutih duljina 0,1.

$nc, f = \text{multistepFDM_wtol}(nds, els, supps, qs, force_constraints, length_constraints, IO_constraints, tol_f = 1e-3, tol_l = 1e-1)$

steps: 54

maximal unstrained length error: 0.0998013426350033

Mreža koja zadovoljava zadani zahtjev, odnosno mreža nakon 54 koraka iteracije dana je na slici 51.



Slika 51. Mreža nakon 54 koraka

Maksimalne i minimalne vrijednosti sila u elementima su

$\max(f)$

1.09579788704635

$\min(f)$

1.02688137153564,

dakle, možemo reći da smo postigli minimalnu mrežu.

6. Zaključak

Za razliku od uobičajenih, konvencionalnih građevina kojima su oblik i dimenzije unaprijed poznati, a projektant provodi proračun konstruktivnih elemenata standardnim i u praksi ustaljenim postupcima, a arhitekt je odgovoran "samo" za oblikovanje konstrukcije, kod prednapetih vlačnih konstrukcija to nije slučaj. Pri njihovom je proračunu nužno uvažiti geometrijsku (a katkad i materijalnu) nelinearnost. Njihov se oblik zbog međuovisnosti s unutarnjim silama prvo mora pronaći nekom od metoda pronalaženja oblika te će se zbog te međuovisnosti zahtijevati bliska suradnja građevinaru i arhitekata.

U ovom radu promatrane su vlačne konstrukcije od užitosti te metoda gustoća sila koja je bila razvijena početkom sedamdesetih godina prošlog stoljeća za potrebe proračuna Olimpijskog kompleksa u Münchenu. Njezina prednost nad ostalim metodama nalaženja oblika konstrukcija od užitosti je u tome što nelinearan problem nalaženja oblika svodi na linearan. U međuvremenu su razvijena brojna proširenja ove metode koja omogućuju zadavanje dodatnih ograničenja.

U radu je detaljnije obrađena proširena iteracijska metoda gustoća sila utemeljena na linearnoj metodi gustoća sila koja omogućava postizanje minimalnih i poopćenih minimalnih mreža u kojima su sile uzduž kabela jednake. U iteracijskom se postupku u svakom koraku proračun provodi linearnom metodom gustoća sila, pri čemu se gustoće sila u nekom koraku izračunavaju na temelju zadanih uvjeta ili ograničenja i rezultata prethodnog koraka. Ova proširena metoda omogućava i uvođenje kinematičkih ograničenja zadavanjem duljina određenih elemenata kabela ili zadavanja nerastegnutih duljina elemenata. Potreba za uvođenjem kinematičkih ograničenja javlja se pri prekomjernom klizanju čvorova, odnosno njihovom približavanju.

Dano je nekoliko primjera primjene proširene metode gustoća sila na oblikovanje poopćenih minimalnih mreža zadavanjem kinematičkih ograničenja na kritičnim elementima gdje je klizanje bilo najviše izraženo.

Opisana iteracijska proširenja razvijena su na Katedri za statiku, dinamiku i stabilnost konstrukcija Zavoda za tehničku mehaniku.

7. Literatura

- [1] H. Berger, *Light Structures, Structures of Light. The Art and Engineering of Tensile Architecture*. Basel: Birkhauser, 1996.
- [2] H. Berger, "Structural Form in Architecture," *Structure Magazine*, pp. 38-41, 2008.
- [3] (pristupljeno: travanj 2014.). [Online]. <http://www.top-ten-10.com/architecture/bridges-single-span.htm>
- [4] (pristupljeno: travanj 2014.). [Online]. enggpedia.com - Design & Construction of Megastructure Akashi Kaikyo Suspension Bridge
- [5] W. Nerdinger, *Frei Otto, Complete Works - Lightweight Construction, Natural Design*. Basel: Birkhauser, 2005.
- [6] (pristupljeno: travanj 2014.). [Online]. <http://www.westland.net/expo67/map-docs/architecture.htm>
- [7] A. Holgate, *The Art of Structural Engineering: The Work of Jorg Schlaich and his Team*. London: Edition Axel Menges, 1997.
- [8] J. Dvornik and D. Lazarević, "Viseće konstrukcije od platna i užadi," *Građevinski godišnjak '97.*, pp. 239-297, 1997.
- [9] W.J. Lewis, *Tension Structures. Form and Behaviour*. London: Thomas Telford, 2003.
- [10] J. Dvornik and D. Lazarević, "Prednapete gipke konstrukcije od platna i užadi," *Građevinar*, vol. 47, pp. 185-199, 1995.
- [11] G. Tibert, *Numerical Analysis of Cable Roof Structures*. Stockholm: Royal Institute of Technology, 1999.
- [12] D. Veenendaal and P. Block, "An Overview and comparison of structural form finding methods for general networks," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 49, pp. 3741-3753, 2012.
- [13] Katalog tvrtke Pfeifer, *Die Leichtigkeit des Bauens / The Lightness of Construction*, Pfeifer Seil-und Hebetchnik GMBH.

- [14] I. Vassilopoulou, *Nonlinear Dynamic Response and Design of Cable Nets*. Athens: Doctoral thesis, 2011.
- [15] H.A Buchholdt, *An Introduction to Cable Roof Structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [16] C.T. Kelley, "Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations," 1995.
- [17] J. Dvornik, D. Lazarević, and K. Fresl, "The Fractal Nature of Form Finding Equations," in *Computational mechanics in the UK - 11th Annual Conference of the Association for Computational Mechanics in Engineering*, University of Strathclyde, Glasgow, 2003., pp. 201-204.
- [18] K. Linkwitz, "About form finding of double-curved structures," *Engineering Structures*, vol. 21, pp. 709-718, 1999.
- [19] H.J. Schek, "The Force density method for form finding and computation of general networks," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 3, pp. 115-134, 1974.
- [20] P. Gidak and K. Fresl, "Programming the force density method," in *IASS-APCS, From spatial structures to space structures*, Seoul, South Korea, 2012., p. 197.
- [21] J. Sanchez, M.A. Serna, and P. Morer, "A Multi-step force-density method and surface fitting approach for the preliminary design of tension structures," *Engineering Structures*, vol. 9, pp. 1966-1976, 2009.

8. SAŽETAK

Romana Vrančić

Iteracijska primjena metode gustoća sila u oblikovanju konstrukcija od užadi

U radu je opisana klasična linearna metoda gustoća sila za nalaženje oblika prednapetih konstrukcija od užadi te novi iteracijski postupak utemeljen na njoj, kojim se omogućava postizanje poopćene minimalne mreže (minimalne mreže s različitim silama u kabelima) ili poopćene minimalne sa zadanim duljinama odsječaka odabranih, najčešće rubnih, kabela. U iteracijskom se postupku u svakom koraku proračun provodi linearnom metodom gustoća sila, pri čemu se gustoće sila u nekom koraku izračunavaju na temelju zadanih uvjeta ili ograničenja i rezultata prethodnog koraka. Primjenjivost i prilagodljivost predloženog iteracijskog postupka ilustrirane su nizom primjera.

Ključne riječi: prednapete konstrukcije od užadi, metoda gustoće sile, minimalna mreža, kinematičko ograničenje

SUMMARY

Romana Vrančić

Iterative application of force density method in form finding of cable structures

Well-known linear force-density method for form finding of prestressed cable structures and new iterative procedure based on force-densities, which enables realization of generalised minimal nets (minimal nets with different forces in cables) or generalised minimal nets with prescribed lengths of segments of selected, usually boundary, cables are presented. In each step of iterative procedure linear force-density method is applied, in which process new force-densities are calculated based on specified requirements or constraints and on results of previous step. Applicability and flexibility of proposed iterative procedure are illustrated with several examples.

Key words: prestressed cable structures, force-density method, minimal net, kinematic constraints