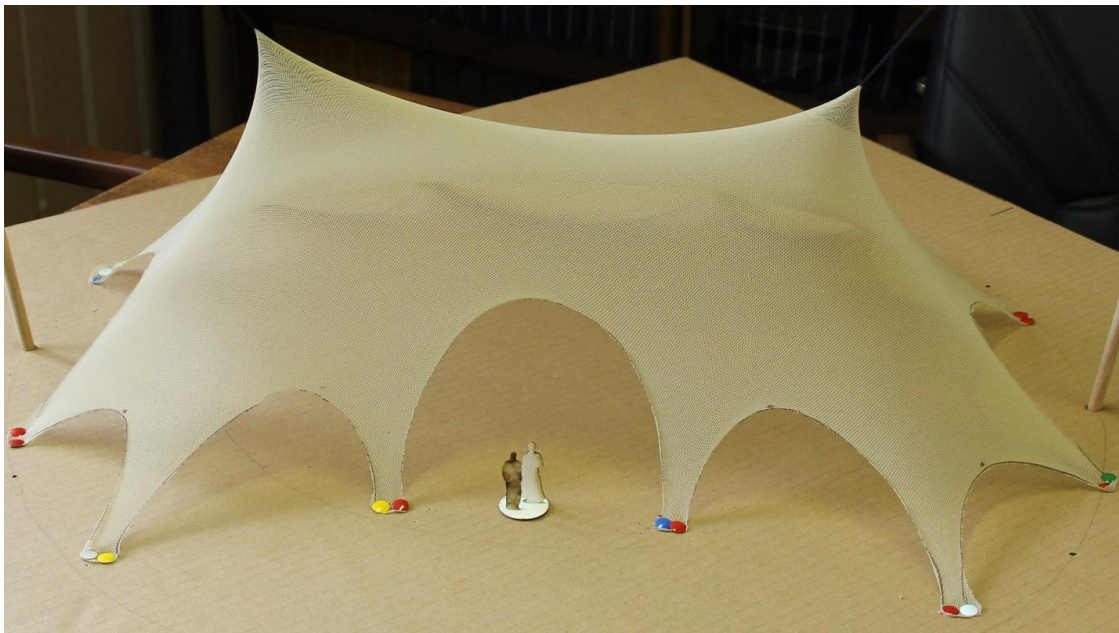


SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

VLAČNO-TLAČNA ANALOGIJA

ZAVRŠNI RAD



Izradio: Ivan Ladavac Jančin, 0082053757

Mentorica: doc. dr. sc. Petra Gidak

Zagreb, 2020.

Sadržaj

1. Uvod.....	3
2. Vlačno-tlačna analogija.....	4
2.1. Temelji analogije.....	4
2.2. Ravnoteža luka.....	10
2.3. Proširenje primjene na svodove.....	14
2.4. Računalne metode.....	18
3. Traženje oblika.....	22
3.1. Ravnoteža slobodnog čvora.....	22
3.2. Metoda gustoće sila.....	23
3.3. Primjena i modifikacija koda program_FDM.....	24
4. Primjeri.....	27
4.1. Verižni poligon.....	27
4.2. Lančanica.....	28
4.3. Sagrada Familia – Isusov toranj.....	30
4.4. Šator.....	32
4.5. Versandhalle Coop.....	34
5. Zaključak.....	37
6. Popis slika.....	38
7. Izvori slika.....	39
8. Literatura.....	40

1. Uvod

Svojom elegancijom i primjenjivošću konstrukcije od užadi zauzele su posebno mjesto u povijesti graditeljstva. Napretkom tehnologije i razvojem metoda proračuna istih, njihovo ponašanje sve se bolje razumije, a njihova primjena postaje sve zanimljivija.

U ovom radu će se primijeniti metode oblikovanja prednapetih vlačnih konstrukcija za optimizaciju oblika luka i svoda primjenom vlačno-tlačne analogije. Optimiranje oblikovanja mogu zadovoljavati i druge konstrukcijske funkcije proračuna poput laganih ovješnih krovova od platna i kabela.

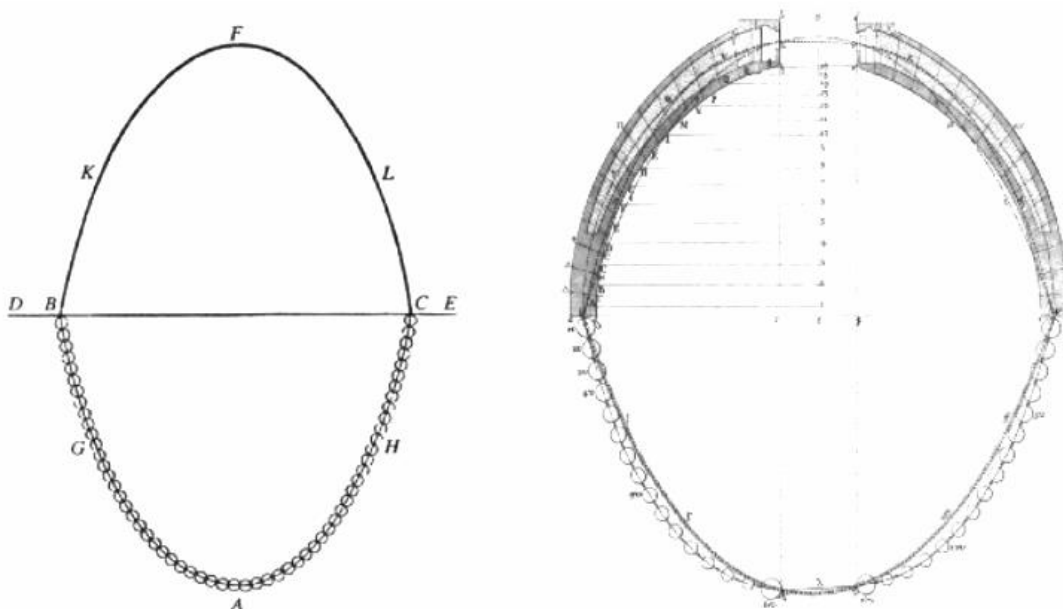
Polazna ideja optimiranja oblika polazi iz pretpostavke da se, iz dobivenog ravnotežnog oblika mreže elemenata u čistom vlaku, zrcaljenjem oko horizontalne ravnine, dobiva kruta mreža elemenata u čistom tlaku. Takva mreža, koja sada opisuje tlačnu plohu može se koristiti za gradnju lukova i ljuski optimalnih oblika. Tako dobivene ljuske ne moraju odmah prikazivati najpogodniji dizajn iz pogleda stabilnosti i ne bi trebale isključivati ostale metode proračuna, ali zasigurno pojednostavljuju proces projektiranja i matematičke analize, jer generiraju strukturalno optimizirane forme i usmjeravaju projekt prema što prirodnijem toku sila, a time određuju i estetiku građevine.

Povijesno gledano, upravo je otkriće povezanosti oblika visećeg uža i krutog luka omogućilo gradnju sve većih i zahtjevnijih monumentalnih građevina i odmak od do tada opće prihvaćenih zakona proporcija i Platonovih geometrijskih brojeva.

2. Vlačno-tlačna analogija

2.1. Temelji analogije

Pronalaženje funikularnog oblika, to jest, para koji čine vlačna linija opisana prirodnim položajem lančanice neke duljine na koju djeluje nekakvo opterećenje i koja ima fiksne, unaprijed zadane, rubne točke i okrenute, njoj zrcalne tlačne linije temelj je ovog postupka. Prvi puta opisao ga je Robert Hooke 1675. godine sročivši problem u anagram objavljen u dodatku njegova djela „*Description of Helioscopes*“: „*Kao što visi gipko uže, isto tako samo okrenuto, stajat će i čvrsti luk.*“ Iako postoje naznake u arheološkoj ostavštini da je ovo pravilo bilo poznato i antičkim graditeljima, tek će se nakon Hookea ono početi ponovno primjenjivati. Prednost ovakvog postupka je što omogućava potpuno poništavanje bilo kakvih unutarnjih momenata u luku, te ukoliko se tlačna linija i os luka u potpunosti podudaraju, javljanje čiste unutarnje tlačne sile. Takva postavka omogućava gradnju lukova od elemenata poput kamena ili opeke koji ne mogu preuzeti nikakve vlačne sile.

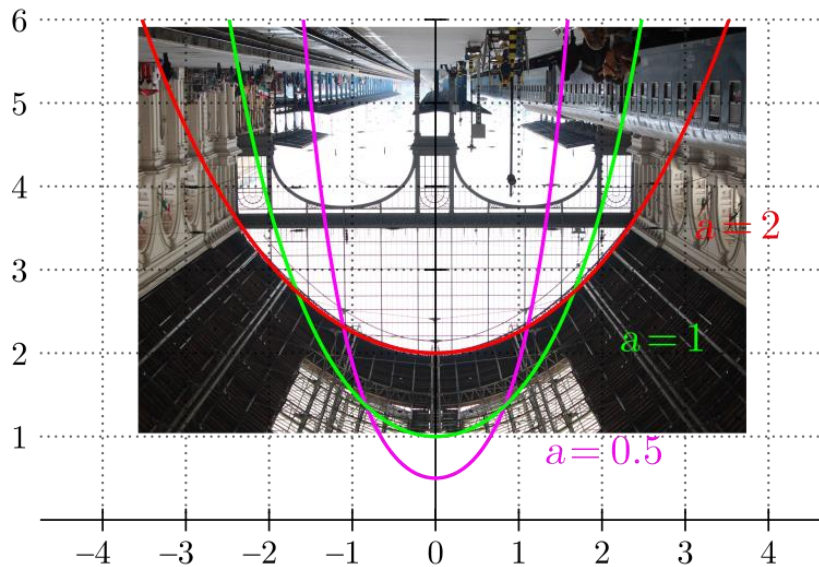


Slika 1 - Polenijeva skica Hookeove analogije i njegova analiza napuknute kupole Svetog Petra u Rimu

Oblik koji zauzima uže ili lanac pri djelovanju konstantne kontinuirane gravitacijske sile prvi je pretpostavio Galileo u djelu „*Discorsi e dimostrazioni metematiche intorno a due nuove scienze*“ misleći da je riječ o kubnoj paraboli. Ta pretpostavka nije daleko odstupala od istine kako se krivulja smanjivala i gotovo potpuno približavala tom obliku pri nagibu od 45° . Njegovu tvrdnju opovrgnuo je Joachim Jungius 1669. godine.

Točnu jednadžbu postavili su Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens i Johann Bernoulli 1691. godine kao odgovor na izazov Jakoba Bernoullija. Svoje otkriće objavili su u djelu „Acta Eruditorum“ iste godine. David Gregory napisao je raspravu 1697. godine u kojoj je predstavio pogrešnu derivaciju točne diferencijalne jednadžbe.

Jedna od prvih primjena lančanice za izgradnju lukova pripisuje se upravo Robertu Hookeu koji je prilikom rekonstrukcije katedrale Svetog Pavla u Londonu primijetio da lukovi podsjećaju na okrenuti lanac. Oblici okrenute lančanice pronađeni su i na drevnim lukovima Taq Kasra u Ktezifontu u Mezopotamiji.

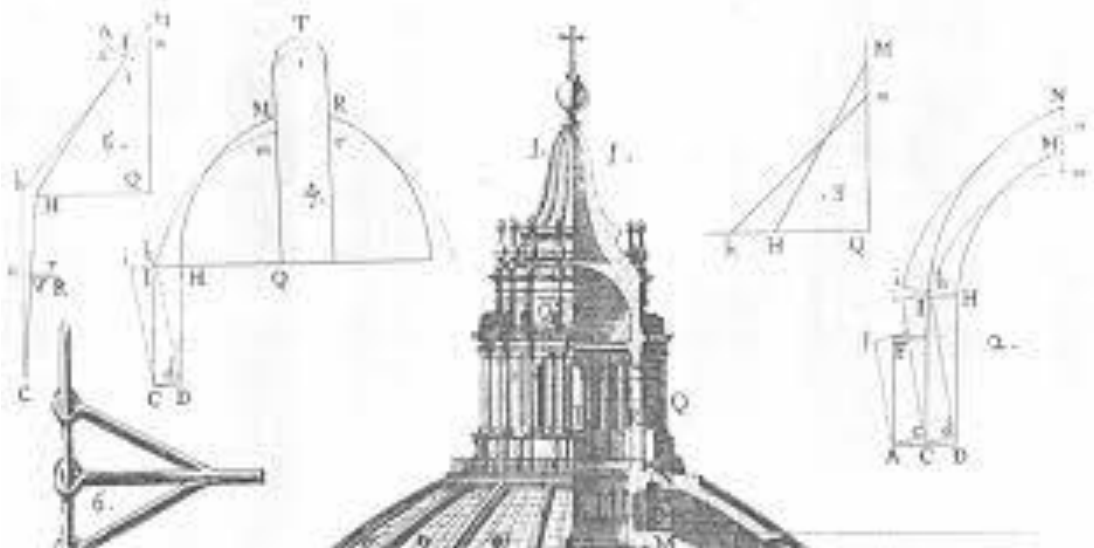


Slika 2 - Okrenuta slika kolodvora Keleti u Budimpešti s iscrtanom lančanicom



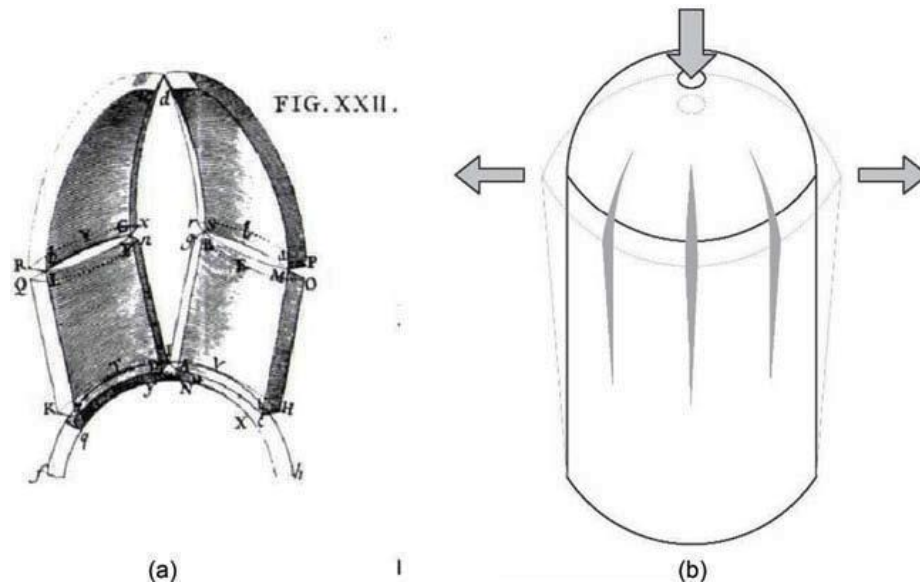
Slika 3 - Palača u Kzetifontu

Također jedna od najranijih i najznačajnijih primjena ovog zakona bila je i analiza nosivosti napuknute Michelangelove kupole bazilike Svetog Petra u Rimu. Kupola je građena tijekom XVI. stoljeća prema antičkim načelima proporcija i glazbene analogije. Papa Benedikt XIV dao je izraditi ekspertizu o sigurnosti i nosivosti kupole. Prvu analizu izradila su „Trojica Matematičara“ Thomas LeSeur, Francois Jacquier i Ruđer Bošković 1742. godine koji su koristili metodu virtualnog rada kako bi zaključili da se pukotine javljaju zbog razmicanja oslonaca. Drugu analizu izradio je Giovanni Poleni 1748. godine koristeći se upravo okrenutom lančanicom kako bi zaključio hoće li napuknuta kupola stajati ili će doći do pucanja svoda. Poleni je kupolu podijelio na 50 odsječaka i svaki od njih predstavio ovješnim lancem na koji je ovjesio 32 nejednaka utega koji su predstavljali mase pripadajućih dijelova kupole. Njegova je teza bila, ako dobivena linija prolazi kroz postojeću konstrukciju, onda je ona sigurna i neće se urušiti, da je bio u pravu pokazuje to što kupola stoji i danas.

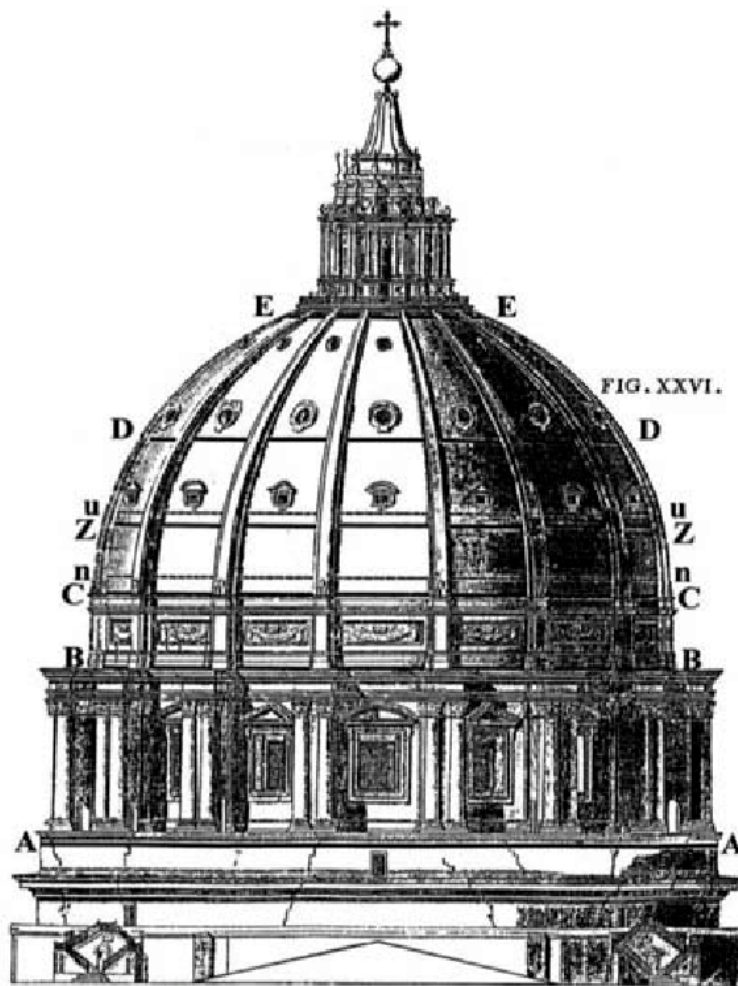


Slika 4 - Skica iz prve ekspertize kupole Svetog Petra koju su izradili „Trojica Matematičara“ na kojoj su jasno vidljivi iscrtani virtualni pomaci

Međutim, u takvom su modelu izostavljene prstenaste sile koje u stvarnoj kupoli postoje, prema tome, ovakva aproksimacija samo je djelomično točna. Umetanjem dodatnih poprečnih štapova u ovješeni model on se mogao dodatno poboljšati. Ukoliko je u modelu poprečni štap u tlaku, za pretpostaviti je da će u okrenutoj, stvarnoj konstrukciji on predstavljati komponente prstenastih sila u vlakcu. Upravo zbog tih sila javljaju se meridijalne pukotine. Štoviše, često se sanacije ovakvih i sličnih kupola izvode upravo dodavanjem metalnih prstenova koji onda preuzimaju te sile i sprječavaju širenje pukotina. Tu je problematiku razumio i Poleni koji je to i opisao u debati 1748. godine. Dopuštanjem deformacija izazvanih vlačnim prstenastim silama u kupoli, njezini isječci ponašaju se upravo kao niz plosnatih lančanica spojenih u tjemenu.

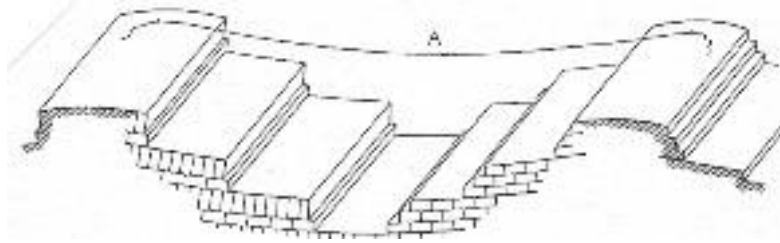


Slika 5 - Ilustracija Polenijeve intuitivne ideje u debate i skica pomaka



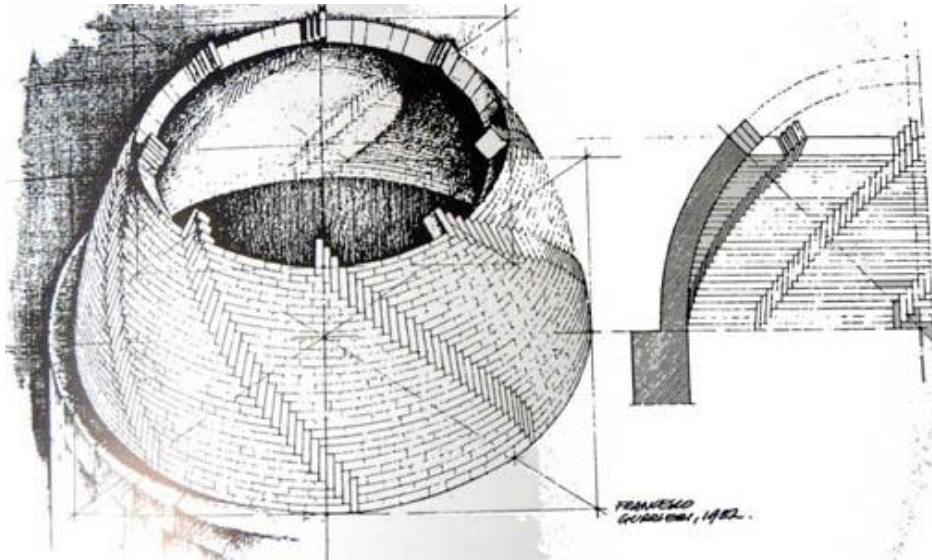
Slika 6 - Metalni prstenovi na kupoli Svetog Petra koje je predložio Luigi Vanvitelli

Ova analogija naravno nije i jedina primjena lančanice u graditeljstvu. Moguće je koristiti se stvarnom, dakle neokrenutom vlačnom linijom pri projektiranju raznih kupola od opeke ili kamena. Još u drvnom Egiptu primijećeno je da zidovi od opeke građeni tako da prate oblik ovješnog uža iskazuju poboljšanu čvrstoću. Takva metoda primijenjena je u izgradnji obrambenih zidova El Kaba.

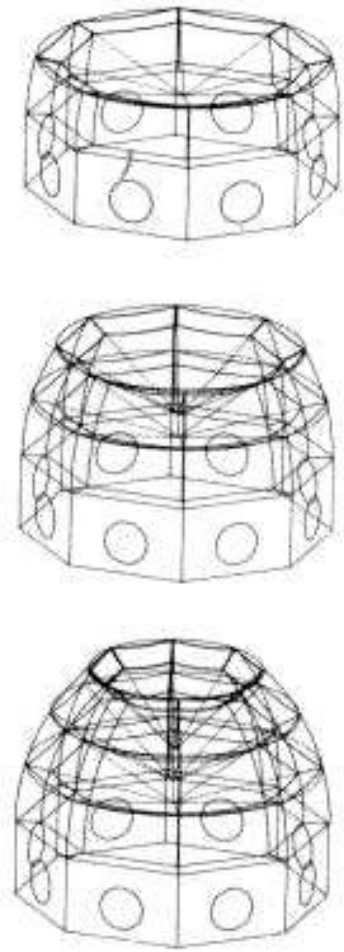


Slika 7 - Ilustracija gradnje zidova od opeke korištenjem ovješnog uža

Početakom XV. stoljeća pri gradnji impozantne kupole Firentinske katedrale Filippo Brunelleschi također se koristio ovim saznanjem, ali i drugim genijalnim otkrićima kako bi otvorio vrata arhitektonske renesanse. Kako bi izgradio do tad najvišu kupolu na svijetu i to bez korištenja masivne skele i bez vanjskih kontrafora, koristio se sakrivenim rebrima u rubovima oktogonalne kupole kao načinom prijenosa sila iz rubova u stranice. Koristio je i poseban uzorak slaganja opeke, takozvani „spina pesca“ ili riblja kost, meridijalno posložene opeke na konstantnim razmacima koje prate liniju loksodroma od dna do vrha kupole i razbijaju uobičajeni kružni uzorak i time ne samo da omogućavaju izgradnju sljedećeg sloja samoodrživih radialnih prstenova bez korištenja oplata, već i drugi način raspodjele naprezanja na membrani. Bočni potisak kupole, koji se koncentrira na spojevima svojih stranica, tako se preuzima i na „jedrima“ membrane. Ova tehnika je korištena kako bi se poboljšala svojstva sfere na kupoli i povećala krutost samonosive membrane na slabim ploham oktogonalne kupole. Ono što je osiguravalo nepomičnost ležajeva i preuzimalo poprečne sile bile su apsidalne kapele koje su tvorile „catena totius ecclesie“, ili „lanac oko crkve“. I konačno, sam oblik slaganja opeke na stranicama kupole pratio je liniju lančanice kako bi dodatnim protu-potiskom smanjio naprezanja u rubnim rebrima. Iako nije potpuno razumio prirodu lančanice, koju su točno opisali tek dva stoljeća kasnije, razumio je njen osnovni princip. Brunelleschi je koristio ovješeni lanac kako bi oblikovao zakrivljenost kupole u svakoj fazi izgradnje zasebno. Kako je svaki sljedeći red opeke bio postavljen, tako je lanac bio ponovno ovješeno. Dakle, čitav oblik kupole nije bio unaprijed određen lančanicom, već ga je oblikovao svaki dio zasebno. Ne prateći matematički oblik, već fizikalni princip toga da je ovješeni lanac samoodrživ u cjelini i u svim svojim dijelovima, tako je i površina kupole samoodrživa, kako u cjelini tako i u svakom svom djelu. Izgled kupole u konačnici ni ne odgovara lančanici, ali prikazuje princip najmanjeg otpora ovješnog lanca. Tek će otkrića Keplera, Fermata, Leibniza, Gaussa, Riemanna i LaRoucha u potpunosti razotkriti taj princip.



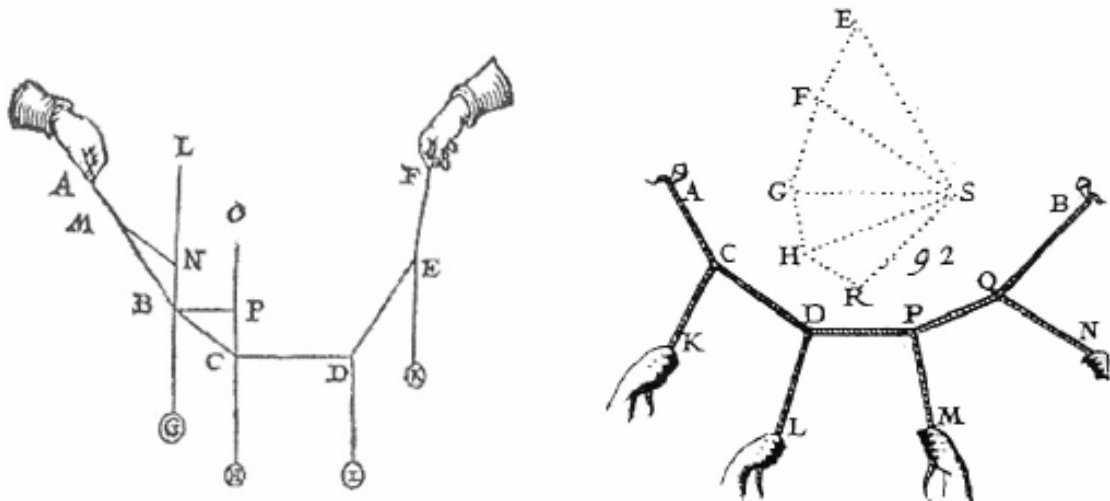
Slika 8 - „Spina pesca“



Slika 9 - Faze izgradnje kupole na Firentinskoj katedrali

2.2. Ravnoteža luka

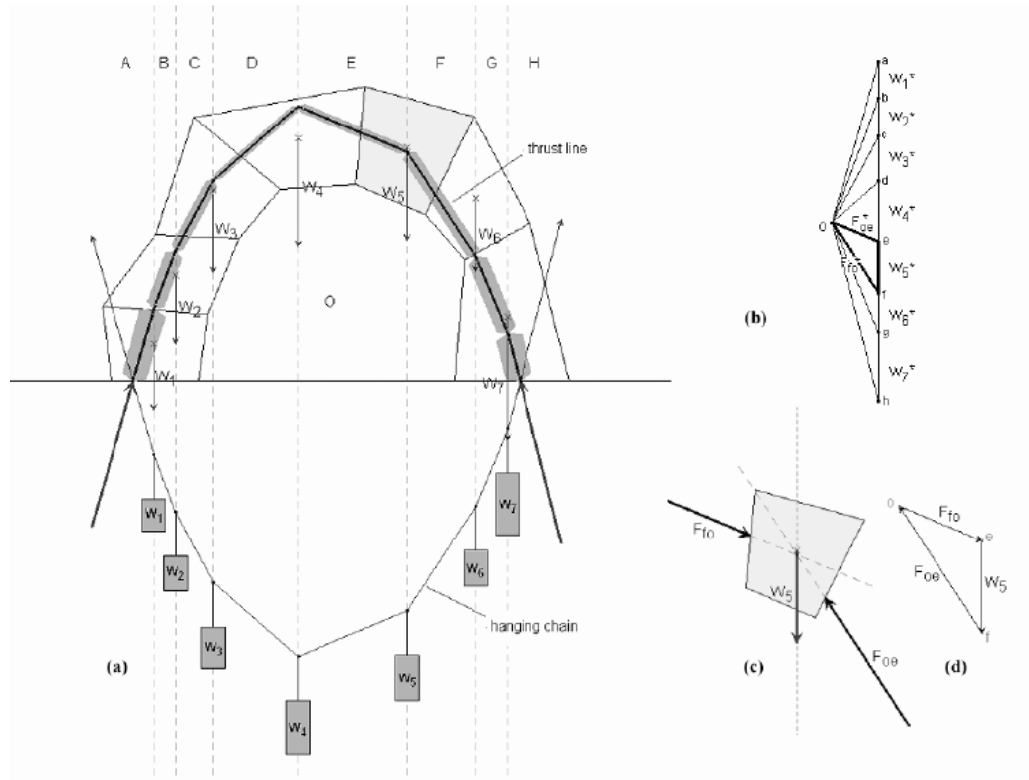
Postoje razne metode određivanja optimalnog oblika luka. Ne promatrajući mnoštvo lukova kroz povijest koji su izgrađeni iskustveno ili čak intuitivno, prva znanstvena metoda bila je upravo ona koja koristi fizikalni model jednostavnog ovješenežnog užeta ili lanca već prije opisana. Pokušaji matematičkog definiranja i boljeg razumijevanja statike i ravnoteže općenito započinju upravo otkrićem pravila paralelograma Simona Stevina 1586. godine. To je bio početak proučavanja ravnoteže statičkih sustava. Postalo je moguće objasniti eksperimentalne rezultate dobivene vješanjem utega za lanac i točno izračunati sile u lancu koristeći grafičke metode.



Slika 10 - Jedna od Stevinsonovih skica ravnoteže sila ovješenežnih utega na lancu 1586. godine i Vargnonov prikaz grafičke analize

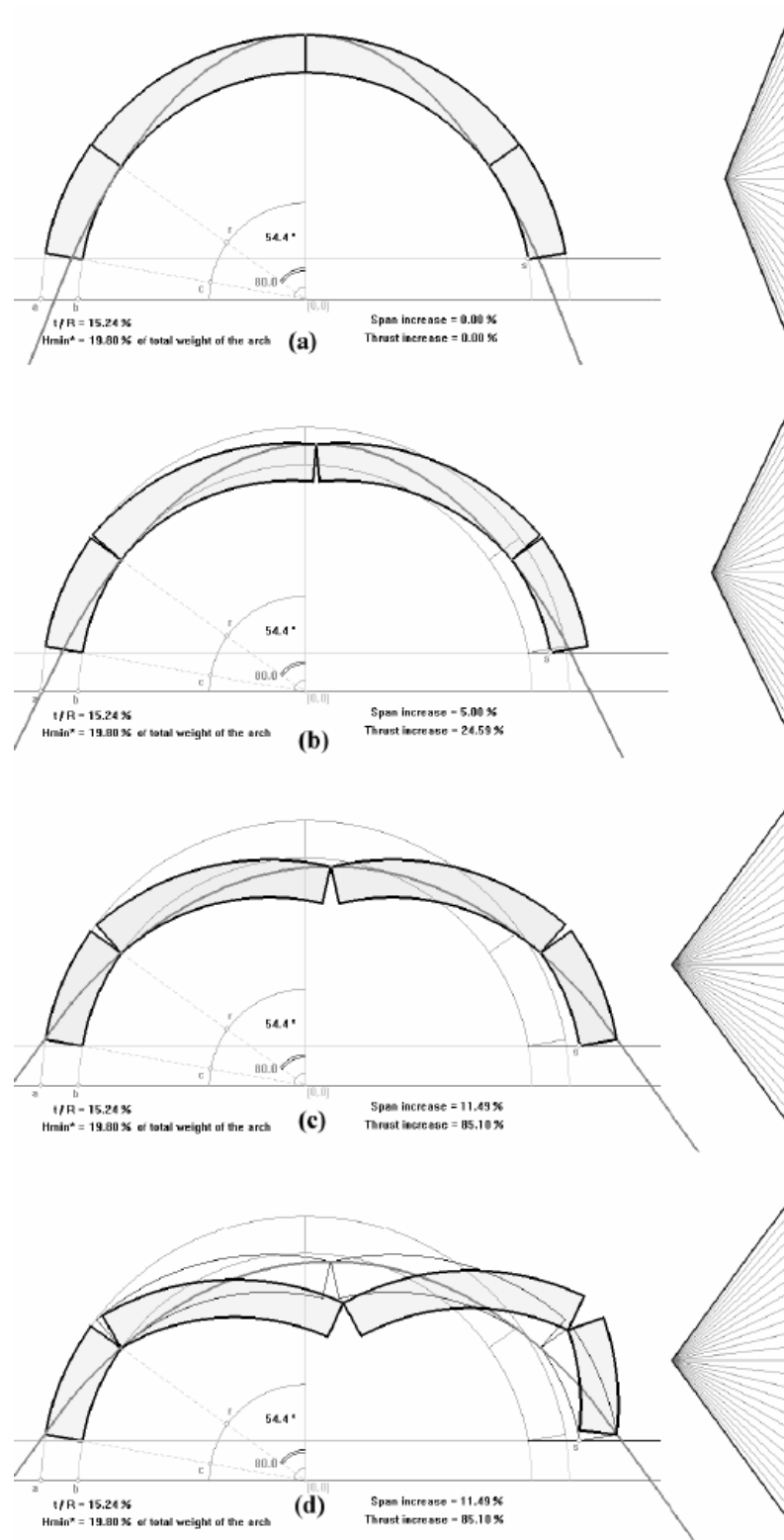
Skoro tri stoljeća kasnije, 1866. godine, Carl Culmann formalizirao je grafičku analizu u svom djelu „*Die graphische Statik*“ i time omogućio precizne proračune rešetki, lukova, kablova i ostalih strukturalnih sustava. Zbog svoje jednostavnosti, grafička metoda bila je najprimjenjivija metoda statičkog proračuna u XIX. i početkom XX. stoljeća. Tek je nakon 1920-ih postupno zamijenjena teorijom elastičnosti koja se pokazala još jednostavnijom i boljom za proračun homogenih, izotropnih elemenata. Međutim, koristiti se samo teorijom elastičnosti pri proračunu zidanih i kamenih konstrukcija nije dovoljno za njihovo pravilno projektiranje. Problem je upravo u tome što se konstrukcije od diskretnih elemenata ne mogu smatrati homogenim i kontinuiranim. Proračuni temeljeni na nekakvoj srednjoj čvrstoći ne daju dovoljno dobre rezultate upravo zbog kompozitne prirode elementa. Takve konstrukcije najčešće popuštaju upravo zbog stabilnosti, a ne zbog doseganja graničnog stanja nosivosti, štoviše, tlačna čvrstoća može se uzeti da je gotovo beskonačna, dok je vlačna zanemariva, bar za nearmirano žiđe.

Da je oblik verižnog poligona direktno povezan sa oblikom tlačne linije može se vidjeti na sljedećem primjeru na kojem su jasno prikazani odsječci luka i njihove ekvivalentne težine ovješene na lanac. Oblik linije dobiven je grafičkom metodom preko verižnog poligona.



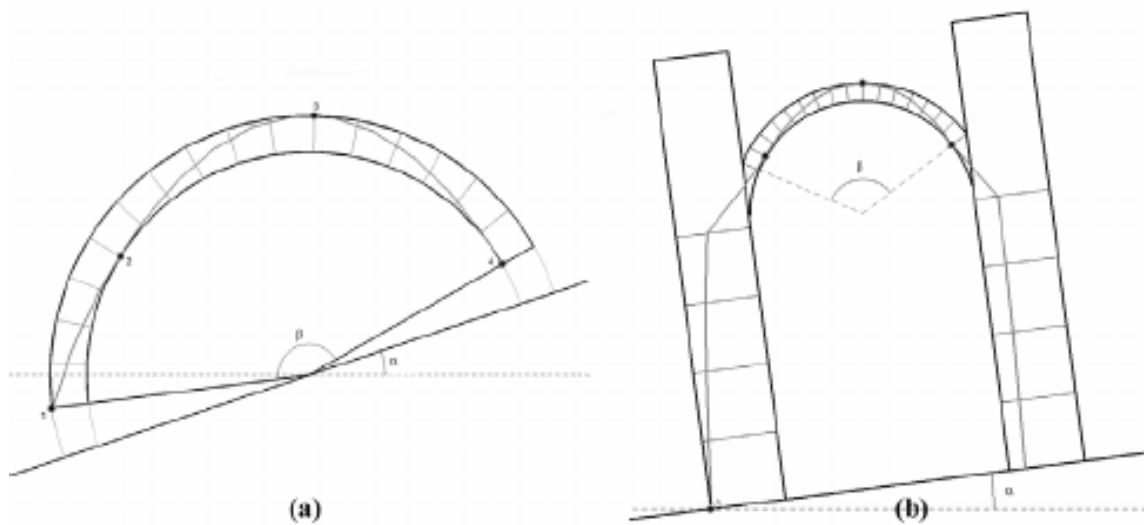
Slika 11 - Skica verižnog poligona za zadano opterećenje s izdvojenim prikazom ravnoteže jednog elementa luka

Za različito opterećenje i razmak ležajnih točaka, dobiva se različita tlačna linija. Kako bi se osigurala stabilnost luka, ona mora prolaziti unutar granica poprečnog presjeka. Ili idealno kroz jezgru presjeka kako bi se osigurala pojava samo tlačnih naprezanja. Na mjestima na kojima ona dodiruje rub poprečnog presjeka dolazi do pojave zgloba. Prema tome, ukoliko na luku dođe do pojave više od tri zgloba, sustav postaje mehanizam i dolazi do gubitka stabilnosti. Iz takve analize proizlazi da nastanak pukotina može ukazivati na mjesto nastanka zgloba, ali ne mora ujedno i značiti potpuni gubitak stabilnosti.



Slika 12 - Prikaz mehanizma sloma u redosljedju od stabilnog luka do urušenog s iscrtanim tlačnim linijama i jasno vidljivim mjestima dodira ruba materijala i pojave zglobova

Danas, posebno je zanimljiva nešto drugačija primjena ove metode. Na samo za izgradnju lukova velikog raspona, poput onih za mostove velikih raspona, već i mogućnost ispitivanja otpornosti konstrukcije na potres. Uobičajena je praksa da se sile potresa koje djeluju na konstrukciju zamjene horizontalnim silama koje odgovaraju djelu ukupne težine konstrukcije. To je ekvivalentno kao da u računskom modelu zadamo dodatno horizontalno ubrzanje manje od dominantnog ubrzanja gravitacije. Ovakav pristup ne obuhvaća u potpunosti stvarno dinamičko djelovanje na konstrukciju, ali ipak pokazuje najveće moguće horizontalno opterećenje koje konstrukcija može podnijeti prije urušavanja. U analizi potresa moguće je to opterećenje simulirati nagibom terena, pri čemu se ubrzanje sile teže dijeli na horizontalnu i vertikalnu komponentu i time djeluje ujedno kao i težina i potres. Upravo to zaokretanje terena pomiče položaj tlačne linije u konstrukciji te je tako moguće predvidjeti mehanizam sloma.

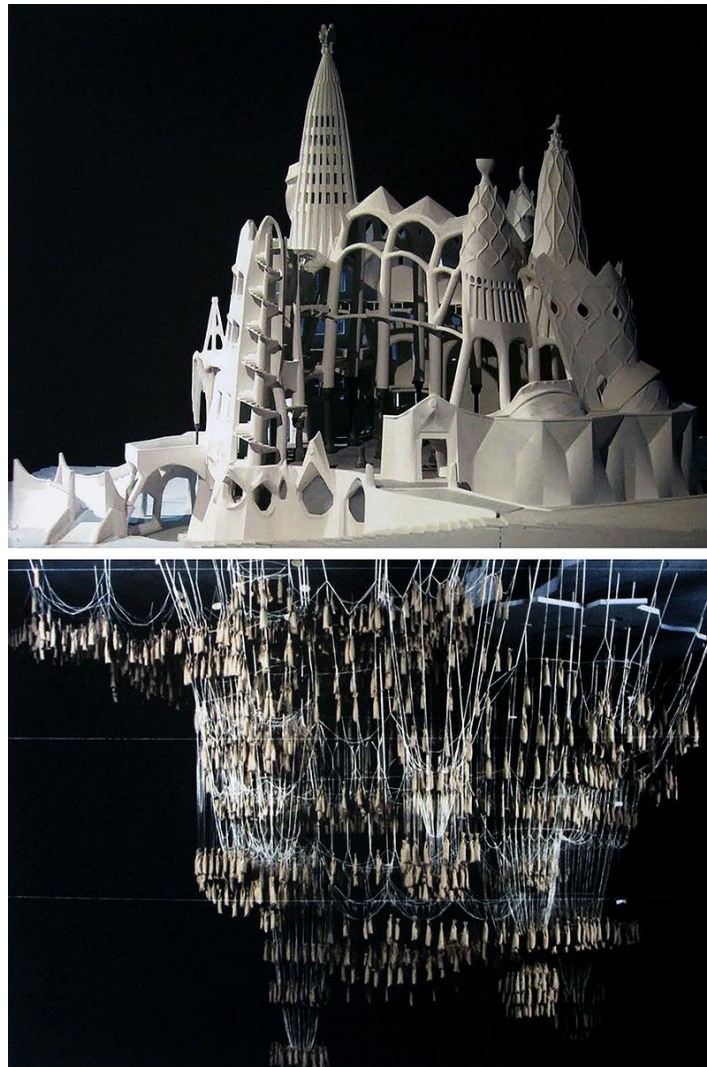


Slika 13 - Zidani luk s prikazanim mjestima nastanka zglobova pri potresnom opterećenju

2.3. Proširenje primjene na svodove

U svrhu definiranja ljusaka i svodova iz pogleda moderne znanosti o materijalima i statike pozivam se na definiciju danu u knjizi „*Stresses in Shells*“ doktora Wilhelma Fluggea. Iako svaki element, bez obzira koliko malen ili tanak, zauzima tri dimenzije, rijetko se u analizi koristi trodimenzionalna teorija elastičnosti, već se često koriste pojednostavljena ovisna o veličini utjecaja pojedinih sila ili veličini pojedinih dimenzija. Ljuske možemo promatrati kao zakrivljene ili ravne „*materijalne površine*“ konstantne ili promjenjive debljine načinjene od nekakvog više ili manje čvrstog materijala, koji može provoditi opterećenja od jednog kraja do drugog i pri tome se odgovarajuće deformirati. Temeljna pretpostavka za proučavanje naprezanja u ljuskama je da je njena debljina manja od ostalih dimenzija, ali ne nužno zanemariva.

U ljuskama dobivenim korištenjem vlačno-tlačne analogije, kao i kod lukova, ne javljaju se nikakvi momenti, uključujući i momente torzije i vlačne sile. Ova pretpostavka odgovara i membranskoj teoriji ljusaka, ali i ljuskama dobivenih iz mrežnih modela pomoću interpolacije ili zaokretanja linije lančanice oko centralne osi. Svakako majstor korištenja lančanice u svrhu projektiranja kupola bio je Antoni Gaudi. Njegov inovativan pristup, temeljen djelomično i na grafičkim metodama i poznavanju svojstva lančanice, obuhvaćao je projektiranje unaprijed zadanim opterećenjima na lancu koja su odgovarala budućim stvarnim opterećenjima na konstrukciju. Na taj način nije provjeravao stabilnost nekog već prije izgrađenog ili projektiranog svoda, već je direktno dobio oblik tlačne linije i oko nje gradio konstrukciju tako osiguravajući njen optimalni oblik. Problem horizontalnog potiska, pokušao je riješiti što izduživanjem kupola, a što naginjanjem stupova, no mala horizontalna sila i dalje postoji.

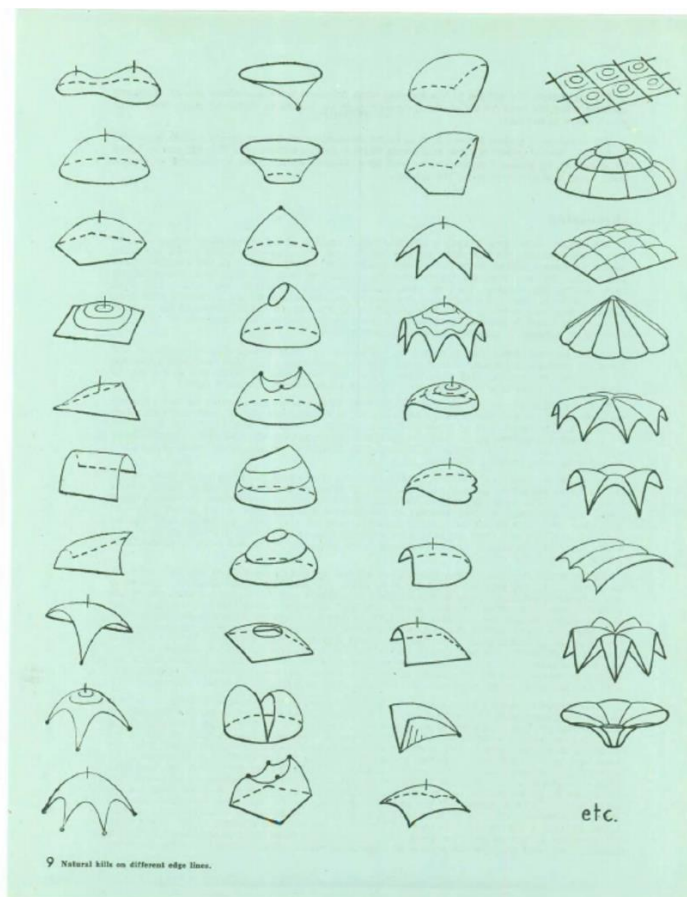


Slika 14 - Konačna iteracija ovještene forme i njoj pripadnog modela crkve u gradu Colonia Guell, poznate pod nazivom Gaudijeva Kripta

Moderan pristup projektiranju ljusaka također se temelji i na uporabi fizikalnih modela, na kojima se preciznim mjerenjima ispituje ponašanje konstrukcije za neko opterećenje. S obzirom da je elastična računaska analiza bila iznimno komplicirana za bilo kakve složenije oblike, oblici prvih ljuski od armiranog betona ili čelika bili su relativno jednostavne geometrije, poput sfera, valjaka ili nekakvih rotacijskih ploha. Nakon industrijske revolucije dostupnost čelika omogućila je njegovo masivnije upotrebljavanje u arhitektonske svrhe, a pokazao se posebno pogodan za kupole velikih raspona. Neke od tako izgrađenih kupola su eliptična kupola Royal Alber Hall u Londonu, promjera od 57 do 67 metara ili kružna kupola Halle au Ble u Parizu, gdje je problem vlačnih sila jednostavno riješen izvrsnim svojstvima čelika. Zbog visoke cijene takvih konstrukcija, sve se više istraživalo ljuske od betona. Zbog njihove ekonomske isplativosti i uštede materijala zbog izvrsnih svojstva tlačne otpornosti, tanke ljuske od betona često su se upotrebljavale 50-

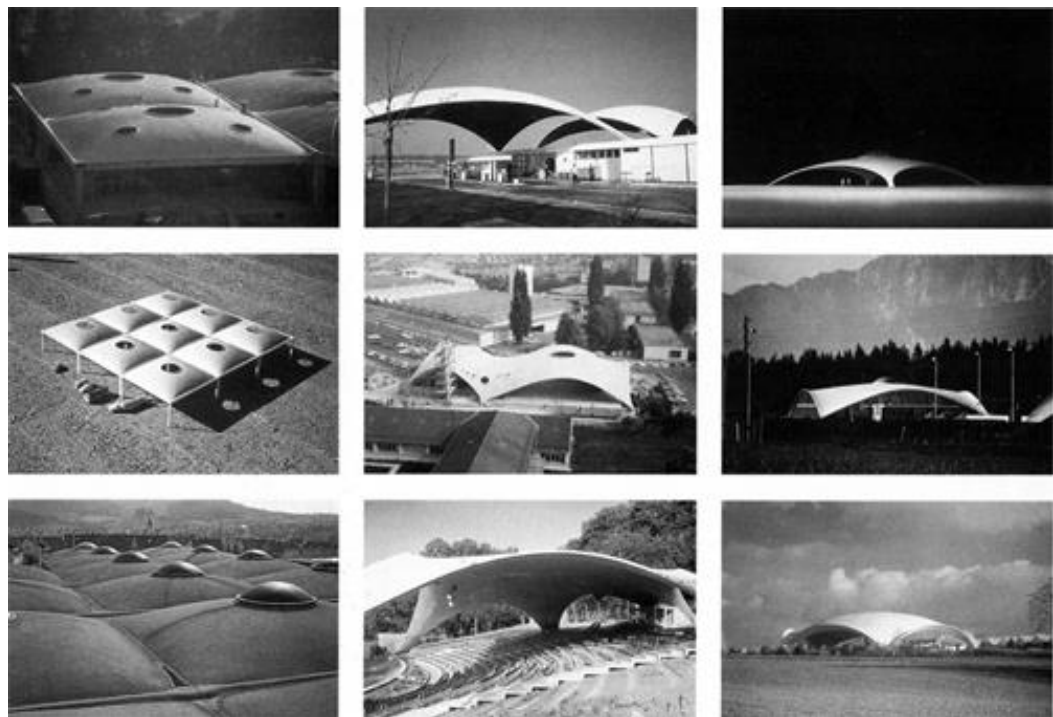
ih i 60-ih godina prošlog stoljeća. Klasične kupole temeljene na pravilnim geometrijskim formama, unatoč relativno jednostavnijem proračunu i izvođenju, nisu bile strukturalno optimizirane. Novi oblici nosivih struktura su se kontinuirano tražili i ispitivali.

Značajan pomak u konceptu projektiranja tankih ljusaka od betona učinio je Heinz Isler izloživši na prvom kongresu IASS-a (International Association for Spatial Shells), u Madridu 1959. godine njegove najznačajnije inovacije u procesu dizajniranja tankih betonskih ljusaka, dvije od kojih su bile model membrane pod pritiskom i model ovješene okrenute tkanine, zbog koje je i vlačno-tlačna analogija poznata u literaturi kao „hanging cloth analogy“. U svom radu „*New Shapes for Shells*“ na jednoj stranici i devet ilustracija prikazao je kako se oblici stabilnih ljusaka mogu dobiti direktno iz oblika napuhane membrane ili okrenute tkanine. Nadalje, na Kolokviju Strukturalne Morfologije predstavio je i vlastite primjere modela, uređaje za mjerenje i nekoliko ljuski koje je izgradio koristeći svoju metodu. Ovaj pristup proizašao je tek nakon godina neuspjeha da precizno definira i grafički dokumentira te matematički opiše geometrijski složene sedlaste betonske ljuske koristeći se tradicionalnim metodama. Isler opisuje kako ga je na ideju navela dvostruka zakrivljenost jastuka, koji je sa membranom u konstantnom vlaku u oba smjera: „*za 3D modele, ono što je lančanica za lukove.*“



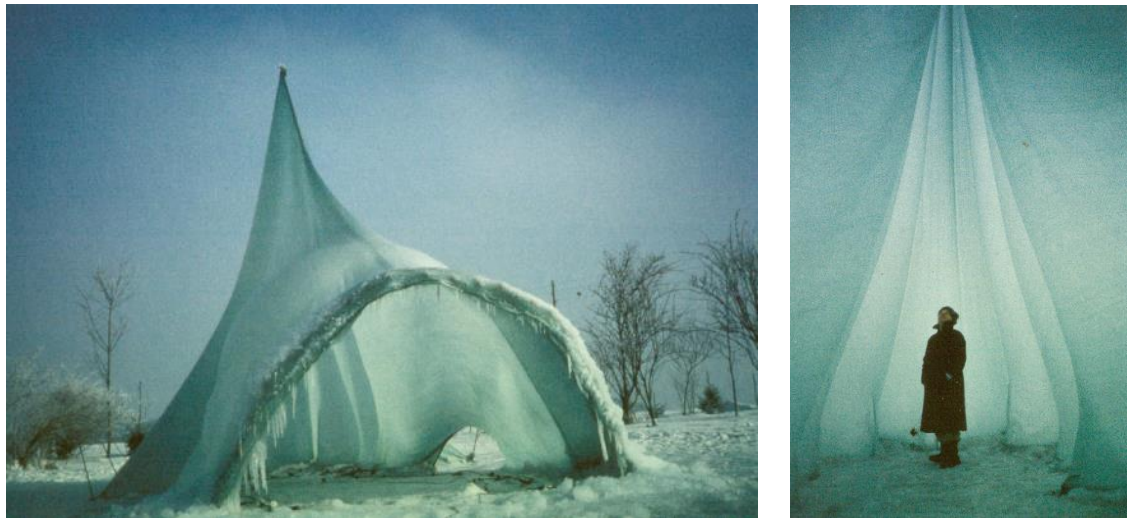
Slika 15 - Ilustracija „39 novih oblika ljusaka“ iz „*New Shapes for Shells*“ dobivene predloženim metodama

Ovakav novi pristup bio je značajno udaljavanje od do tada ustaljene prakse. Čak toliko da su i najveći autoriteti u tom području, među kojima su bili i Ove Arup (Sydney Opera House) i osnivač IASS-a Eduardo Torroja (Hipodromo de la Zarzuela) propitkivali ovu metodu. Najveći problemi, smatrali su, bili su to što nije zasnovana na analitičkim metodama, postojećoj praksi i potencijalno bi omogućavala, zbog svoje jednostavnosti, neiskusnim inženjerima nemarnu i neograničenu primjenu. Isler je u obrani rekao da ta metoda i nije zamišljena da potpuno zamijeni ostale analize, već samo pruži prvu stepenicu u projektiranju. Ovako izrađeni fizikalni modeli pružali bi bolja iterativna rješenja i predvidive rezultate mjerenja. Pokazalo se da za kupole manjih i srednjih raspona, ova metoda sama po sebi daje dosta dobre rezultate, ali nije potpuno primjenjiva na kupolama velikih raspona gdje su potrebne dodatne analize i mjere sigurnosti. Zaključno, fizikalni modeli nisu bili ništa novo, primjenjivao ih je već desetljećima ranije Pier Luigi Nervi pri projektiranju betonskih hangara za avione u Orvietu 1927. godine tražeći optimalne oblike nepravilnih ljuski, a koristili su ih i drugi inženjeri zbog provjere mogućih grešaka u matematičkoj analizi. Inovativnost Islerove ideje proizlazi iz jednostavnog i intuitivnog načina pronalaska gotovo neograničenog broja novih konstruktivno pogodnih oblika.



Slika 16 - Galerija djela Heinza Islera

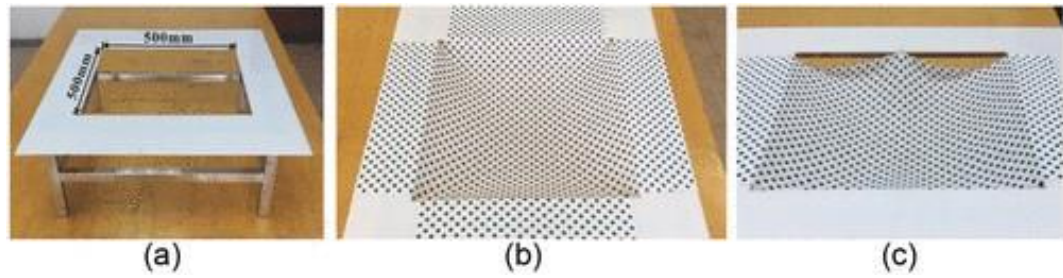
Uz napuhane membrane i ovješenu tkaninu, koristio se i „free-form hill“ metodom, ali i ledom pri traženju oblika koji preuzimaju samo tlak. Na razmaknute stupove postavio bi tkaninu koju bi pri zimskim temperaturama polijevao vodom. Ona bi se prirodno ovjesila, a nakon nastanka tankog sloja leda pridržanja bi se uklonila, te bi tako čitava struktura postala opterećena tlačnim silama. Efikasnost ovakvih modela pokazuje da je led često trebao biti samo 10 mm debeo da bi čitava struktura ostala stajati.



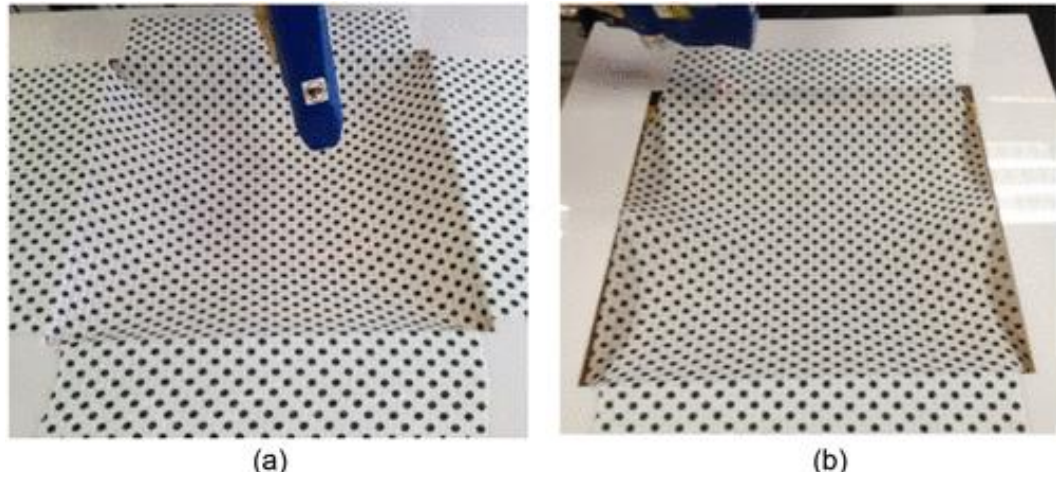
Slika 17 - Slike zaleđene tkanine izvana i iznutra

2.4. Računalne metode

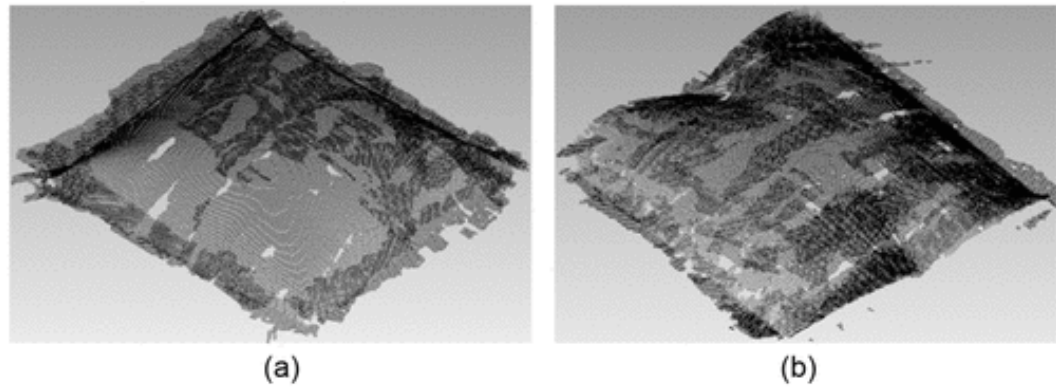
Napredak tehnologije računalnih modela u proteklim desetljećima omogućio je razvoj nekoliko pouzdanih metoda pronalaska oblika. Jedna od njih je prirodan razvoj digitalizacije postojećih fizikalnih modela. Ona se temelji na korištenju preciznih mjerila koja fizikalne koordinate pretvaraju u digitalne. Praktično, preciznost podataka koji opisuju oblik fizikalnih modela ograničena je količinom podataka koju možemo izmjeriti. U prošlosti najčešće su korišteni mjerni instrumenti koji su poziciju točke na membrani bilježili ticalom, no deformabilna priroda membrane značila je i da nije bilo uvijek moguće odrediti koordinate bez njihova značajnijeg pomaka. Također, postavljanje ticala zahtijevalo je veliku preciznost postavljanja i mnogobrojne mjerne točke kako bi se dobili precizniji podatci, što je kompliciralo cijeli postupak. Razvojem laserskih mjernih instrumenata ti su nedostaci ispravljani, a preciznost je značajno povećana, kao i gustoća mjernih točaka. Dobivene koordinate stvaraju oblak točaka na računalu koje se mogu interpolirati u membranu i omogućavaju povratnu korekciju fizikalnog modela, kako bi se iterativno dobio traženi oblik.



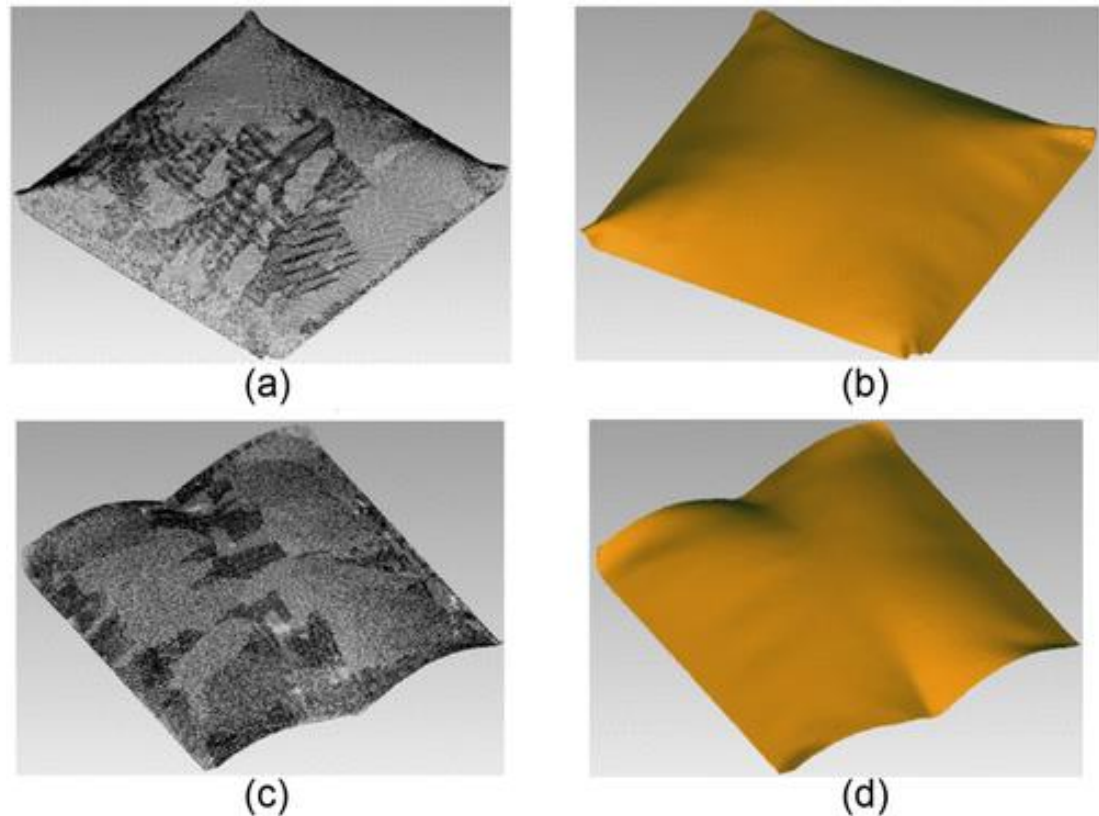
Slika 18 - Priprema fizikalnog modela za skeniranje s kontinuiranim ležajevima na svim stranama i s ležajem u sredini duljeg raspona



Slika 19 - Postupak 3D skeniranja pri kojemu se vidi glava lasera za mjerenje, laser se drži u što okomitijem položaju zbog preciznijeg mjerenja



Slika 20 - Oblak digitaliziranih podataka



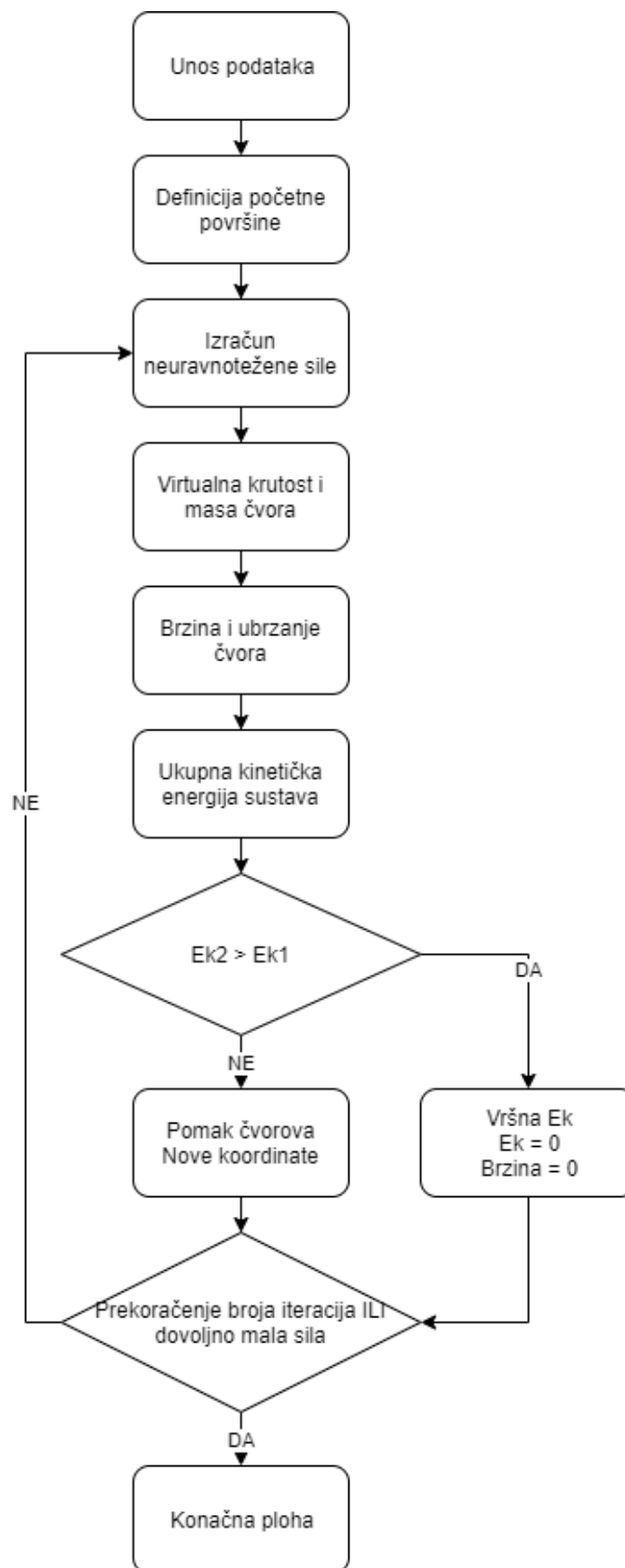
Slika 21 - Rekonstrukcija geometrijske površine iz oblaka koordinata mjernih točaka

Ova metoda još uvijek ovisi o svim ograničenjima koja imaju i fizikalni modeli, no razvijene su i čisto numeričke metode traženja oblika. One se također koriste i za traženje oblika vlačnih konstrukcija, a koristeći se analogijom, i konstrukcija u čistom tlaku. Jedna od njih je i metoda dinamičke relaksacije. To je iterativna metoda koja za neki zadani sustav simulira pseudo-dinamički proces. Napeta membrana, sa zadanim ograničenjima i ležajevima pretvara se u sustav velikog broja čvorova u kojima je sažeta pripadajuća masa odsječka membrane i koji su povezani oprugama određene virtualne krutosti. Sustav tako oscilira pod utjecajem vanjskih opterećenja sve dok ne pronađe ravnotežu, a upravo je to optimalni oblik konstrukcije. Sam postupak temelji se na izračunu neuravnotežene sile, koju se iterativnim pomicanjem čvorova pokušava ukloniti, to jest, minimizirati. Pri izračunu te sile koristi se drugi Newtonov zakon, a iz jednadžbe se koristeći masu čvora i njegovo ubrzanje u smjeru okomitom na ravninu direktno dobiva neuravnotežena sila u čvoru i u trenutku t .

$$R_{i,x}(t) = m_i * a_{i,x}(t)$$

Veza između brzine v , položaja x i sile dobiva se iz diferencijalnih odnosa dvostrukom integracijom ubrzanja. Cijeli postupak prikazan je na slici 22.

Slika 22 - Dijagram toka



3. Traženje oblika

3.1. Ravnoteža slobodnog čvora

Još jedna od često korištenih računalnih metoda traženja oblika tankih membranskih konstrukcija je i ona koja se temelji na traženju ravnoteže sila u čvorovima konstrukcije. Ponovno, kao i kod prethodnih metoda, postupak traženja oblika tankih zakrivljenih svodova kreće od traženja oblika slobodno oblikovane mreže kabela međusobno spojenih u čvorovima i oslonjene na nepomične krajeve, to jest, temelje ili na drugo uže koje služi kao pričvrsnica između glavnine mreže i udaljenih fiksnih točaka. Sile prednapinjanja, težina i ostala djelovanja kroz konstrukciju se prenose napetim kabelima. S obzirom da se oni križaju u čvorovima, koji na konačnoj konstrukciji moraju biti nepomični, možemo u upravo tim točkama postaviti jednadžbe ravnoteže sila u užadi ili štapovima koje se radi lakšeg izračuna projicirane na tri koordinatne osi. Konfiguracija položaja čvorova i sila S koje su u ravnoteži predstavlja traženo rješenje ovog sustava.

$$\sum_{j \in N_i} S_{(i,j)} * \vec{e}_{i,j} * \vec{i} = 0 \quad \sum_{j \in N_i} S_{(i,j)} * \vec{e}_{i,j} * \vec{j} = 0 \quad \sum_{j \in N_i} S_{(i,j)} * \vec{e}_{i,j} * \vec{k} - P = 0$$

Vrijednost S označava skalarni iznos sile u štapu položenog od čvora i prema čvoru j , dok je vektor e jedinični vektor smjera elementa kao i sile u elementu. Vektor e u gornjim jednadžbama iskazujemo kao razliku odgovarajućih koordinata početnog i krajnjeg čvora podijeljenog duljinom elementa l .

$$\vec{e}_{i,j} = \frac{x_j - x_i}{l_{i,j}} \vec{i} + \frac{y_j - y_i}{l_{i,j}} \vec{j} + \frac{z_j - z_i}{l_{i,j}} \vec{k}$$

$$l_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$$

Kako je konačni cilj analogijom dobiti tlačnu konstrukciju, ili štapnu ili ljuskastu, koje su zbog toga mnogo teže od konstrukcija od užadi, potrebno je u izračunu ravnoteže čvora uračunati i težinu djela konstrukcije koje pripada pojedinom čvoru. Ako tražimo oblik štapne tlačne konstrukcije, onda je pripadna težina koja se dodaje u čvoru jednaka sumi polovice težina priključnih štapova, ovo vrijedi za lagani pokrov, kada je vlastita težina tlačnih štapova rešetke puno veća od ostalog stalnog opterećenja

$$P = \sum \frac{G_i}{2} = \frac{1}{2} * \rho * \vec{g} * A * l_{i,j}$$

S tom postavkom se dobiva točniji optimalni oblik, što se može i zamisliti simulacijom ovješene lanca – lančanice koji svoj oblik dobiva upravo zbog svoje težine ili težine utega ovješeneh po sebi, a ne zbog sile prednapinjanja koja bi značajnije promijenila oblik. Stoga

se odnosom sile prednapinjanja elemenata i težine može mijenjati oblik i mrežaste konstrukcije, kao i iznos sile koja djeluje u temelje, a ne samo promjenom izbora temeljnih točaka, što je bitno kod analognih tlačnih konstrukcija koje najčešće imaju klasične temelje i manju mogućnost njihove prilagodbe obliku konstrukcije kao što je slučaj kod vlačnih konstrukcija od užadi.

Težina štapa ovisi o materijalu elementa, to jest njegovoj gustoći, poprečnom presjeku elementa i njegovoj duljini. Gustoća, gravitacija i poprečni presjek su zadani i konstantni, to ostavlja samo duljinu elementa kao varijablu pri izračunu mase. Promjena duljine elementa tako će uzrokovati i promjenu njegove težine, što za sobom povlači i promjenu ukupne sile P koja djeluje u čvoru, zbog te promjene i preraspodjela sila u konstrukciji se mijenja, pa je položaj čvora potrebno ponovno korigirati i ponoviti proračun. Ovaj kružni proces naznaka je da se dodavanjem težine u račun za ravnotežu čvora stvara i potreba za postavljanjem dodatnih uvjeta iterativnog postupka. Ako težine konvergiraju nekim konstantnim vrijednostima onda je moguće iteraciju prekinuti kada promjena svih duljina štapova bude zanemarivo mala, ali ako vrijednosti pojedinih težina divergiraju, onda je potrebno postupak ponoviti sa drugačijim vanjskim uvjetima.

3.2. Metoda gustoće sile

Kako bi se izbjeglo računanje sustava nelinearnih jednadžbi 1974. godine Hans-Jörg Schek predstavio je metodu gustoće sile. Klasična jednadžba linearizirana je tako što su omjer sile S i duljine l zamijenjeni novom oznakom q koja se naziva gustoća sile.

$$q = \frac{S}{l}$$

Tako se sada jednadžbe ravnoteže mogu zapisati u obliku koji značajno ubrzava i pojednostavljuje rješavanje sustava.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N_i} q_{(i,j)} * (x_j - x_i) &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} q_{(i,j)} * (y_j - y_i) &= 0 \\ \sum_{j \in N_i} q_{(i,j)} * (z_j - z_i) &= P_i \end{aligned}$$

Gustoća sile postaje konstanta koja se zadaje prije proračuna i postaje jedna od temeljnih vrijednosti pomoću kojih se oblikuje mrežna konstrukcija. Ona se zadaje za svaki element zasebno, a na položaj čvorova utječe slično kao što krutost utječe na raspodjelu sila u klasičnim konstrukcijama. Oblik mreže ne ovisi o samoj vrijednosti gustoće sile, već o omjerima gustoće sile različitih elemenata u konstrukciji. Ova metoda predstavlja jedno od najkorištenijih alata za traženje oblika početne geometrije vlačnih konstrukcija i

vrijednosti napinjanja u kabelima, daljnjim prilagođavanjem odnosa gustoće sila dobivaju se još povoljniji oblici. Razvijene su i neke prilagodbe metode gustoće sila poput nelinearne metode gustoće sila koja omogućava zadavanje relativnih udaljenosti između čvorova, vrijednosti vlaka u elementima i njihovu početnu nedeformiranu duljinu. Razvijena je i proširena metoda gustoće sila u kojoj je moguće zadati određene nepomične čvorove i istovremeno ograničiti vrijednosti sile reakcije.

Iz dobivene mreže predstoji sada dobiti zrcaljenu tlačnu rešetkastu konstrukciju. Ukoliko je tražena konstrukcija sačinjena od tlačnih štapova, proces zrcaljenja je jednostavan, s obzirom da smo već dobili konstrukciju od napetih užadi koje su ekvivalentne tlačnim štapovima jednake mase. No ako je tražena konstrukcija neki oblik masivnog svoda ili luka, tada moramo najprije provjeriti uvjet težine dijelova konstrukcije koji spadaju na pojedini čvor vlačne konstrukcije, što je i bila pretpostavka cijelog postupka. Samo ako su težine tlačne konstrukcije jednake težinama u čvorovima vlačne konstrukcije možemo primijeniti vlačno-tlačnu analogiju, u suprotnom oblici mreže i svoda ne bi odgovarali. Drugo, potrebno je provjeriti prolaze li vlačni štapovi, koji u stvari predstavljaju i pojednostavljene vlačne linije, jezgrom poprečnog presjeka svoda ili luka. Ovo je vrlo gruba pretpostavka, ukoliko želimo osigurati veću preciznost prilikom interpolacije tlačne plohe ili luka moramo koristiti što veći broj čvorova, čime se smanjuju duljine vlačnih štapova, ali se i dobiva oblik koji je u svom tlačnom obliku sličniji tlačnoj liniji koja prolazi kroz tlačnu konstrukciju. Koristeći vrlo gustu mrežu može se donekle dobiti oblik simulirane ovješene tkanine. Razlikujemo u tom slučaju mrežu u kojoj smo spriječili klizanje kabela jednih po drugima, što znači da se prenose i tangencijalne sile, te takva mreža može pobliže opisati armiranobetonsku ljusku nakon vlačno-tlačnog zrcaljenja i mrežu u kojoj smo dopustili klizanje po kabelima koja može pobliže opisati tlačnu konstrukciju od kamena ili diskretnih elemenata.

3.3.Primjena i modifikacija koda program_FDM

Kako bi se omogućio izračun i dodavanje vlastite težine u programu, napisana je dodatna funkcija koja uzima izračunate duljine elemenata i vraća matricu opterećenja u svim slobodnim čvorovima. To se postiže jednostavnim petljama koje iteriraju po listi svih elemenata i stvaraju novu listu u kojoj su indeksiranim elementima pridružene vrijednosti polovine njihovih duljina, naravno, potrebno je dobiti početne duljine kao vrijednost u prvoj iteraciji. Zatim se iterira po listi svih čvorova kojima se pridružuju izračunate vrijednosti polovina duljina koji se spajaju u tom čvoru, na kraju se izbace čvorovi koji su ranije definirani kao ležajevi i konačna lista opterećenja se pretvara u matricu pomoću modula numpy. To je potrebno samo radi daljnog pravilnog inputa u matricu mDf.

```

element_lenght = list_of_element_lengths (els, nds)

def ext_load(element_lenght):

    external_load = [i * 0.5 for i in element_lenght]

    external_load_indexed = []
    for i in range(len(enum_els)):
        external_load_indexed.append([enum_els[i][0],
external_load[i]])

    node_load_part = []
    for i in range(len(enum_nds)):
        for j in range(len(enum_els)):
            if enum_nds[i][0] in enum_els[j][1]:
                node_load_part.append([i, [0, 0, 0,
external_load_indexed[j][1]]])

    node_load = []
    for i in range(len(enum_nds)):
        node_load.append([enum_nds[i][0], [0, 0, 0]])

    for i in range(len(node_load)):
        for j in range(len(node_load_part)):
            if node_load[i][0] == node_load_part[j][0]:
                node_load[i][1][2] += node_load_part[j][1][2]

    free_node_load = []
    for i in range(len(node_load)):
        if node_load[i][0] not in supps:
            free_node_load.append(node_load[i])

    import numpy as np
    free_node_load_only = []
    for load in free_node_load:
        free_node_load_only.append(load[1])
    free_node_load_array = np.array(free_node_load_only)
    free_node_load_matrix = np.asmatrix(free_node_load_array)

    return free_node_load_matrix

```

Kod nadopisan u funkciji mDmDf:

```
ext_load_matrix = ext_load(element_lenght)
for i in range(len(ext_load_matrix)):
    mDf[i, 2] += ext_load_matrix[i, 2]
```

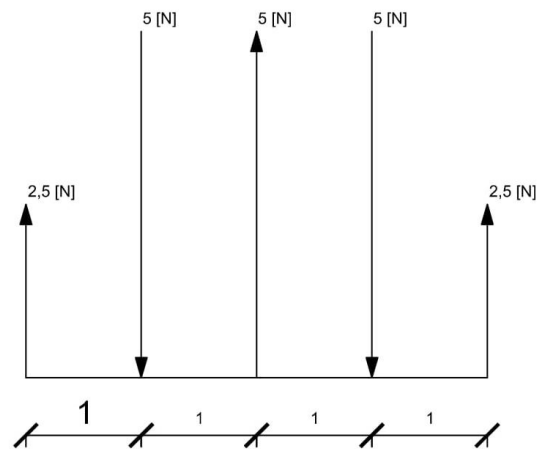
Glavna petlja unutar koje se vrti cijeli program definirana je tako da nakon svake iteracije nove vrijednosti koordinata čvorova koristi u izračunu novih vrijednosti opterećenja, broj iteracija je proizvoljan, a moguće je i zadati duljine elemenata ili sile u njima.

```
def multistep_FDM_mod2(nds, els, supps, qs, fcs, lcs, steps1 = 10):
    global element_lenght
    for i in range(steps1):
        nc2, f2 = multistepFDM_wtol (nds, els, supps, qs, fcs =
force_constraints, lcs = length_constraints, tol_f = 1.e-4, tol_l
= 1.e-3)
        element_lenght = list_of_element_lengths (els, nc2)
    return nc2
```

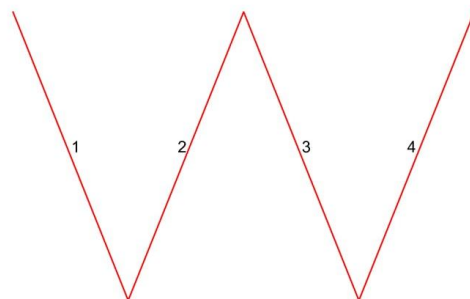
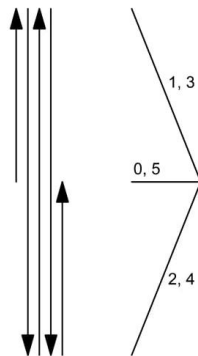

4. Primjeri

4.1. Verižni poligon

Najjednostavniji primjer koji zorno prikazuje kako vertikalna opterećenja djeluju na vlačnu mrežu je verižni poligon. Već sam oblik „lanca“ odgovara poligonu sila, pa prema tome i prikazuje ravnoteže u čvoru. Kako bi dodatno pojednostavili primjer, zadana su nepromjenjiva, okomita opterećenja istih vrijednosti u čvorovima izravnatog lanca, očekujući pravilan i simetričan nagib zraka, to jest, lom linije lanca koje je moguće lako



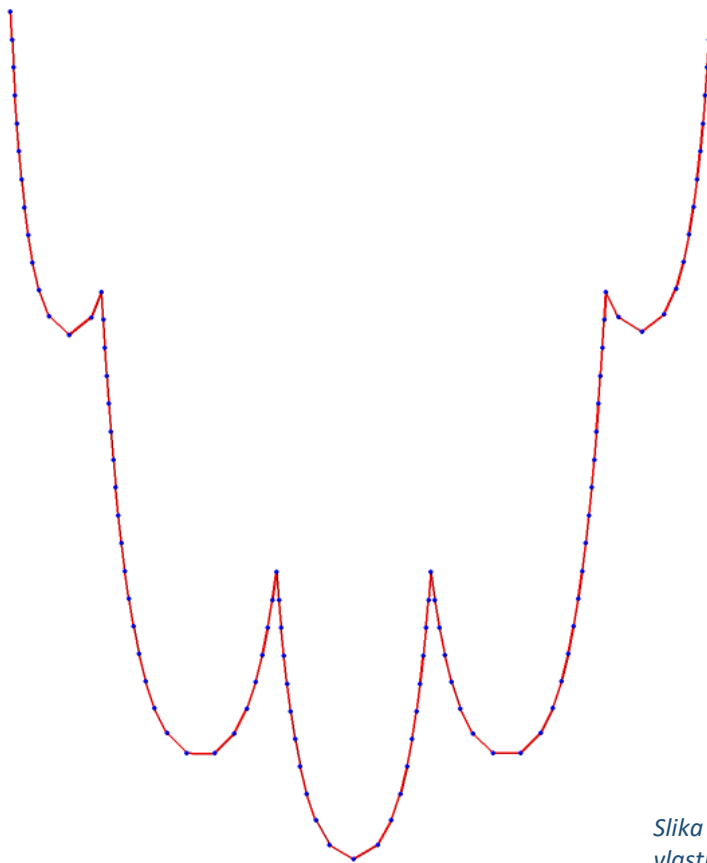
provjeriti grafički. Na slici 23 redosljedom se prikazuju položaj i veličina djelovanja na ispravljeni lanac, poligon sila za zadano opterećenje i oblik lanca koji smo dobili koristeći se SAGE-om i programskim paketom FDM. Mjerilo sila i udaljenost pola namješteni su tako da je moguće usporediti oblik lanca dobiven iz primjene metode gustoće sila i nagiba zraka iz poligona direktnim preklapanjem slika.



Slika 23 - Verižni poligon

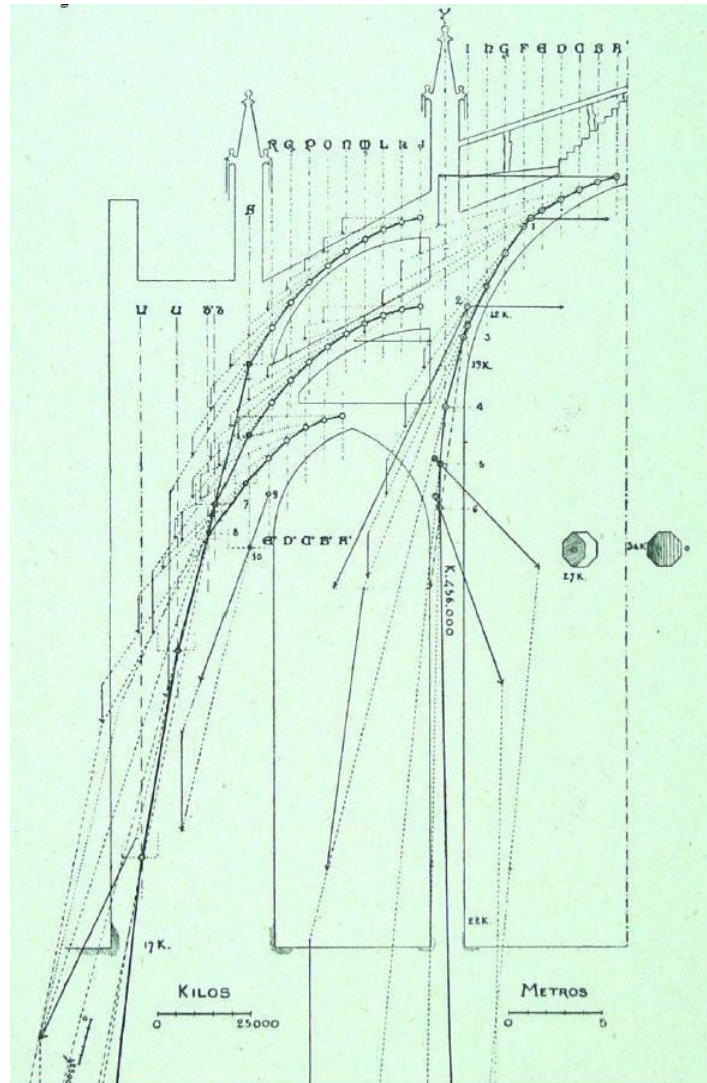
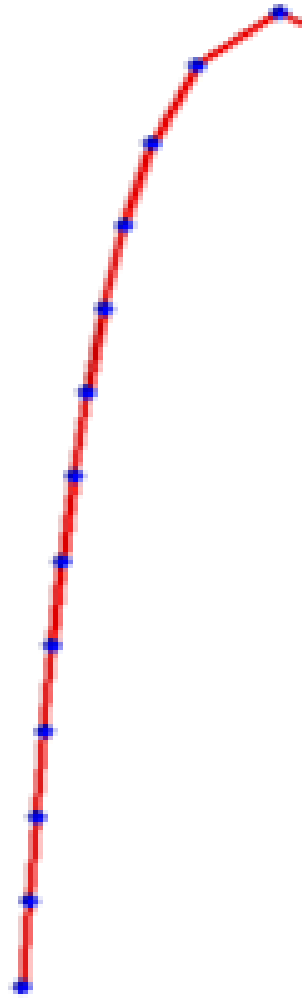
4.2. Lančanica

Na još jednom primjeru u ravnini, opisana je lančanica, ali zbog korištenja modificiranog programskog koda, omogućeno je iterativno računanje opterećenja u čvorovima u ovisnosti o produljenju elemenata. Također se vidi i kako različit položaj ležajeva i udaljenosti među njima utječu na oblik lančanice. Prva primjena vlačno-tlačne analogije vidljiva je kad se usporede okrenute linije lančanice i tlačne linije u kontraforama na katedrali i pokazuje zašto su s vremenom postale olakšane. Jednom kad su graditelji spoznali da prijenos bočnog opterećenja iz zidova katedrale u tlo ovisi o obliku i opterećenju na samu kontraforu, omogućilo se izdubljivanje bočnih zidova, a upravo je takva arhitektura jedna od glavnih prepoznatljivost gotičkih katedrala. Na slici 24 prikazan je oblik lančanice opterećene vlastitom težinom iz programa FDM.



Slika 24 - Lančanica opterećena vlastitom težinom

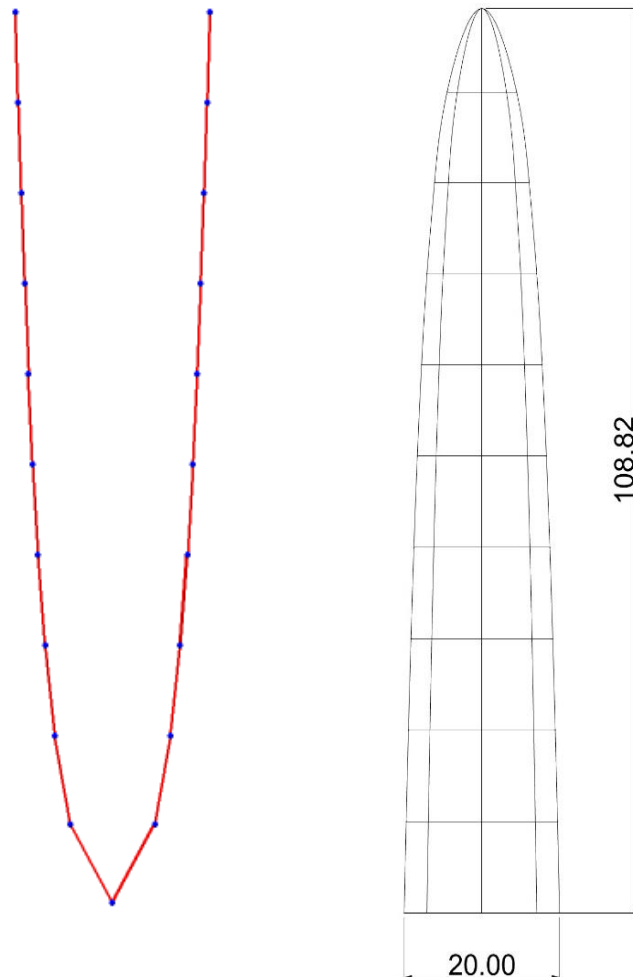
Usporedni prikaz isječka lanca kroz kontrafore na izgrađenom djelu Sagrade Familie, preslikan oko horizontalne osi i uvećan tako da odgovara prikazu analize tlačnih linija vidljiv je na slici 25.



Slika 25 - Tlačne sile na izgrađenom dijelu Sagrade Familie

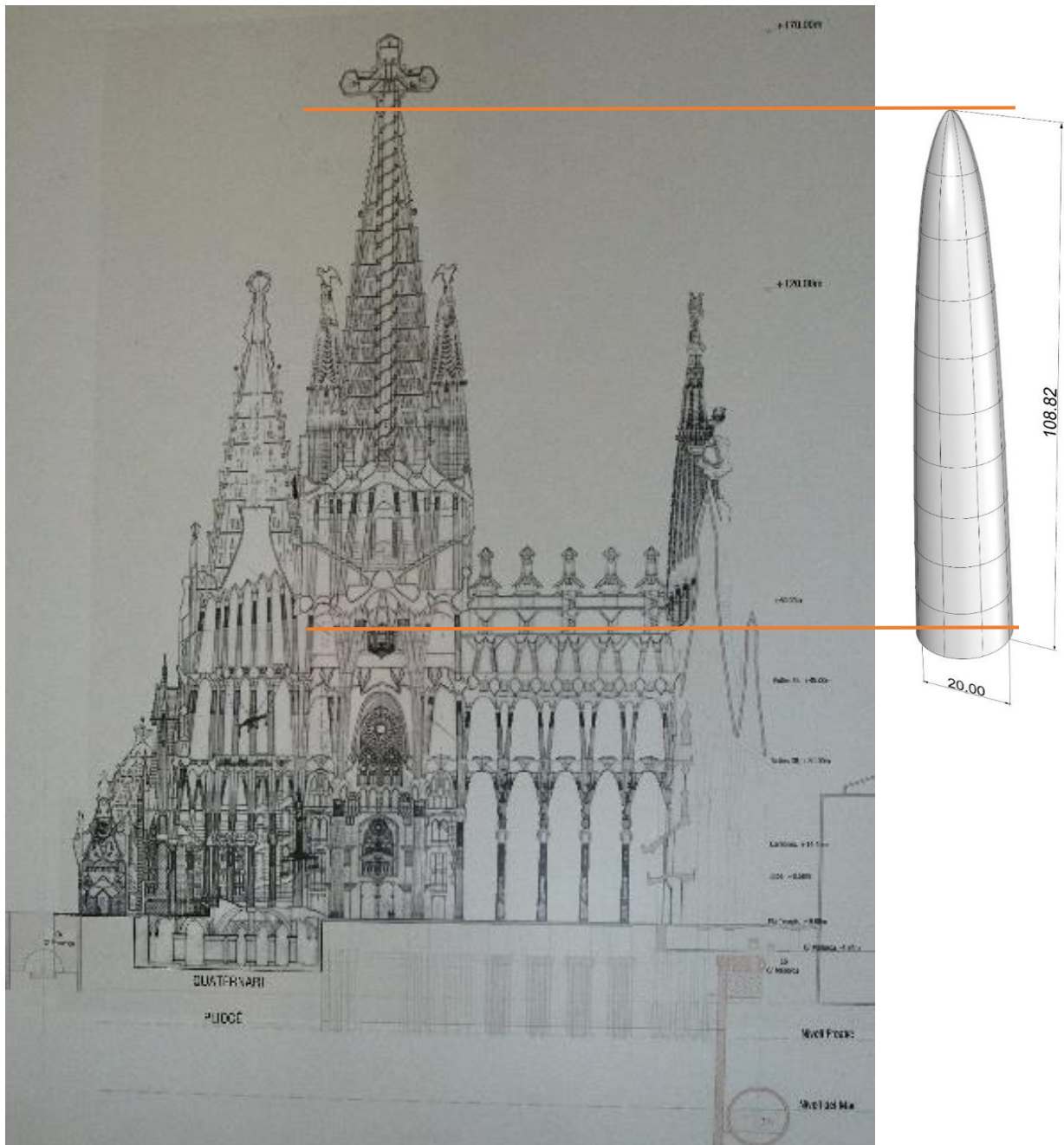
4.3. Sagrada Familia – Isusov toranj

Centralni toranj poznate barcelonske katedrale Sagrade Familie još je u fazi izgradnje. Kada bude izgrađen, učinit će Sagradu Familiju najvišom katedralom na svijetu, povećavši joj visinu na 170 metara. Sam toranj gradi se od visine svoda katedrale koji je na 60 metara, tako da je sam toranj visine oko 110 metara. Kako se graditelj Antoni Gaudi koristio upravo svojstvima lančanice pri projektiranju, toranj bi trebao odgovarati obliku okrenute lančanice, zaokrenute oko svoje osi. Kako znamo da je podnožje tornja promjera 20 metara, u primjeru je korišten upravo taj razmak za početnu duljinu lančanice te je podijeljen na 20 elemenata, zatim, zadana je duljina svih dijelova lančanice od 11 metara, što bi na kraju iteracije trebalo stvoriti oblik visine od spomenutih 110 metara. Zadavanjem upravo predviđenih, to jest projektnih vrijednosti, očuvane su proporcije koje je Gaudi zamislio i dobio se oblik upravo sličan nacrtima stvarnog tornja. Lančanica je okrenuta i stvorena je rotacijska ploha u programu Rhino 6.



Slika 26 - Lančanica i pripadni luk

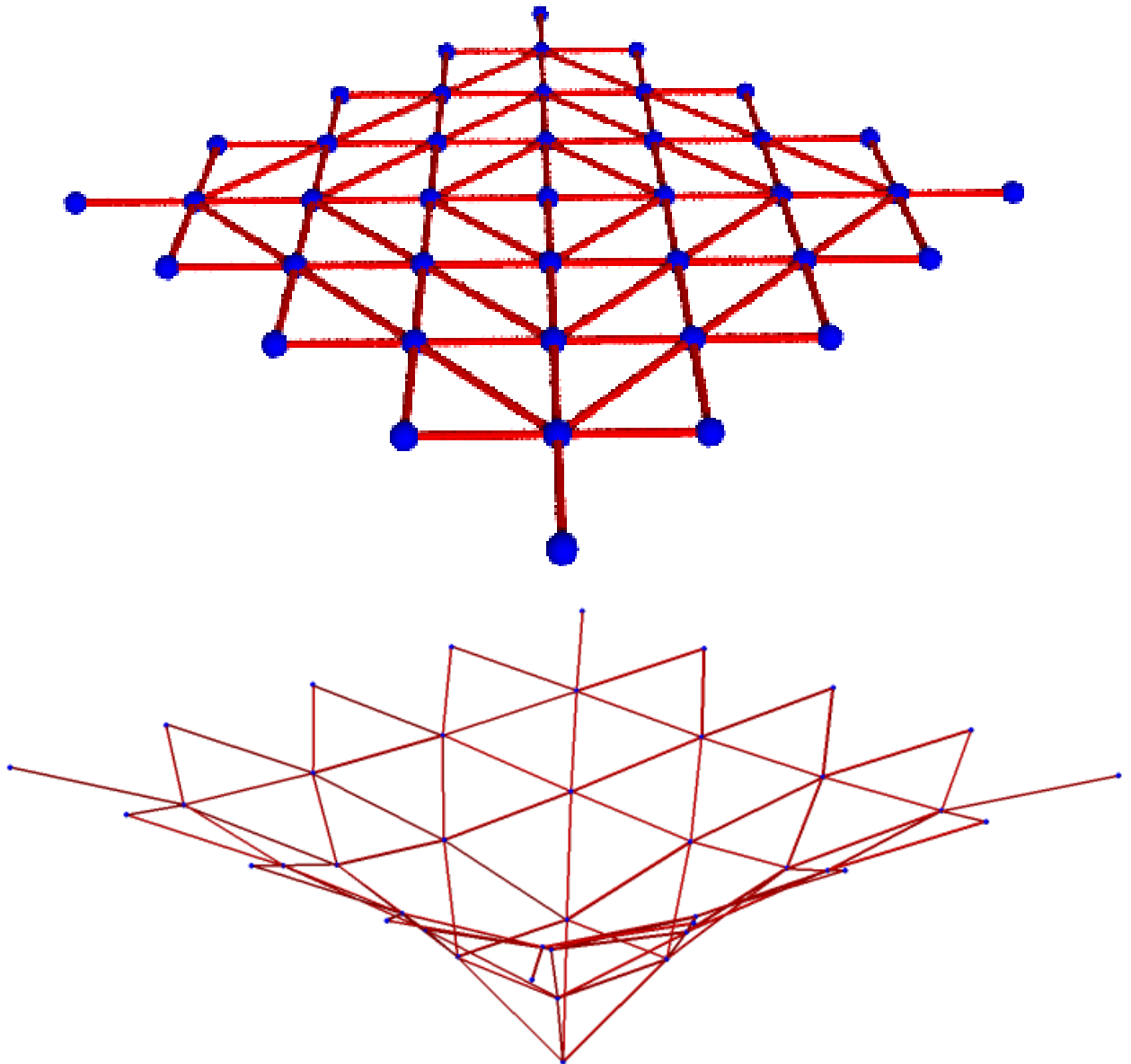
Na slici 27 prikazana je preslika originalnog autorovog nacrtu Sagrade Familie sa usporednom plohom dobivenom rotacijom lančanice.



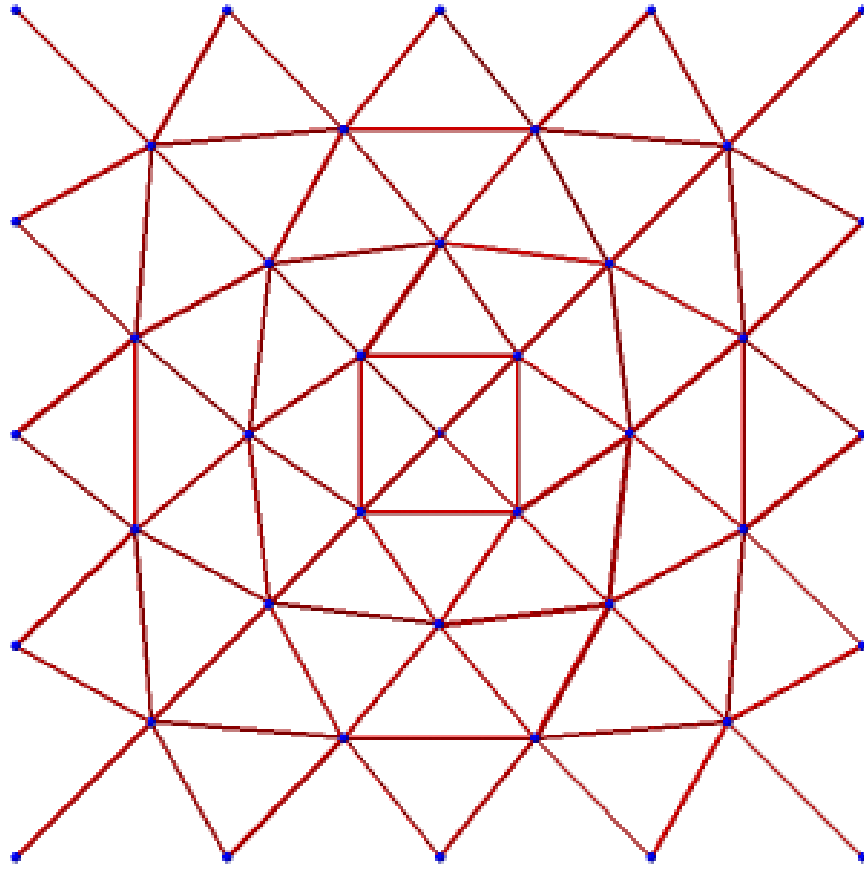
Slika 27 - Preslika originalnog Gaudijevog nacrtu Sagrade Familie

4.4. Šator

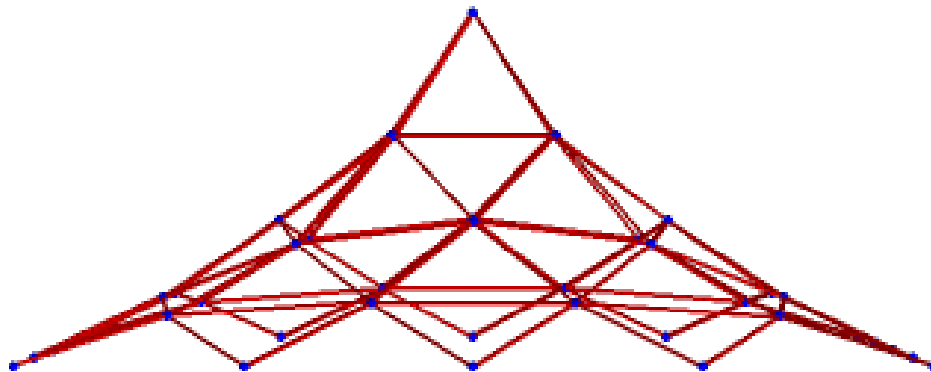
U kontekstu vlačno-tlačne analogije, primjena dvodimenzionalnih mreža omogućava pronalazak složenih oblika jednoslojnih tlačnih rešetkastih konstrukcija kao direktno proširenje primjene metode gustoće sile na čvorove i elemente u prostoru. Tako dobivene elemente mreže zamjenjuju kruti štapovi te se dobiva oblik tražene konstrukcije.



Slika 28 - Početni oblik mreže kako je zadan u programu FDM I konačni oblik nakon iteracije



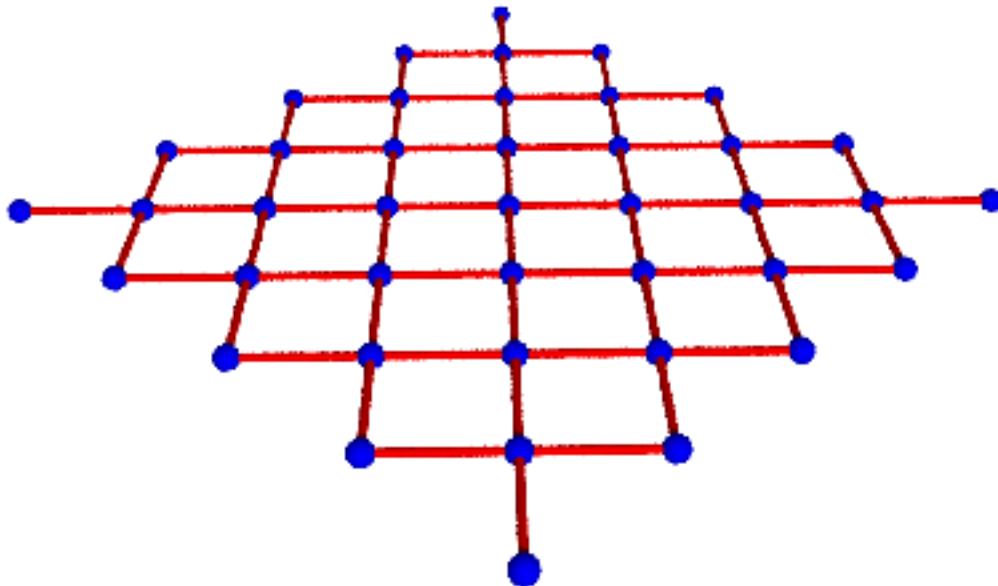
Slika 29 – Tlocrtni prikaz konačne iteracije opterećene mreže



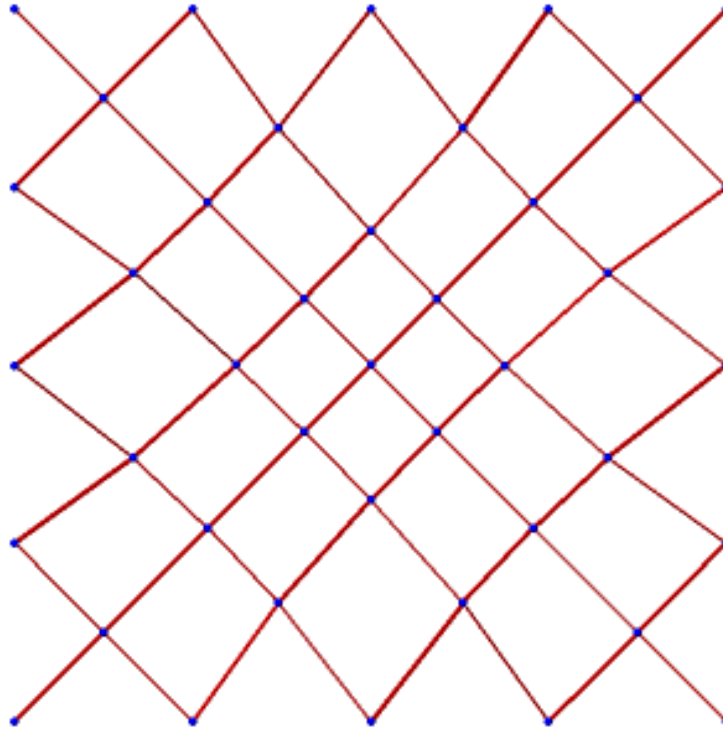
Slika 30 - Pogled sprijeda na okrenutu tlačnu rešetku

4.5. Versandhalle Coop

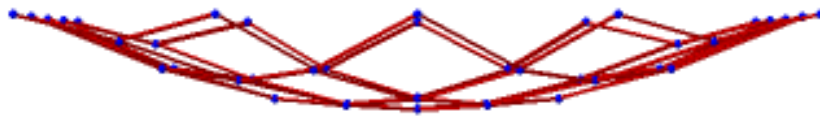
U konačnom primjeru, prikazana je uporaba modela napetih mreža proračunatih pomoću metode gustoće sila kao simulacije ovještene tkanine. Da bi uopće mogli pretpostaviti da je ponašanje mreže slično membrani, potrebno je uračunati veliki broj gusto postavljenih čvorova i elemenata, nadalje, ni to u potpunosti ne uključuje sve razlike ponašanja prave membrane i ovog modela, ali omogućuje prikaz nekih sličnosti. Za usporedbu je odabrana hala koju je projektirao Heinz Isler koristeći se napetom tkaninom u vlaku u oba smjera, a dimenzije mreže ponovno su uzete tako da odgovaraju dimenzijama izgrađene hale. Konačna iteracija programa FDM izgledom odgovara izvedenom obliku Versandhalle, koja je potom i izbušena sa okruglim rupama koje ne utječu na promjenu oblika kod modeliranja, ali preciznije razlike nije moguće utvrditi bez uspoređivanja kontrolnih točaka na ovoj i stvarnoj ljusci. Koristeći se programom Rhino 6 na dobivenoj mreži uzete su koordinate točaka, koje su potom interpolirane kako bi se dobila zakrivljena ploha koja prolazi njima. Kako se ova metoda ionako ne koristi za dobivanje izvedbenog oblika, već samo za traženje optimalnog oblika prije samog proračuna, potrebno je paziti na pojavu prevelikih naprezanja u dijelovima ljuske, pogotovo na rubovima i kutovima konstrukcije krova, te pojave izvijanja same ljuske.



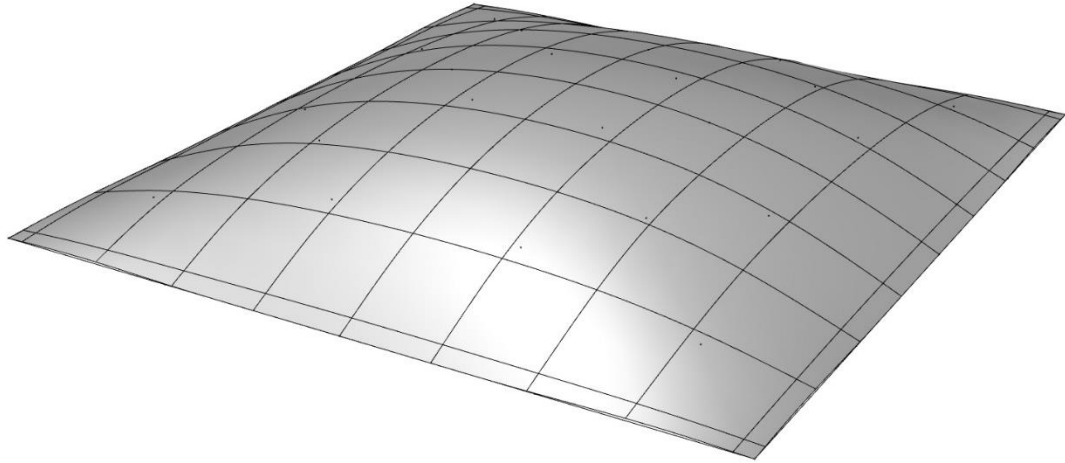
Slika 31 - Neopterećena mreža



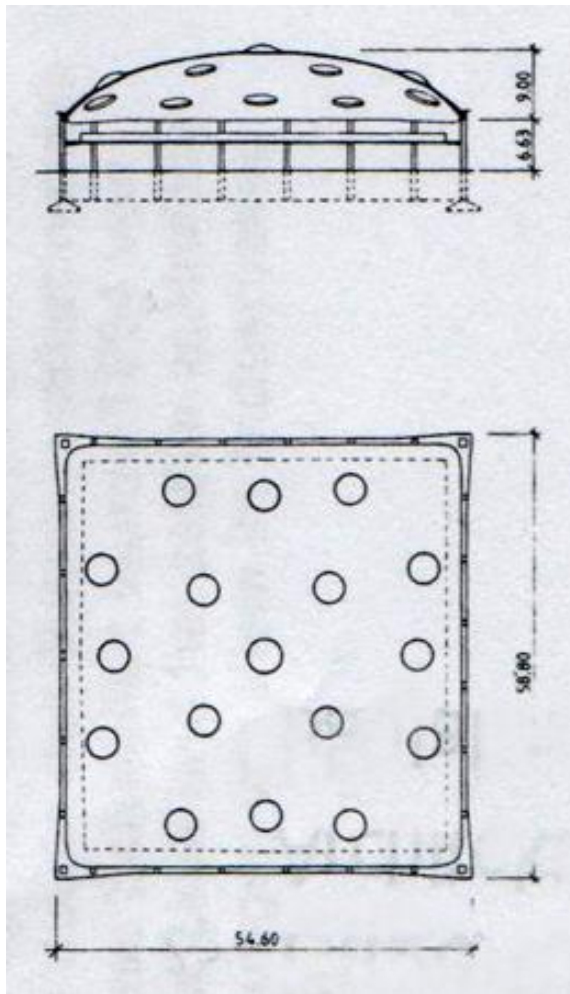
Slika 32 - Tlocrtni prikaz opterećene mreže



Slika 33 - Pogled na mrežu u vlak



Slika 34 - Interpolirana ploha – simulacijski model



Slika 35 – Skica izvedenog objekta

5. Zaključak

Poznavanje osnovnog principa vlačno-tlačne analogije pruža uvid u mnoge velike graditeljske pothvate, kako kroz povijest, tako i danas. Mnogobrojne i jednostavne metode, kako fizikalne, tako i numeričke, omogućavaju slobodno i skoro neograničeno postavljanje i traženje novih kreativnih oblika konstrukcija i obogaćivanje graditeljske baštine stvorene izvan okvira uobičajenih oblika.

6. Popis slika

Slika 1 - Polenijeva skica Hookeove analogije i njegova analiza napuknute kupole Svetog Petra u Rimu ..	4
Slika 2 - Okrenuta slika kolodvora Keleti u Budimpešti s iscrtanom lančanicom	5
Slika 3 - Palača u Kzetifontu	5
Slika 4 - Skica iz prve ekspertize kupole Svetog Petra koju su izradili „Trojica Matematičara“ na kojoj su jasno vidljivi iscrtani virtualni pomaci	6
Slika 5 - Ilustracija Polenijeve intuitivne ideje u debata i skica pomaka	7
Slika 6 - Metalni prstenovi na kupoli Svetog Petra koje je predložio Luigi Vanvitelli	7
Slika 7 - Ilustracija gradnje zidova od opeke korištenjem ovješene uža	8
Slika 8 - „Spina pesca“	9
Slika 9 - Faze izgradnje kupole na Firentinskoj katedrali	9
Slika 10 - Jedna od Stevinsonovih skica ravnoteže sila ovješene utega na lancu 1586. godine i Vargnonov prikaz grafičke analize	10
Slika 11 - Skica verižnog poligona za zadano opterećenje s izdvojenim prikazom ravnoteže jednog elementa luka	11
Slika 12 - Prikaz mehanizma sloma u redosljedu od stabilnog luka do urušenog s iscrtanim tlačnim linijama i jasno vidljivim mjestima dodira ruba materijala i pojave zglobova	12
Slika 13 - Zidani luk s prikazanim mjestima nastanka zglobova pri potresnom opterećenju	13
Slika 14 - Konačna iteracija ovjeshene forme i njoj pripadnog modela crkve u gradu Colonia Guell, poznate pod nazivom Gaudijeva Kripta	15
Slika 15 - Ilustracija „39 novih oblika ljusaka“ iz „New Shapes for Shells“ dobivene predloženim metodama	16
Slika 16 - Galerija djela Heinza Islera	17
Slika 17 - Slike zaleđene tkanine izvna i iznutra	18
Slika 18 - Postupak 3D skeniranja pri kojemu se vidi glava lasera za mjerenje, laser se drži u što okomitijem položaju zbog preciznijeg mjerenja	19
Slika 19 - Priprema fizikalnog modela za skeniranje s kontinuiranim ležajevima na svim stranama i s ležajem u sredini duljeg raspona	19
Slika 20 - Oblak digitaliziranih podataka	19
Slika 21 - Rekonstrukcija geometrijske površine iz oblaka koordinata mjernih točaka	20
Slika 22 - Dijagram toka	21
Slika 23 - Verižni poligon	27
Slika 24 - Lančanica opterećena vlastitom težinom	28
Slika 25 - Tlačne sile na izgrađenom dijelu Sagrade Famillie	29
Slika 26 - Lančanica i pripadni luk	30
Slika 27- Preslika originalnog Gaudijevog nacrtu Sagrade Familie	31
Slika 28 - Početni oblik mreže kako je zadan u programu FDM i konačni oblik nakon iteracije	32
Slika 29 - Pogled sprijeda na okrenutu tlačnu rešetku	33
Slika 30 – Tlocrtni prikaz konačne iteracije opterećene mreže	33
Slika 31 - Neopterećena mreža	34
Slika 32 - Tlocrtni prikaz opterećene mreže	35
Slika 33 - Pogled na mrežu u vlaku	35
Slika 34 – Interpolirana ploha – simulacijski model	36
Slika 35 – Skica izvedenog objekta	36

7. Izvori slika

- [Slika 1] Block, P., DeJong, M. & Ochsendorf, J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw J* 8, 13–24 (2006) (Fig. 1)
- [Slika 2] Zátonyi Sándor, The cross-section of the roof of the Keleti Railway Station forms a catenary
- [Slika 3] American Colony Photo Department, Sassanian ruins in Seleucia-Ctesiphon
- [Slika 4] Le Seur, T., Jacquier, F. and Bošković, R. G. 1742.
- [Slika 5a] Poleni, G. (1748.)
- [Slika 5b] Federica Ottoni & Carlo Blasi (2015): Hooping as an Ancient Remedy for Conservation of Large Masonry Domes, *International Journal of Architectural Heritage* (Fig. 2)
- [Slika 6] Poleni, G., (1748.) *Memorie storiche della gran cupola del tempio vaticano*
- [Slika 7] Vereycken, K. (2013.) *Les secrets du dôme de Florence* (Fig. 25)
- [Slika 8] Gurrieri, F. (1982.)
- [Slika 9] Vereycken, K. (2013.) *Les secrets du dôme de Florence* (Fig. 24)
- [Slika 10] Block, P., DeJong, M. & Ochsendorf, J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw J* 8, 13–24 (2006) (Fig. 2)
- [Slika 11] Block, P., DeJong, M. & Ochsendorf, J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw J* 8, 13–24 (2006) (Fig. 3)
- [Slika 12] Block, P., DeJong, M. & Ochsendorf, J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw J* 8, 13–24 (2006) (Fig. 5)
- [Slika 13] Block, P., DeJong, M. & Ochsendorf, J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw J* 8, 13–24 (2006) (Fig. 6)
- [Slika 14] www.fabb.cc/publication/digitalread-analogwrite, pristupljeno: 15.12.2019.
- [Slika 15] Isler, H., *New Shapes for Shells*, IASS Archive
- [Slika 16] GTA Arhiva
- [Slika 17] Heinz Isler Arhiva
- [Slika 18] Na Li, Jinyu Lu, Wei Zong, Yihe Fan, Form-finding optimization methods for free-form reticulated shells: Reverse realization and numerical simulation (Fig. 3)
- [Slika 19] Na Li, Jinyu Lu, Wei Zong, Yihe Fan, Form-finding optimization methods for free-form reticulated shells: Reverse realization and numerical simulation (Fig. 4)
- [Slika 20] Na Li, Jinyu Lu, Wei Zong, Yihe Fan, Form-finding optimization methods for free-form reticulated shells: Reverse realization and numerical simulation (Fig. 5)
- [Slika 21] Na Li, Jinyu Lu, Wei Zong, Yihe Fan, Form-finding optimization methods for free-form reticulated shells: Reverse realization and numerical simulation (Fig. 6)
- [Slika 22] Na Li, Jinyu Lu, Wei Zong, Yihe Fan, Form-finding optimization methods for free-form reticulated shells: Reverse realization and numerical simulation
- [Slika 25] Jaume Serrallonga, Gaudí's 7.5-metre module for the Sagrada Família
- [Slika 27] Böhringer Friedrich, *Fotografija nacrtá Sagrade Familie autora Antonia Gaudija*
- [Slika 35] *Versandhalle Coop. Grundriss und Schnitt.* [RAMM/ SCHUNCK 1986, S. 50, Heinz Isler]

8. Literatura

Gidak, P. (2014). Ocjena stabilnosti postupaka za proračun oblika prednapetih mreža, doktorska disertacija, Građevinski fakultet, Zagreb

Fresl, K., Gidak, P., Vrančić, R. (2017). Građevna statika 2., Prednapete gipke konstrukcije od užadi kao uvod u geometrijsku nelinearnost

Whitehead, Rob, "Model Behavior: The Evolving Use of Physical Prototypes in Structural Shell Design, 1959-1974" (2016). Architecture Conference Proceedings and Presentations. 114

Chilton, J.C. (2011). Heinz Isler: Shells for two churches, J. IASS

Chilton, J.C. (2012). Form-finding and fabric forming in the work of Heinz Isler

Chuang, Chu-Chun & Chilton, J.C. (2016). Design and modelling of Heinz Isler's Sicli shell
Liu, Min & Xing, Min & Yang, Q.s & Yang, Xinmin. (2012). Computational morphogenesis of free form shell structures by optimization. *Procedia Engineering*. 31. 608–612. 10.1016/j.proeng.2012.01.1074.

Beckh, Matthias & Schützeichel, Rainer. (2017). Paths to Form Finding: The formative years of Heinz Isler.

Kure, Johan & Manickam, Thiru & Usto, Kemo & Clausen, Kenn & Chen, Duoli & Pugnale, Alberto. (2011). Parametric Design and Construction Optimization of a Freeform Roof Structure. 137-144. 10.1007/978-3-642-23435-4_16.

Lee, K. Y. Frei Otto, Bodo Rasch: Finding Form

Brew, J. S., & Lewis, W. J. (2007). Free hanging membrane model for shell structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(13), 1513–1533. doi:10.1002/nme.1976

Federica Ottoni & Carlo Blasi (2015): Hooping as an Ancient Remedy for Conservation of Large Masonry Domes, *International Journal of Architectural Heritage*, DOI: 10.1080/15583058.2015.1113335

Milosavljević, P. & Grujić, G. & Duričković, V.. (2017). Ruggiero boscovich and application of plato's geometrical number concept in damage analysis and repair of the dome of St. Peter's basilica in Vatican City. *Structural Integrity and Life*. 17. 74-84.

Block, P., DeJong, M. & Ochsendorf, J. As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Netw J* 8, 13–24 (2006)

Lopez, G. M. Poleni's Manuscripts about the Dome of Saint Peter's
Vereycken, K. (2013.) *The Secrets of the Florentine Dome*

Director, B. (2003.) *The Long Life of the Catenary: From Brunelleschi to LaRouche*, FIDELIO Magazine

Flügge, W. (1973.) *Stresses in Shells*

Alic, V. (2018.) *Computational methods in conceptual structural design*

Malerba, Pier & Patelli, Matteo & Quagliaroli, Manuel. (2012). An Extended Force Density Method for the form finding of cable systems with new forms. *Structural engineering & mechanics*. 42. 191-210. 10.12989/sem.2012.42.2.191.

Li, N., Lu, J., Zong, W., Fan, Y. (2017.) *Form-finding optimization methods for free-form reticulated shells: Reverse realization and numerical simulation*