

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

Josip Baraba

Grafostatika ravninskih rešetkastih nosača

(završni rad)

Zagreb, 2017

SADRŽAJ

1. Uvod.....	3
2. Rešetkasti nosači	4
3. Grafičke metode određivanja sila u štapovima rešetkastih nosača	8
3.1. Elementarna pravila koja vrijede općenito za rešetkastih nosača	8
3.2. Metoda čvorova	9
3.3. Maxwell-Cremonin plan sila	10
3.4. Metode presjeka.....	23
3.5. Culmannova metoda	24
4. Grafičko određivanje pomaka čvorova	29
4.1. Williotov plan pomaka	29
5. Primjer	33
6. Zaključak	42
7. Literatura.....	43

1. UVOD

Tema ovog završnog rada su statički određene rešetkaste konstrukcije, odnosno određivanje sila u štapovima ravninskih rešetkastih nosača, primjenom grafičkih postupaka te isto tako crtanje pomaka čvorova tih istih nosača. Kod opće metode čvora, za grafičko određivanje sila u rešetkastim nosačima, posebno ćemo se osvrnuti na Maxwell – Cremonin plan sila kojeg je pronašao engleski fizičar James Clerk Maxwell 1864.godine a detaljno ga razradio profesor politehnike u Milanu Luigi Cremona 1872.godine. U kontinentalnom dijelu Europe taj postupak poznat je pod nazivom Cremonin plan sila. Još ćemo koristiti metodu presjeka kod koje u prvi plan dolazi Culmannov postupak, a za određivanje pomaka čvorova nosača primijeniti ćemo grafičku metodu Williotova plana pomaka.

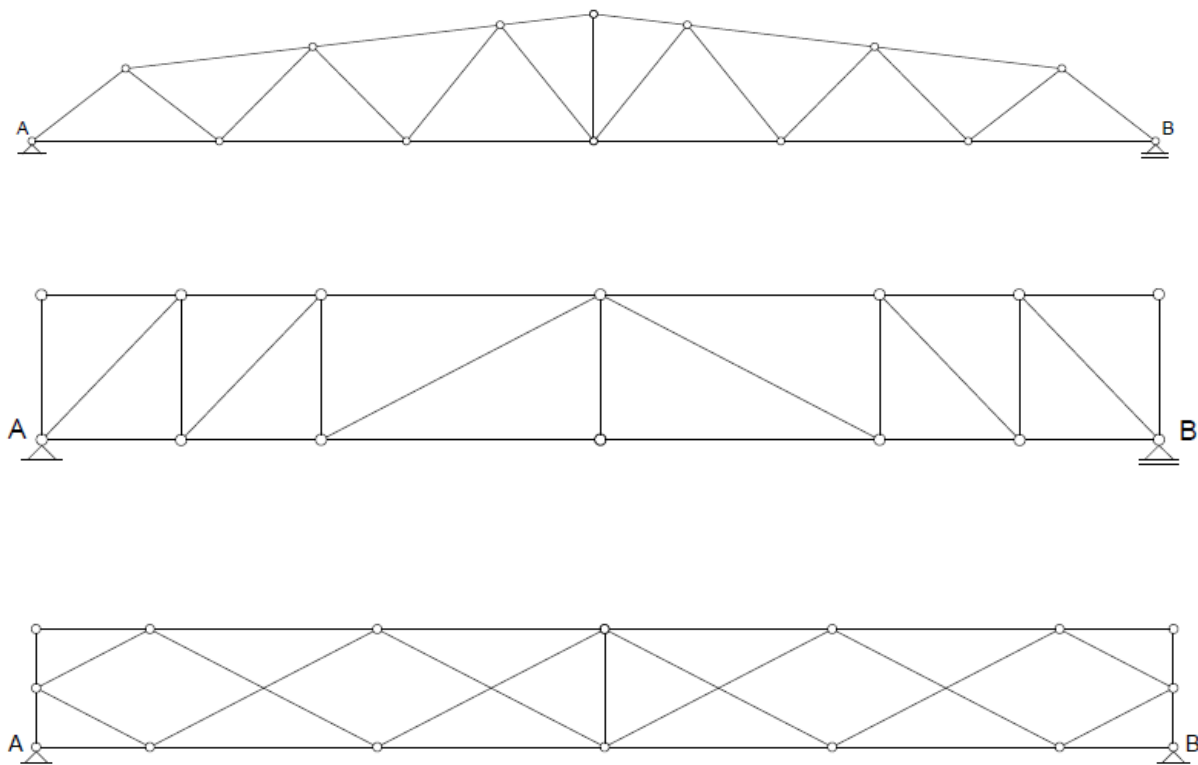
Najprije ćemo teorijski objasniti rešetkaste nosače i sve pojedine metode grafičkog određivanja sila u štapovima. Također ćemo pojasniti Williotov plan pomaka koji se temelji na konstrukciji plana pomaka iz poznatih promjena duljina štapova i pomaka susjednih čvorova.

Na samom kraju rada pokazati ćemo i primjere za svaki od postupaka pomoću kojih ćemo i pojasniti te postupke.

2. REŠETKASTI NOSAČI

Krenuti ćemo sa definicijom rešetkastih nosača. Također ćemo, prije određivanja sila u štapovima, definirati neke osnovne pretpostavke koje su nam neophodne za samo određivanje sila. Rešetkasti nosači ili sistemi su sistemi sastavljeni od štapova, odnosno sistemi kojima su glavni nosivi elementi samo zglobno spojni štapovi. Postoje dvije vrste rešetkastih konstrukcija. To su: ravninske rešetkaste konstrukcije i prostorne rešetkaste konstrukcije. Prostorne rešetkaste konstrukcije su one koje su sastavljene od štapova koji ne leže u istoj ravnini a vanjske sile koje djeluju u čvorovima imaju opću orijentaciju. Ravninske rešetkaste konstrukcije su one kod kojih svi štapovi i sve vanjske sile leže u istoj ravnini. Kao tema ovog rada navedene su ravninske rešetkaste konstrukcije pa ćemo se samo njima i baviti a prostorne ćemo ostaviti za neku drugu priliku.

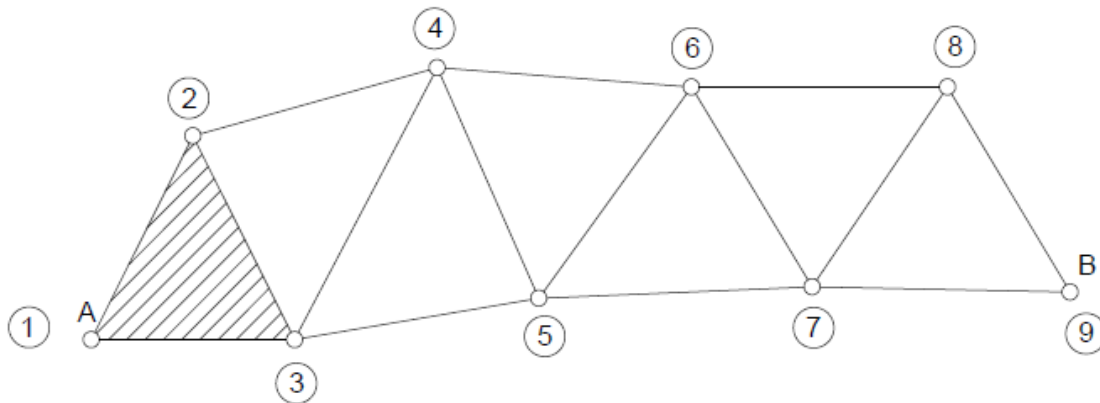
Rešetkasti se sustav sastoji iz rešetkastih diskova, odnosno rešetki. Na slici 1 prikazano je nekoliko rešetkastih nosača.



Slika 1.

Da bismo takav sustav mogli nazvati nosačem on mora biti geometrijski nepromjenjiv. Geometrijski nepromjenjivi sustavi su oni kod kojih dolazi do pomaka samo zbog deformacije elemenata. Geometrijska nepromjenjivost je jedna od temeljnih pretpostavki grafičkog ali i analitičkog proračuna a može se ispitivati statičkim i kinematičkim metodama.

Da bismo ostvarili geometrijsku nepromjenjivost, za koju smo rekli da je nužan uvjet, polazimo od najjednostavnije strukture rešetkastog diska. Osnovna geometrijski nepromjenjiva figura sastavljena od štapova je trokut. Trokut ima tri čvora i tri štapa, a postupnim spajanjem svakog dodatnog čvora s dvama štapovima dolazi se do geometrijski nepromjenjivog rešetkastog diska. Na slici 2 prikazano je konstruiranje rešetkastog diska; na osnovni oblik, trokut (1, 2, 3) najprije priključujemo čvor 4 sa dva dodatna štapa, te daljnjim dodavanjem čvorova (5, 6, 7, 8, 9) i njihovim povezivanjem dobivamo rešetkasti disk prikazan na slici 2.



Slika 2.

Dakle, da bi disk ispunio uvjet geometrijske nepromjenjivosti potreban je određen broj štapova. Iz gore objašnjenog postupka proizlazi da svaki čvor znači dva nova štapa pa ako sa n_s' označimo broj štapova u rešetki, a sa n_c broj čvorova lako možemo dobiti minimalan broj štapova potreban da bi disk s brojem čvorova n_c bio geometrijski nepromjenjiv.

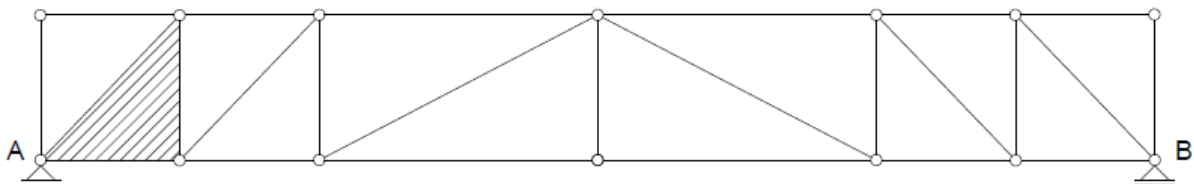
$$n_s' = 3 + (n_c - 3) \times 2 = 2n_c - 3$$

Da bi rešetkasti disk, sastavljen od n_s' broja štapova, postao nosač potrebno mu je dodati tri vanjske veze. Ako se te tri vanjske veze pretvorimo u tri štapa dobivamo novi izraz za minimalan broj štapova da disk bio geometrijski nepromjenjiv:

$$n_s = 2n_c$$

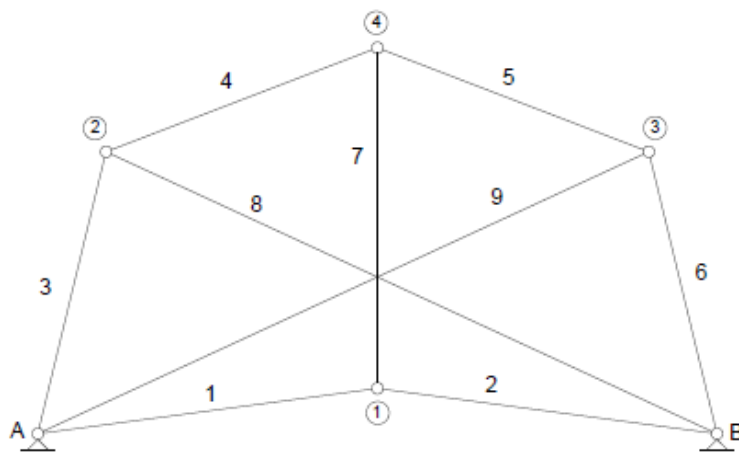
Stoga je za geometrijsku nepromjenjivost i statičku određenost rešetkastog nosača nužno imati dvostruko više štapova od broja čvorova, s time da su u broj štapova uključene i ležajne veze pretvorene u štapove.

Ispitivanje geometrijske nepromjenjivosti i statičke određenosti rešetkastih nosača provodi se kinematičkim i statičkim metodama. Ako su diskovi nekog rešetkastog sustava sastavljeni iz trokuta odmah znamo da je taj sustav geometrijski nepromjenjiv. I u slučaju da diskovi nekog rešetkastog sustava nisu sastavljeni iz trokuta može se dokazati nepromjenjivost diska, odnosno rešetkastog sustava. Takav jedan primjer prikazan je na slici 3, gdje je označen (šrafiran) polazni trokut od kojeg se može početi konstruirati. Postepeno se dodaju čvorovi koji se vezuju s po dva štapa koja ne leže na istom pravcu.



Slika 3.

Na slici 4 prikazan je nešto složeniji konstruktivni sustav, koji nije sastavljen od trokuta niti nema osnovnog trokuta od kojeg bi se moglo početi konstruirati, pa se za njega ne može opisanim postupkom utvrditi je li geometrijski nepromjenjiv.



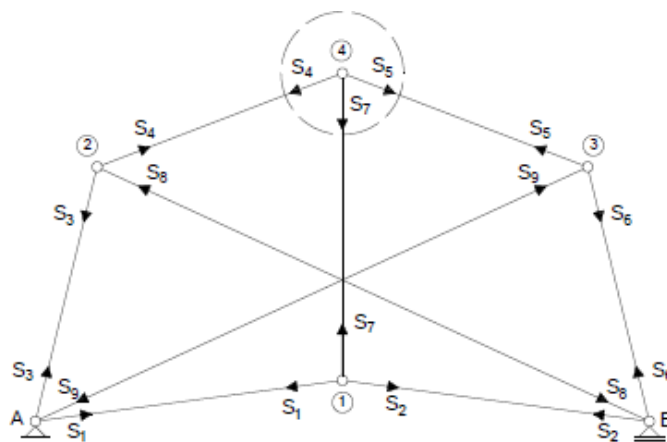
Slika 4.

Za dokazivanje geometrijske nepromjenjivosti ovog sustava primijenjena je metoda nultog opterećenja. Ukratko ćemo pojasniti metodu nultog opterećenja:

Ako na statički određeni sustav ne djeluju nikakve sile tada je samo po sebi logično da su sile u svim štapovima jednake nuli tj. jedino tako su zadovoljeni uvjeti ravnoteže u svim čvorovima. Tada možemo zaključiti da je sustav geometrijski nepromjenjiv.

U slučaju kad je moguće pronaći neko drugo rješenje, odnosno rješenje u kojem sile u štapovima nisu jednake nuli a zadovoljavaju uvjet ravnoteže u svim čvorovima, možemo zaključiti da je sustav geometrijski promjenjiv.

Sustav prikazan na slici 4 ima devet štapova i šest čvorova što znači da, kad broju štapova dodamo tri vanjske veze, sustav ima dovoljan broj štapova za geometrijsku nepromjenjivost. Za potrebe ispitivanja geometrijske nepromjenjivosti metodom nultog opterećenja pretpostaviti ćemo da u štapu 7 postoji sila S_7 . Vodeći se tom pretpostavkom pokušat ćemo odrediti sile u svim štapovima polazeći od čvora 1. Iz uvjeta ravnoteže čvora 1 uz postojanje sile S_7 dobivamo sile S_1 i S_2 . Pošto nema vanjskih sila znamo da su reakcija jednake nuli pa iz ravnoteže čvorova A i B dobijemo sile S_3 i S_9 odnosno S_6 i S_8 . Zatim iz ravnoteže čvora 2 i 3 dobijemo sile S_4 i S_5 . Tako dolazimo do čvora 4 u kojem se sastaju štapovi 4, 5, i 7 i koji je zapravo čvor u kojem provjeravamo točnost do sada dobivenih sila. Sile S_4 i S_5 dobivene su iz ravnoteže čvora 2 i 3 a silu S_7 smo pretpostavili na početku. Očigledno je da sile S_4 , S_5 i S_7 ne zadovoljavaju uvjet ravnoteže čvora 4 jer su im vertikalne projekcije u istom smjeru i jedini način na koji one mogu zadovoljiti uvjet ravnoteže je taj da su sve tri jednake nuli. Nakon što smo zaključili da su te tri sile jednake nuli lako zaključujemo da su i sile u ostalim štapovima jednake nuli. Ovime smo dokazali da ne postoje sile u štapovima ako nema vanjskog opterećenja. Na kraju zaključujemo da je promatrani sustav geometrijski nepromjenjiv.

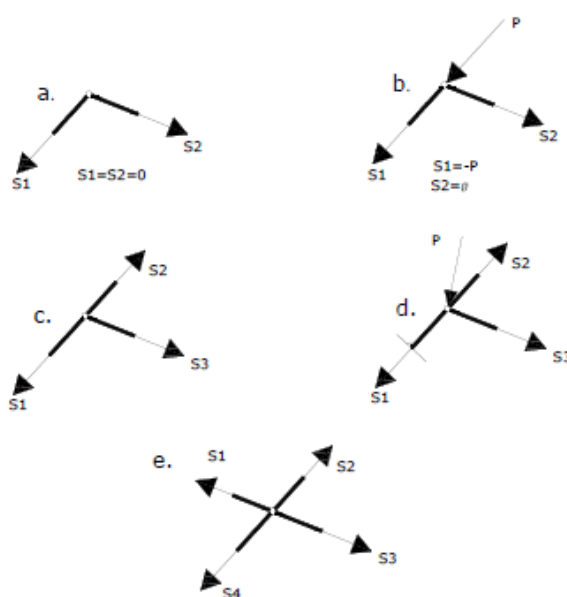


Slika 5.

3. GRAFIČKE METODE ODREĐIVANJA SILA U ŠTAPOVIMA REŠETKASTIH NOSAČA

3.1. Elementarna pravila koja vrijede općenito za rešetkaste nosače

Došli smo do dijela u kojem ćemo detaljno objasniti metode određivanja sila u štapovima koje smo ranije spomenuli u uvodu (metoda čvorova, Maxwell-Cremonin plan sila, metoda presjeka i Culmanov pravac). Prije nego li počnemo navest ćemo neka osnovna pravila koja vrijede općenito za sve rešetkaste nosače a mogu bitno olakšati sam postupak određivanja sila.



Slika 6.

1. U slučaju da vanjsko opterećenje ne djeluje na čvor u kojem se sastaju dva štapa, sile su s tim štapovima jednake nuli (slika 6 a). To znači da su dvije sile u ravnoteži samo onda ako leže na istom pravcu.
2. Ako se, pravac sile koja djeluje na čvor u kojem se sastaju dva štapa, poklapa s pravcem jednog štapa sila u drugom štapiju je nula. (slika 6 b).
3. Na čvor u kojem se sastaju tri štapa ne djeluje vanjsko opterećenje. Ako dva štapa leže na istom pravcu sila u trećem štapiju jednaka je nuli. (slika 6 c). $S_3 = 0$
4. Na čvor u kojem se sastaju tri štapa djeluje vanjsko opterećenje. Ako dva štapa leže na istom pravcu sila u trećem štapiju može se odrediti iz sume projekcija sila na os okomitu na pravac na kojem leže dva štapa. (slika 6 d).

5. Ako je čvor u kojem se sastaju četiri štapa, od kojih po dva leže na istom pravcu, neopterećen onda su sile u štapovima koji leže na istom pravcu jednake. (slika 6 e).

$$S_1 = S_3 \text{ odnosno } S_2 = S_4$$

3.2. Metoda čvorova

Metoda čvora još se naziva metodom izrezivanja čvorova ili metodom ravnoteže čvorova jer je glavna ideja metode da se iz rešetkastog nosača zamišljeno izrezuju čvorovi i postavljaju se uvjeti ravnoteže. Metoda čvora je najjednostavnija i najopćenitija metoda za određivanje sila u štapovima a može se izvoditi grafičkim i analitičkim postupcima. Analitički postupak samo ćemo spomenuti dok ćemo se grafičkim postupkom pozabaviti malo detaljnije. Budući da se sve sile koje djeluju na čvor sijeku u jednoj točki mogu se postaviti dvije jednadžbe ravnoteže i to kao sume projekcija svih sila na dvije osi koje nisu paralelne. Obično su to horizontalna i vertikalna os.

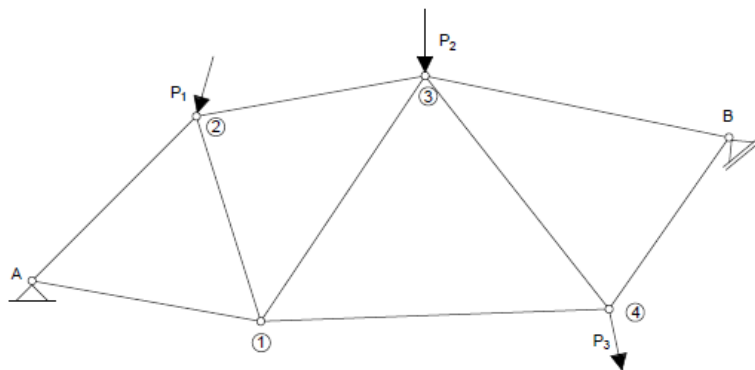
$$\Sigma X = 0 \text{ i } \Sigma Y = 0.$$

Gore navedene jednadžbe mogu se riješiti analitičkim ali i grafičkim postupkom. Naime, iz mehanike je poznato da se analitički uvjeti ravnoteže čvora mogu zamijeniti grafičkim a kako su svi čvorovi u ravnoteži, za svaki se može nacrtati zatvoreni poligon sila. Važno je znati da se iz ravnoteže jednog čvora grafički mogu odrediti samo dvije nepoznate sile, što znači da se kod grafičkog određivanja sila ovom metodom polazi od čvorova u kojima su nepoznate dvije sile. Prilikom uravnoteživanja čvorova poligoni sila mogu se crtati neovisno tako da pri crtanju poligona sila za neki čvor u njemu budu samo dvije nepoznate sile koje će iz njega biti određene. Vidimo da se pri ovakvom načinu crtanja svaka sila u štapu pojavljuje u dva poligona što uvelike povećava mogućnost pogreške. Da bismo izbjegli te pogreške i samu nepreglednost prilikom crtanja, poligone sile možemo složiti u plan u kojem se svaka sila pojavljuje samo jedan put. Taj plan naziva se Maxwell – Cremonin plan sila.

3.3. Maxwell - Cremonin plan sila

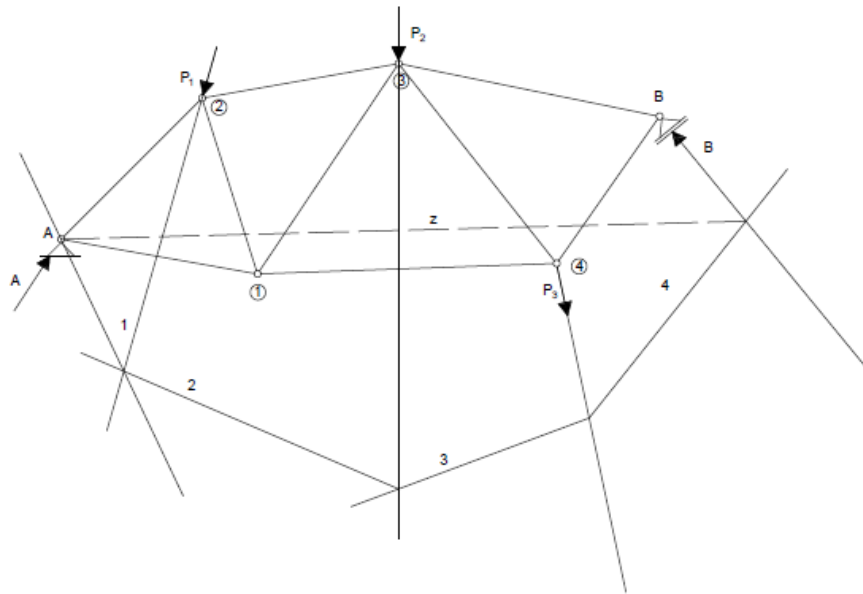
U ovom odlomku ćemo detaljno objasniti prethodno spomenut Maxwell – Cremonin plan sila koji koristimo da bismo izbjegli mogućnost pojave pogrešaka zbog crtanja iste sile dva puta u poligonu sila.

U sljedećem primjeru, prikazanom na slici 7, prikazati ćemo konstrukciju Maxwell – Cremonina plana sila ponajviše radi toga da se ukaže na neke karakteristike te grafičke konstrukcije, ali i da bi se objasnila veza između geometrijske figure koja se dobiva u planu sila i zadanog nosača s opterećenjem.

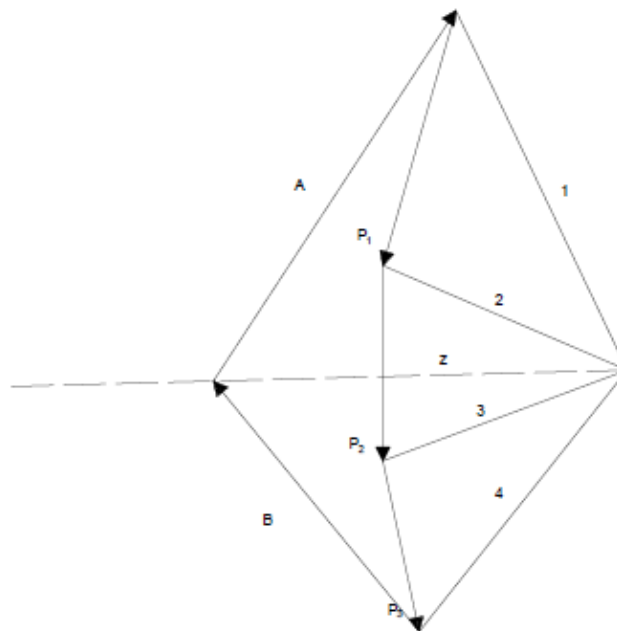


Slika 7.

Promatra se rešetkasti nosač opterećen vanjskim silama P_1 , P_2 i P_3 u čvorovima 2, 3 i 4 (slika 7). Prije nego što krenemo na samu konstrukciju Maxwell – Cremonina plana sila potrebno je odrediti reakcije. Grafički postupak određivanja reakcija prikazan je na slici 8 a i b.



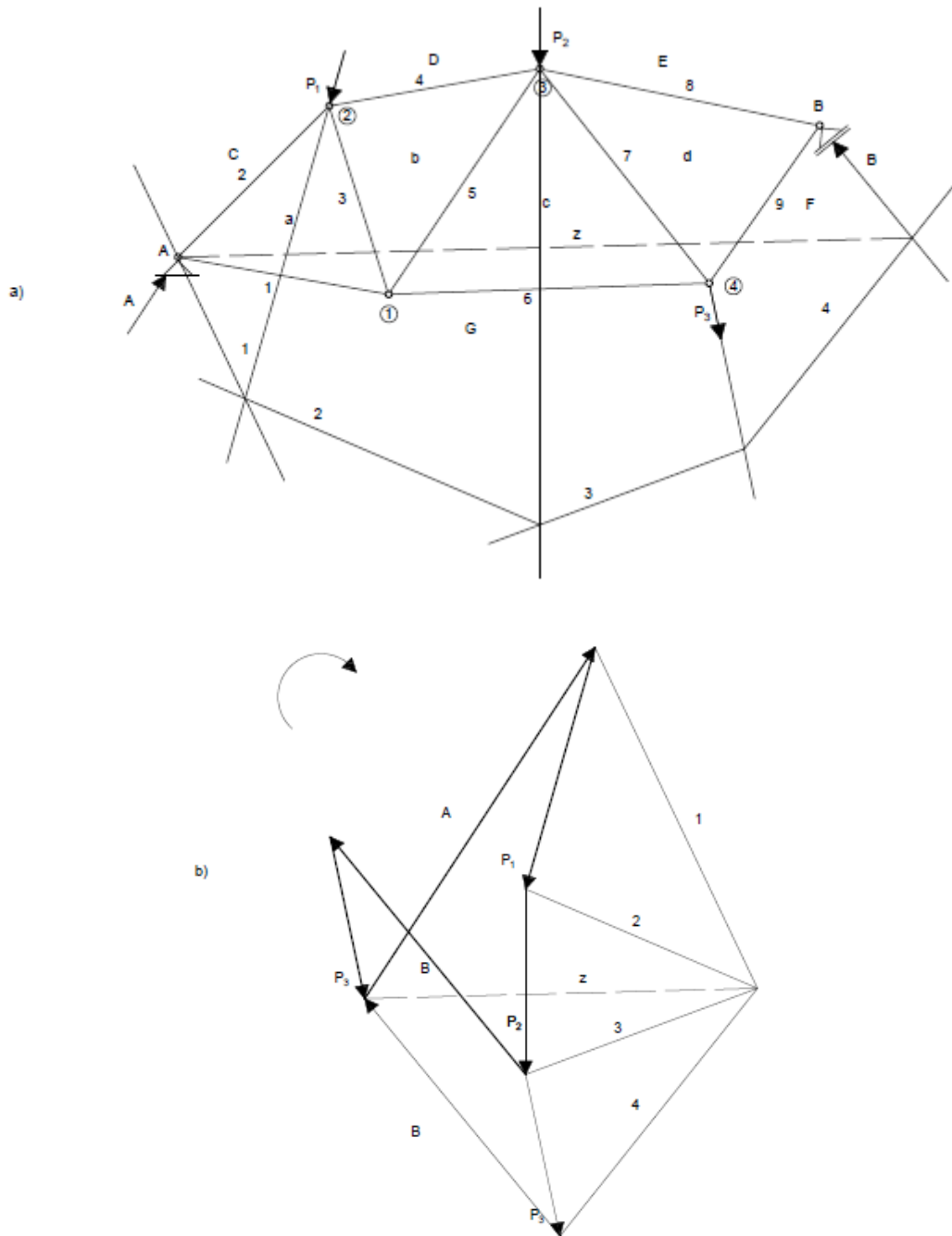
a)



b)

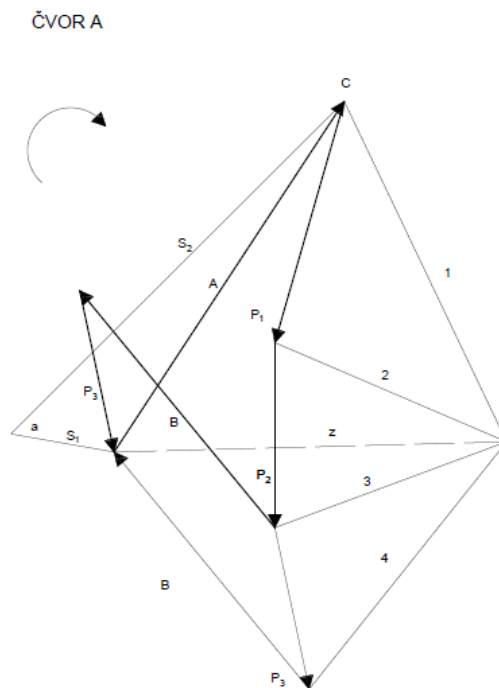
Slika 8.

Kad smo odredili reakcije tada znamo sve vanjske sile koje djeluju na rešetku. Za konstrukciju Maxwell – Cremonina plana sila, poligon vanjskih sila treba konstruirati na način da sile crtamo redom kojim na njih nailazimo ako rešetku obilazimo u smjeru koji smo unaprijed odredili. Na slici 9 b označili smo smjer (smjer kazaljke na satu) kojim obilazimo rešetku što bi značilo da sile nanosimo sljedećim redom: A, P_1 , P_2 , B, P_3 . Treba napomenuti da taj smjer moramo zadržati do kraja konstrukcije, a preporučljivo ga je označiti na samoj slici.



Slika 9.

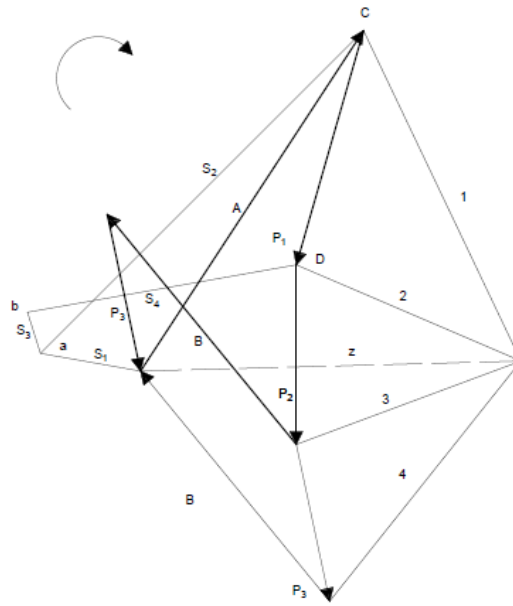
Već smo ranije napomenuli da se iz ravnoteže jednog čvora grafički mogu odrediti samo dvije nepoznate sile pa ćemo zato krenuti od čvora u kojem se sastaju dva štapa. U našem primjeru to su čvorovi A i B u kojima se uravnotežuju reakcije sa silama u štapovima koji se sastaju u tom čvoru. Tako dobivamo sile S_1 i S_2 uravnotežujući čvor A.



Slika 10.

Nakon uravnoteženja čvora A i određivanja sile S_1 i S_2 prelazimo na sljedeći čvor u kojem su nepoznate dvije sile, a to je čvor 2. Prethodno smo u čvoru A odredili silu u štapu 2 tako da nam tu ostaju nepoznanice sile u štapovima 3 i 4. Prva sila na koju nailazimo ako čvor obilazimo unaprijed određenim smjerom (smjer kazaljke na satu) je sila u štapu 2 pa od nje i polazimo. Uravnotežujući čvor 2 dobivamo sile S_3 i S_4 .

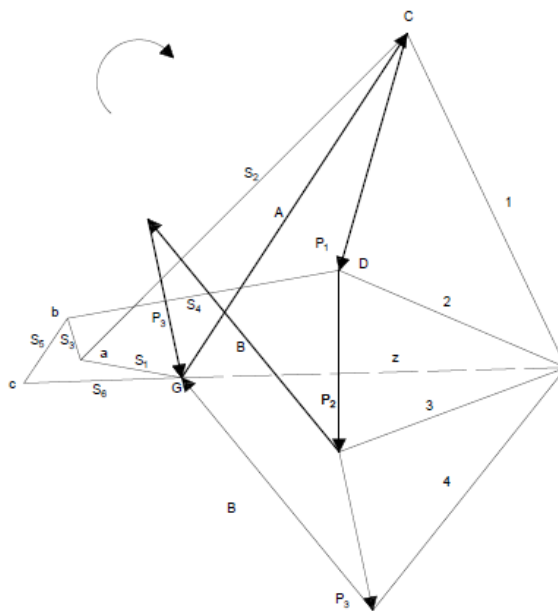
ČVOR 2



Slika 11.

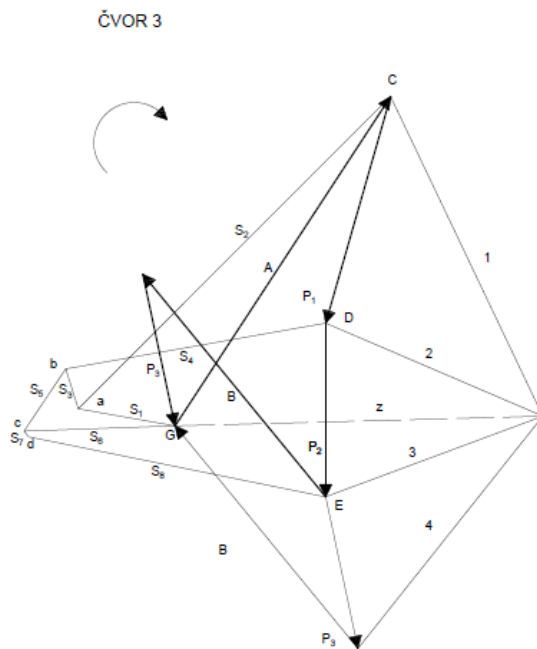
Slijedeći je na redu čvor 1. Sile S_1 i S_3 dobivene iz prethodno uravnoteženih čvorova pa iz ovog poligona dobivamo sile u štapovima 5 i 6 (S_5 i S_6).

ČVOR 1

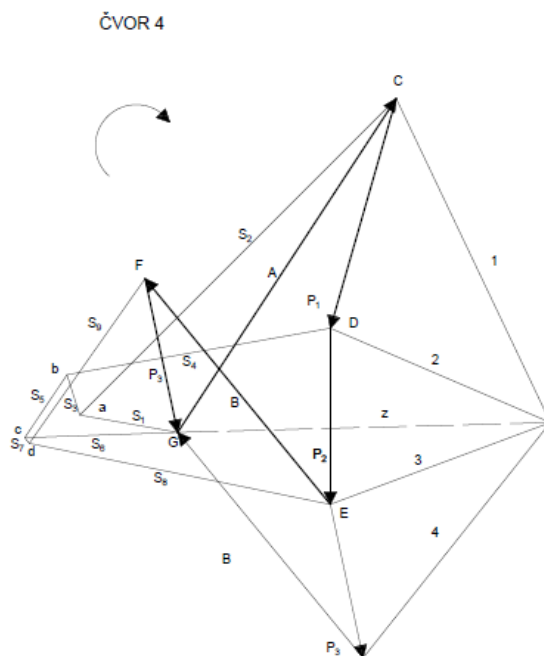


Slika 12.

Iza čvora 1 slijedi čvor 3 (slika 13), zatim čvor 4 (slika 14) i na kraju dolazimo u čvor B (ležaj) koji nam je ujedno i provjera. U tom čvoru sastaju se sile B, S_8 i S_9 koje su prethodno određene. Ako te tri sile zatvaraju trokut sila znači da smo dobro napravili cijeli postupak.



Slika 13.



Slika 14.

U slučaju da te tri sile (B , S_8 i S_9) ne zatvore trokut sila došlo je do pogreške u postupku. Najčešće je to posljedica sitnih pogrešaka koje se gomilaju tijekom samog postupka. Na kraju se dogodi da umjesto točke koja zatvara poligon dobijemo trokutić. Taj trokutić naziva se trokutom pogreške koji se, ako je zanemarive veličine i nema nekih većih posljedica na točnost rezultata, tolerira. Međutim ako je trokut prevelik potrebno je ponoviti grafički postupak. Konstrukciju Maxwell – Cremonina plana sila najbolje bi bilo provoditi s obje strane. Razlog tomu je taj što kad se konstrukcija provodi od početka do kraja s jedne strane povećava se mogućnost pogreške. To je izrazito vidljivo kod nosača sa velikim brojem štapova. Na našem primjeru to bi značilo da nakon uravnoteženja čvora A, 1 i 2 prelazimo na čvor B pa na čvor 4 i na kraju na čvor 3. Na kraju je silom u štapu 7 (S_7) zatvorena je čitava konstrukcija. U ovom se primjeru nije pojavio trokut pogreške jer se radi o rešetki s malim brojem štapova pa je broj pogrešaka malen.

Gore smo prikazali postupak grafičke konstrukcije Maxwell – Cremonina plana sila u kojem smo postupno uravnoteživali čvorove. U okviru ovog postupka također je sadržano i statičko objašnjenje problema. Međutim konstrukcija Maxwell – Cremonina plana sila (u daljnjem tekstu $M - C$ plan) može se pojednostaviti zahvaljujući geometrijskom odnosu između zadanog nosača s opterećenjem i plana sila. Taj plan sila je geometrijska figura recipročna zadanom nosaču s opterećenjem a uvođenjem nekih dodatnih simbola na našem primjeru pokušati ćemo objasniti taj odnos:

1. *Svakom polju rešetkastog nosača odgovara jedna točka u $M - C$ planu sila.*

U rešetkastom nosaču postoje unutarnja polja koja su omeđena štapovima rešetke i označavaju se malim slovima i vanjska polja koja su omeđena štapovima rešetke i vanjskim silama i označavaju se velikim slovima. U prethodnom primjeru vanjsko polje E je trokut kojeg čine pravci djelovanja sila B i P_2 i pravac sile u štapu 8. Isto to polje u $M - C$ planu predstavlja točku u kojoj se sijeku pravci sila B , P_2 i S_8 . Unutarnje polje „ a “ omeđeno je štapovima, odnosno silama u štapovima 1, 2 i 3, a to je u $M - C$ planu točka u kojoj se sijeku pravci sila S_1 , S_2 i S_3 . Znači da se između dva polja u rešetkastom nosaču nalazi sila u štapu ili vanjska sila. Obzirom na to logično je da se u recipročnoj figuri između dvije točke nalazi sila. Prema tome predznak sile lako možemo odrediti iz $M - C$ plana sila. Na primjeru za silu S_4 u štapu 4 promatramo čvor 2 i polazimo u odabranom smjeru (smjer kazaljke na satu). Sila S_4 nalazi se između polja D i b, jer ta polja nailaze tim redom. Smisao $D \rightarrow b$ iz $M - C$ plana određuje predznak sile u štapu. Strelica ide prema čvoru

što znači da je sila S_4 negativna (tlačna). Prethodno opisani sistem označavanja polja i točaka, a samim time i sila uveo je engleski inženjer Bow (Bou) pa je stoga i poznat pod imenom Bowov način.

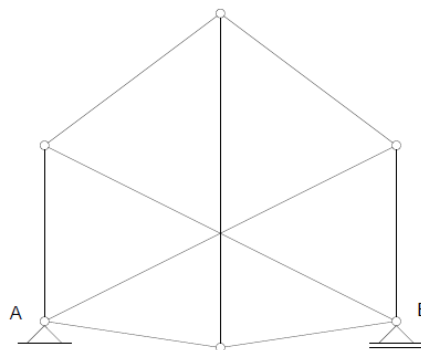
2. Svakoj točki (čvoru) rešetkastog nosača odgovara u $M - C$ planu sila jedno polje tj. poligon.

Stranice poligona recipročne figure i pravci štapova paralelni su, tj. stranice poligona recipročne figure paralelne su sa pravcima sila koje djeluju u čvoru rešetke.

Statički je ovo logično jer se u svakom čvoru rešetkastog nosača sastaju štapovi čije sile zajedno s vanjskim silama koje djeluju na taj čvor čine uravnoteženi sistem.

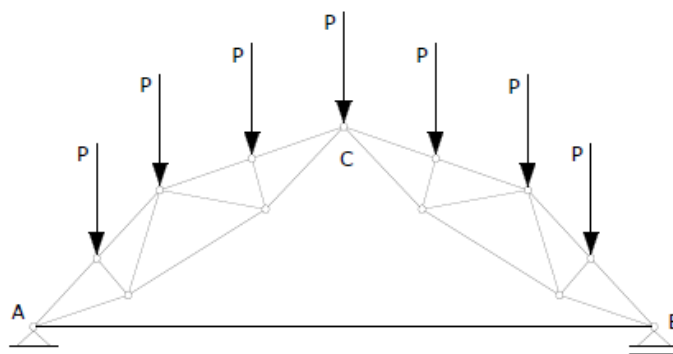
3. Ako površinu nosača s vanjskim silama možemo podijeliti na dijelove ograničene pravcima tih sila, tako da svaka točka koja ne leži na pravcima koji omeđuju polja pripada samo jednom polju, onda za takav nosač možemo konstruirati Maxwell – Cremonin plan sila.

To znači da se za sisteme kod kojih se polja preklapaju ne može napraviti $M - C$ plan sila. (slika 15).



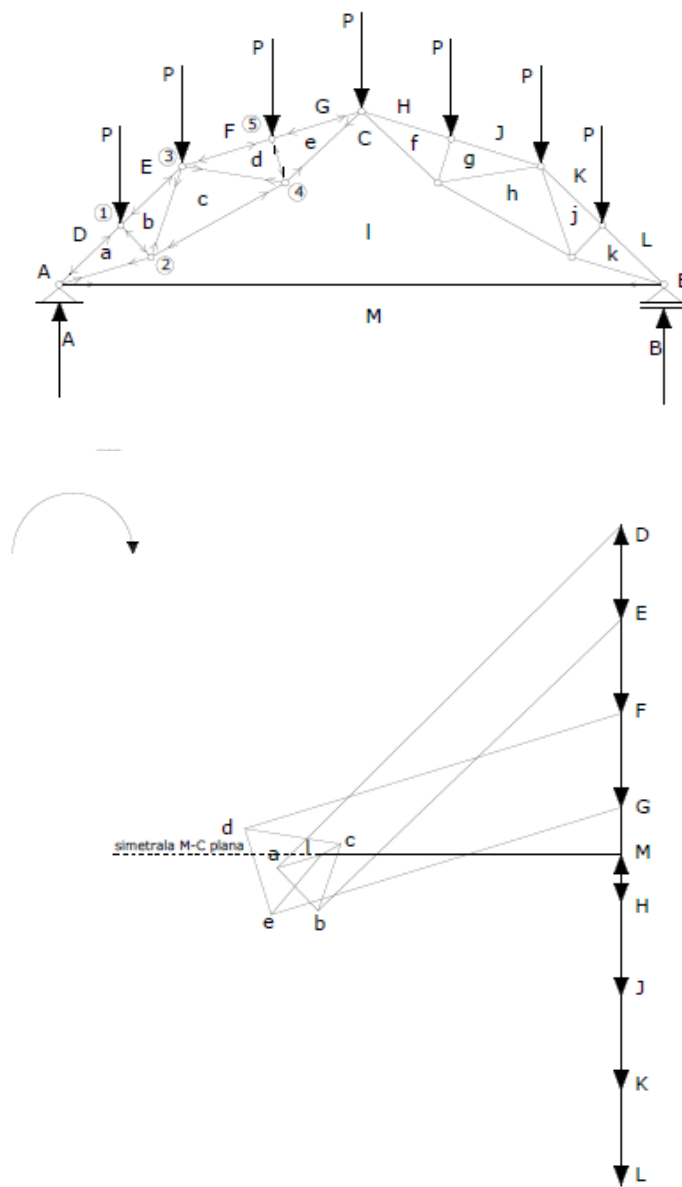
Slika 15.

Iz navedenog primjera rješavanja rešetkastog nosača pomoću $M - C$ plana sila smo vidjeli da je tim postupkom moguće odrediti sile ako se može poći od čvora u kojem su dvije nepoznate sile i ako se daljnjim rješavanjem nailazi na čvorove u kojima su nepoznate dvije sile. U slučaju da to nije tako i da nosač nema čvor s dvije nepoznate sile od kojeg možemo krenuti ili se tokom daljnjeg rješavanja naiđe na čvor s više od dvije nepoznate sile treba ispitati može li se taj nosač uopće riješiti pomoću $M - C$ plana sila ili je potreban neki drugi način kako bi se odredile sile u štapovima.



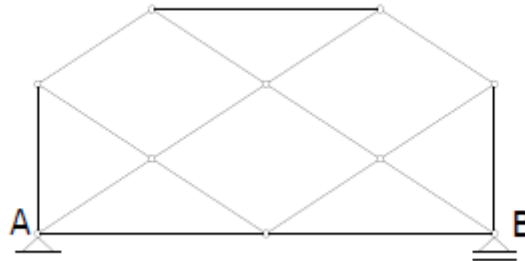
Slika 16.

Za nosač na slici 16 prikazan je način na koji je moguće naći sile u štapovima pomoću $M - C$ plana sile. Nakon određivanja reakcija vidimo da nemamo čvor u kojem su nepoznate samo dvije sile što znači da nemamo odakle krenuti crtati $M - C$ plan sile. Promatrajući nosač vidimo da se površine mogu razdijeliti na odvojena polja i da ipak nekako možemo nacrtati $M - C$ plan sile. Da bismo mogli započeti konstrukciju $M - C$ plana moramo još odrediti silu u jednom štapu i to u onom čvoru u kojem se sastaju tri štapa. To je sila u štapu AB koju ćemo jednostavno odrediti iz uvjeta da je moment u zglobu C nula, ako se zadani nosač promatra kao nosač sa zategom, te ju zajedno s vanjskim silama unijeti u poligon. Ta sila se u zatvorenom poligonu pojavljuje dva puta. Kao sila koja djeluje na čvor A i kao sila koja djeluje na čvor B. Nakon određivanja reakcije i sile u štapu AB odabiremo smisao obilaska (u našem slučaju u smjeru kazaljke na satu) i crtamo poligon sile. Započinje u čvoru A ili B jer tu imamo dvije nepoznate sile. Mi smo počeli iz čvora A. Znamo reakciju i silu u štapu AB koju smo prethodno odredili te ćemo jednostavno odrediti preostale dvije nepoznate sile u štapovima. Nakon uravnoteženja čvora A prelazimo na čvor 1 i nastavljamo onim redoslijedom kojim su čvorovi označeni. Kad dođemo do zadnjeg polja, polja e na slici, lako ćemo provjeriti jesmo li postupak izveli točno. Kako je zadani rešetkasti nosač geometrijski simetričan, a i djelovanje vanjskih sila je u promatranom primjeru simetrično bit će simetričan i $M - C$ plan, stoga je dovoljno da se nacrtaju samo do osi simetrije.



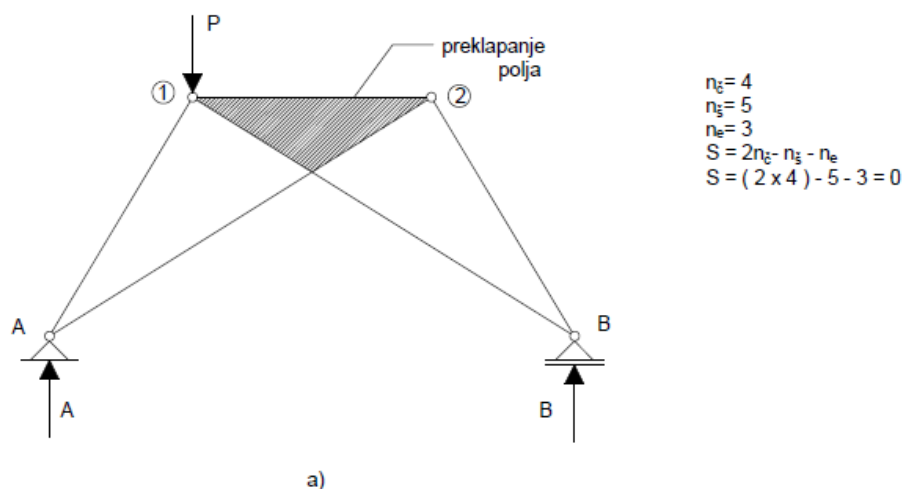
Slika 17.

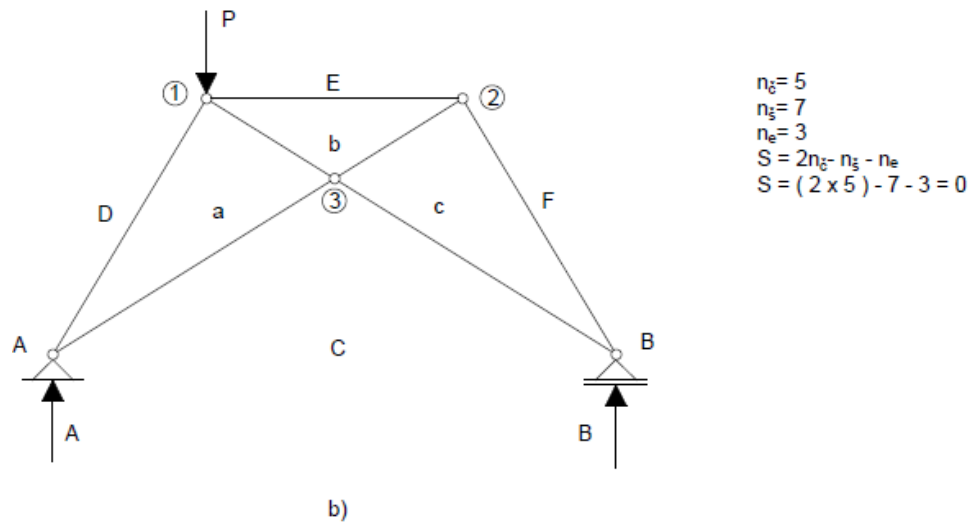
U prethodnom primjeru promotrili smo slučaj kada se u jednom čvoru sastaju više od dva štapa kod kojeg je moguće nacrtati recipročnu figuru u M – C planu sila, no to uvijek nije slučaj (slika 18).



Slika 18.

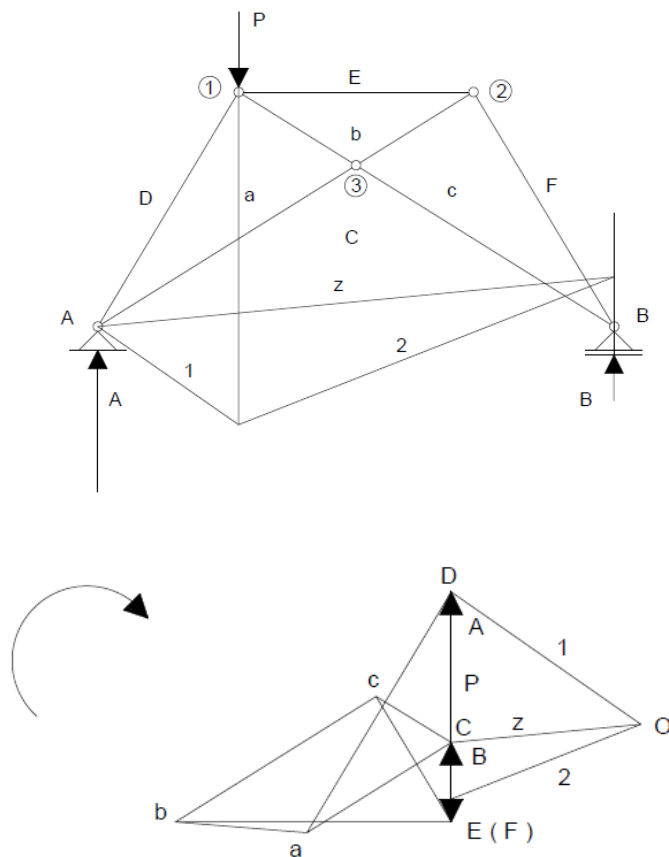
U rešetkastim nosačima čiji se štapani mimoilaze (križaju) kako je prikazano na slikama 4 i 15 polja se preklapaju pa, zbog uvjeta da svaka točka koja ne leži pravcima koji omeđuju polja pripada smo jednom polju, za njih nije moguće nacrtati M – C plan sila. Međutim u slučaju da se križaju (ukrštavaju) samo po dva štapa može se naći način da se nacrtaju M – C plan sila. Ako pretpostavimo da su štapani na mjestima križanja međusobno zglobno spojeni, sile u štapovima se ne mijenjaju. Isto tako se ne mijenja niti geometrijska nepromjenjivost niti statička određenost iz tog razloga što se ubacivanjem zgloba broj čvorova povećava za jedan, a broj štapanova za dva. Na slici 19 smo pokazali jedan primjer takve zamjene. Umjesto rešetkastog nosača s ukrštenim štapovima (slika 19 a), dobiva se rešetkasti nosač čiji se štapani ne križaju i za koji se može nacrtati recipročna figura (slika 19 b).





Slika 19.

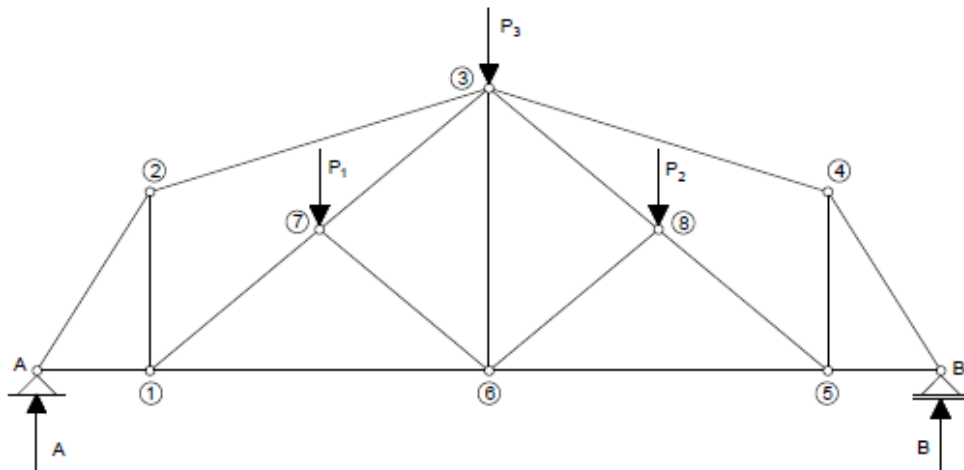
Nakon ubacivanja zgloba, nastavljamo postupak kao što smo to već opisali u prethodna dva primjera i kao što je prikazano na slici 20.



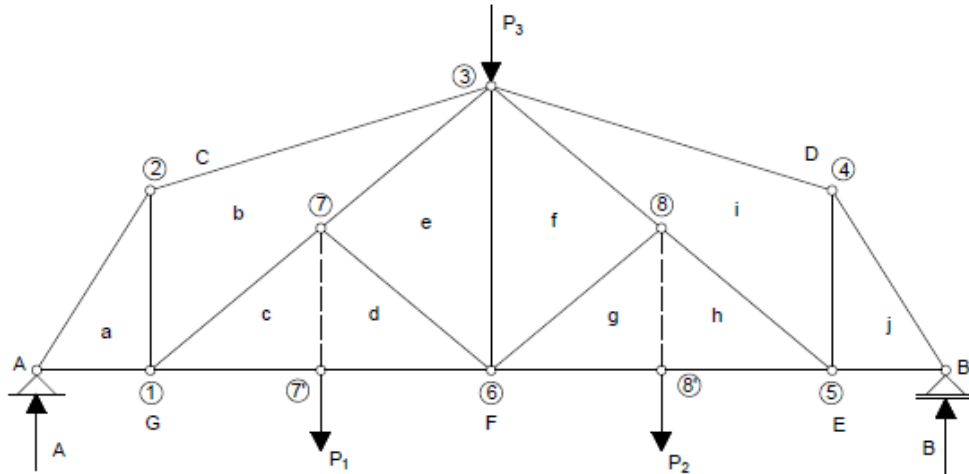
Slika 20.

Treba napomenuti da se prekidanje štapova i ubacivanje zglobne veze na mjestima gdje se ukrštavaju tri i više štapova ne može vršiti jer se time mijenja konstruktivni sistem – statički određeni sistem postaje statički neodređen.

Za rešetku na slici 21 a nije problem nacrtati M – C plan sila sve dok unutarnji čvorovi (7 i 8) nisu opterećeni. Problem nastaje kad na te čvorove djeluje neka sila i tada nije moguće nacrtati recipročnu figuru jer se unutarnja i vanjska polja preklapaju. Međutim, za taj nosač se ipak može nacrtati M – C plan sila ako ga zamijenimo drugim nosačem. To radimo tako da dodajemo pomoćne štapove 7 – 7' i 8 – 8', u pravcima djelovanja sila P_1 i P_2 (slika 21 b), koji prebacuju djelovanje sila P_1 i P_2 u novonastale čvorove 7' i 8'. Dodavanjem tih čvorova nosač i dalje ostaje statički određen i geometrijski nepromjenljiv te se sada za njega mogu odrediti sile u štapovima pomoću M – C plana sila. Na kraju je još bitno istaknuti da su sile u dodanim štapovima jednake nuli i da štapovi 1 – 6 i 5 – 6 nisu podijeljeni na dva štapa.



a)



b)

Slika 21.

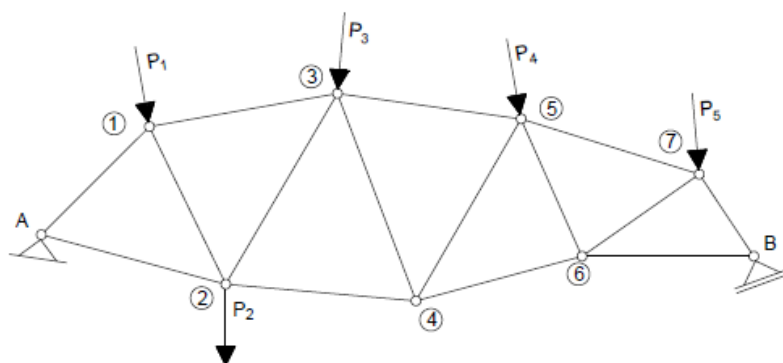
3.4. Metoda presjeka

U slučaju da presjekom nosač možemo podijeliti na dva djela, za određivanje sila u štapovima koristimo metodu presjeka. Također, ako možemo izdvojiti dio nosača tako da presiječemo tri štapa čiji se pravci ne sijeku u jednoj točki, za određivanje sila u štapu možemo koristiti metodu presjeka. Možemo mi presjeći i više štapova ali onda da bismo mogli koristiti ovu metodu, kao što znamo iz uvjeta ravnoteže u ravnini ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma M = 0$), možemo imati najviše tri nepoznate sile u štapovima što znači da preostale moraju već biti određene. U slučaju da se pravci svih presječenih štapova, osim jednog, sijeku u istoj točki, tada možemo odrediti sile u svim štapovima i bez da su prethodno određene neke sile. Dakle, jedan dio presječenog nosača promatramo dok drugi odbacujemo. Dio nosača koji promatramo mora biti u ravnoteži pod djelovanjem vanjskih sila ali i sila kojima odbačeni dio nosača djeluje na njega.

Ovu metodu pogodno je koristiti kad treba odrediti sile samo u nekim štapovima a može biti analitička, grafička i grafoanalitička.

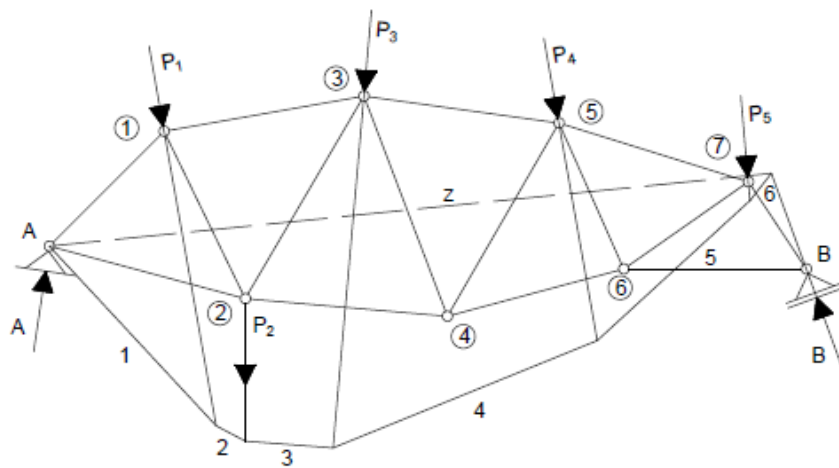
3.5. Culmannova metoda

Culmannov postupak je grafički postupak određivanja sila u štapovima rešetkastog nosača. Stvar je vrlo slična kao i kod metode presjeka. Presjekom dijelimo nosač na dva dijela ili izdvajamo jedan dio nosača i zasebno promatramo njegovu ravnotežu. Isto kao i kod metode presjeka, sile u štapovima se mogu odrediti ako su u presjeku nepoznate tri sile. Još treba napomenuti da se Culmannova metoda svodi na rastavljanje sila u tri pravca koji se ne sijeku u jednoj točki. Tu zapravo primjenjujemo grafički uvjet ravnoteže četiriju sila. Poznata nam je rezultanta vanjskih sila koje djeluju na promatrani dio nosača a nepoznate su nam sile u trima štapovima. Te četiri sile su u ravnoteži ako rezultanta dviju sila leži na istom pravcu kao i rezultanta drugih dviju sila i ako su te rezultante jednake po veličini ali suprotne po smjeru. Pravac na kojem leže te dvije rezultante naziva se Culmannov pravac. Za nosač na slici 22 prikazati ćemo Culmannov način određivanja sila u štapovima.

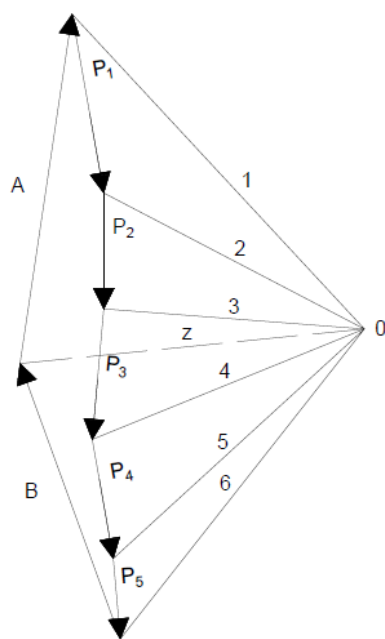


Slika 22.

Prije svega ćemo grafički, pomoću verižnog poligona, odrediti reakcije (slika 23 a i b).



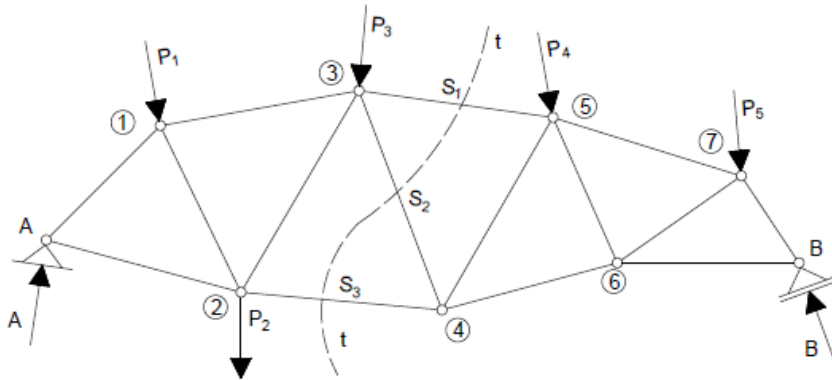
a)



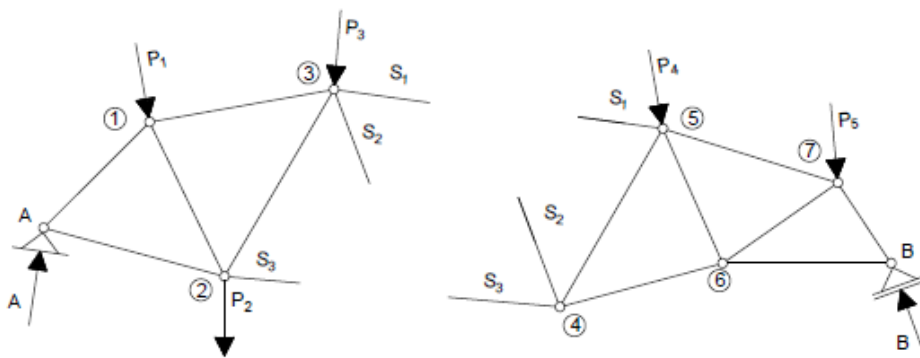
b)

Slika 23.

Kako smo već rekli presjekom t-t nosač dijelimo na dva dijela (slika 24 a). Na lijevi dio nosača, koji smo odabrali za promatranje, djeluju sile A , P_1 , P_2 i P_3 te sile u presječenim štapovima – S_1 , S_2 i S_3 , kojima nepromatrani dio nosača djeluje na promatrani (slika 24 b). Prilikom grafičkog rješavanja nije potrebno pretpostavljati pozitivne predznake sila u štapovima i označavati smjerove, nego treba sačekati konačan rezultat i onda označiti smjerove i tako dobiti i predznake sila u štapovima.



a)

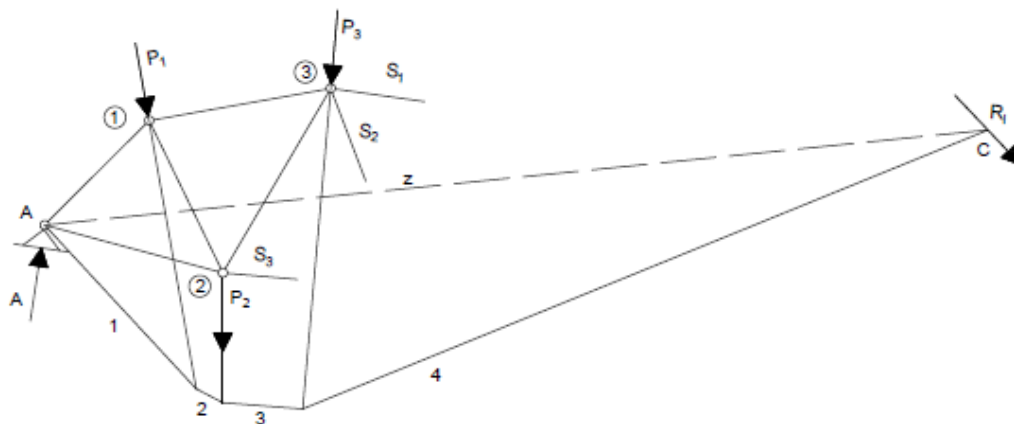


b)

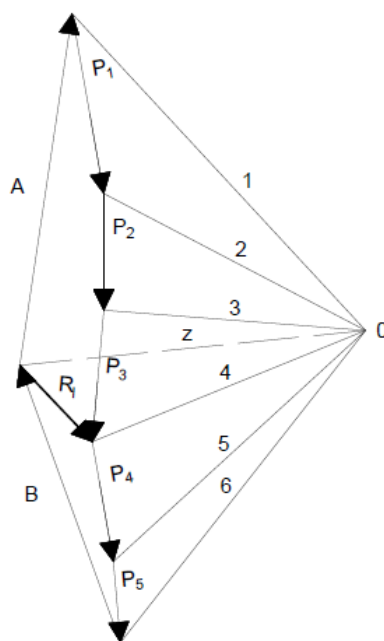
Slika 24.

Rezultantu vanjskih sila koje djeluju na promatrani dio nosača odredili smo iz poligona sila (slika 25 b) i označavamo je s R_I . Položaj rezultante (R_I) odredili smo pomoću verižnog poligona (slika 25 a). Iz poligona sila vidimo da se rezultanta R_I nalazi između zrake z i 4 (slika

25 b) pa će stoga ona na planu sila (slika 25 a) prolaziti kroz točku u kojoj se sijeku te dvije zrake (točka C), a pravac njezinog djelovanja paralelan je s pravcem te sile iz poligona sila (slika 25 b).



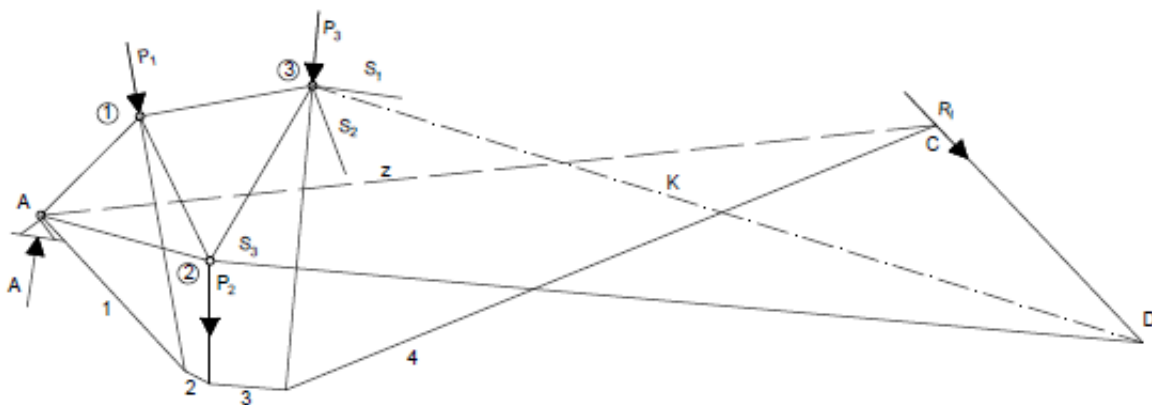
a)



b)

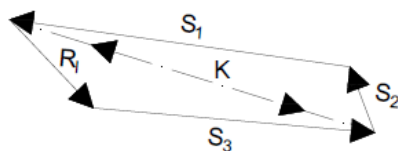
Slika 25.

Na taj način dolazimo do četiri sile koje djeluju na promatrani nosač. Nadalje ćemo odrediti sjecište pravaca djelovanja sila R_1 i S_3 i dobiti točku kroz koju prolazi njihova rezultanta (točka D, slika 26 a). Istu stvar radimo i za sile S_1 i S_2 te dobivamo točku kroz koju prolazi njihova rezultanta (točka 3, slika 26 a). Rezultante sila R_1 i S_3 , te S_1 i S_2 moraju biti u ravnoteži što znači da leže na istom pravcu pa tako dobivamo pravac D – 3. Taj pravac naziva se Culmannov pravac i označavamo ga s K. Na kraju, da bismo dobili sile u štapovima, treba konstruirati zatvoreni poligon sila koji će logično biti četverokut jer se radi o četiri sile. Najprije dobijemo rezultantu sila S_1 i S_2 (sila K) koju uravnotežujemo sa rezultantom R_1 i silom S_3 , i na taj način se dobije trokut R_1 i S_3 , K. Nakon toga rezultantu sila R_1 i S_3 (ista sila K sa suprotnim smjerom) uravnotežujemo sa silama S_1 i S_2 . Na ovaj način se sila K poništava i ostaje zatvoreni četverokut iz kojeg se mogu očitati veličine sila u štapovima i smjerovi sila koji su preneseni u plan sila (na štapove) . Dobili smo da je sila S_3 pozitivna (vlačna) dok su sile u ostala dva štapa (S_1 i S_2) negativne (tlačne).



a)

b)



Slika 26.

4. GRAFIČKO ODREĐIVANJE POMAKA NOSAČA

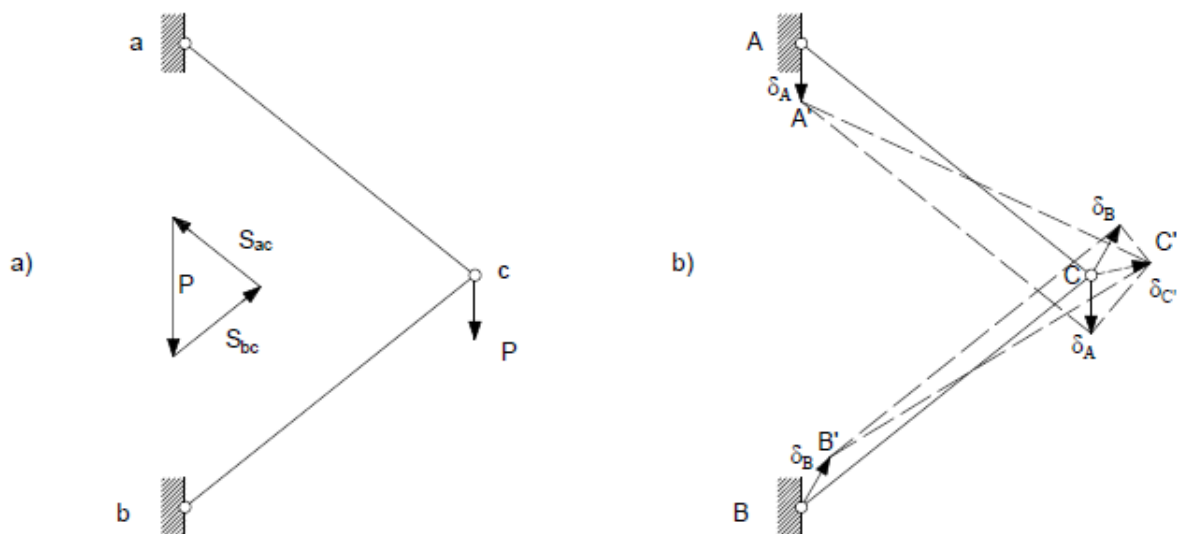
4.1. Williotov plan pomaka

Pomaci se određuju pomoću plana pomaka za poznate promjene duljina štapova Δl i pomake susjednih čvorova. Postupak je isti kao i za crtanje plana brzina.

Da bismo najlakše objasnili postupak koristiti ćemo najjednostavniji primjer koji je sastavljen od dva štapa i jednog čvora (C). U taj čvor C, u kojem djeluje sila P, postavljamo uvjete ravnoteže i određujemo sile u štapovima AC i BC. Kad znamo veličine sila u štapovima možemo odrediti promjene duljina štapova:

$$\Delta L_{AC} = \frac{S_{AC} \cdot L_{AC}}{E \cdot A_{AC}} \quad i \quad \Delta L_{BC} = \frac{S_{BC} \cdot L_{BC}}{E \cdot A_{BC}}$$

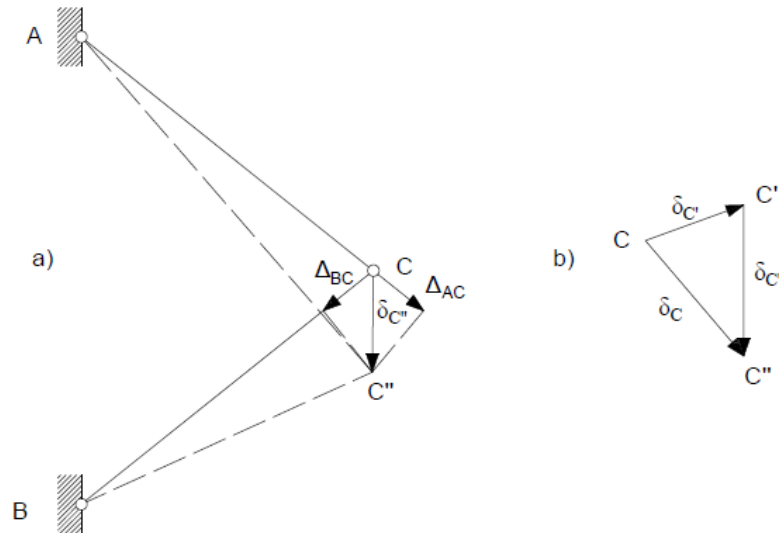
Neka točke A i B budu susjedni čvorovi ili ležajevi poznatih pomaka. Pomak točke C, δ_C , od pomaka točaka A i B prikazan je na slici 27 b.



Slika 27.

Nakon što smo odredili pomak točke C od pomaka točaka A i B, da bismo odredili ukupni pomak točke C, potrebno je još odrediti pomak od promjene duljine štapova. Za određivanje tog pomaka najprije na pravac AC nanosimo produljenje štapa ΔL_{AC} a zatim na pravac BC skraćivanje štapa ΔL_{BC} . Ako sad povučemo okomice iz krajeva vektora pomaka dobiti ćemo

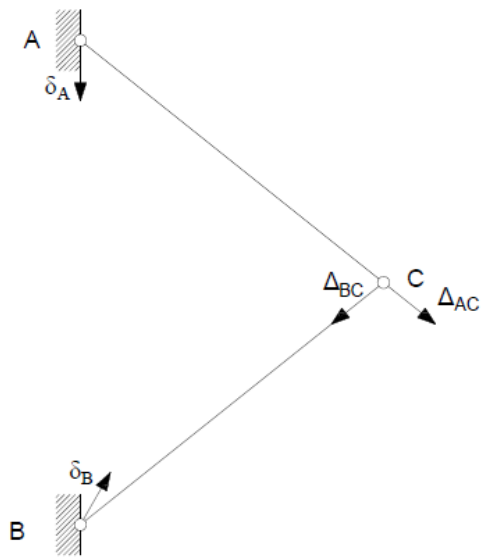
pomaknuti položaj čvora C u točki C'' (slika 28 a). Vektor CC'' predstavlja vektor pomaka točke C, δ_C'' , od promjene duljine štapova AC i BC. Ukupni pomak točke C bit će $\delta_C = \delta_C' + \delta_C''$ (slika 28 b).



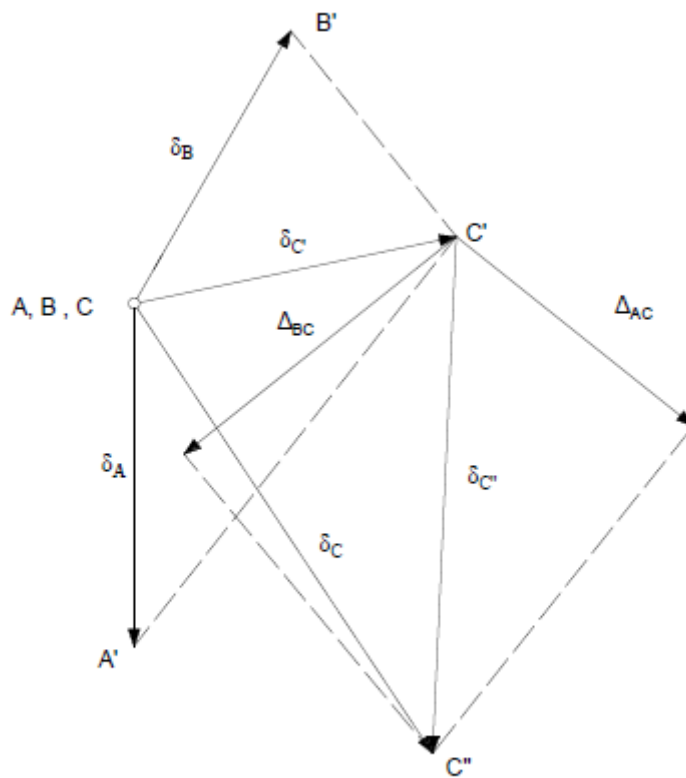
Slika 28.

S obzirom da su pomaci vrlo male veličine u odnosu na duljinu štapova a samim time i na veličinu nosača, određivanje pomaka na gore naveden način prilično je nepouzđano. Stoga slobodno možemo reći da veliku ulogu u svemu tome ima mjerilo koje koristimo.

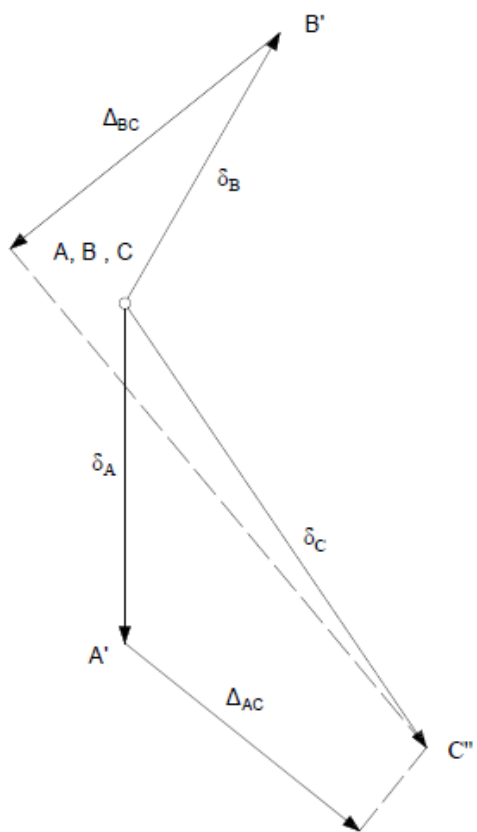
Zbog toga je razvijen način određivanja pomaka točke neovisno o mjerilu slike nosača. Naime mjerilo za pomake ne mora biti ovisno o mjerilu slike konstrukcije čime se postiže dodatna točnost. Takav način određivanja pomaka prikazan je na slici 29. Početni položaj točaka A; B; C u planu pomaka odaberemo proizvoljno (slika 29 b). Na početne položaje nanosimo vektore pomaka δ_A i δ_B . Povučemo okomicu na pravac AC iz kraja vektora δ_A , a iz kraja vektora δ_B okomicu na pravac BC. Na sjecištu nanesenih okomica dobiva se položaj C'. Dalje, paralelno s pravcem AC iz točke C' nanosimo vektor ΔL_{AC} i vektor ΔL_{BC} paralelno s pravcem BC. Iz krajeva vektora ΔL_{AC} i ΔL_{BC} povlačimo okomice na pravac AC odnosno na pravac BC. Na sjecištu ovih okomica nalazi se točka C''. Vektor CC' određuje pomak točke C uslijed pomaka točaka A i B, a vektor C'C'' određuje pomak točke C uslijed promjene duljine štapova. Ukupni pomak točke C određen je vektorom $CC'' = \delta_C$ (slika 29 b). Na slici 29 c prikazan je plan pomaka bez određivanja položaja C'.



a)



b)



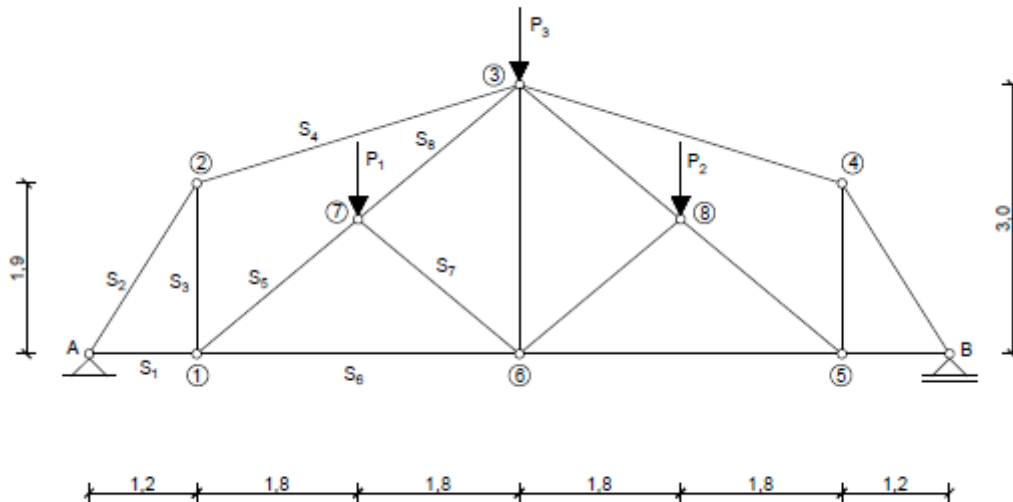
c)

Slika 29.

5. PRIMJER

$$P_1 = P_2 = P_3 = 100 \text{ kN}$$

$$MJ = 1:100$$

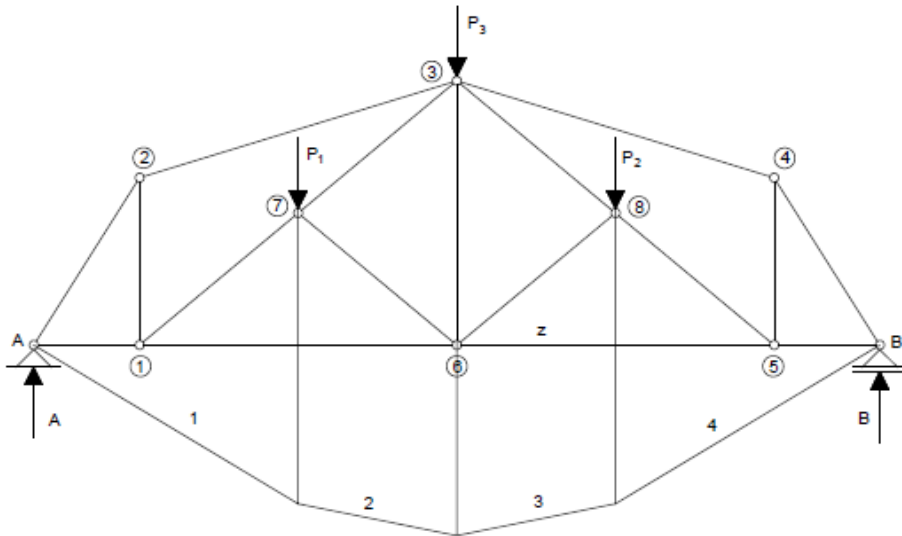


Sile u štapovima su određene pomoću softvera i služe nam za usporedbu rezultata dobivenih grafičkim postupkom. Rešetka je simetrična i simetrično je opterećena pa ćemo izračunati sile u štapovima samo s jedne strane.

Štap	Sila u štapu (kN)
S ₁	+94,74
S ₂	-177,41
S ₃	+121,05
S ₄	-99,06
S ₅	-189,09
S ₆	+240,00
S ₇	-78,10
S ₈	-110,99

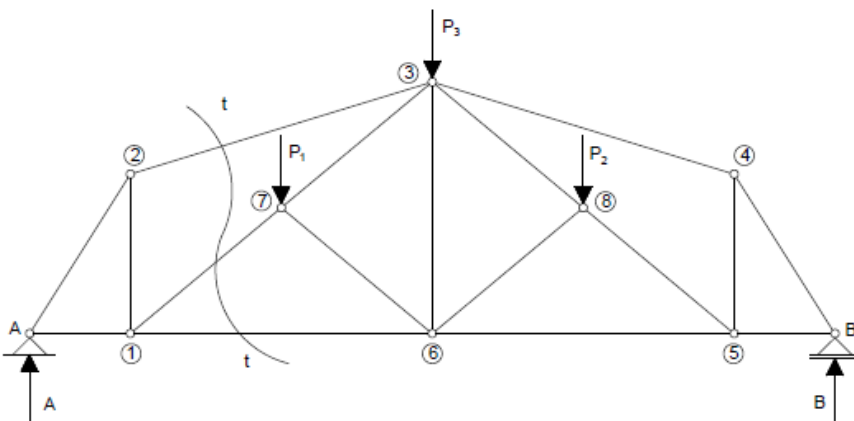
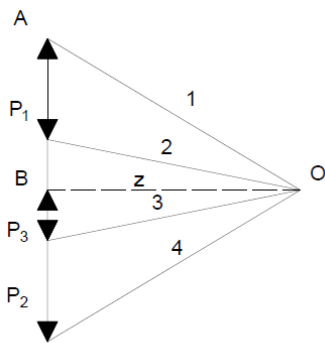
5.1. Culmannov postupak

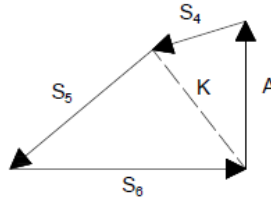
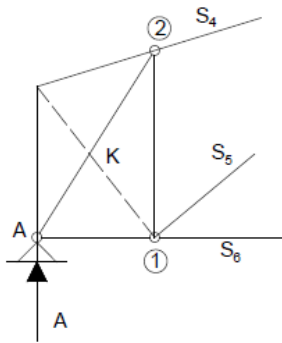
MJ = 1:100



1 cm = 100 kN

$A = B = 150 \text{ kN}$





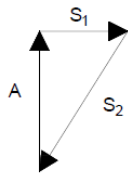
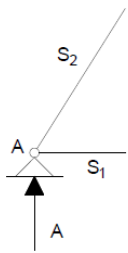
Očitano:

$$S_4 = 100 \text{ kN}$$

$$S_5 = 190 \text{ kN}$$

$$S_6 = 240 \text{ kN}$$

Čvor A

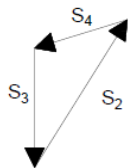
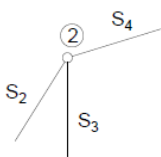


Očitano:

$$S_1 = 95 \text{ kN}$$

$$S_2 = 180 \text{ kN}$$

Čvor 2

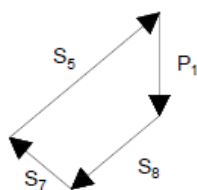
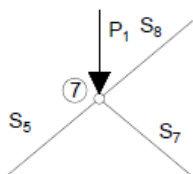


Očitano:

$$S_3 = 120 \text{ kN}$$

$$S_4 = 100 \text{ kN}$$

Čvor 7

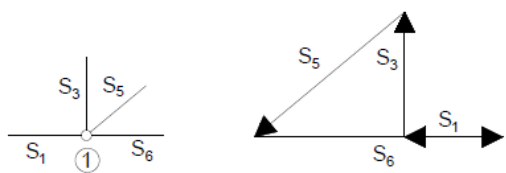


Očitano:

$$S_7 = 80 \text{ kN}$$

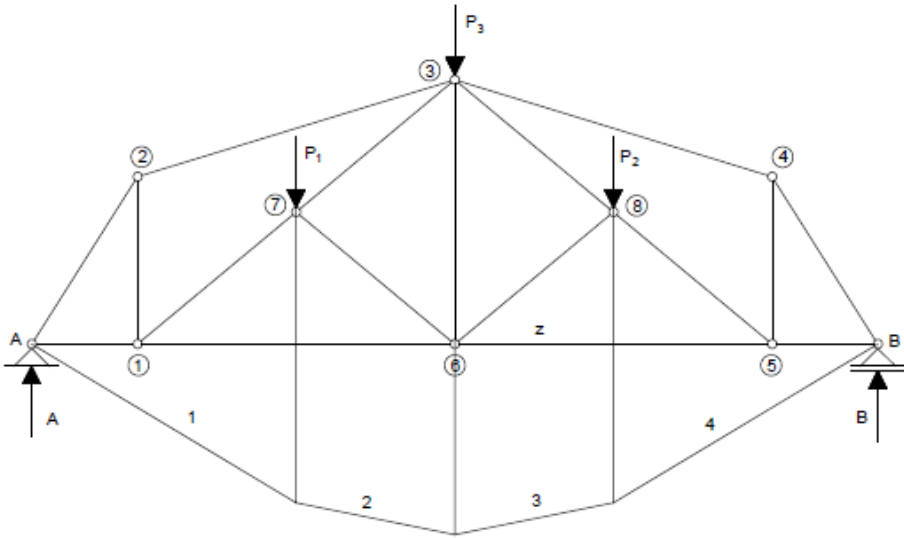
$$S_8 = 110 \text{ kN}$$

Čvor 1



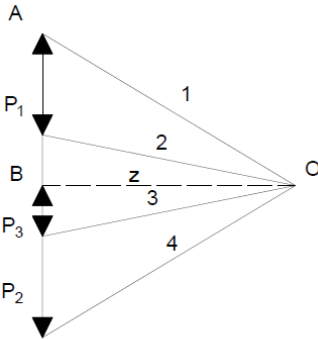
5.2. Maxwell – Cremonin plan sila

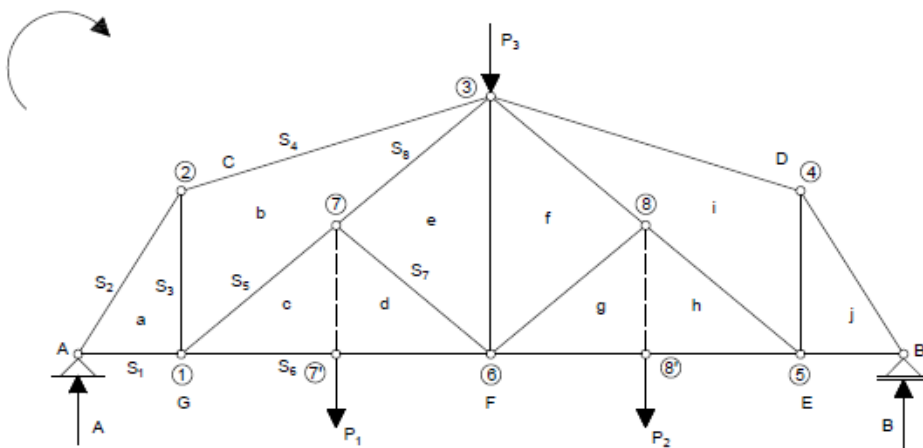
MJ = 1:100



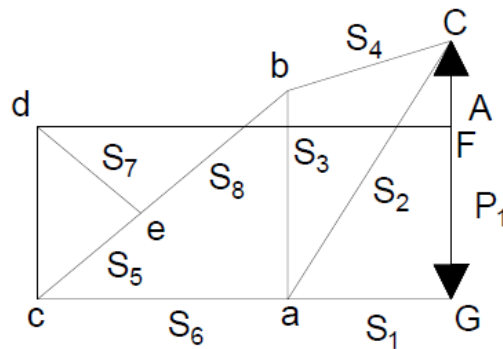
$A = B = 150 \text{ kN}$

1 cm = 100 kN





1 cm = 50 kN



Očitano:

$S_1 = 94 \text{ kN}$ (vlak)

$S_2 = 180 \text{ kN}$ (tlak)

$S_3 = 120 \text{ kN}$ (vlak)

$S_4 = 100 \text{ kN}$ (tlak)

$S_5 = 190 \text{ kN}$ (tlak)

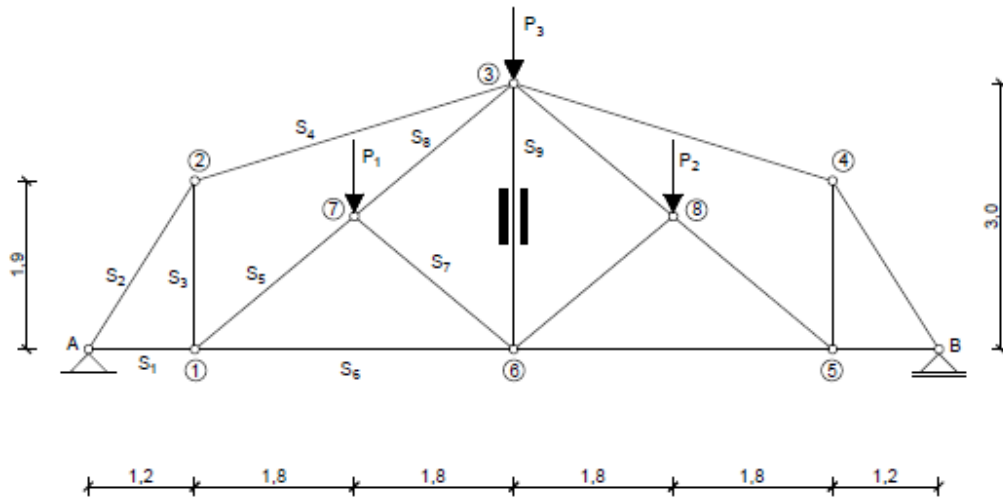
$S_6 = 240 \text{ kN}$ (vlak)

$S_7 = 80 \text{ kN}$ (tlak)

$S_8 = 110 \text{ kN}$ (tlak)

5.3. Williotov plan pomaka

MJ = 1:100



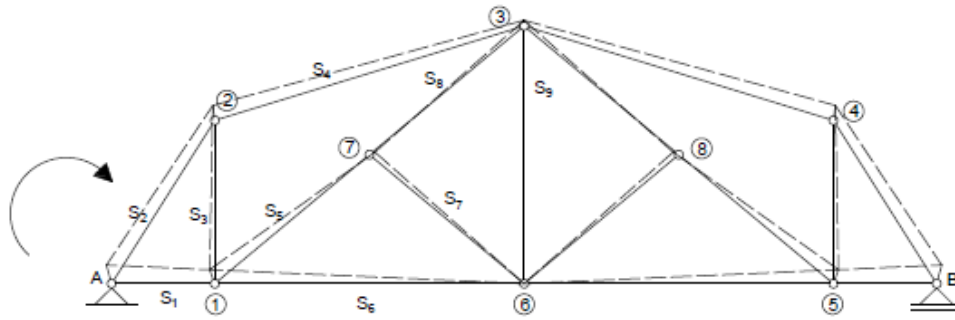
Pretpostavlja se da će štap 6 – 3 ostati u vertikalnom položaju, bez zaokretanja, odnosno da se samo produljuje.

$$E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

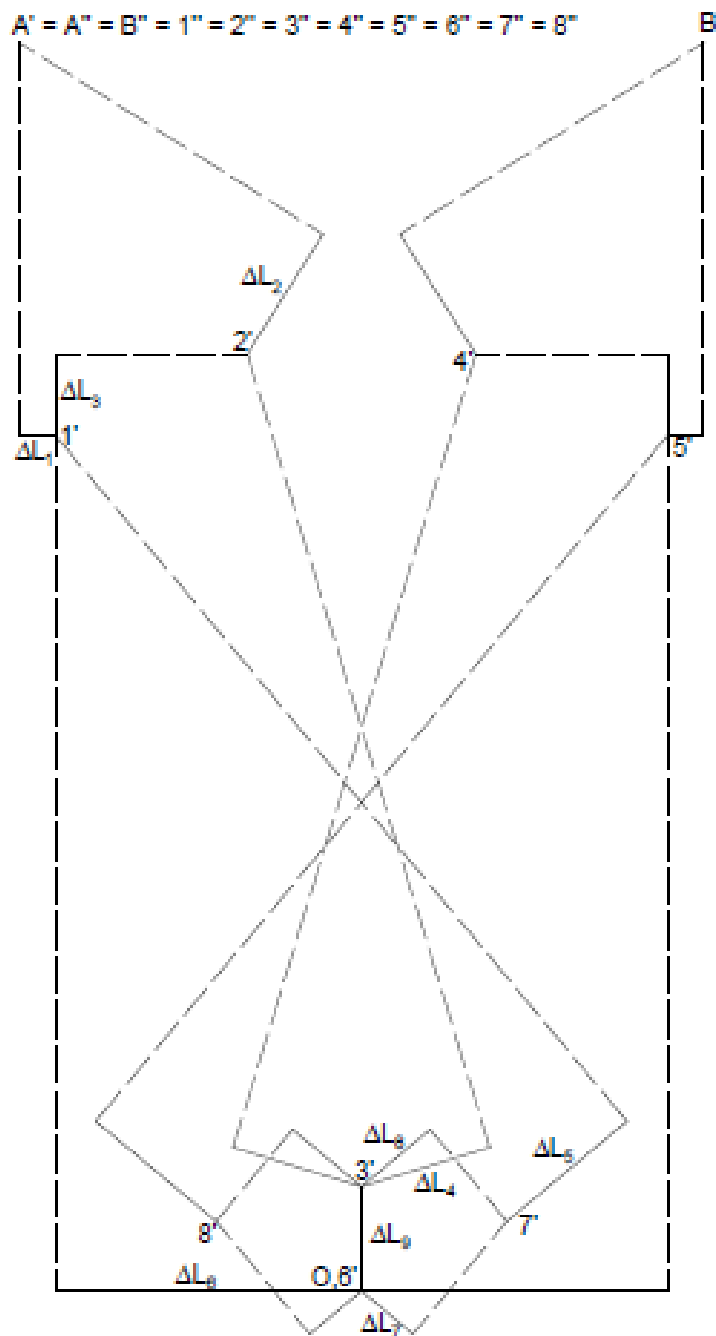
$$A = 1000 \text{ mm}^2$$

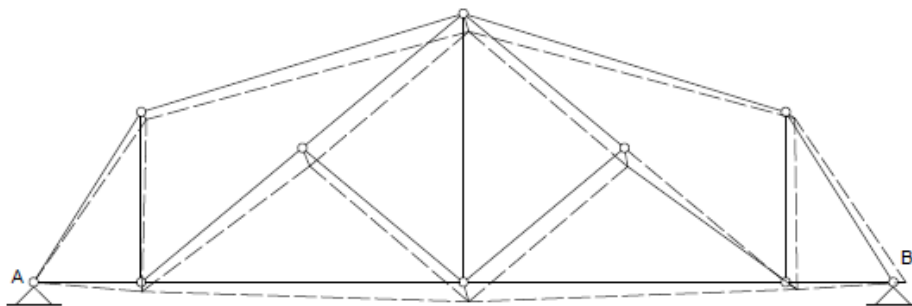
$$\Delta L_i = \frac{S_i \times L_i}{E \times A}$$

Štap	Duljina (m)	Sila u štapu (kN)	ΔL_i (mm)
S ₁	1,2	+94,74	+0,5
S ₂	2,25	-177,41	-1,9
S ₃	1,9	+121,05	+1,1
S ₄	3,76	-99,06	-1,8
S ₅	2,34	-189,09	-2,1
S ₆	3,6	+240,00	+4,1
S ₇	2,34	-78,10	-0,9
S ₈	2,34	-110,99	-1,2
S ₉	3	+100,00	+1,4



Mjerilo pomaka: 10:1





Čvor	Δx (mm)	Δy (mm)	Pomak (mm)
1	+0,5	-5,28	5,31
2	+3,1	-4,18	5,20
3	+4,6	-15,35	16,0
4	+6,13	-4,18	7,42
5	+9,2	-5,28	10,61
6	+4,6	-16,75	17,37
7	+6,55	-15,82	17,12
8	+2,64	-15,82	16,04
B	+9,2	0	9,2

6. ZAKLJUČAK

Grafički postupci, koji se u današnje vrijeme računala ne koriste za rješavanje zadataka, ipak zaslužuju da znamo poneke stvari o njima. Usprkos tome što su primjenjivi samo na statički određene sustave, zanimljivi su jer nam omogućuju da bolje razumijemo odnose sila u konstrukciji kao i ponašanje same konstrukcije.

Zadani primjer najprije smo riješili pomoću softvera zbog provjere točnosti rezultata dobivenih grafičkim postupcima. Zatim smo ga riješili Culmannovim postupkom te pomoću Maxwell – Cremonina plana sila. Na oba načina smo dobili približne vrijednosti onima u softveru što znači da nije došlo do neke veće pogreške u samom postupku.

Na kraju smo pomoću Williotova plana pomaka prikazali pomak čvorova rešetke kao i deformirani oblik rešetke pod djelovanjem opterećenja.

7. LITERATURA

1. V. Simović: Građevna statika I, Građevinski institut Zagreb 1988.
2. M. Anđelić: Građevna statika II, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2005