SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GRAĐEVINSKI FAKULTET

USPOREDBA POSTUPAKA CROSSA I WERNER-CSONKE

ZAVRŠNI RAD IZ PREDMETA

GRAĐEVNA STATIKA 2

Katarina Vranešić, 0082042816

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Ak. God. 2012./2013.

Zagreb, 24. rujna 2013.

SADRŽAJ:

1. Uvod

Nikada prije se nisam susretala s postupcima Crossa i Werner-Csonke. Počevši polako analizirati njihove metode računanja okvirnih konstrukcija, bivala sam sve više i više zadivljena koliko daleko ljudski um može ići te kako se nešto tako složeno može svesti na jednostavan princip, a da se pritom zadrži velika točnost.

Ovaj rad sam u potpunosti posvetila istraživanju tih velikih građevinara i njihovih postupaka. Oba postupka su vrijedna svakog divljenja, jer je fascinantno do kakvih sve ideja i rezultata ljudski um može doći. Werner i Csonka te Cross su, proučavajući isti problem, pronašli dva različita načina za dobivanje istih rezultata.

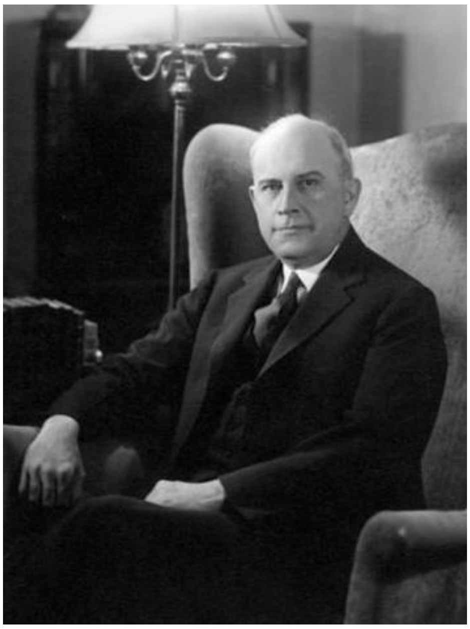
Samim time može se zaključiti koliko je građevinarstvo djelatnost širokog spektra te kako postoji čitavi niz načina za rješavanje problema do kojih jedino inženjersko razmišljanje može dovesti. Upravo zbog toga građevinarstvo se iz godine u godinu razvija sve više i više. Svakodnevno niču nove građevine kojima se svijet divi, bilo zbog konstrukcije, visine, oblika ili materijala od kojega je izgrađeno.

Ovo je struka koja stalno napreduje, pronalazi nove pristupe problemima i načine za rješavanje istih i sve dok je ljudi sa idejom i željom za razmišljanjem kako postići nešto novo te kako usavršiti postojeće, nazire se svjetla budućnost daljnjem razvoju građevinarstva.

Upravo su Cross te Werner i Csonka dokaz tome da za svaki problem ima rješenje te da se do istog može doći na nekoliko različitih načina.

2. Hardy Cross

2.1. Životopis Hardyja Crossa



Hardy Cross je rođen 1885. godine u državi Virginiji u SAD-u, a umro 1959. god. Godine 1908. diplomirao je građevinarstvo na Tehnološkom institutu u Massachusettsu te se nakon toga priključio odjelu za mostove u St. Loiuseu, gdje je proveo godinu dana. 1911. god. nakon jedne godine diplomskog studija na Harvardu, postao je magistar građevinarstva. Sedam godina je radio kao asistent profesor građevine na Sveučilištu Brown. 1921. god. postao je profesor iz područja konstrukcija na Sveučilištu Illinois. Predavao je bez ikakvih bilježaka, a njegova predavanja su bila proračunata da proizvedu određenu atmosferu. Znao je i ranije napustiti predavaonicu ako nitko nije pokušao riješiti određeni problem.

Zajedno s N.D. Morganom izdao je knjigu *Continuous Frames of Reinforced Concrete*. Nadopunio je svoje geometrijske metode rješavanja problema cjevovoda nastalih u projektiranju opskrbe vodom. Te metode bile su upotrebljavane za rješavanje sličnih sustava kao npr. plinovoda. Za svoje radove primio je brojna odlikovanja kao što su: priznanje Američkog društva za obrazovanje inženjera, priznanje Američkog instituta za beton, Zlatnu metalju Instituta za Građevinske inženjere Velike Britanije. Godine 1937. preselio se u Yale, gdje je postao profesor i predsjednik Odjela građevinarstva. Također treba spomenuti i nama poznati njegov rad koji će se detaljnije objašnjavati u nastavku. Riječ je o metodi distribucije momenata.

2.2. Crossov postupak – opis postupka

Crossova metoda ili metoda distribucije momenata je relaksacijski, odnosno interacijski postupak rješavanja sistema. Cilj ovakvog postupka je da se uzastopnim interacijama dođe do konačnog rješenja. Cross je krenuo od činjenice da oslobađanjem po jednog čvora nastaje mogućnost zakretanja u tom čvoru. Obično krećemo od čvora koji je najneuravnoteženiji. Nakon otpuštanja čvora, u njemu uravnotežujemo momente priključenih štapova dobivene na osnovnom sistemu, uz dodavanje vanjskih momenata ako postoje u tom čvoru. Razdioba neuravnoteženog momenta u čvorovima se provodi pomoću razdjelnih koeficijenata koji se dobivaju iz omjera krutosti pojedinog štapa i zbroja krutosti svih štapova spojenih u čvoru. Dio tih momenata se pomoću prijenosnog koeficijenta, koji iznosi 1/2, prebacuje na suprotni kraj štapa. Nakon što smo završili postupak uravnotežavanja u jednom čvoru, ponovno ga upnemo, a postupak ponavljamo na sljedećem čvoru. Taj postupak ponavljamo sve dok u svim čvorovima neuravnoteženi moment bude približno nula. Konačne momente na upetim krajevima dobivamo tako da zbrojimo momente upetosti, raspodijeljene momente i prenesene momente. Crossova metoda je rađena za konstukcije sa spriječenim translacijskim pomacima čvorova, ali može se primijeniti i na sustave s dopuštenim translacijskim pomacima tako da se u prvoj fazi rješavanja dodaju veze koje sprečavaju pomake. Iz uvjeta da u tim dodatnim vezama nema sila, dolazimo do jednadžbi iz kojih se izračunavaju stvarni pomaci, a zatim i konačne vrijednosti momenata u čvorovima.

2.3. Crossov postupak – izvodi izraza

Ako nam je poznat prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$ čvora *i* tada vrijednost momenta na kraju elementa *i* obostrano upete grede iznosi

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = 4k_{(i,j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)}.$$

Prilikom zaokreta čvora i, zaokreti svih ostalih čvorova su spriječeni pa je $\Delta\varphi_{ji} = 0$, tako da dobivamo

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \frac{4k_{(i,j)}}{4\Sigma_{j_i} k_{(i,j)}} \cdot m_i^{(n_i)} = \frac{k_{(i,j)}}{\Sigma_{j,i} k_{(i,j)}} \cdot m_i^{(n_i)}.$$

Zbroj koeficijenata krutosti svih elemenata koju su taj čvor priključeni priključeni iznosi:

$$k_i = \Sigma_{j_i} k_{(i,j_i)}.$$

Taj koeficijent nazovimo koeficijentom krutosti spoja *i*, a razlomak

$$\mu_{i,j_i} = \frac{k_{(i,j_i)}}{k_i}$$

se naziva razdjelnim koeficijentom u čvoru i za element (i, j_i). Njega računamo onoliko puta koliko je elemenata spojeno u određenom čvoru. Dakle, za svaki element možemo dobiti drugačiji koeficijent.

Razdjelni koeficijent za jednostrano upetu gredu iznosi $\mu_{i,j_i} = \frac{3k_{(i,j_i)}}{k_i}$, a za gredu koja s jedne strane ima upeto klizni ležaj $\mu_{i,j_i} = \frac{k_{(i,j_i)}}{k_i}$.

S obzirom da je koeficijent krutosti čvora *i* jednak zbroju svih koeficijenata krutosti elemenata spojenih u isti čvor, suma razdjelnih koeficijenata u čvorovima mora biti jednaka 1

$$\Sigma_{j_i} \mu_{(i,j_i)} = 1.$$

Uvrštavanjem razdjelnog koefcijenta u jednadžbu za prirast vrijednosti momenta na kraju elementa dobivamo

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{(i,j_i)} \cdot m_i^{(n_i)}.$$

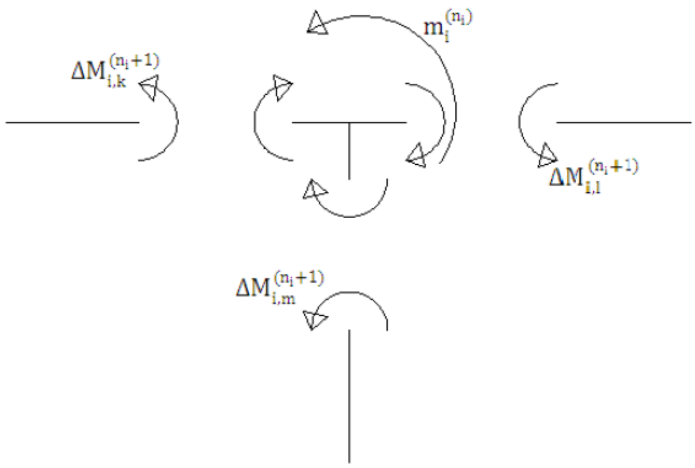
Budući da je suma razdjelnih koeficijata jednaka 1, sumiranjem prirasta momenta dobivamo:

$$\Sigma_{ji} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)}) = m_i^{(n_i)}.$$

Odnosno, prebacivanjem svega na jednu stranu jednadžbe, dobivamo

$$-\Sigma_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} + m_i^{(n_i)} = 0$$

Iz toga zaključujemo da čvor *i* možemo uravnotežiti tako da na njega dodamo moment istog intenziteta rezidualnom momentu, ali suprotnog smisla vrtnje, te ga razdijelimo u omjeru njigovih krutosti na priključne elemente. Upravo zbog toga se Crossov postupak naziva i postupkom radiobe momenata ili postupkom raspodjele momenata.



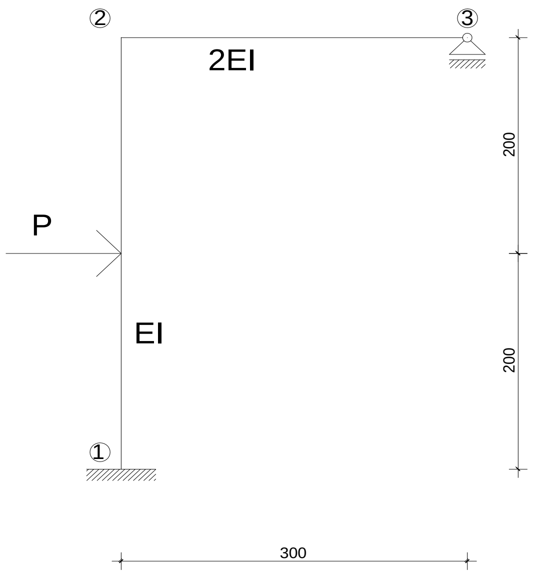
Ako se kraj *i* elementa (i, j_i) zaokrene za kut $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, na kraju j_i pojavljuje se moment čija je vrijednost

$$\Delta M_{j,i} = 2 \cdot k_{(i,j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)}.$$

Nakon uravnoteženja čvora *i* treba na drugi kraj svakog priključenog elementa dodati moment čija je vrijednost jednaka polovini vrijednosti momenta s kraja *i*. Dakle, prenosimo „pola momenta“, tako da je prijenosni koeficijent ½.

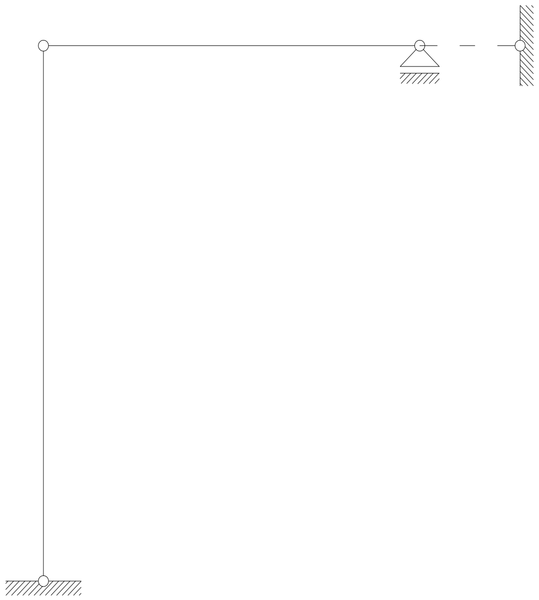
Proračun se nastavlja sve dok vrijednosti neuravnoteženih momenata koje se prenose na drugu stranu postanu dovoljno male da se mogu zanemariti. Konačne vrijednosti momenta dobivamo tako da na svakom kraju zbrojimo vrijednosti momenata – momenata upetosti, raspodijeljenih momenata i prenesenih momenata.

2.4. Crossov postupak – primjer



P = 100 kN

zglobna shema:

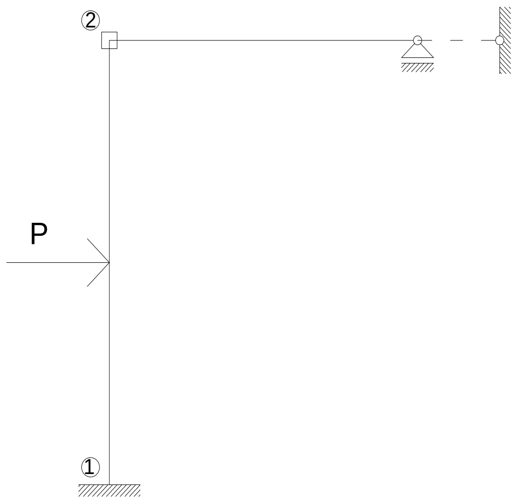


$S = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 3 = 1$

$u = ?$

-moguć jedan translacijski pomak

-momenti upetosti:



$$\overline{M}_{1,2} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = \frac{100 \cdot 2{,}0 \cdot 4}{16} = 50{,}0kNm$$

$$\overline{M}_{1,2} = -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = -\frac{100 \cdot 2{,}0 \cdot 4}{16} = -50{,}0kNm$$

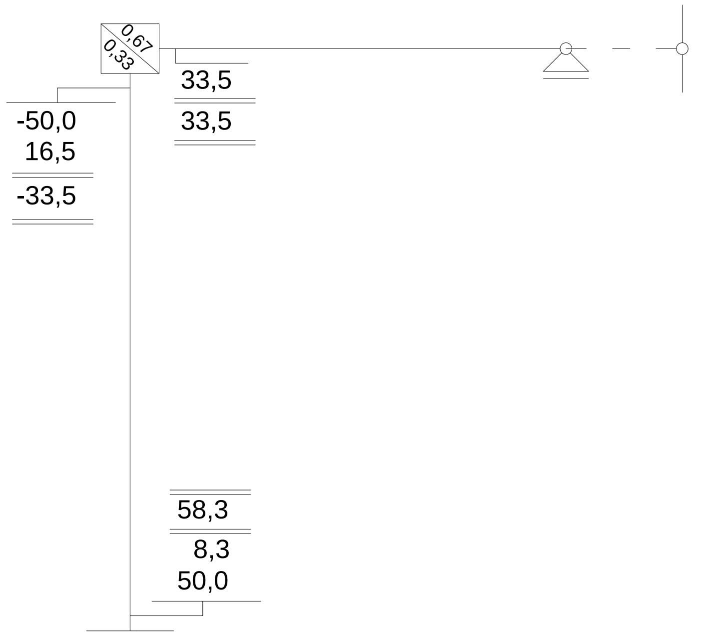
Razdjelni koeficijenti:

$$k_2 = k_{(1,2)} + \frac{3}{4} \cdot k_{(2,3)} = \frac{EI}{4{,}0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2EI}{3{,}0} = \frac{3EI}{4}$$

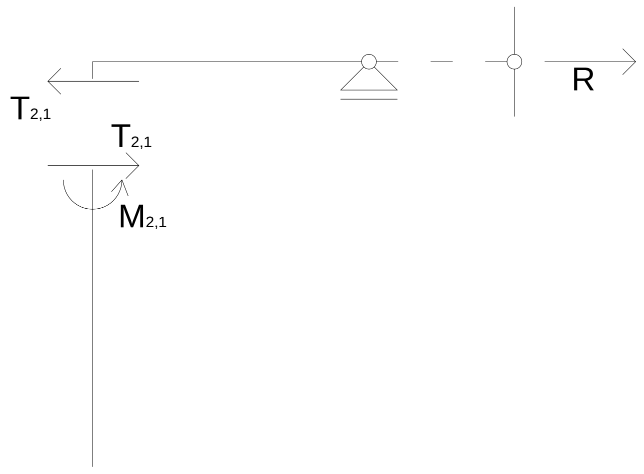
$$\mu_{2,1} = \frac{k_{(1,2)}}{k_2} = \frac{\frac{EI}{4{,}0}}{\frac{3EI}{4}} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

$$\mu_{2,3} = \frac{\frac{3}{4} k_{(1,2)}}{k_2} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2EI}{3{,}0}}{\frac{3EI}{4}} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

Razdjela momenata:



Reakcija u zamišljenoj vezi:



$$-T_{2,1} + R = 0$$

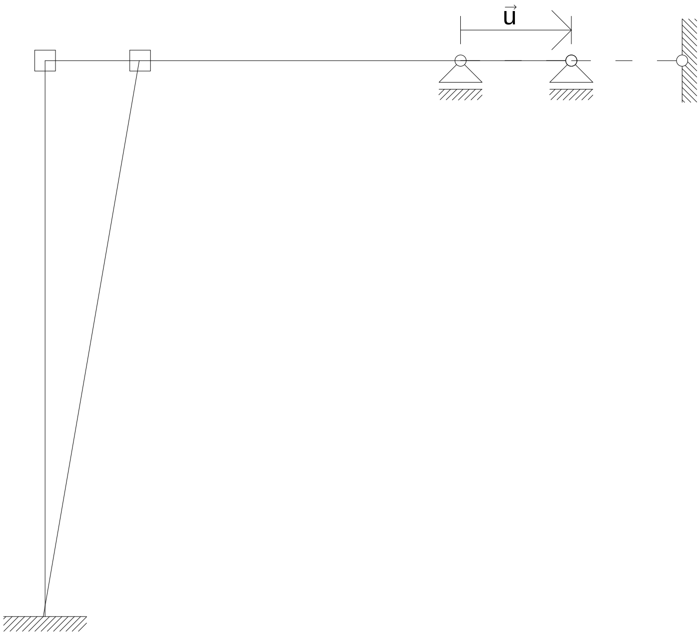
$$R = T_{2,1}$$

$$-l_{(1,2)} \cdot T_{2,1} + M_{2,1} + M_{1,2} - \frac{l_{(1,2)}}{2} \cdot P = 0$$

$$T_{2,1} = \frac{1}{l_{(1,2)}} \cdot (M_{2,1} + M_{1,2}) - \frac{1}{2} \cdot P = \frac{1}{4} \cdot (-33{,}5 + 58{,}3) - \frac{1}{2} \cdot 100 = -43{,}8kN$$

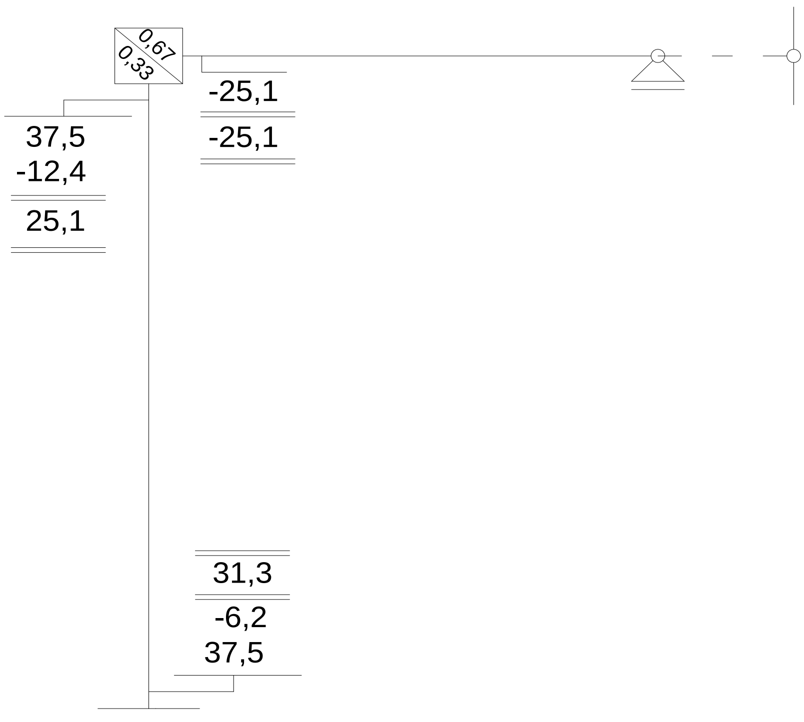
R = - 43,8 kN

Dodamo pomak $\bar{u}$:

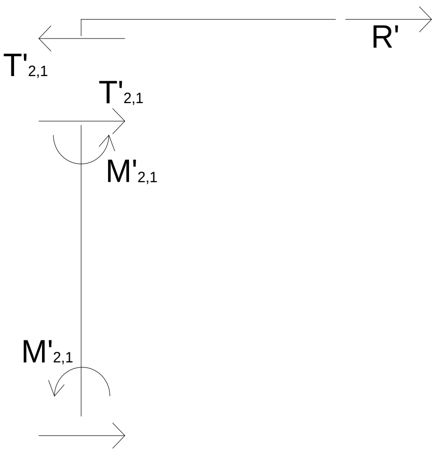


$$\bar{u} = \frac{100}{EI}$$

$$\overline{M_{1,2}} = \overline{M_{2,1}} = -6 \cdot k_{(1,2)} \cdot \bar{\psi}_{(1,2)} = -6 \cdot \frac{EI}{l_{(1,2)}} \cdot \left(-\frac{u}{l_{(1,2)}} \right) = 6 \cdot \frac{EI}{4{,}0} \cdot \frac{\frac{100}{EI}}{4{,}0} = 37{,}5 kNm$$



-reakcija u zamišljenoj vezi:



$$R' = T'_{2,1}$$

$$T'_{2,1} = \frac{1}{l_{(1,2)}} \cdot \left(M'_{1,2} + M'_{2,1}\right) = \frac{1}{4{,}0} \cdot (31{,}3 + 25{,}1) = 14{,}1kN$$

$$R + u \cdot R' = 0 \Rightarrow u = -\frac{R}{R'} = \frac{43{,}8}{14{,}1} = 3{,}106$$

Konačne vrijednosti momenta:

$$M_{1,2} = M_{1,2}^{Cr} + u \cdot M_{1,2}^{Cr_2}$$

$$M_{1,2} = M_{1,2}^{Cr} + u \cdot M_{1,2}^{Cr_2} = 58{,}3 + 3{,}106 \cdot 31{,}3 = 155{,}6kNm$$

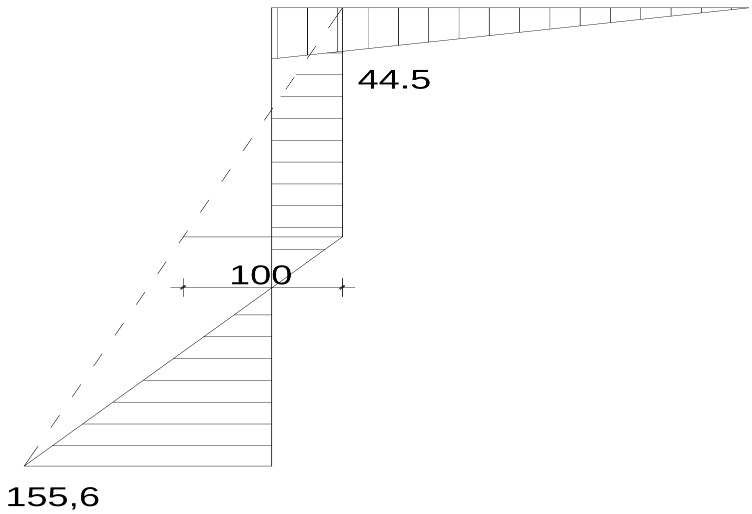
$$M_{2,1} = M_{2,1}^{Cr} + u \cdot M_{2,1}^{Cr_2} = -33{,}5 + 3{,}106 \cdot 25{,}1 = 44{,}5kNm$$

$$M_{2,3} = M_{2,3}^{Cr} + u \cdot M_{2,3}^{Cr_2} = 33{,}5 - 3{,}106 \cdot 25{,}1 = -44{,}5kNm$$

Vrijednost translacijskog pomaka:

$$u_{2,3}^{*} = u \cdot \bar{u} = 3{,}106 \cdot \frac{100}{3 \cdot 10^{7} \cdot 0{,}0054} = 0{,}00192m$$

Konačni M-dijagram:



3. Otto Werner i Pal Csonka

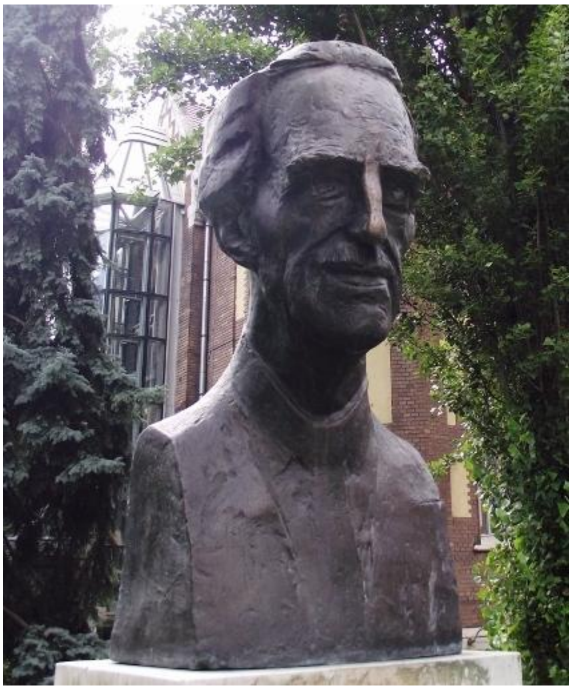
3.1. Životopis Otta Wernera

Otto Werner se rodio 1908. godine u Rumi u Srijemu, a umro je u Zagrebu 1981. godine. Studirao je građevinarstvo u Beču i na Tehničkom fakultetu u Zagrebu, gdje je 1931. godine diplomirao. Od 1933. do 1936. bio je asistent na Tehničkom fakultetu, a doktorirao je 1941. godine. Radio je u Arhitektonskom zavodu *Plan*, gdje se ponajviše bavio projektiranjem industijskih građevina. Vratio se na Tehnički fakultet te izabran za izvanrednog profesora za predmet *Teorija konstrukcija,* a od 1959. godine radi kao redovni profesor. Posebnu pozornost je posvećivao primjeni teorijskih znanja-često rezultata vlastitih istraživanja-u rješavanju praktičnih problema u projektiranju konstrukcija. Svi njegovi znanstveni radovi proizašli su iz konstuktorske prakse i u njoj našli široku primjenu. Autor je mnogih vrijednih konstruktorskih rješenja, koja su obogatila domaću i svjetsku građevinsku tehniku. Radovi su mu citirani u svjetskoj literaturi, naročito orginalna konstrukcija pod nazivom Wernerova ljuska.

Kao pedagog Werner je radio više od 25 godina. Na dodiplomskom i poslijediplomskom studiju predavao je predmete: Teorija konstukcija, Građevna statika, Teorija ploča i stijena, Betonske konstukcije i Betonski objekti.

Profesor Werner je pokazivao izuzetnu sposobnost za ispravnu prosudbu. Ponekad je samo gledajući nacrte i grafičke prikaze rezultata otkrivao pogreške u projektima i znanstvenim radovima. Nalazio je jednostavne putove za rješavanje problema koji su se činili vrlo teškima, pri čemu se nije trudio da rješenja budu „znanstveno“ precizna. Primjerice, armaturu u kratkim konzolama približno bi odredio crtajući „po osjećaju“ trajektorije naprezanja i rastavljajući sile u njihovim smjerovima.

3.2. Životopis Pala Csonke



Pal Csonka (1896.-1987. god) rođen je i umro u Budimpešti. Završio je gimnaziju, a zatim 1914. godine odlazi na dvije godine odsluživanja vojnog roka. Bio je student Arhitektonskog fakulteta, gdje je 1920. godine diplomirao. Kao inženjer bio je uključen u nekoliko natjecanja urbanizma, a 1923. god u natječaj za naselja dobio je drugu nagradu. Nakon toga je počeo raditi kao građevinski menadžer, 1928. godine položio je ispit za majstora graditelja, a od 1928. do 1936. predaje kao gost govornik Sveučilišta arhitekture na matematičkom odjelu. Poslije toga postaje docent na Odjelu za materijale, 1945. postaje načelnik tog odjela. Radio je i s umirovljenim snagama istraživačkog tima fakulteta, da bi od 1969. prešao u funkciju akademskog savjetnika. Za iznimna postignuća nagrađen je Kossuthovom nagradom 1954. godine.

3.3. Postupak Werner-Csonke – opis postupka

Postupak Werner-Csonke je teorijski namijenjen za proračun simetričnih okvira. Najprije se Crossovim postupkom uravnotežuju momenti u čvorovima. Istim načinom kao kod Crossove metode, računaju se razdjelni koeficijenti te se provodi razdioba momenata po čvorovima dok neuravnoteženi moment bude približno jednak nuli.

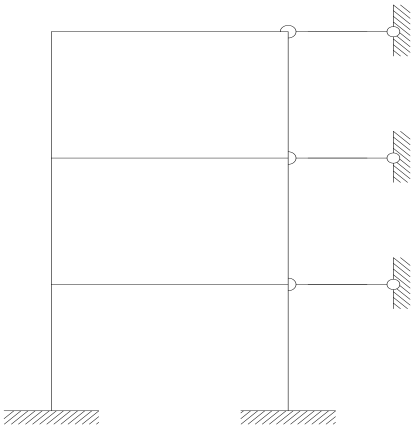
Nakon tog koraka, poništavamo zamišljanje reakcije u vezama koje se dodaju kako bi se spriječio pomak, tako da dodamo silu koja djeluje u istoj točku, i istog je intenziteta, ali različitog predznaka. Te zamišljene reakcije se računaju tako da se izdvoji dio sistema i jednostavnim jednadžbama sume sila i sume momenata oko neke točke, dobivamo koliko one iznose. Izračunavši ih, znamo koliko iznose i sile suprotnog predznaka te njima opterećujemo sistem i uvodimo poluokvir. Upravo zbog uvođenja poluokvira, sistemi koji se računaju ovim postupkom moraju biti simetrični.

Obzirom da je sada uveden drugi sistem, moramo definirati krutosti štapova i greda, kako bismo definirali sami poluokvir i izračunali razdjelne koeficijente. Krutosti ovise o tome koliko grede i stupovi u poluokviru predstavljaju, odnosno pokrivaju greda i stupova iz glavnog okvira. Dakle, ako npr. jedan stup u poluoviru prestavlja 3 stupa u okviru, njegova je krutost suma krutosti tih triju stupova.

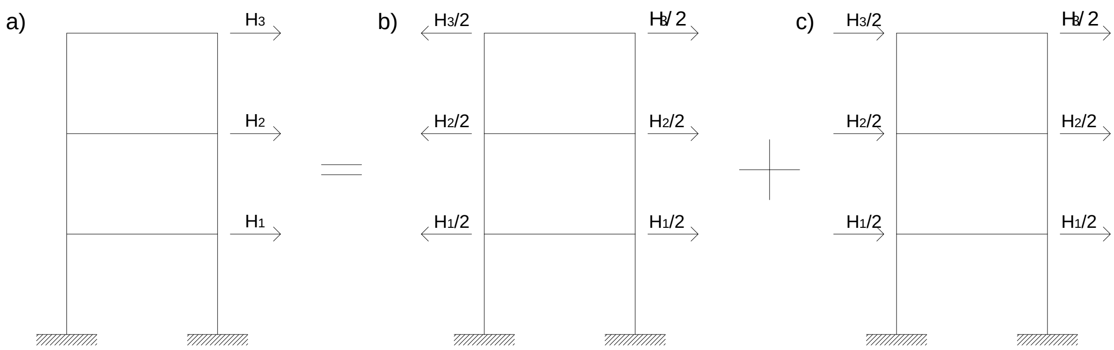
Sada treba ponoviti postupak uravnotežavanja momenata na poluokviru dok konačni neuravnoteženi moment ne bude približno nula, pritom je prijenosni koeficijent -1.

Na samom kraju, konačne momente iz poluokvira vratimo na početni okvir pri čemu treba paziti na krutosti greda i stupova u poluokviru i okviru. Konačni moment računa se kao suma momenta koji se na početku dobije Crossovim postupkom i momenta koji dobijemo postupkom Werner-Csonke.

3.4. Izvodi izraza

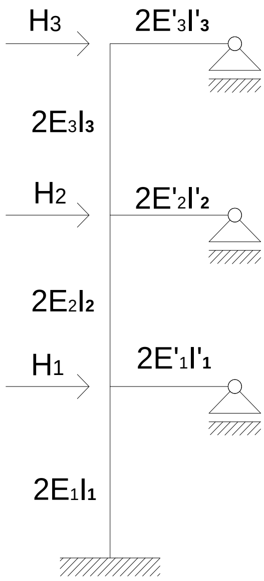


Na prikazanom okviru spriječeni su pomaci etaža, tako da sustav možemo riješiti Crossovim postupkom. U dodatnim će se vezama pojaviti reaktivne sile. Obzirom da u početnom sistemu ne postoje te veze ni reakcije, opteretit ćemo okvir samo silama koje imaju iste intenzitete kao reakcije i djeluju na istim pravcima, ali suprotne orjentacije.



Kod antimetričnog opterećenja polje pomaka simetrične konstrukcije je antimetrično, što znači da su kutovi zaokreta i horizontalni pomak čvora na jednoj etaži jednaki i da je vrijednost vertikalnog pomaka polovišta raspona grede jednaka nuli i tu je točka inflekcije progibne linije. U točki infleksije zakrivljenost je također nula, kao i moment savijanja.

Upravo zbog toga umjesto cijelog sistema možemo promatrati samo jednu polovicu, uz odgovarajući rubni uvjet u osi simetriji – pomični zglob koji sprečava vertikalni pomak, a dopušta horizontalni i rotaciju.



Dakle, umjesto okvira uvodimo poluokvir koji je „nastao preklapanjem" okvira oko osi simetrije, zbog čega se momenti tromosti greda i stupova udvostručuju. U čvorovima poluokvira i dalje djeluju iste sile kao u čvorovima okvira.

Prvi korak je proračun vrijednosti momenata upetosti. Pretpostavimo da su spriječeni zaokreti čvorova, ali horizontalni pomaci su mogući zbog pomičnog ležaja.

Vrijednost momenata upetosti u stupovima izračunavamo iz poznatih vrijednosti poprečnih sila. Obzirom da je poluokvir opterećen samo u čvorovima, vrijednosti poprečnih sila u pojedinim stupovima su konstante, pa možemo pisati

$$T_{i,i-1} = -T_{i-1,i} = T_i \,.$$

Točka infleksije progibne linije je u polovištu visine etaže i u njoj je vrijednost momenta savijanja nula, pa vrijedi da je $\overline{M}_{i,i-1} = \overline{M}_{i-1,i}$.

Jednadžba ravnoteže momenta oko kraja *i-1* stupa glasi

$$-T_i \cdot h_1 + \overline{M}_{i,i-1} + \overline{M}_{i-1,i} = 0 \,,$$

iz čega slijedi

$$\overline{M}_{i,i-1} = \overline{M}_{i-1,i} = \frac{1}{2} \cdot T_i \cdot h_i \,.$$

Vrijednost sile T_i dobivamo iz ravoteže horizontalnih sila koje djeluju na dio poluokvira iznad presjeka.

U nastavku proračuna uravnotežujemo čvor po čvor, pa treba definirati razdjelne i prijenosne koeficijente.

Grede u osnovnom sistemima su jednostrano upete, pa za prirast vrijednosti momenta na upetome kraju zbog zaokreta čvora vrijedi izraz

$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = 3 \cdot k_{i,g} \cdot \Delta k_{i,g} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)},$$

pri čemu je $k_{i,g}$ koeficijent krutosti grede poluokvir:

$$k_{i,g} = \frac{E_i^{'} \cdot (2 \cdot I_i^{'})}{\frac{l}{2}} = 4 \cdot \frac{E_i^{'} \cdot I_i^{'}}{l} = 4 \cdot k_{(i1,i2)}.$$

Prirast vrijednosti momenta možemo izraziti i pomoću koeficijenta krutosta grede izvornog oblika:

$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = 12 \cdot k_{(i_1,i_2)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)}.$$

S obzirom da horizontalni pomaci osnovnog sistema nisu spriječeni, kod izvoda izraza za vrijednosti momenta u stupu možemo zamisliti da na kraju priključenom u čvor, stup ima krutu pomičnu vezu koja omogućava pomak okomito na njegovu os. Veza između prirasta vrijednosti momenta na krajevima i prirasta kuta zaokreta kraja *i* dana je izrazima

$$\Delta M_{i,i-1}^{(n_{i_i}+1)} = k_{(i_1-1,i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)},$$

$$\Delta M_{i-1i}^{(n_{i_i}+1)} = -k_{(i_1-1,i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} \quad ,$$

pri čemu je $k_{(i\text{-}1,i)}$ koeficijent krutosti stupa poluokvira:

$$k_{(i_1-1,i)} = \frac{E_i(2I_i)}{h_i} = 2\frac{E_i I_i}{h_i} = 2k_{(i_1-1,i_1)}.$$

Zakretanjem za kut $\Delta\varphi_i^{(n_i)}$ uravnotežujemo čvor *i* na koji djeluje rezidualni moment sa vrijednosti $m_i^{(n_i-1)}$:

$$-\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i-1}^{(n_i+1)} - \Delta M_{i,i+1}^{(n_i+1)} + m_i^{(n_i)} = 0,$$

$$(3k_{i,g} + k_{(i-1,i)} + k_{(i,i+1)}) \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = m_i^{(n_i)},$$

$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{k_i^w}.$$

Izraz za prirast kuta $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$ možemo sada uvrstiti u izraze za vrijednosti momenta na krajevima ležaja grede i stupa:

$$\Delta M_{i,g}^{(n_i+1)} = \frac{3k_{i,g}}{k_i^w} \cdot m_i^{(n_i)} = \mu_{i,g} \cdot m_i^{(n_i)},$$

$$\Delta M_{i,i-1}^{(n_{i_i}+1)} = \frac{k_{i-1,i}}{k_i^w} \cdot m_i^{(n_i)} = \mu_{i,i-1} \cdot m_i^{(n_i)},$$

$$\Delta M_{i,i+1}^{(n_{i_i}+1)} = \frac{3k_{i,i+1}}{k_i^w} \cdot m_i^{(n_i)} = \mu_{i,i+1} \cdot m_i^{(n_i)}.$$

Prema tome, razdjelni koeficijenti za čvor *i* su

$$\mu_{i,g} = \frac{3k_{i,g}}{k_i^w},$$

$$\mu_{i,i-1} = \frac{k_{i-1,i}}{k_i^w},$$

$$\mu_{i,i+1} = \frac{k_{i+1,i}}{k_i^w}.$$

Ti koeficijenti se mogu izražavati i pomoću koeficijenata krutosti grede i stupova izvornog oblika. U ovom slučaju, izrazi glase:

$$k_i^w = 12k_{(i_1,i_2)} + 2k_{(i_1,-1i_1)} + 2k_{(i_1,i_1+1)},$$

$$\mu_{i,g} = \frac{12k_{i_1,i_2}}{k_i^w},$$

$$\mu_{i,g} = \frac{2k_{(i_1-1,i_{12})}}{k_i^w},$$

$$\mu_{i,g} = \frac{2k_{(i_1,i_{11}+1)}}{k_i^w}.$$

Zbroj momenta na krajevima jednog stupa nazivamo momentom etaže; njegova je vrijednost

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i-1)}.$$

Iz jednadžbe ravnoteže momenta oko dna stupa slijedi

$$-T_i \cdot h_i + M_{i-1,i}^{(n_i+1)} + M_{i,i-1}^{(n_i+1)} = -T_1 \cdot h_i + M_{e,i}^{(n_i+1)} = 0,$$

$$M_{e,i}^{(n_i+1)} = T_i \cdot h_i,$$

što znači da vrijednosti momenta etaže tijekom proračuna moraju ostati konstantne.

Kako je poluovkir nastao preklapanjem polovica izvornog oblika, ukupne momente s poluokvira treba kod „vraćanja“ na okvir raspoloviti:

$$M_{i1,i2} = M_{i2i1} = \frac{1}{2} \cdot M_{i,g},$$

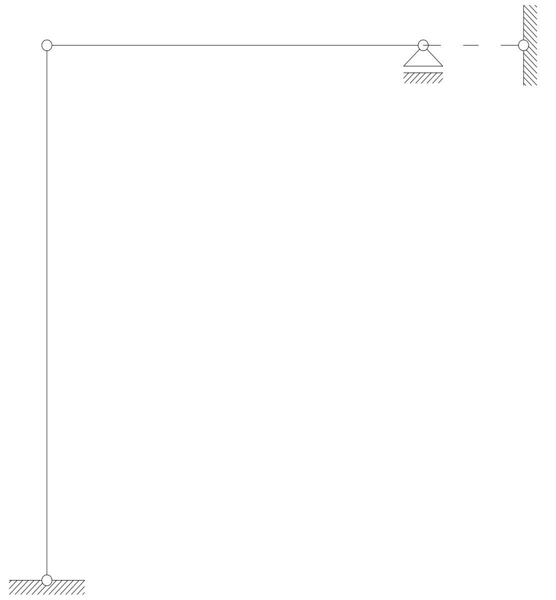
$$M_{i1,i1-1} = M_{i2i2-1} = \frac{1}{2} \cdot M_{i,1-1},$$

$$M_{i1,i1+1} = M_{i2,i+2} = \frac{1}{2} \cdot M_{i,1+1}.$$

3.5. Postupak Werner-Csonke – primjer

P = 100 kN

zglobna shema:

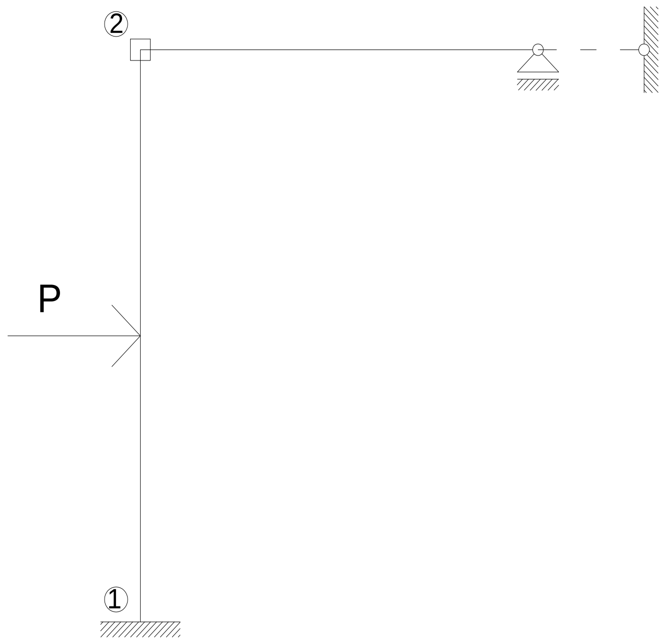


$S = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 3 = 1$

$u = ?$

-moguć jedan translacijski pomak

-momenti upetosti:



$$\overline{M}_{1,2} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = \frac{100 \cdot 2{,}0 \cdot 4}{16} = 50{,}0 kNm$$

$$\overline{M}_{1,2} = -\frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2} = -\frac{100 \cdot 2{,}0 \cdot 4}{16} = -50{,}0 kNm$$

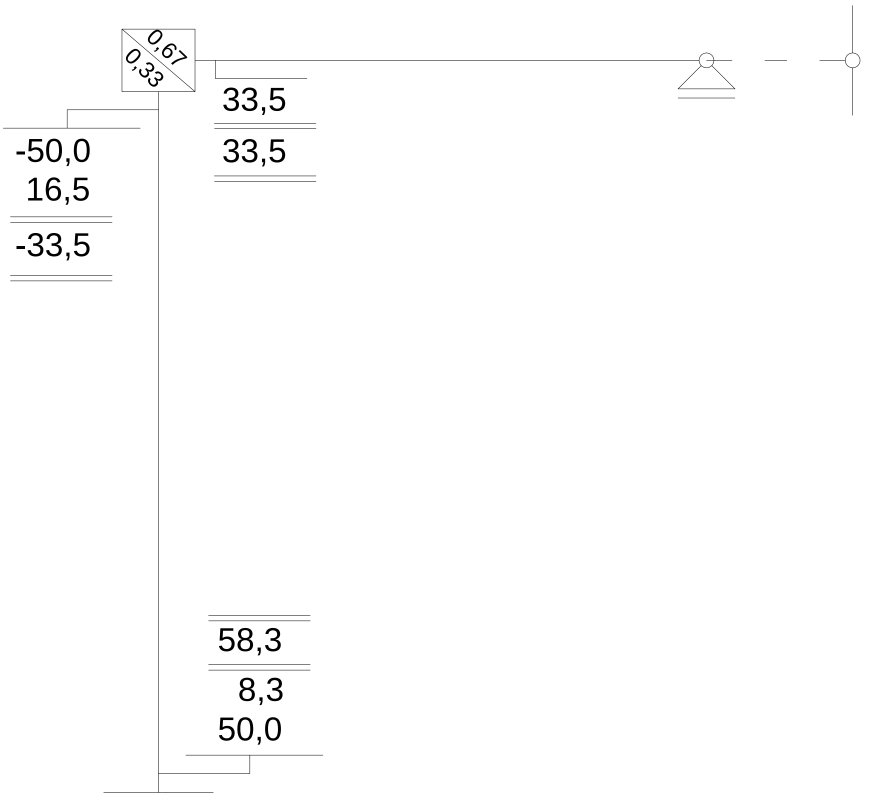
Razdjelni koeficijenti:

$$k_2 = k_{(1,2)} + \frac{3}{4} \cdot k_{(2,3)} = \frac{EI}{4{,}0} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2EI}{3{,}0} = \frac{3EI}{4}$$

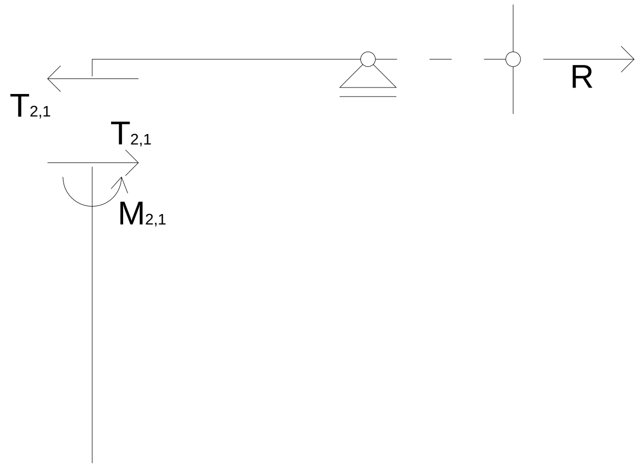
$$\mu_{2,1} = \frac{k_{(1,2)}}{k_2} = \frac{\frac{EI}{4{,}0}}{\frac{3EI}{4}} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

$$\mu_{2,3} = \frac{\frac{3}{4} k_{(1,2)}}{k_2} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2EI}{3{,}0}}{\frac{3EI}{4}} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

Razdjela momenata



Reakcija u zamišljenoj vezi:



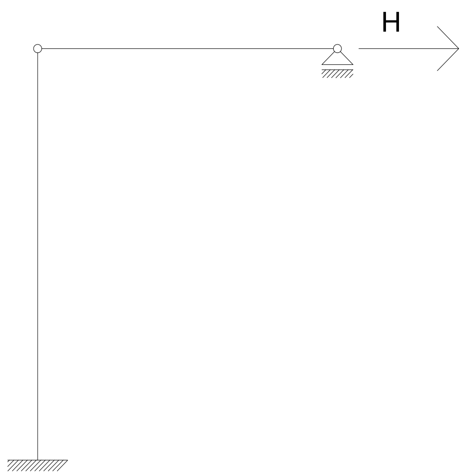
$$-T_{2,1}+R=0$$
$$R=T_{2,1}$$

$$-l_{(1,2)}\cdot T_{2,1}+M_{2,1}+M_{1,2}-\frac{l_{(1,2)}}{2}\cdot P=0$$
$$T_{2,1}=\frac{1}{l_{(1,2)}}\cdot(M_{2,1}+M_{1,2})-\frac{1}{2}\cdot P=\frac{1}{4}\cdot(-33{,}5+58{,}3)-\frac{1}{2}\cdot 100=-43{,}8kN$$

R = - 43,8 kN

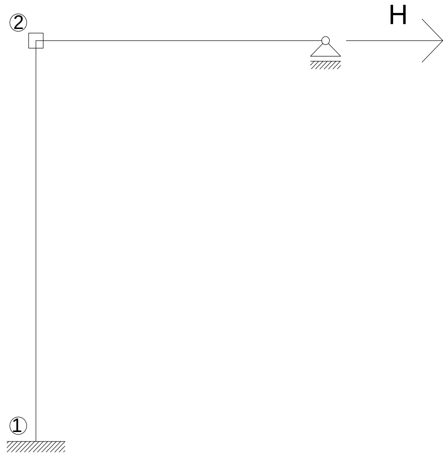
Daljnji postupak, radi se metodom Werner-Csonke.

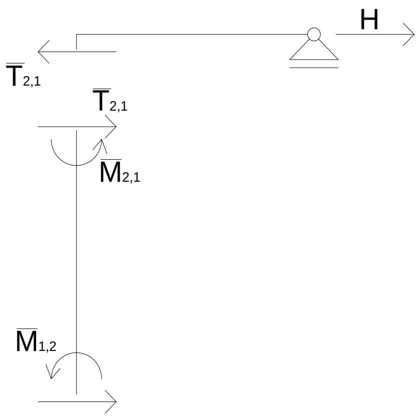
Sistem opterećujemo silom koja je istog intenziteta kao reakcija, ali su suprotnog predznaka:



H= - R = 43,8 kN

Momenti upetosti:





$$-l_{(1,2)} \cdot \overline{T}_{2,1} + \overline{M}_{2,1} + \overline{M}_{1,2} = 0$$

$$\overline{M}_{1,2} = \overline{M}_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{T}_{2,1} \cdot l_{(1,2)}$$

$$-\overline{T}_{2,1} + H = 0$$

$$-\overline{T}_{2,1} + H = 43{,}8kN$$

$$\overline{M}_{1,2} = \overline{M}_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot 43{,}8 \cdot 4{,}0 = 87{,}6kNm$$

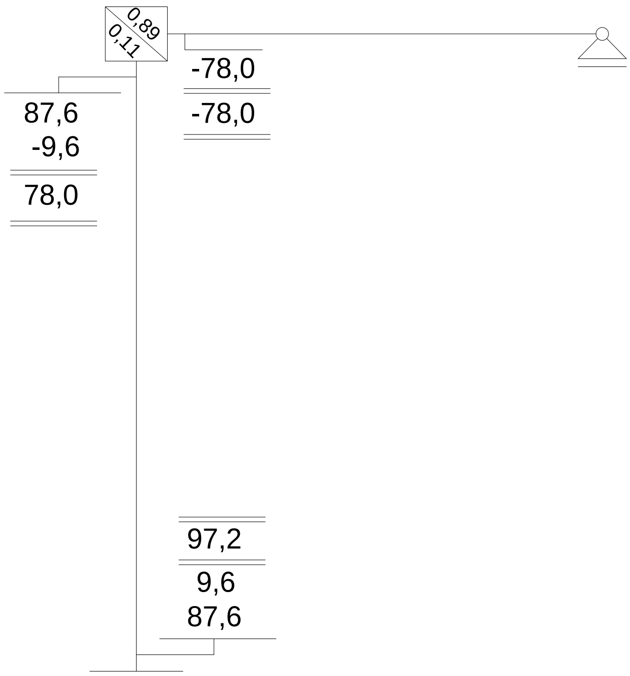
Razdjelni koeficijenti:

$$k_2^w = k_{(1,2)} + 3k_{(2,3)} = \frac{EI}{4,0} + 3 \cdot \frac{2EI}{3,0} = \frac{9 \cdot EI}{4}$$

$$\mu_{2,1}^w = \frac{k_{(1,2)}}{k_2^w} = \frac{\frac{EI}{4,0}}{\frac{9EI}{4}} = \frac{1}{9} = 0,11$$

$$\mu_{2,3}^w = \frac{3k_{(2,3)}}{k_2^w} = \frac{3 \cdot \frac{2EI}{3}}{\frac{9EI}{4}} = \frac{8}{9} = 0,89$$

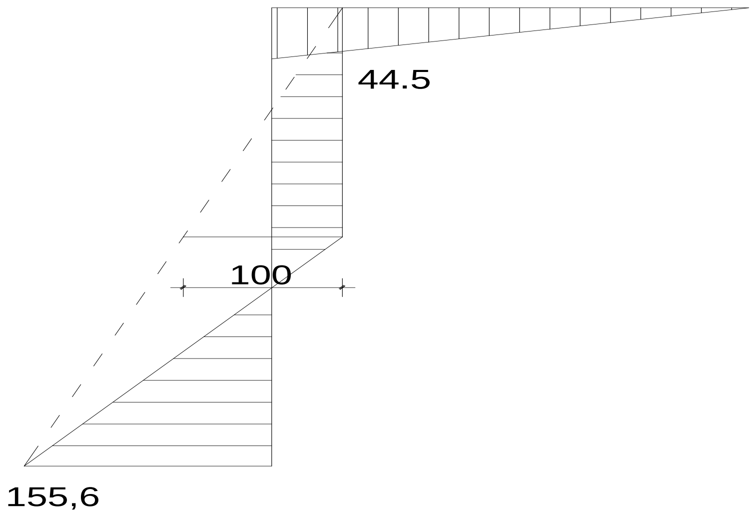
Raspodjela momenata:



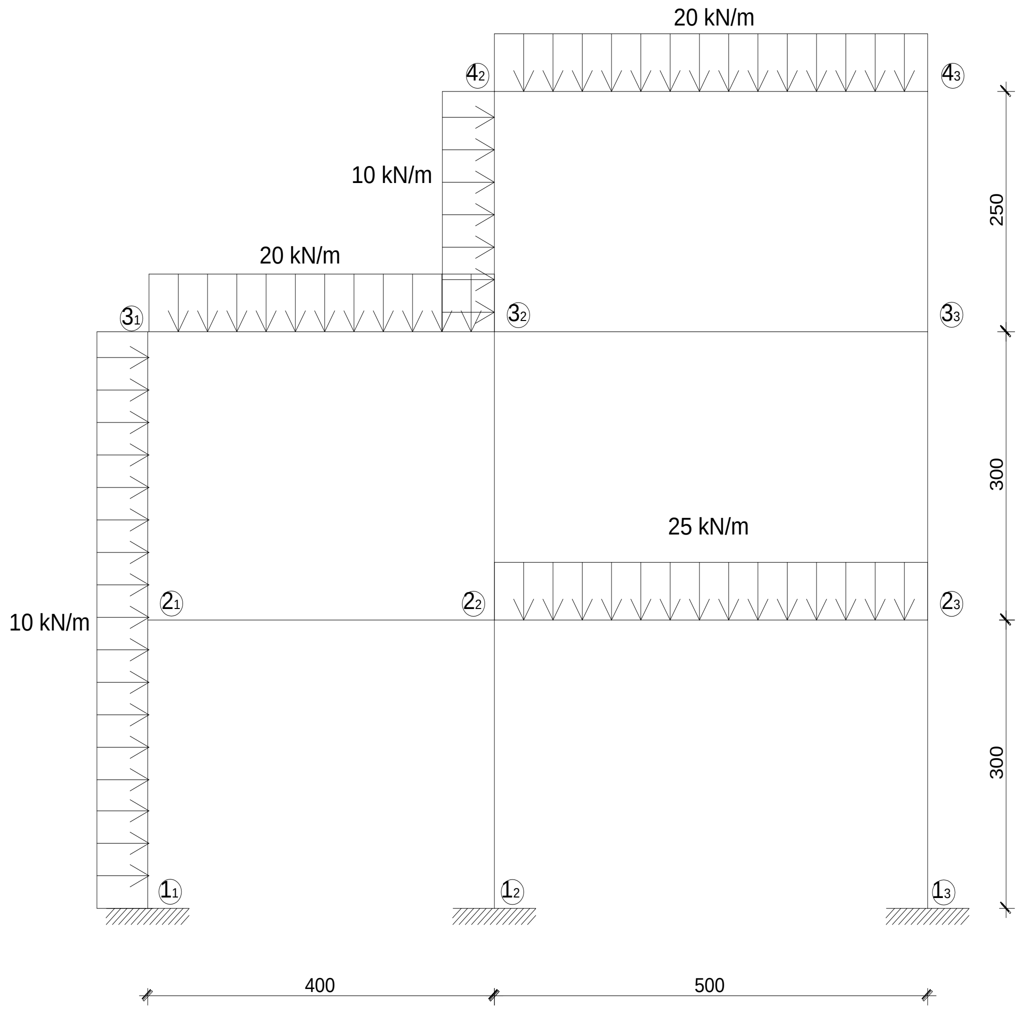
Konačne vrijednosti momenta se izračunaju pomoću izraza: $M = M^{Cr} + M^{W}$

$$M_{1,2} = M_{1,2}^{Cr} + M_{1,2}^{w} = 58,3 + 97,2 = 155,5kNm$$
$$M_{2,1} = M_{2,1}^{Cr} + M_{2,1}^{w} = -33,5 + 78,0 = 44,5kNm$$
$$M_{2,3} = M_{2,3}^{Cr} + M_{2,3}^{w} = 33,5 - 78 = -44,5Nm$$

Konačni M-dijagram:

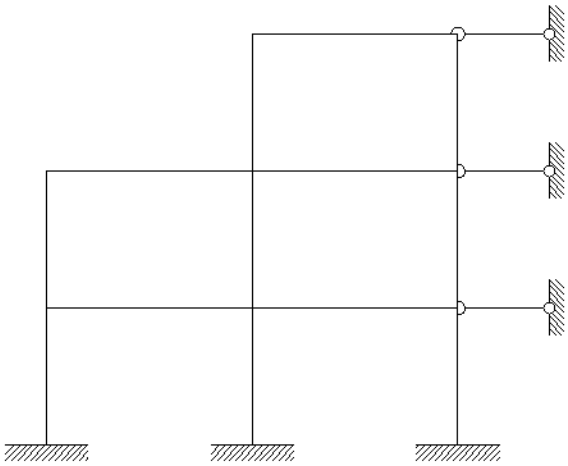


4. Usporedba postupaka Crossa i Werner-Csonke



4.1. Crossov postupak

Na zadani okvir, dodamo veze kako bismo spriječili sve pomake, time stvorili nepomični sistem, te računamo momente upetosti.



Koeficijenti krutosti elemenata su:

$$k_{1_1 2_1} = k_{2_1 3_1} = k_{1_3 2_3} = k_{2_3 3_3} = \frac{EI}{3,0},$$

$$k_{3_3 4_3} = k_{3_2 4_2} = \frac{EI}{2,5},$$

$$k_{2_1 2_2} = k_{3_1 3_2} = \frac{6EI}{4,0} = \frac{3EI}{2},$$

$$k_{2_2 2_3} = k_{3_2 3_3} = \frac{8EI}{5,0},$$

$$k_{4_2 4_3} = \frac{4EI}{5,0},$$

$$k_{2_2 3_2} = k_{1_2 2_2} = \frac{2EI}{3,0}.$$

Koeficijenti krutosti čvorova su:

$$k_{2_1} = k_{2_1 1_1} + k_{2_1 3_1} + k_{2_1 2_2} = \frac{EI}{3,0} + \frac{EI}{3,0} + \frac{3EI}{2,0} = 2,17EI\ ,$$

$$k_{3_1} = k_{3_1 2_1} + k_{3_1 3_2} = \frac{EI}{3,0} + \frac{3EI}{2,0} = 1,83EI\ ,$$

$$k_{2_2} = k_{2_2 2_1} + k_{2_2 2_3} + k_{2_2 1_2} + k_{2_2 3_2} = \frac{3EI}{2,0} + \frac{8EI}{5,0} + \frac{2EI}{3,0} + \frac{2EI}{3,0} = 4,43EI\ ,$$

$$k_{3_2} = k_{3_2 3_1} + k_{3_2 2_2} + k_{3_2 4_2} + k_{3_2 3_3} = \frac{3EI}{2,0} + \frac{2EI}{3,0} + \frac{1EI}{2,5} + \frac{8EI}{5,0} = 4,2EI\ ,$$

$$k_{4_2} = k_{4_2 3_2} + k_{4_2 4_3} = \frac{EI}{2,5} + \frac{4EI}{5,0} = 1,2EI\ ,$$

$$k_{2_3} = k_{2_3 2_2} + k_{2_3 1_3} + k_{2_3 3_3} = \frac{8EI}{5,0} + \frac{EI}{3,0} + \frac{EI}{3,0} = 2,27EI\ ,$$

$$k_{3_3} = k_{3_3 2_3} + k_{3_3 3_2} + k_{3_3 4_3} = \frac{EI}{3,0} + \frac{8EI}{5,0} + \frac{EI}{2,5} = 2,33EI\ .$$

Razdjelni koeficijenti u čvorovima su:

$$\mu_{2_1 1_1} = \frac{\frac{1}{3}}{2,17} = 0,155 \qquad \mu_{2_1 2_2} = \frac{\frac{3}{2}}{2,17} = 0,69$$

$$\mu_{2_1 3_1} = \frac{\frac{1}{3}}{2,17} = 0,155 \qquad \mu_{3_1 3_2} = \frac{\frac{3}{2}}{1,83} = 0,82\ ,$$

$$\mu_{3_1 2_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1,83} = 0,18 \qquad \mu_{2_2 2_1} = \frac{\frac{3}{2}}{4,43} = 0,34$$

$$\mu_{2_2 3_2} = \frac{\frac{2}{3}}{4,43} = 0,15 \qquad \mu_{2_2 2_3} = \frac{\frac{8}{5}}{4,43} = 0,36$$

$$\mu_{2_2 1_2} = \frac{\frac{2}{3}}{4,43} = 0,15 \qquad \mu_{3_2 2_2} = \frac{\frac{2}{3}}{4,2} = 0,16$$

$$\mu_{3_2 3_3} = \frac{\frac{8}{5}}{4,2} = 0,38 \qquad \mu_{3_2 4_2} = \frac{\frac{1}{2,5}}{4,2} = 0,1$$

$$\mu_{3_2 3_1} = \frac{\frac{3}{2}}{4,2} = 0,36 \qquad \mu_{4_2 4_3} = \frac{\frac{4}{5}}{1,2} = 0,67$$

$$\mu_{4_2 3_2} = \frac{\frac{1}{2,5}}{1,2} = 0,33 \qquad \mu_{2_3 2_2} = \frac{\frac{8}{5}}{2,27} = 0,70$$

$$\mu_{2_3 3_3} = \frac{\frac{1}{3}}{2,27} = 0,15 \qquad \mu_{2_3 1_3} = \frac{\frac{1}{3}}{2,27} = 0,15$$

$$\mu_{3_3 2_3} = \frac{\frac{1}{3}}{2,33} = 0,141 \qquad \mu_{3_3 3_2} = \frac{\frac{8}{5}}{2,33} = 0,687$$

$$\mu_{3_3 4_3} = \frac{\frac{1}{2,5}}{2,33} = 0,172 \qquad \mu_{4_3 3_3} = \frac{\frac{1}{2,5}}{1,2} = 0,33$$

$$\mu_{4_3 3_3} = \frac{\frac{4}{5}}{1,2} = 0,67$$

Prvi korak Crossovog postupka

Momenti upetosti:

$$\overline{M_{1_1 2_1}} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{10 \cdot 3^2}{12} = 7{,}5 kNm,$$

$$\overline{M_{2_1 1_1}} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{10 \cdot 3^2}{12} = -7{,}5 kNm,$$

$$\overline{M_{2_1 3_1}} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{10 \cdot 3^2}{12} = 7{,}5 kNm,$$

$$\overline{M_{3_1 2_1}} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{10 \cdot 3^2}{12} = -7{,}5 kNm,$$

$$\overline{M_{3_1 3_2}} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{20 \cdot 4^2}{12} = 26{,}67 kNm,$$

$$\overline{M_{3_2 3_1}} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{20 \cdot 4^2}{12} = -26{,}67 kNm,$$

$$\overline{M_{3_2 4_2}} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{10 \cdot 2{,}5^2}{12} = 5{,}21 kNm,$$

$$\overline{M_{4_2 3_2}} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{10 \cdot 2{,}5^2}{12} = -5{,}21 kNm,$$

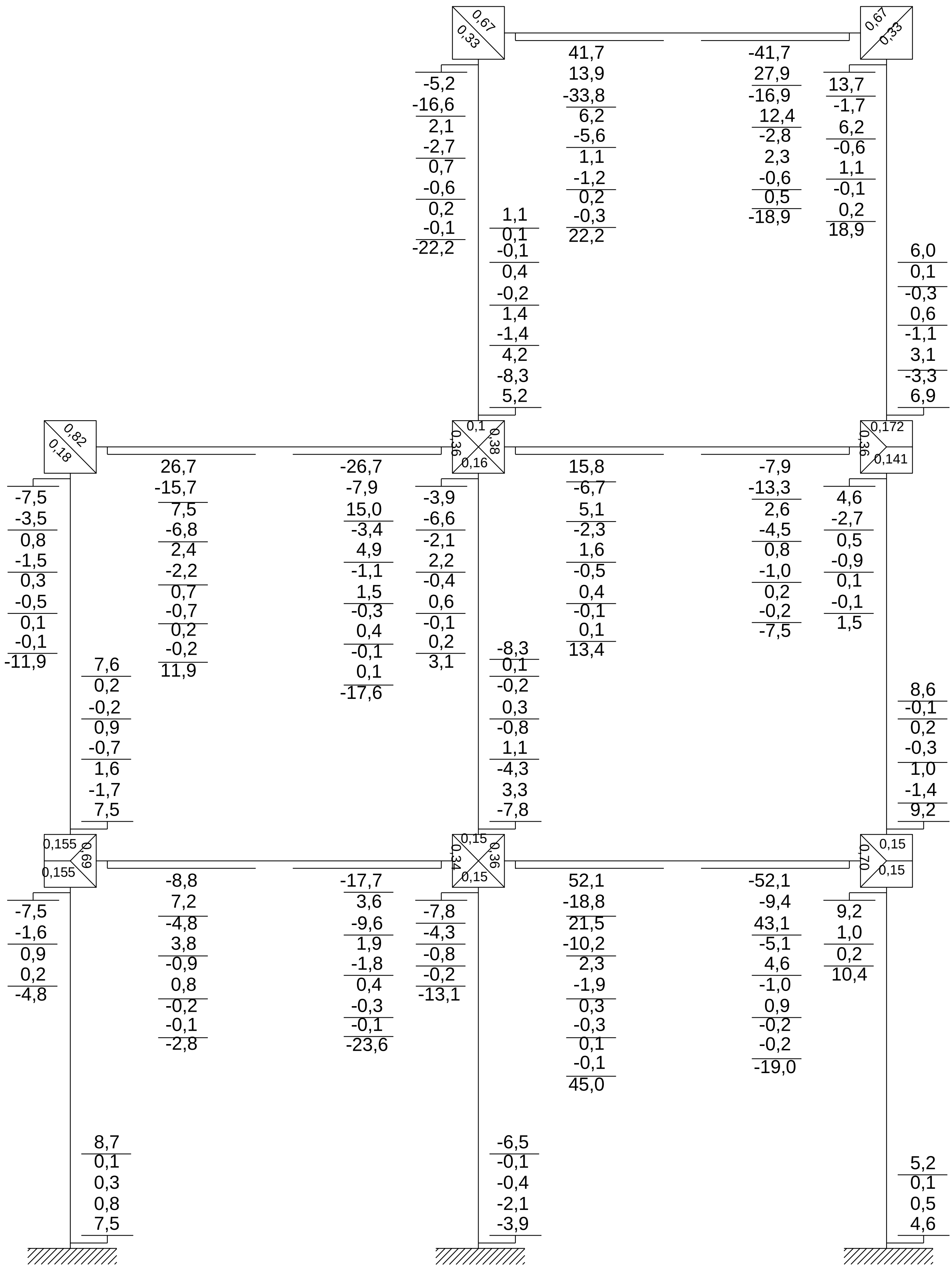
$$\overline{M_{4_2 4_3}} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{20 \cdot 5{,}0^2}{12} = 41{,}67 kNm,$$

$$\overline{M_{4_3 4_2}} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{20 \cdot 5{,}0^2}{12} = -41{,}67 kNm,$$

$$\overline{M_{2_2 2_3}} = \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{25 \cdot 5{,}0^2}{12} = 52{,}08 kNm,$$

$$\overline{M_{2_3 2_2}} = -\frac{q \cdot l^2}{12} = -\frac{25 \cdot 5{,}0^2}{12} = -52{,}08 kNm.$$

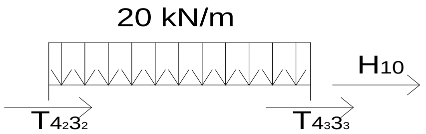
Iteracija na zadanom okviru (od vanjskih djelovanja):



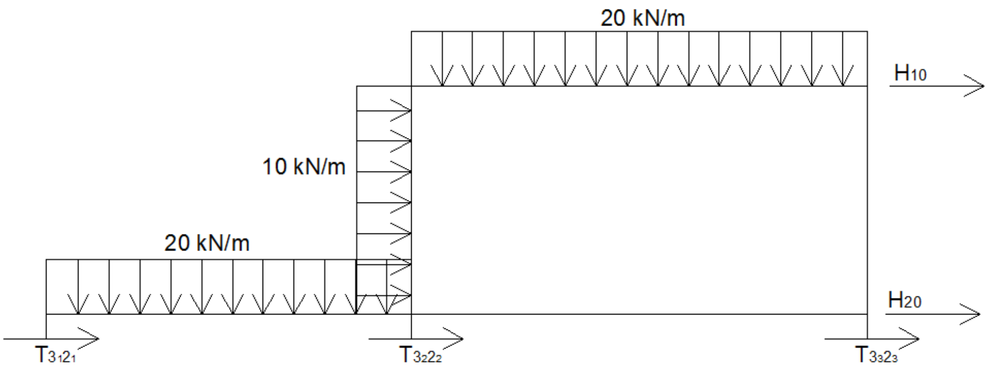
Redoslijed uravnoteženja čvorova:

$$2_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 4_3 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 2_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 4_3 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 2_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 4_3 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 2_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 3_2$$

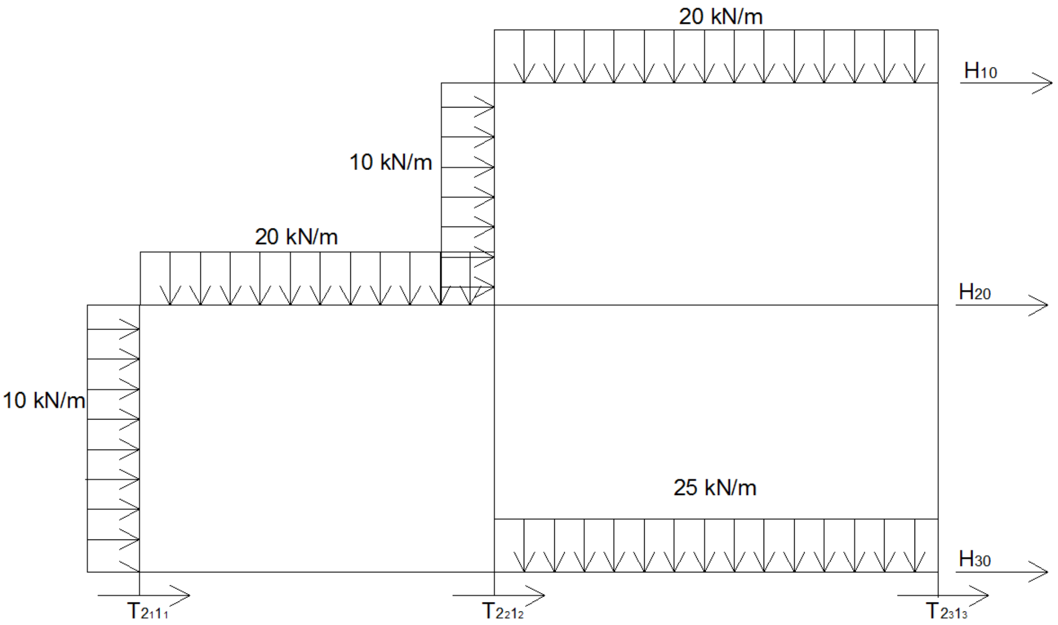
Reakcije od vanjskog opterećenja:



$$T_{4_2 3_2} = \frac{10 \cdot \frac{2{,}5^2}{2} + 22{,}2 - 1{,}1}{2{,}5} = 20{,}94kN$$
$$T_{4_3 3_3} = \frac{-18{,}9 - 6{,}0}{2{,}5} = -9{,}96kN$$
$$20{,}94 - 9{,}96 + H_{10} = 0$$
$$H_{10} = -10{,}98kN$$



$$T_{3_1 2_1} = \frac{10 \cdot \frac{3^2}{2} - 7{,}6 + 11{,}9}{3{,}0} = 16{,}33kN$$
$$T_{3_2 2_2} = \frac{-3{,}1 + 8{,}3}{3{,}0} = 1{,}73kN$$
$$T_{3_3 2_3} = \frac{-1{,}5 - 8{,}6}{3{,}0} = -3{,}37kN$$
$$10 \cdot 2{,}5 + 16{,}33 + 1{,}73 - 3{,}37 - 10{,}98 + H_{20} = 0$$
$$H_{20} = -28{,}71kN$$



$$T_{2_1 1_1} = \frac{4{,}8 - 8{,}7 + 10 \cdot 3 \cdot 1{,}5}{3} = 13{,}7 kN$$

$$T_{2_2 1_2} = \frac{13{,}1 + 6{,}5}{3} = 6{,}53 kN$$

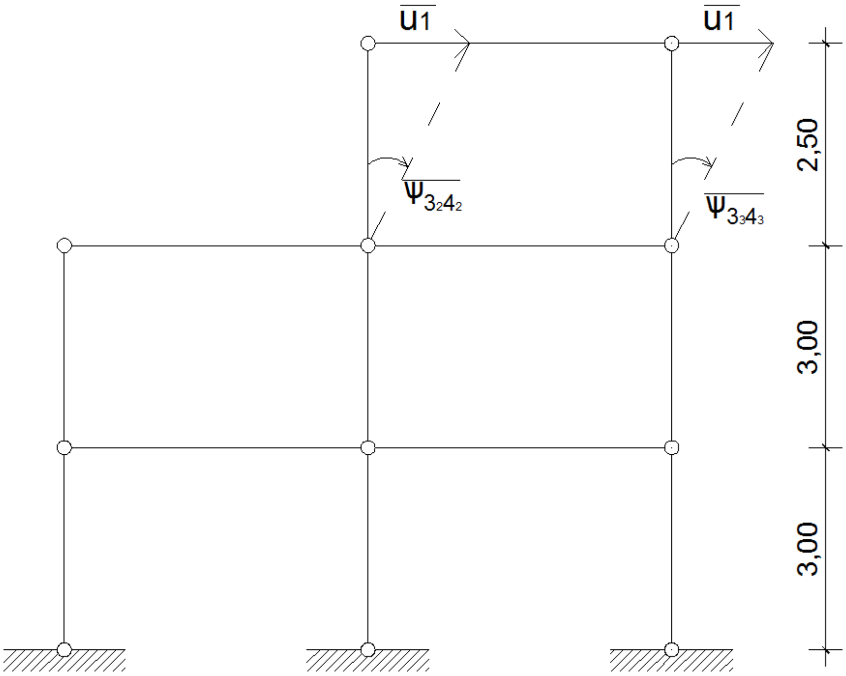
$$T_{2_3 1_3} = \frac{-10{,}4 - 5{,}2}{3} = -5{,}2 kN$$

$$10 \cdot 2{,}5 + 10 \cdot 3 + 13{,}7 + 6{,}53 - 5{,}2 - 10{,}98 - 28{,}71 + H_{30} = 0$$

$$H_{30} = -30{,}34 kN$$

Drugi korak Crossovog postupka (pomak u_1)

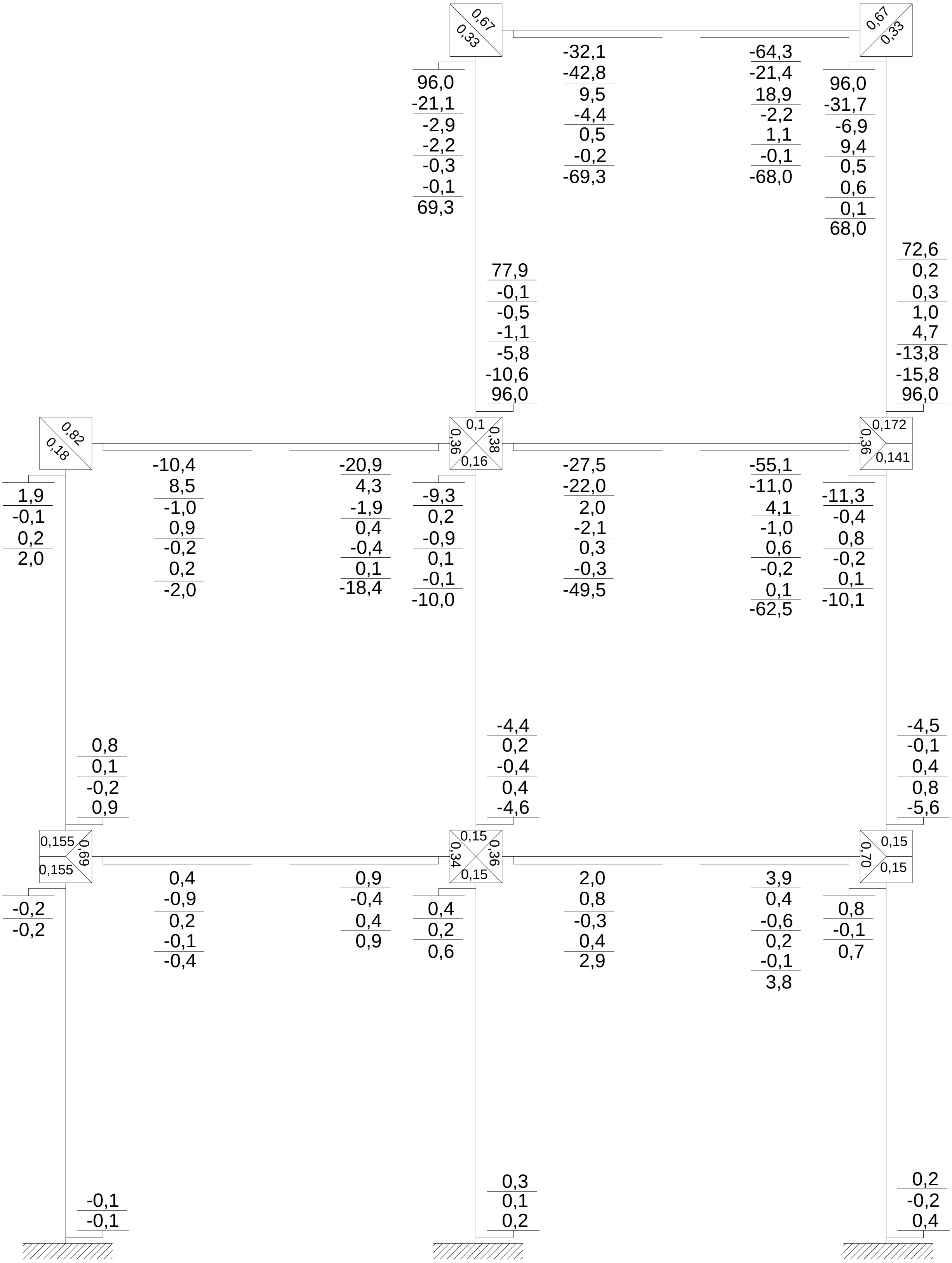
Zadajemo prisilni pomak po pravcu najgorenje etaže i crtamo plan pomaka.



$$\overline{\Psi_{3_2 4_2}} = \overline{\Psi_{3_3 4_3}} = -\frac{u_1}{h_1} = -\frac{100}{2{,}5} = -40$$

$$\overline{M_{3_2 4_2}} = \overline{M_{4_2 3_2}} = \overline{M_{4_3 3_3}} = \overline{M_{3_3 4_3}} = -6 \cdot k_{4_2 3_2} \cdot \overline{\Psi_{3_2 4_2}} = -6 \cdot \frac{1}{2{,}5} \cdot (-40) = 96 kNm$$

Iteracija na zadanom okviru:

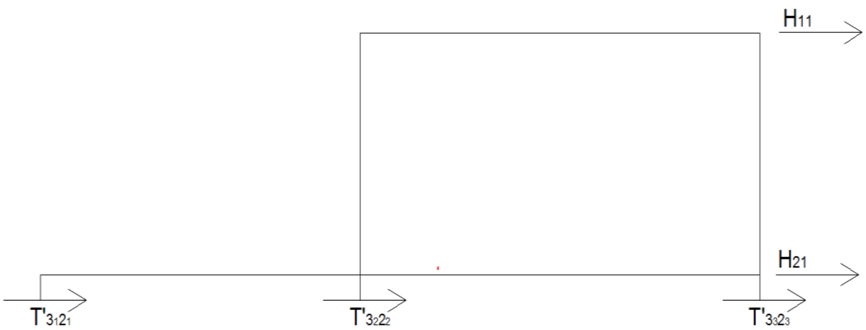


Redoslijed uravnoteženja čvorova:

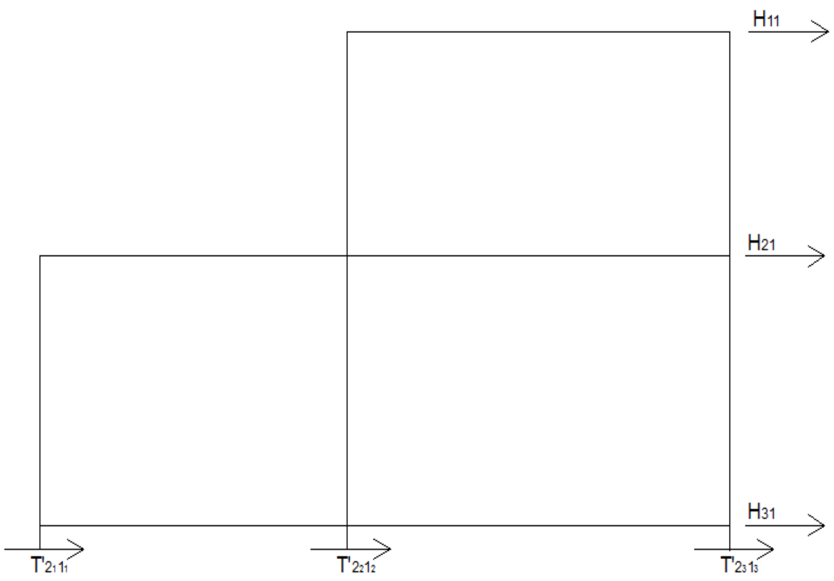
$$4_3 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_3 \rightarrow 2_2 \rightarrow 2_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4_3 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_3 \rightarrow 2_2 \rightarrow 2_1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4_3 \rightarrow 4_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_3 \rightarrow 3_3$$

Reakcije od u_1:

$$T'_{4_23_2} = \frac{-69{,}3 - 77{,}9}{2{,}5} = -58{,}9kN$$
$$T'_{4_33_3} = \frac{-68{,}0 - 72{,}6}{2{,}5} = -56{,}2kN$$
$$-58{,}9 - 56{,}2 + H_{11} = 0$$
$$H_{11} = 115{,}1kN$$



$$T'_{3_12_1} = \frac{-2{,}0 - 0{,}8}{3{,}0} = -0{,}93kN$$
$$T'_{3_22_2} = \frac{10{,}0 + 4{,}4}{3{,}0} = 4{,}8kN$$
$$T'_{3_32_3} = \frac{10{,}1 + 4{,}5}{3{,}0} = 4{,}87kN$$
$$-0{,}93 + 4{,}8 + 4{,}87 + 115{,}1 + H_{21} = 0$$
$$H_{21} = -123{,}8kN$$



$$T'_{2_1 1_1} = \frac{0,2+0,1}{3,0} = 0,1kN$$

$$T'_{2_2 1_2} = \frac{-0,6-0,3}{3,0} = -0,3kN$$

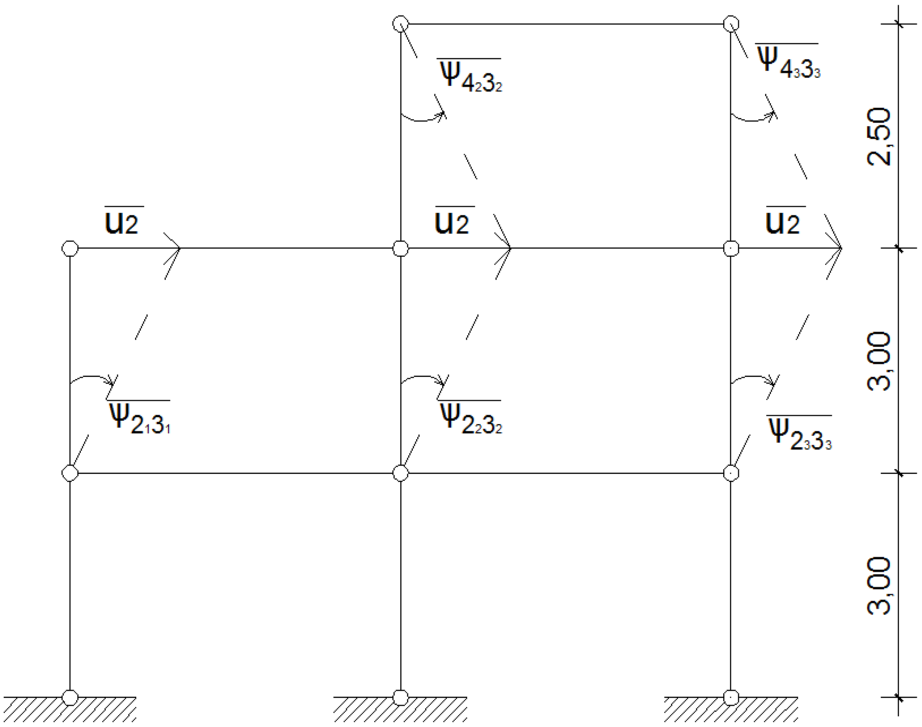
$$T'_{2_3 1_3} = \frac{-0,7-0,2}{3,0} = -0,3kN$$

$$0,1-0,3-0,3+115,1-123,8+H_{31} = 0$$

$$H_{31} = 9,2kN$$

Treći korak Crossovog postupka (pomak u_2)

Zadajemo prisilni pomak po pravcu srednje etaže i crtamo plan pomaka.



$$\overline{\Psi_{2_1 3_1}} = \overline{\Psi_{2_2 3_2}} = \overline{\Psi_{2_3 3_3}} - \frac{u_2}{h_2} = -\frac{100}{3,0} = -33,33$$

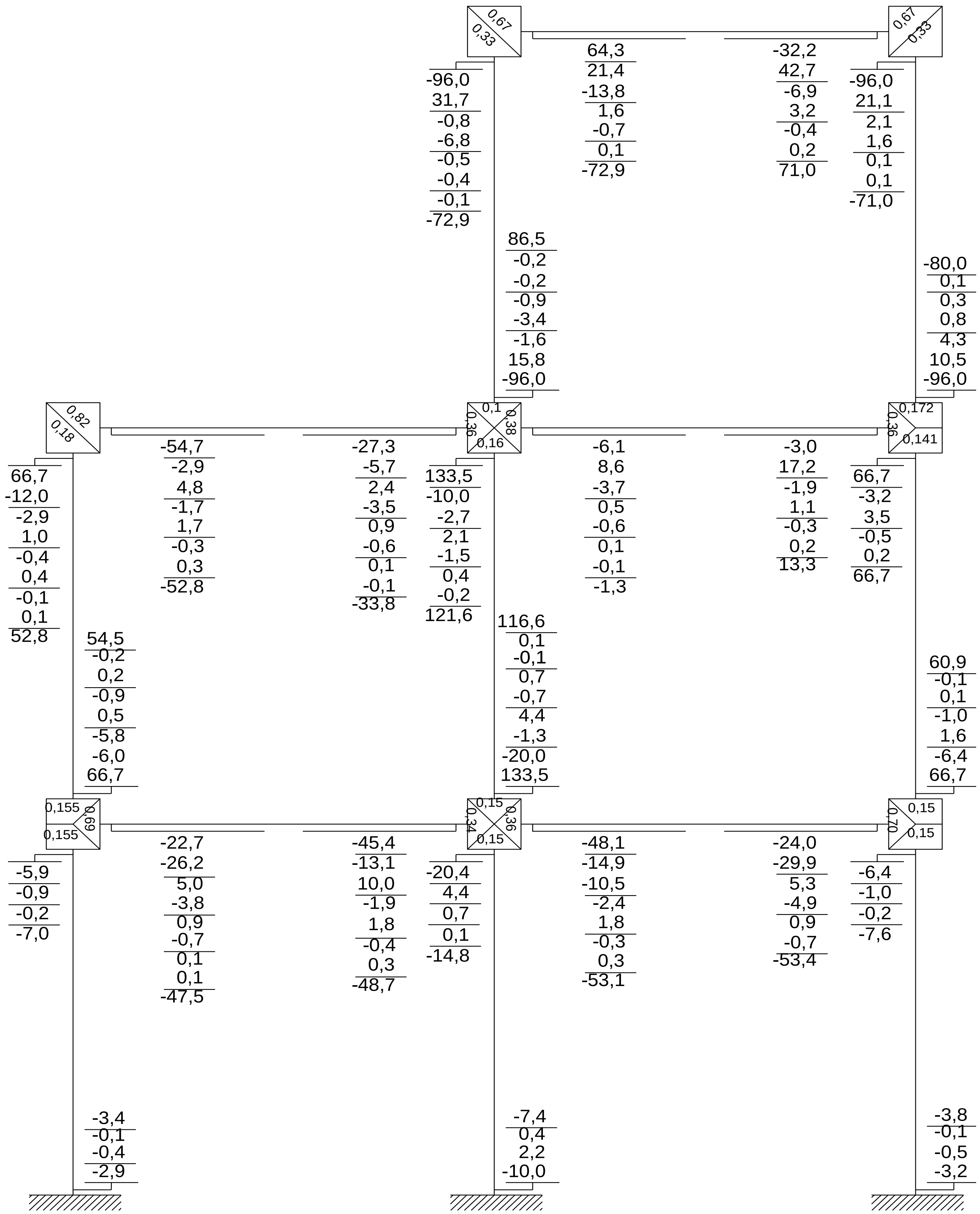
$$\overline{\Psi_{4_2 3_2}} = \overline{\Psi_{4_3 3_3}} = \frac{u_2}{h_1} = \frac{100}{2,5} = -40,0$$

$$\overline{M_{2_1 3_1}} = \overline{M_{3_1 2_1}} = \overline{M_{2_3 3_3}} = \overline{M_{3_3 2_3}} = -6 \cdot \frac{1}{3,0} \cdot (-33,33) = 66,7kNm$$

$$\overline{M_{2_2 3_2}} = \overline{M_{3_2 2_2}} = -6 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-33,33) = 133,48kNm$$

$$\overline{M_{4_2 3_2}} = \overline{M_{3_2 4_2}} = \overline{M_{4_3 3_3}} = M_{3_3 4_3} = -6 \cdot \frac{1}{2,5} \cdot 40,0 = -96,0kNm$$

Iteracija na zadanom okviru:



Redoslijed uravnoteženja čvorova:

$2_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow$

$\rightarrow 2_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow$

$\rightarrow 2_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1 \rightarrow 4_2 \rightarrow 4_3 \rightarrow 3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow$

$\rightarrow 2_2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1 \rightarrow 2_1 \rightarrow 3_2$

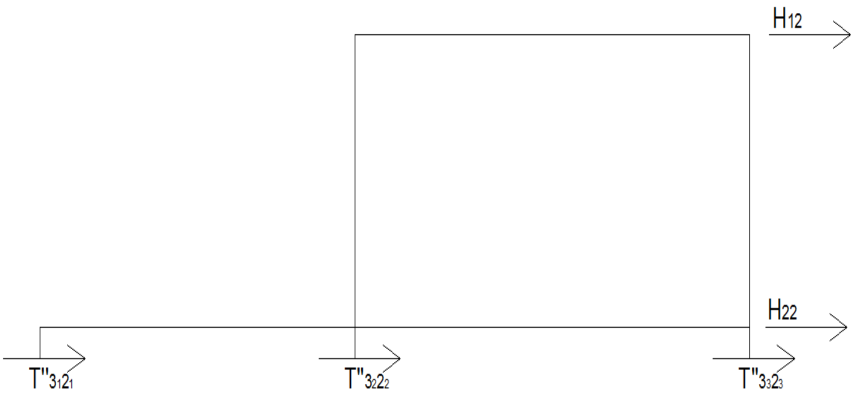
Reakcije od u_2:

$$T''_{4_2 3_2} = \frac{72{,}9 + 86{,}5}{2{,}5} = 63{,}76kN$$

$$T''_{4_3 3_3} = \frac{71{,}0 + 80{,}0}{2{,}5} = 60{,}4kN$$

$$63{,}7 + 60{,}4 + H_{12} = 0$$

$$H_{12} = -124{,}16kN$$



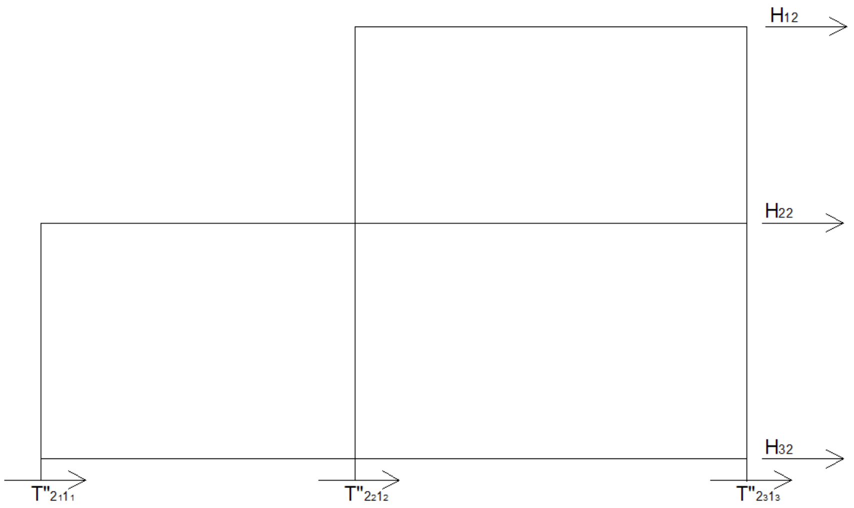
$$T''_{3_1 2_1} = \frac{-52{,}8 - 54{,}5}{3{,}0} = -35{,}77kN$$

$$T''_{3_2 2_2} = \frac{-121{,}6 - 116{,}6}{3{,}0} = -79{,}4kN$$

$$T''_{3_3 2_3} = \frac{-66{,}7 - 60{,}9}{3{,}0} = -42{,}53kN$$

$$-35{,}77 - 79{,}4 - 42{,}53 - 124{,}16 + H_{22} = 0$$

$$H_{22} = 281{,}86kN$$



$$T^{"}_{2_1 1_1} = \frac{7{,}0 + 3{,}4}{3{,}0} = 3{,}47kN$$

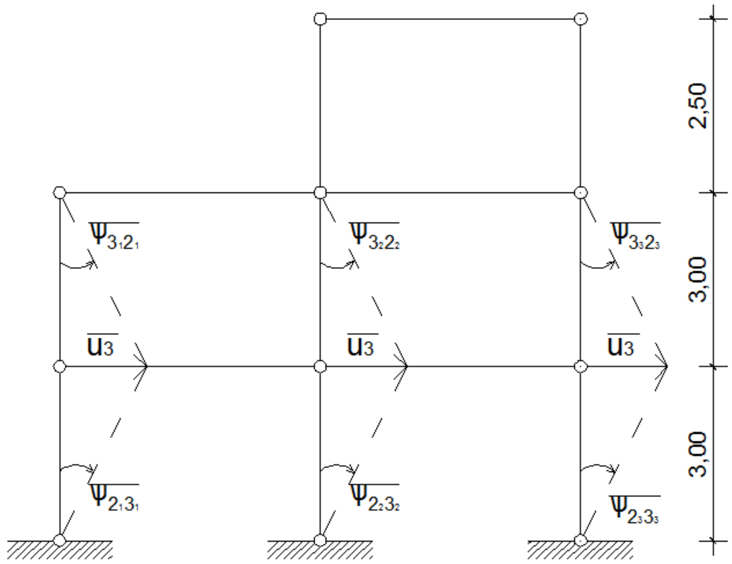
$$T^{"}_{2_2 1_2} = \frac{14{,}8 + 7{,}4}{3{,}0} = 7{,}4kN$$

$$T^{"}_{2_3 1_3} = \frac{7{,}6 + 3{,}8}{3{,}0} = 3{,}8kN$$

$$3{,}47 + 7{,}4 + 3{,}8 - 124{,}16 + 281{,}86 + H_{32} = 0$$

$$H_{32} = -172{,}37kN$$

Četvrti korak Crossovog postupka (pomak u_3):



$$\overline{\Psi_{3_1 2_1}} = \overline{\Psi_{3_2 2_2}} = \overline{\Psi_{3_3 2_3}} = \frac{u_3}{h_3} = \frac{100}{3,0} = 33,33$$

$$\overline{\Psi_{1_1 2_1}} = \overline{\Psi_{1_2 2_2}} = \overline{\Psi_{1_3 2_3}} = \frac{u_2}{h_1} = -\frac{100}{3,0} = -33,33$$

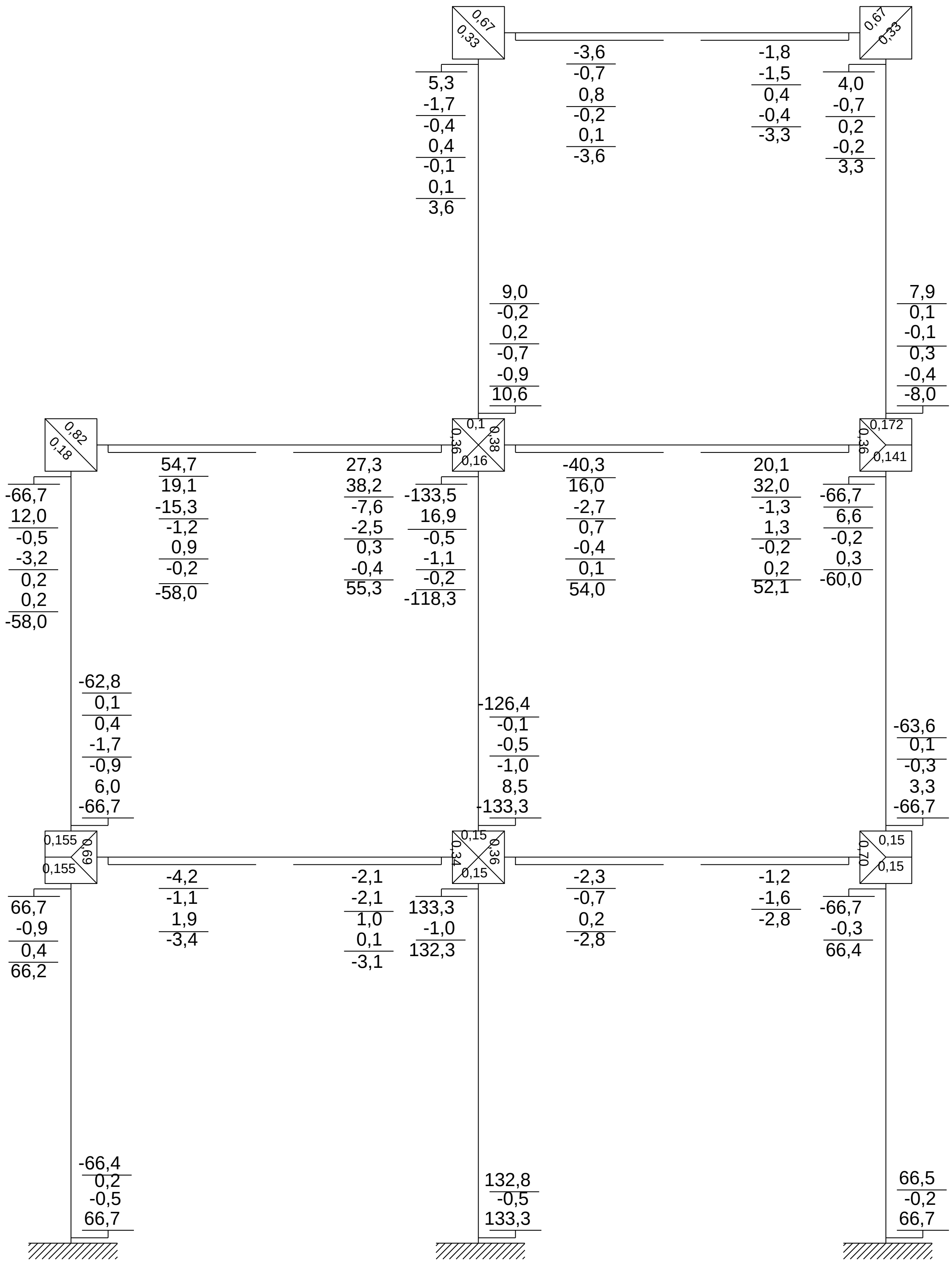
$$\overline{M_{1_1 2_1}} = \overline{M_{1_3 2_3}} = -6 \cdot \frac{1}{3,0} \cdot (-33,33) = 66,7kNm$$

$$\overline{M_{1_2 2_2}} = \overline{M_{2_2 1_2}} = -6 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-33,33) = 133,3kNm$$

$$\overline{M_{3_1 2_1}} = \overline{M_{3_3 2_3}} = -6 \cdot \frac{1}{3,0} \cdot 33,33 = -66,67kNm$$

$$\overline{M_{3_2 2_2}} = \overline{M_{2_2 3_2}} = -6 \cdot \frac{2}{3,0} \cdot 33,33 = -133,3kNm$$

Iteracija na zadanom okviru:

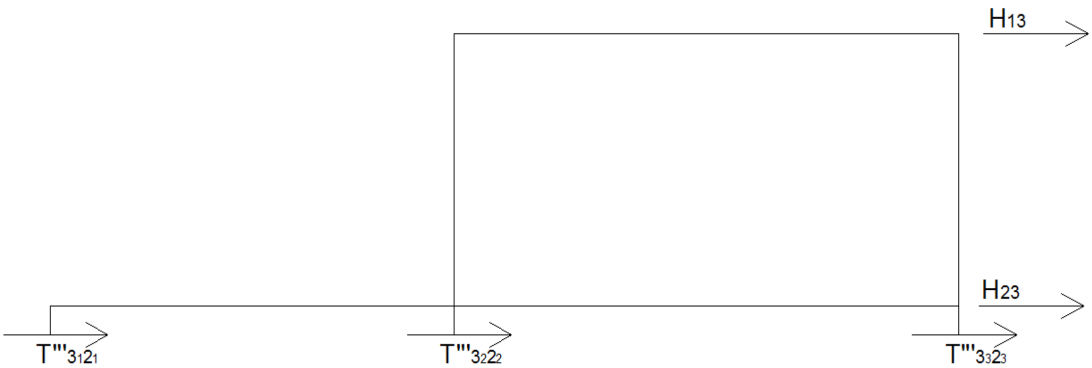


Redoslijed uravnoteženja čvorova:

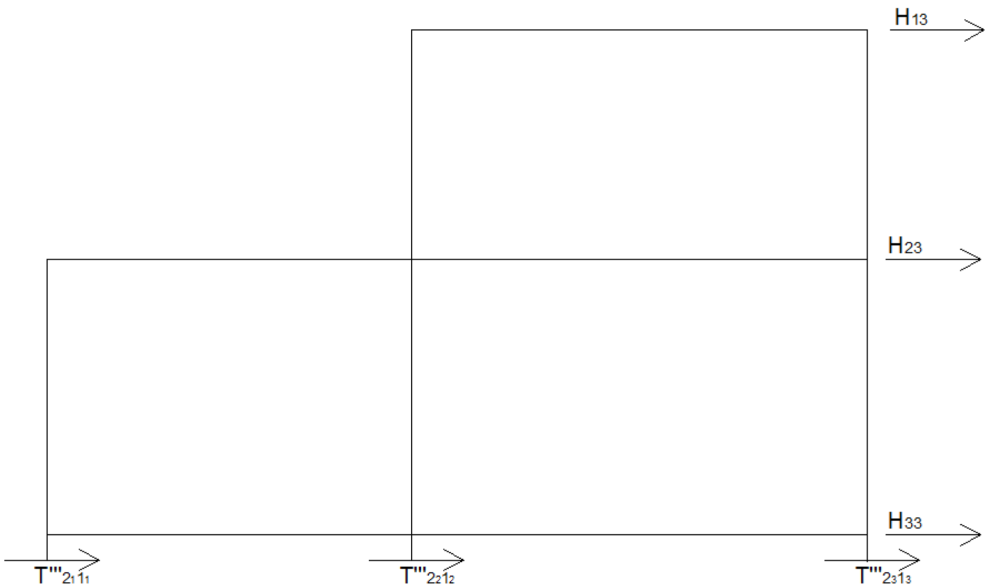
$$3_1 \to 3_2 \to 3_3 \to 2_1 \to 2_2 \to 2_3 \to 4_2 \to 4_3 \to$$
$$\to 3_1 \to 3_2 \to 3_3 \to 2_1 \to 2_2 \to 2_3 \to 4_2 \to 4_3 \to$$
$$\to 3_1 \to 3_2 \to 3_3 \to 4_2$$

Reakcije od u_3:

$$T'''_{4_2 3_2} = \frac{-3{,}6 - 9{,}0}{2{,}5} = -5{,}04 kN$$
$$T'''_{4_3 3_3} = \frac{-3{,}3 - 7{,}9}{2{,}5} = -4{,}48 kN$$
$$-5{,}04 - 4{,}48 + H_{13} = 0$$
$$H_{13} = 9{,}52 kN$$



$$T'''_{3_1 2_1} = \frac{58{,}0 + 62{,}8}{3{,}0} = 40{,}27 kN$$
$$T'''_{3_2 2_2} = \frac{118{,}3 + 126{,}4}{3{,}0} = 81{,}57 kN$$
$$T''_{3_3 2_3} = \frac{60{,}0 + 63{,}6}{3{,}0} = 41{,}2 kN$$
$$40{,}27 + 81{,}57 + 41{,}2 + 9{,}52 + H_{23} = 0$$
$$H_{23} = -172{,}56 kN$$



$$T'''_{2_1 1_1} = \frac{-66{,}2 - 66{,}4}{3{,}0} = -44{,}2kN$$

$$T'''_{2_2 1_2} = \frac{-132{,}3 - 132{,}8}{3{,}0} = -88{,}37kN$$

$$T'''_{2_3 1_3} = \frac{-66{,}4 - 66{,}5}{3{,}0} = -44{,}3kN$$

$$-44{,}2 - 88{,}37 - 44{,}3 + 9{,}52 - 172{,}56 + H_{33} = 0$$

$$H_{32} = 339{,}3kN$$

Ukupne reakcije:

$$-10{,}98 + 115{,}1 \cdot u_1 - 124{,}16 \cdot u_2 + 9{,}52 \cdot u_3 = 0$$

$$-28{,}71 - 123{,}8 \cdot u_1 + 281{,}86 \cdot u_2 - 172{,}56 \cdot u_3 = 0$$

$$-30{,}34 + 9{,}2 \cdot u_1 - 172{,}37 \cdot u_2 + 339{,}9 \cdot u_3 = 0$$

$$u_1 = 0{,}893$$

$$u_2 = 0{,}774$$

$$u_3 = 0{,}457$$

Konačni momenti savijanja:

$$M = M_{\varphi} + u_1 \cdot M_{u_1} + u_2 \cdot M_{u_2} + u_3 \cdot M_{u_3}$$

Vrijednosti konačnih momenata dobivenih Crossovim postupkom:

$M_{1_1 2_1} = 36{,}33 kNm$

$M_{2_1 1_1} = 19{,}85 kNm$

$M_{1_2 2_2} = 48{,}73 kNm$

$M_{2_2 1_2} = 36{,}44 kNm$

$M_{1_3 2_3} = 32{,}83 kNm$

$M_{2_3 1_3} = 35{,}49 kNm$

$M_{2_1 3_1} = 21{,}79 kNm$

$M_{3_1 2_1} = 4{,}24 kNm$

$M_{2_2 3_2} = 20{,}25 kNm$

$M_{3_2 2_2} = 34{,}22 kNm$

$M_{2_3 3_3} = 22{,}65 kNm$

$M_{3_3 2_3} = 16{,}68 kNm$

$M_{3_2 4_2} = 7{,}82 kNm$

$M_{4_2 3_2} = -15{,}09 kNm$

$M_{3_3 4_3} = 12{,}52 kNm$

$M_{4_3 3_3} = 26{,}18 kNm$

$M_{2_1 2_2} = -41{,}47 kNm$

$M_{2_2 2_1} = -61{,}99 kNm$

$M_{2_2 2_3} = 5{,}21 kNm$

$M_{2_3 2_2} = -58{,}22 kNm$

$M_{3_1 3_2} = -4{,}24 kNm$

$M_{3_2 3_1} = -34{,}92 kNm$

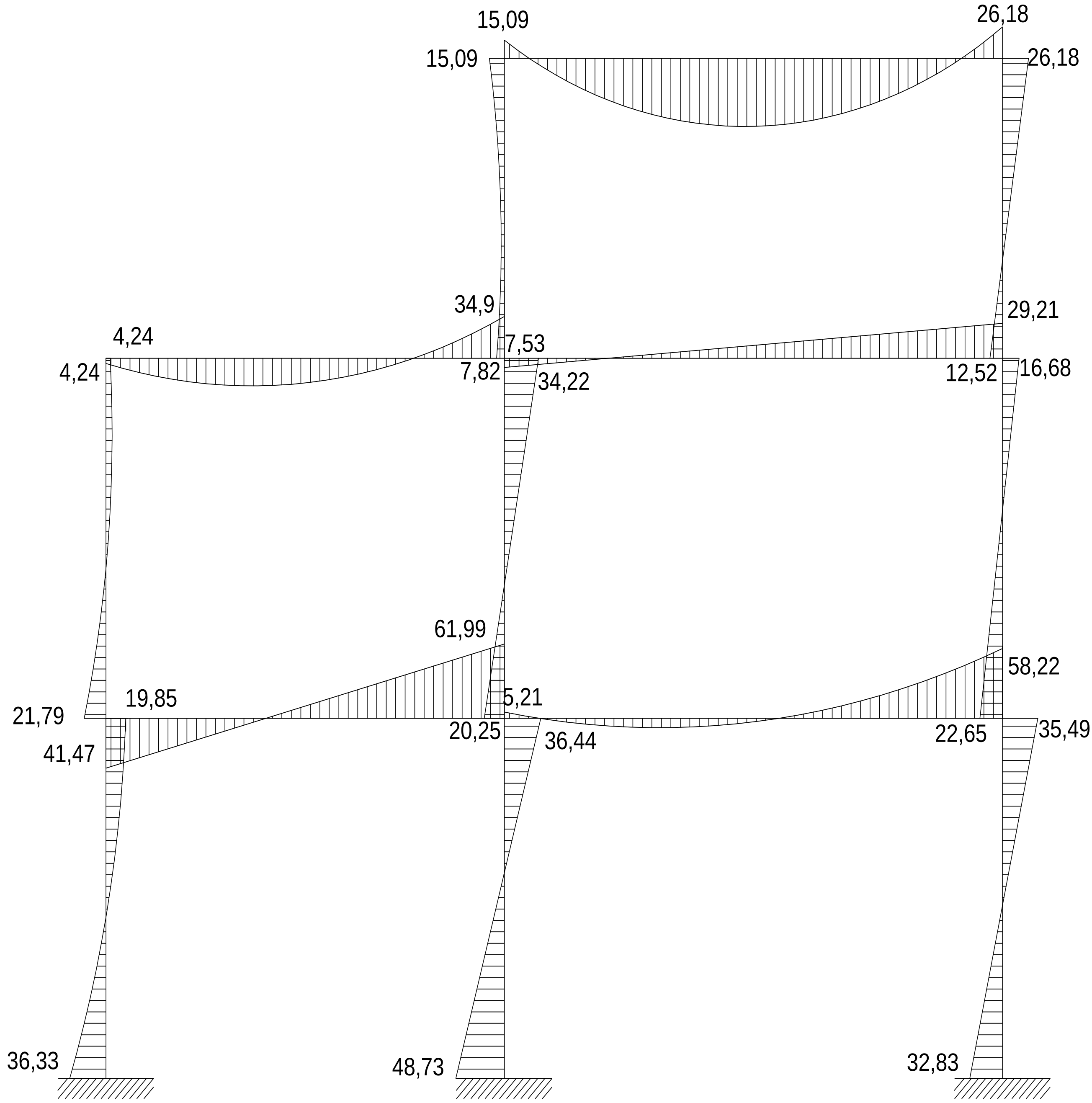
$M_{3_2 3_3} = -7{,}53 kNm$

$M_{3_3 3_2} = -29{,}21 kNm$

$M_{4_2 4_3} = 15{,}09 kNm$

$M_{4_3 4_2} = -26{,}18 kNm$

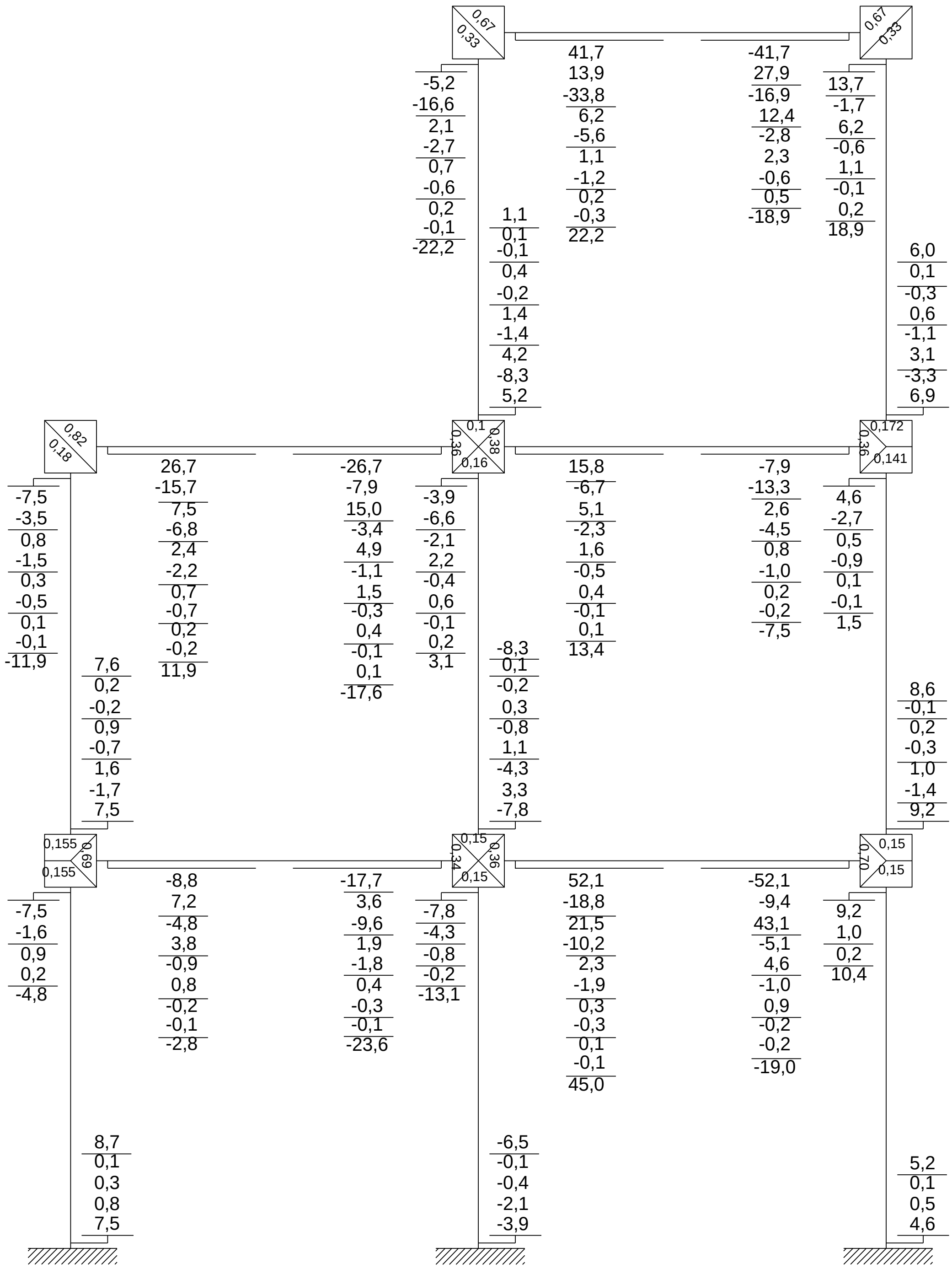
M-dijagram:


15,09
15,09
26,18
26,18
34,9
4,24
4,24
7,53
7,82
34,22
29,21
12,52
16,68
61,99
21,79
19,85
5,21
20,25
36,44
58,22
22,65
35,49
41,47
36,33
48,73
32,83

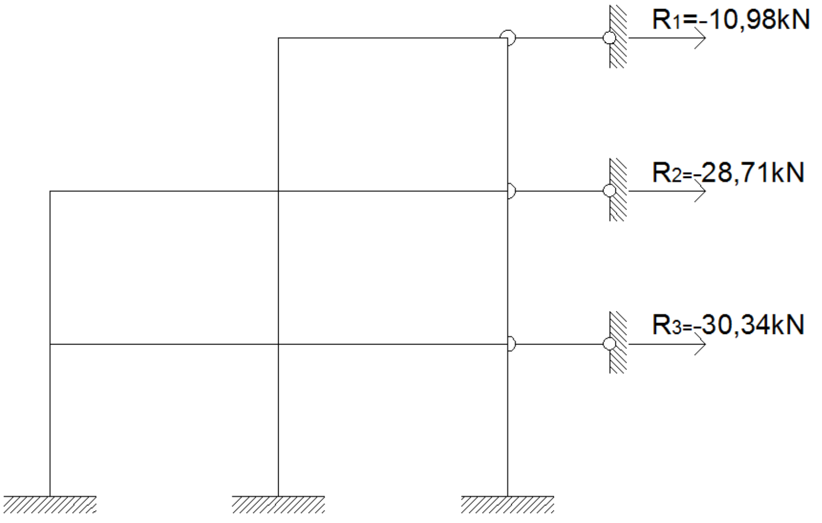
4.2. Postupak Werner-Csonke

Prvi korak postupka Werner-Csonke:

Prvi korak postupka Werner-Csonke je rješavanje pridržanog sistema pod zadanim djelovanjima te proračun reakcija u dodanim vezama. Proračun se provodi Crossovim postupkom. Dakle, provodimo prvi korak Crossovog postupka, čime dobijemo sljedeće rezultate:



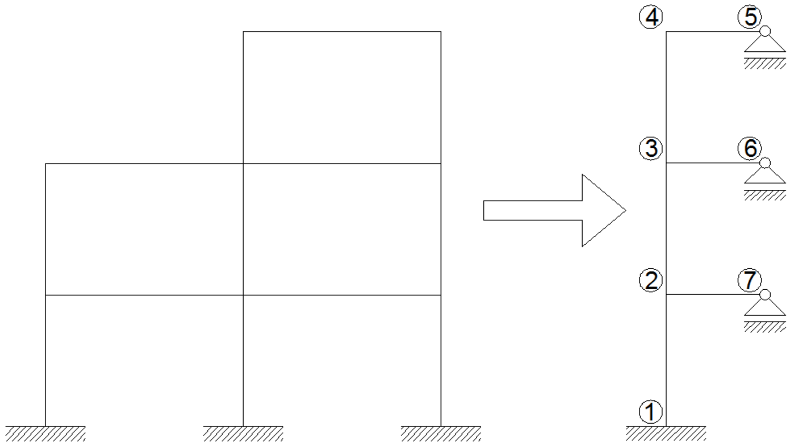
Iz dobivenih momenata, izračunamo reakcije u dodanim vezama te okvir opterećujemo silama koje su istog intenziteta i pravca djelovanja, ali suprotne orijentacije.



$$H_1 = R_1 = 10{,}98kN$$
$$H_2 = R_2 = 28{,}71kN$$
$$H_3 = R_3 = 30{,}34kN$$

Drugi korak postupka Werner-Csonke:

Zadani okvir zamjenjujemo poluokvirom:



Koeficijenti krutosti na poluokviru:

$$k_{45} = 4 \cdot k_{4_2 4_3} = 4 \cdot \frac{4}{5} \cdot EI = 3{,}2 \cdot EI$$

$$k_{36} = 4 \cdot (k_{3_1 2_1} + k_{3_2 3_3}) = 4 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot EI + \frac{8}{5} \cdot EI \right) = 12{,}4 \cdot EI$$

$$k_{27} = 4 \cdot (k_{2_1 2_2} + k_{2_2 2_3}) = 4 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot EI + \frac{8}{5} \cdot EI \right) = 12{,}4 \cdot EI$$

$$k_{34} = k_{3_2 4_2} + k_{3_3 4_3} = \frac{1}{2{,}5} \cdot EI + \frac{1}{2{,}5} \cdot EI = 0{,}8 \cdot EI$$

$$k_{23} = k_{2_1 3_1} + k_{2_2 3_2} + k_{2_3 3_3} = \frac{1}{3{,}0} \cdot EI + \frac{2}{3{,}0} \cdot EI + \frac{1}{3{,}0} \cdot EI = 1{,}33 \cdot EI$$

$$k_{12} = 1{,}33 \cdot EI$$

$$k_4^w = 3 \cdot k_{45} + k_{43} = 10{,}4 \cdot EI$$

$$k_3^w = k_{34} + k_{23} + 3 \cdot k_{3,6} = 0{,}8 \cdot EI + 1{,}33 \cdot EI + 3 \cdot 13{,}4 \cdot EI = 39{,}33 \cdot EI$$

$$k_2^w = 1{,}33 \cdot EI + 1{,}33 \cdot EI + 3 \cdot 12{,}4 \cdot EI = 39{,}86 \cdot EI$$

Razdjelni koeficijenti na poluokviru:

$$\mu_{45} = 0{,}92$$

$$\mu_{43} = 0{,}08$$

$$\mu_{34} = 0{,}02$$

$$\mu_{36} = 0{,}95$$

$$\mu_{32} = 0{,}03$$

$$\mu_{23} = 0{,}03$$

$$\mu_{27} = 0{,}94$$

$$\mu_{21} = 0{,}03$$

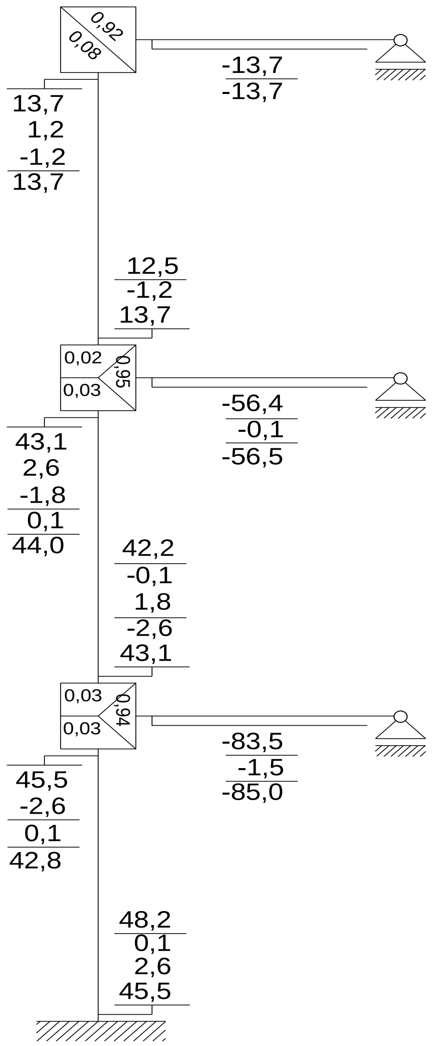
Momenti upetosti:

$$\overline{M_{34}} = \overline{M_{43}} = \frac{10{,}98 \cdot 2{,}5}{2} = 13{,}73 kNm$$

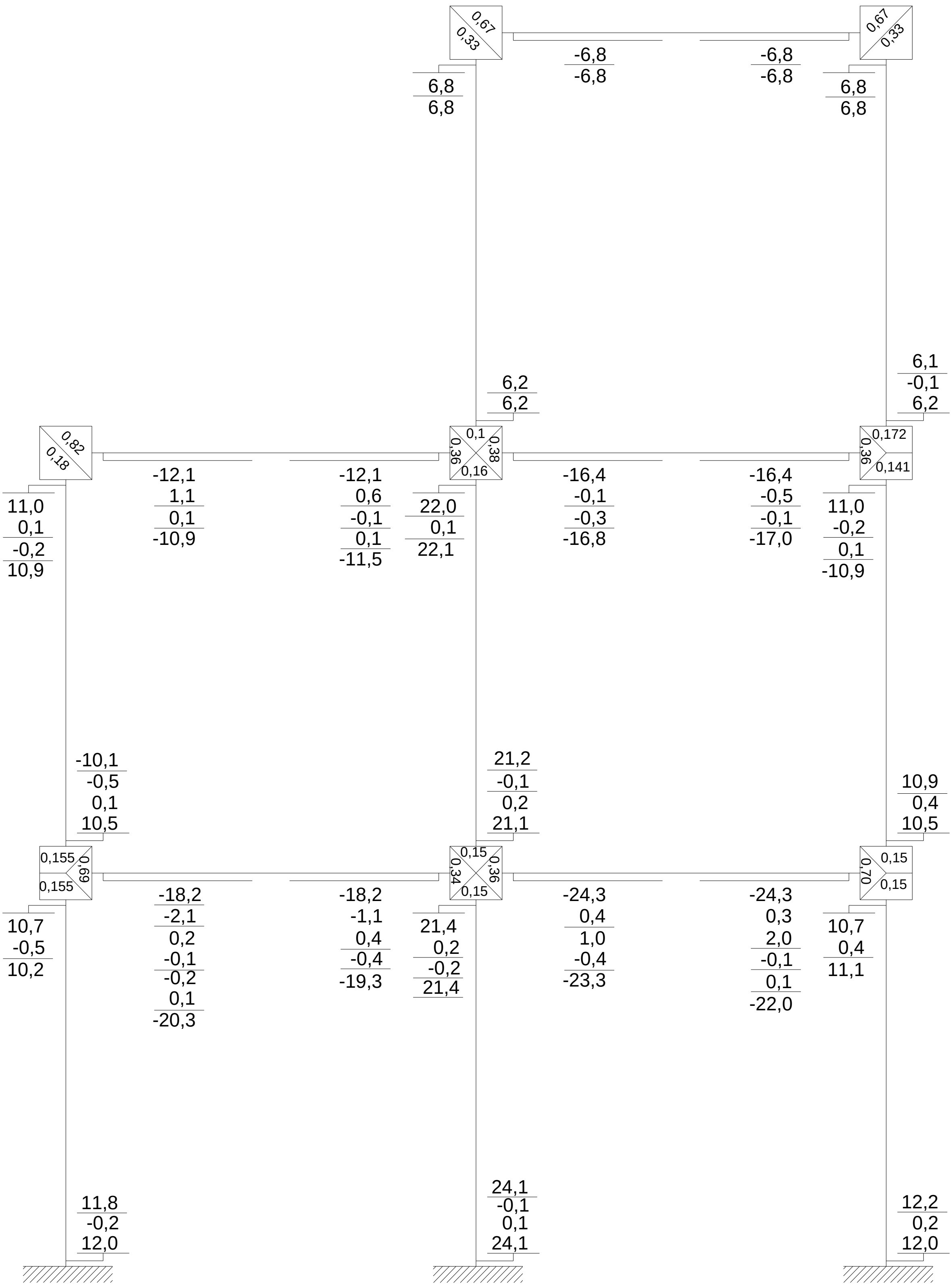
$$\overline{M_{23}} = \overline{M_{32}} = \frac{28{,}71 \cdot 3{,}0}{2} = 43{,}06 kNm$$

$$\overline{M_{12}} = \overline{M_{21}} = \frac{30{,}34 \cdot 3{,}0}{2} = 45{,}51 kNm$$

Iteracija na zamjenjujućem poluokviru:



Raspodjela momenata sa poluokvira na okvir te uravnoteženje okvira:



Određivanje reakcija:

$$T'_{4_2 3_2} = \frac{6{,}8 + 6{,}2}{2{,}5} = 5{,}2kN$$

$$T'_{4_3 3_3} = \frac{6{,}8 + 6{,}1}{2{,}5} = 5{,}2kN$$

$$T'_{3_1 2_1} = \frac{10{,}9 - 10{,}1}{3{,}0} = 7{,}0kN$$

$$T'_{3_2 2_2} = \frac{22{,}1 + 21{,}2}{3{,}0} = 14{,}43kN$$

$$T'_{3_3 2_3} = \frac{10{,}9 + 10{,}9}{3{,}0} = 7{,}26kN$$

$$T'_{2_1 1_1} = \frac{10{,}2 + 11{,}8}{3{,}0} = 7{,}33kN$$

$$T'_{2_2 1_2} = \frac{21{,}4 - 24{,}1}{3{,}0} = 15{,}2kN$$

$$T'_{2_3 1_3} = \frac{11{,}1 + 12{,}2}{3{,}0} = 7{,}8kN$$

$$T'_{43} = 5{,}2 + 2{,}5 = 10{,}4kN$$
$$T'_{32} = 7{,}0 + 14{,}43 + 7{,}27 = 28{,}41kN$$
$$T'_{21} = 7{,}33 + 15{,}2 + 7{,}8 = 30{,}33kN$$

$$T_1 = H_1 = 10{,}98kN$$
$$T_2 = H_2 = 10{,}98 + 28{,}41 = 39{,}39kN$$
$$T_3 = H_3 = 10{,}98 + 28{,}41 + 30{,}34 = 69{,}03kN$$

$$\Delta T_1 = T_1 - T'_{43} = 10{,}98 - 10{,}4 = 0{,}58kN$$
$$\Delta T_2 = T_2 - T'_{32} = 39{,}39 - 28{,}7 = 10{,}69kN$$
$$\Delta T_3 = T_3 - T'_{21} = 69{,}73 - 30{,}33 = 39{,}4kN$$

Vidljivo je da poprečne sile nakon uravnoteženja momenata nisu u ravnoteži sa silama H_i, zbog čega ponovno provodimo postupak uravnotežavanja.

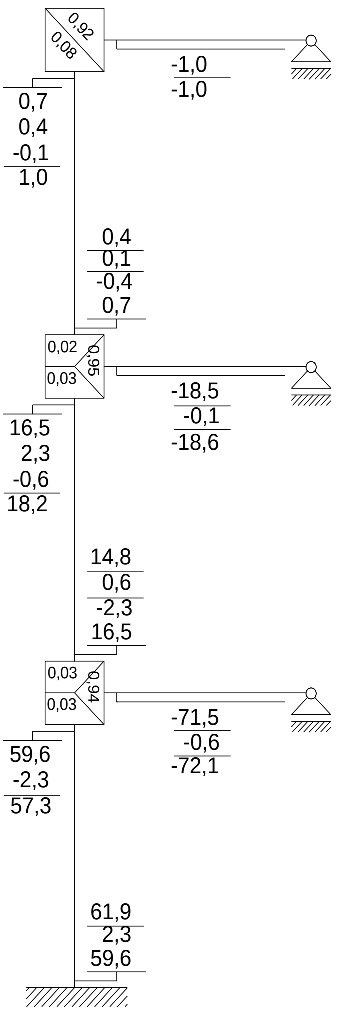
Treći korak postupka Werner-Csonke:

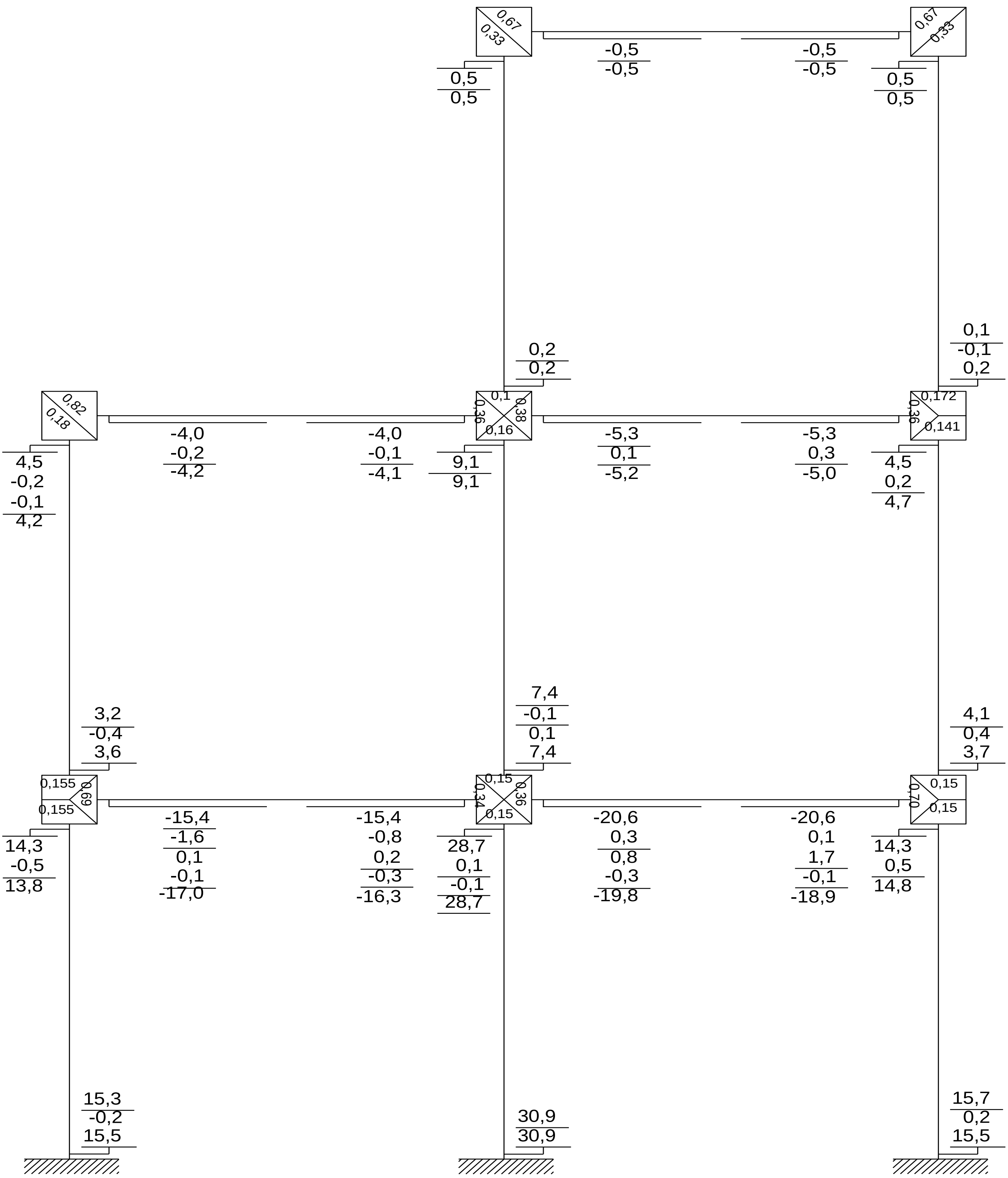
Momenti upetosti:

$$\overline{M'_{43}} = \overline{M'_{34}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta T_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}58 \cdot 2{,}5 = 0{,}73 kNm$$

$$\overline{M'_{32}} = \overline{M'_{23}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta T_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 10{,}69 \cdot 3{,}0 = 16{,}48 kNm$$

$$\overline{M'_{21}} = \overline{M'_{12}} = \frac{1}{2} \cdot \Delta T_3 \cdot h_3 = \frac{1}{2} \cdot 36{,}4 \cdot 3{,}0 = 59{,}6 kNm$$




0,67
0,33
-0,5
-0,5
-0,5
-0,5
0,67
0,33
0,5
0,5
0,5
0,5
0,2
0,2
0,1
-0,1
0,2
0,82
0,18
-4,0
-0,2
-4,2
-4,0
-0,1
-4,1
0,1
0,36
0,38
0,16
9,1
9,1
-5,3
0,1
-5,2
-5,3
0,3
-5,0
0,172
0,36
0,141
4,5
-0,2
-0,1
4,2
4,5
0,2
4,7
3,2
-0,4
3,6
7,4
-0,1
0,1
7,4
4,1
0,4
3,7
0,155
0,69
0,155
-15,4
-1,6
0,1
-0,1
-17,0
0,15
0,34
0,36
0,15
-15,4
-0,8
0,2
-0,3
-16,3
28,7
0,1
-0,1
28,7
-20,6
0,3
0,8
-0,3
-19,8
-20,6
0,1
1,7
-0,1
-18,9
0,15
0,70
0,15
14,3
-0,5
13,8
14,3
0,5
14,8
15,3
-0,2
15,5
30,9
30,9
15,7
0,2
15,5

Određivanje reakcija:

$$T''_{4_2 3_2} = \frac{0,5+0,2}{2,5} = 0,28kN$$

$$T''_{4_3 3_3} = \frac{0,5+0,3}{2,5} = 0,32kN$$

$$T''_{3_1 2_1} = \frac{4,2+3,2}{3,0} = 2,47kN$$

$$T''_{3_2 2_2} = \frac{9,1+7,4}{3,0} = 5,5kN$$

$$T''_{3_3 2_3} = \frac{4,7+4,1}{3,0} = 2,93kN$$

$$T''_{2_1 1_1} = \frac{13,8+15,3}{3,0} = 9,7kN$$

$$T''_{2_2 1_2} = \frac{28,7-30,9}{3,0} = 19,87kN$$

$$T''_{2_3 1_3} = \frac{14,8+15,7}{3,0} = 10,17kN$$

$$T''_{43} = 0,28+0,32 = 0,6kN$$

$$T''_{32} = 2,47+5,5+2,93 = 10,9kN$$

$$T''_{21} = 9,7+19,87+10,17 = 39,74kN$$

$$\Delta T'_1 = \Delta T_1 - T''_{43} = 0,58-0,6 = -0,02kN$$

$$\Delta T'_2 = \Delta T_2 - T''_{32} = 10,69-10,9 = -0,21kN$$

$$\Delta T'_3 = \Delta T_3 - T''_{21} = 39,4-39,74 = -0,34kN$$

$$\alpha = \frac{0,58\cdot 2,5+10,69\cdot 3+39,4\cdot 3}{0,6\cdot 2,5+10,9\cdot 3+39,74\cdot 3} = 1,00$$

Konačni moment savijanja se izračunava pomoću formule:

$$M_{ij} = M_{ij}^{Cross} + M_{ij}^{'} + \alpha \cdot M_{ij}^{''}$$

Vrijednosti konačnih momenata dobivenih postupkom Werner-Cskonka:

$M_{1_1 2_1} = 35{,}8 kNm$

$M_{2_1 1_1} = 19{,}2 kNm$

$M_{1_2 2_2} = 48{,}5 kNm$

$M_{2_2 1_2} = 37{,}0 kNm$

$M_{1_3 2_3} = 33{,}1 kNm$

$M_{2_3 1_3} = 35{,}8 kNm$

$M_{2_1 3_1} = 20{,}9 kNm$

$M_{3_1 2_1} = 3{,}2 kNm$

$M_{2_2 3_2} = 20{,}3 kNm$

$M_{3_2 2_2} = 34{,}0 kNm$

$M_{2_3 3_3} = 23{,}6 kNm$

$M_{3_3 2_3} = 17{,}1 kNm$

$M_{3_2 4_2} = 7{,}5 kNm$

$M_{4_2 3_2} = -14{,}9 kNm$

$M_{3_3 4_3} = 12{,}4 kNm$

$M_{4_3 3_3} = 26{,}2 kNm$

$M_{2_1 2_2} = -40{,}1 kNm$

$M_{2_2 2_1} = -59{,}2 kNm$

$M_{2_2 2_3} = 4{,}8 kNm$

$M_{2_3 2_2} = -59{,}9 kNm$

$M_{3_1 3_2} = -3{,}2 kNm$

$M_{3_2 3_1} = -33{,}2 kNm$

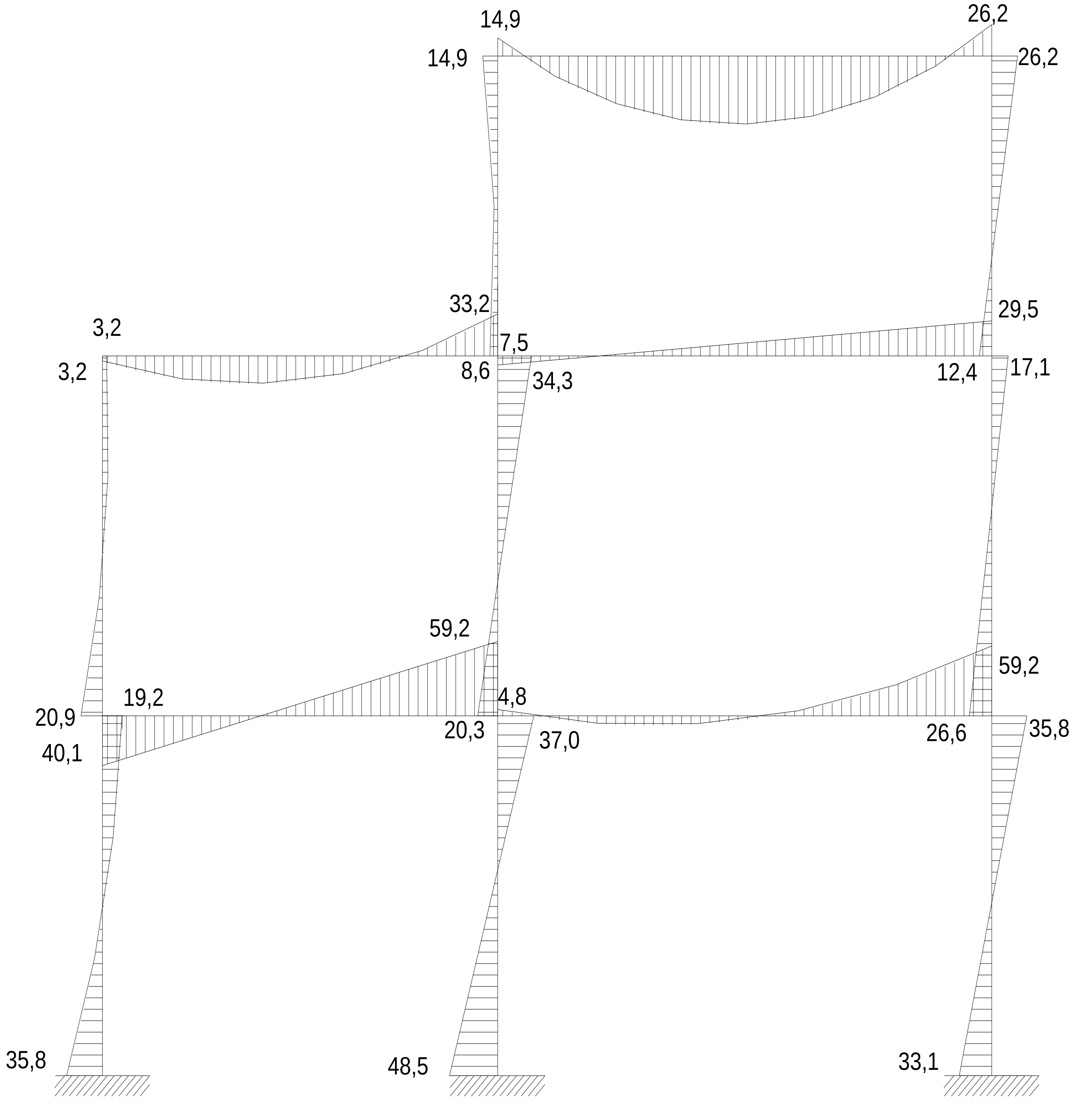
$M_{3_2 3_3} = -8{,}6 kNm$

$M_{3_3 3_2} = -29{,}5 kNm$

$M_{4_2 4_3} = 14{,}9 kNm$

$M_{4_3 4_2} = -26{,}2 kNm$

M-dijagram:


14,9
26,2
14,9
26,2
33,2
3,2
29,5
7,5
3,2
8,6
34,3
12,4
17,1
59,2
59,2
19,2
4,8
20,9
20,3
37,0
26,6
35,8
40,1
35,8
48,5
33,1

5. Zaključak

Nakon detaljnog opisa Crossovog postupka i postupka Werner-Csonke te rješavanja istog primjera na dva različita načina, mogu zaključiti da je Crossov postupak poprilično jednostavniji, bez obzira što mi je za njega trebalo dosta više vremena nego za postupak Werner-Csonke.

S obzirom da su u zadanom sustavu moguća tri translacijska pomaka, najprije u Crossovom postupku dodajemo 3 veze kako bismo spriječili moguće pomake.

Crossov postupak smo proveli kroz četiri koraka.

U prvom koraku sustav je opterećen zadanim vanjskim djelovanjima. Najprije sam izračunala momente upetosti na opterećenim elementima okvira te krenula sa uravnoteženjem okvira. Pomoću konačnih vrijednosti momenata, dobila sam poprečne sile te vrijednosti sila u dodanim vezama.

Ostala tri koraka se od prvog razlikuju jedino po tome što se momenti upetosti sada ne računaju od vanjskog opterećenja, nego od zadanih pomaka. Daljnji postupak je isti kao u prvom koraku, dakle, uravnotežuju se čvorovi i iz konačnih momenata računamo sile u dodanim vezama.

Iz uvjeta da u tim dodatnim vezama nema sila, dolazimo do jednadžbi iz kojih se izračunavaju stvarni pomaci, a zatim i konačne vrijednosti momenta u čvorovima.

Postupak Werner-Csonke u ovom primjeru sadrži tri koraka.

Prvi korak je isti kao prvi korak u Crossovom postupku. Isto računamo momente upetosti od vanjskog opterećenja te uravnotežujemo okvir i računamo reakcije u dodanim vezama.

U drugom koraku sustav opterećujemo silama koje su istog intenziteta, ali suprotnog predznaka kao dobivene reakcije te njima opterećujemo uvedeni poluokvir. Konačne momente s poluokvira raspodjeljujemo na okvir i uravnotežujemo okvir Crossovim postupkom. Međutim, u ovom primjeru smo uravnoteženjem momenata po Crossu narušili ravnotežu horizontalnih sila koja je bila zadovoljena tijekom Werner-Csonkina postupka zbog čega je potrebno drugi korak ponoviti.

Treći korak je identičan drugom koraku, jedino se razlikuju momenti upetosti na poluokviru. Nakon provedenog trećeg koraka, vidimo da su vrijednosti neuravnoteženih horizontalnih sila veoma male i da su horizontalne sile istog predznaka, zbog čega možemo uvoditi popravni koeficijent te računati konačne vrijednosti momenata.

Postupak Werner-Csonke u ovom primjeru ima jedan korak manje no Crossov postupak. Znatno je kraći i jednostavniji što se tiče uravnotežavanja momenata, obzirom da se uvodi poluokvir koji je poprilično lakše i brže uravnotežiti no sami okvir. Momenti koji se prenesu na okvir nisu toliko velikog iznosa tako da brzo dođemo do rješenja. Međutim, raspodjela momenata s poluokvira na okvir, računanje poprečnih sila okvira te razlike među silama i uvođenje popravnog koeficijenta zahtijevaju dodatnu pažnju prilikom računanja. Npr. popravni koeficijent možemo računati jedino ako razlike vrijednosti neuravnoteženih horizontalnih sila imaju iste predznake. Kod Crossovog pak postupka stalno ponovljamo isti korak. Moramo od svih djelovanja uravnotežiti čvorove okvira te izračunati reakcije u dodanim vezama. Makar je postupak dosta zamorniji, jer samo uravnoteženje popriličnu dugo traje dok se ne dođe do konačnog rezultata, zbog ponavljanja istog koraka, mogu čak reći da je „rutinski“ te popriličnu jednostavniji.

6. Literatura

- Milutin Anđelić, *Građevna statika II*, Zagreb: Građevinski fakultet, 2005. godina
- *Bilješke i skice s predavanja*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, kolegij Građevna statika II, Zagreb www.grad.unizg.hr/nastava/gs
- www.wikidepia.org/wiki/Hardy_Cross
- www.wikidepia.org/wiki/Pal_Csonka