

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Crossov postupak u prostoru

Tanja Jurić
Mentor prof.dr.sc. Krešimir Fresl

Zagreb, 2018.

Sadržaj:

| | |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 1. Uvod..... | 3 |
| 2. Crossov postupak-općenito, definicije i izvodi..... | 4 |
| 3. Koso savijanje..... | 9 |
| 3.1. Čisto koso savijanje..... | 10 |
| 3.2. Koso savijanje silama (poprečno koso savijanje)..... | 11 |
| 4. Crossov primjer prostornog okvira..... | 12 |
| 4.1. Općenito..... | 12 |
| 4.2. Opis postupka..... | 13 |
| 5. Primjer..... | 18 |
| 6. Usporedba Crossa u ravnini i prostoru..... | 37 |
| 7. Literatura..... | 38 |

1. Uvod

Tema završnog rada je iterativno rješavanje proračuna prostornog okvira. Iterativni proračun prostornog okvira koji je ovdje obrađen temelji se članku Heinricha Wenera. Werner je 1974. godine taj postupak obradio u članku časopisa Građevinar.

U prvom dijelu rada općenito je prikazan i objašnjen Crossov postupak te su teorijski prikazane i objašnjene pretpostavke i metoda proračuna Crossovog prostornog okvira.

U drugom dijelu, na primjeru koji je obrađen, prikazan je postupak rješavanja proračuna prostornog okvira. Nakon toga, opisani je postupak uspoređen sa rješavanjem ravninskih sustava.

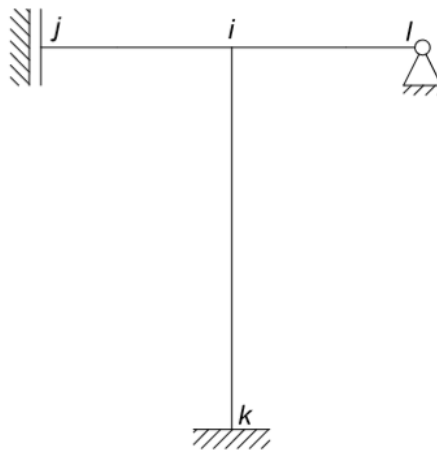
2. Crossov postupak-općenito, definicije i izvodi

Crossova metoda je relaksacijski odnosno iteracijski postupak statičkog proračuna okvirnih konstrukcija i kontinuiranih nosača kod kojih su spriječeni translacijski pomaci. Ideja iteracijskog postupka sastoji se u tome da uzastopnim iteracijama polagano dolazimo do konačnog rješenja. Upravo je u tome prednost ove metode naspram metode pomaka. Cross se bavi uravnoteživanjem momenata u čvorovima konstrukcije. Uočio je da na osnovnom sistemu u kojem su svi čvorovi ukrućeni, može otpustiti jedan čvor dok ostali ostaju ukrućeni. Otpustiti čvor odnosno relaksirati ga znači oslobađanje mogućnosti zakretanja u tom čvoru. Nakon otpuštanja čvora pojavljuju se momenti upetosti u štapovima koji su u osnovnom sistemu priključeni tom čvoru. Te momente treba uravnotežiti zajedno sa vanjskim momentom, ako je zadan. Dio tih momenata koji nastaju uravnoteživanjem na krajevima štapova potrebno je prebaciti na suprotne krajeve štapova. Razdioba neuravnoteženog momenta u čvoru provodi se pomoću razdjelnih koeficijenata. Razdjelne koeficijente dobijemo iz omjera krutosti pojedinog štapa i zbroja krutosti svih štapova koji su priključeni tom čvoru. Dio tih momenata se prebacuje na suprotan kraj štapa pomoću prijenosnih koeficijenata. Čvor koji smo sada uravnotežili ukrutimo, a otpuštamo idući čvor te ponavljamo postupak. Postupak se ponavlja za svaki čvor dok neuravnoteženi momenti na svim čvorovima ne postanu približno nula, ovisno o točnosti s kojom radimo. Konačne momente na upetim krajevima dobijemo tako da zbrojimo momente upetosti, raspodijeljene momente i prenesene momente. U Crossovom postupku pretpostavlja se da je uvijek oslobođena upetost jednog čvora, a potpuno zadržana upetost ostalih čvorova konstrukcije. Crossova metoda je u pravilu za konstrukcije sa spriječenim translacijskim pomacima čvorova. No može se i primijeniti na konstrukcijske sustave s dopuštenim translacijskim pomacima čvorova i to tako da se u prvoj fazi rješavanja dodaju veze koje sprječavaju neovisne translacijske pomake pod uvjetom da u dodanim vezama nema sila. Koliko dodamo veza toliko ćemo imati jednadžbi iz kojih se izračunavaju stvarni pomaci, a zatim i konačne vrijednosti momenata u štapovima.

S obzirom da u samom početku proračuna Cross relaksira jedan čvor, najčešće onaj u kojem se pojavljuje najveća neravnoteža momenata, prirast kuta zaokreta čvora i kod obostrano upete grede označit ćemo sa $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, te ga možemo prikazati kao

$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{\sum_{j \neq i} 4k_{(i,j_i)}} \text{ pri čemu je } m_i^{(n_i)} \text{ neuravnoteženi rezidualni moment.}$$

Međutim grede nisu uvijek obostrano upete pa prirast kuta zaokreta ne možemo uvijek izračunati po prethodno navedenom izrazu. Na idućem primjeru prikazani su drugi oblici izraza kod drugačije upetih greda:



$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{k_{ij} + 4k_{ik} + 3k_{il}}$$

S obzirom da nam je poznat prirast kuta zaokreta (obostrano upeta greda), tada će prirast momenta na kraju i elementa (i, j_i) biti :

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = 4 \cdot k_{(i,j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$$

Prilikom uravnoteženja čvora i moramo uzeti u obzir da su zaokreti svih ostalih čvorova

spriječeni pa uvrštavanjem izraza $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{\sum_{ji} 4k_{(i,j_i)}}$ dobivamo:

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \frac{4 \cdot k_{(i,j_i)}}{\sum_{ji} 4k_{(i,j_i)}} \cdot m_i^{(n_i)} .$$

Koeficijent krutosti svih elemenata koji su priključeni u čvor i označit ćemo

$k_i = \sum_{ji} 4k_{(i,j_i)}$ i nazvati koeficijentom krutosti čvora i.

Kada podijelimo koeficijent krutosti određenog elementa s koeficijentom krutosti čvora, dobivamo razdjelni koeficijent u tom čvoru za taj element i označavamo ga sa $\mu_{i,j_i} = \frac{4 k_{(i,j_i)}}{k_i}$.

Na ovaj način računamo razdjelne koeficijente za svaki element koji je spojen u tom čvoru. Ako svi elementi jednog čvora imaju međusobno različite koeficijente krutosti, razdjelni koeficijenti elemenata će se također međusobno razlikovati. Do podudaranja dolazi ako su koeficijenti krutosti elemenata jednaki.

Razdjelni su koeficijent za jednostrano upetu gredu $\mu_{i,j_i} = \frac{3 k_{(i,j_i)}}{k_i}$, dok su razdjelni koeficijent za gredu koja s jedne strane ima upeto klizni ležaj $\mu_{i,j_i} = \frac{k_{(i,j_i)}}{k_i}$, pri čemu u k_i krutost $k_{(i,j_i)}$ ulazi pomnožena sa 3, odnosno sa 1.

Suma razdjelnih koeficijenata u čvoru mora biti jednaka 1 s obzirom da je koeficijent krutosti čvora i jednak zbroju svih koeficijenata krutosti elemenata spojenih u taj čvor:

$$\sum_{ji} \mu_{i,j_i} = 1$$

Uvrštavanjem razdjelnog koeficijenta u jednadžbu za prirast vrijednosti momenta na kraju elementa dobivamo:

$$\Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = \mu_{i,j_i} m_i^{(n_i)}$$

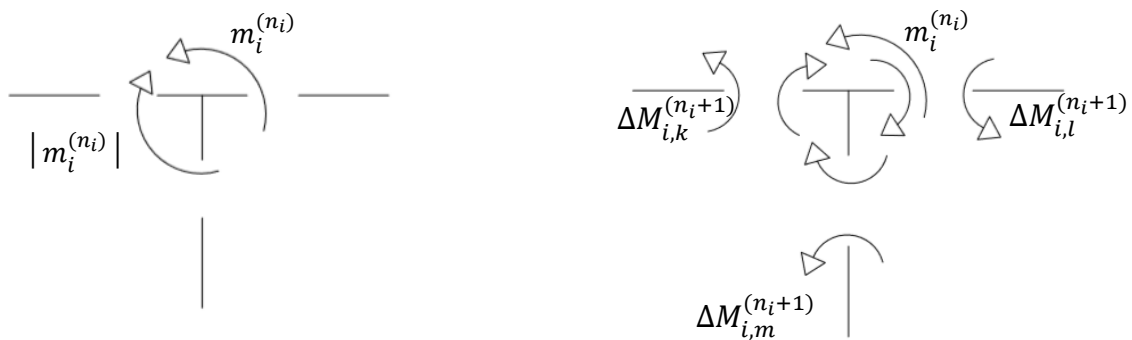
Budući da je suma razdjelnih koeficijenata jednaka 1, sumiranjem prirasta momenata dobivamo:

$$\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} = m_i^{(n_i)}$$

Odnosno

$$-\sum_{j_i} \Delta M_{i,j_i}^{(n_i+1)} + m_i^{(n_i)} = 0$$

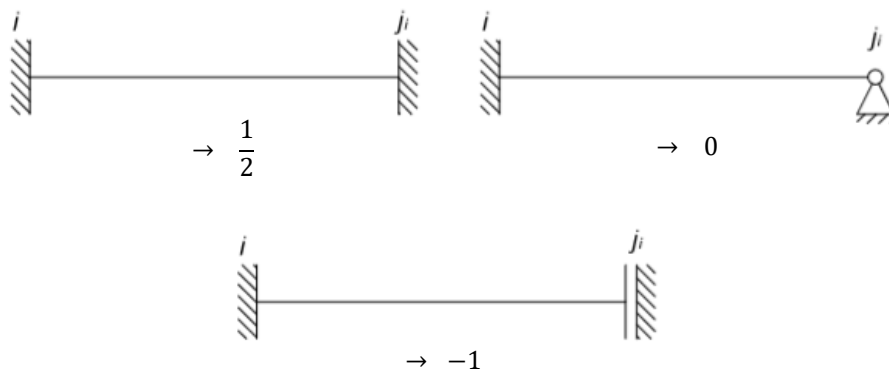
Vidimo da dodavanjem momenta istog intenziteta rezidualnom momentu, ali suprotnog smjera vrtnje, možemo uravnotežiti čvor i. Međutim moramo ga razdijeliti na priključne elemente u omjeru njihovih krutosti. Upravo radi toga Crossov postupak nazivamo još i postupak razdiobe momenata ili postupak raspodjele momenata.



Dio razdijeljenog momenta koji smo dobili na nekom elementu treba prenijeti na drugi kraj tog elementa pomoću prijenosnog koeficijenta. Ako se kraj i elementa (i, j_i) zaokrene za kut $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, na drugom kraju elementa, j_i , pojavit će se moment vrijednosti :

$$\Delta M_{j_i, i} = 2 k_{(i, j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2} \Delta M_{i, j_i}^{(n_i+1)}$$

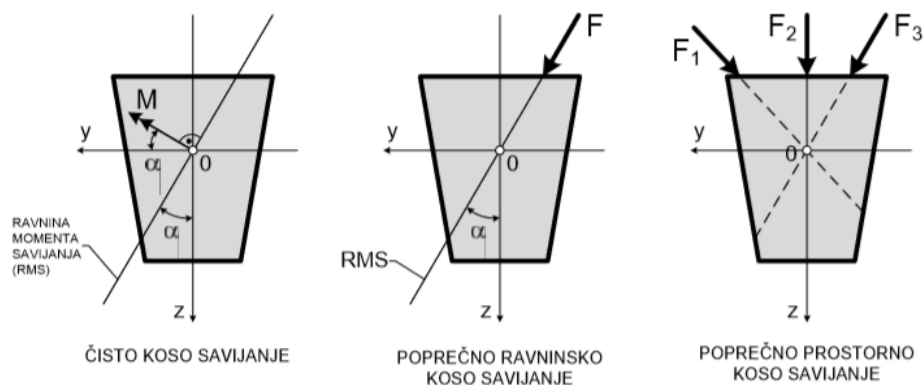
Iz ovog izraza vidimo da je prijenosni koeficijent jednak $\frac{1}{2}$, što znači da nakon uravnoteženja čvora i , na drugi kraj elementa prenosimo polovinu vrijednosti momenta s kraja i . Prijenosni je koeficijent za jednostrano upetu gredu jednak nuli, a za gredu koja na jednom kraju ima upeto klizni ležaj on iznosi -1 .



Preporuka je krenuti uravnoteživati čvor u kojem je rezidualni moment najveći. Postupak nastavljamo sve dok vrijednost neuravnoteženih momenata ili vrijednosti momenata koje se prenose ne postanu toliko male da se mogu zanemariti. Konačni momenti na krajevima elemenata jednaki su zbroju momenata upetosti, raspodijeljenih momenata i prenesenih momente.

3. Koso savijanje

Kosim savijanjem naziva se takav oblik savijanja pri kojemu se ravnina djelovanja momenata savijanja ne poklapa ni s jednom od glavnih središnjih osi tromosti poprečnog presjeka. Postoji čisto koso savijanje, poprečno koso savijanje ili koso savijanje silama koje se dijeli na ravninsko koso savijanje i prostorno koso savijanje (slika 1.) . Čistim kosim savijanjem naziva se takav slučaj kosog savijanja kad u poprečnim presjecima štapa djeluje samo moment savijanja. Pri poprečnome kosom savijanju ili kosom savijanju silama u poprečnim presjecima djeluju poprečna sila i moment savijanja.



Slika 1.

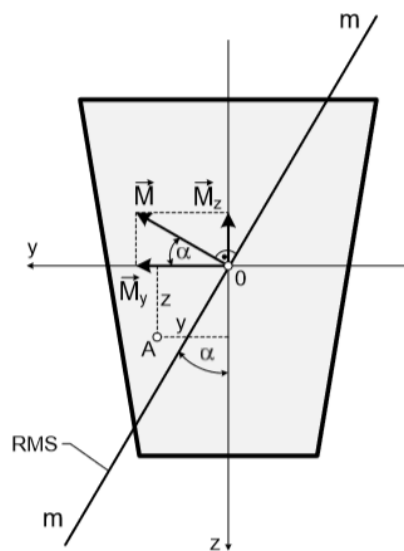
Ako opterećenje koje savija štap djeluje u jednoj ravnini koja prolazi kroz os štapa, ali se ne poklapa ni s jednom od glavnih središnjih osi tromosti presjeka, posrijedi je slučaj ravninskoga kosog savijanja. Elastična linija štapa u tom je slučaju ravninska krivulja koja se ne poklapa s ravninom djelovanja opterećenja, što je karakteristično za koso savijanje.

Ako opterećenje koje savija štap ne leži u jednoj ravnini, smjerovi se djelovanja resultantnog momenta savijanja u različitim poprečnim presjecima savijanja štapa ne podudaraju. U tom

slučaju dobivamo prostorno koso savijanje. Pri takvom je savijanju elastična linija štapa prostorna krivulja.

3.1. Čisto koso savijanje

Za slučaj čistog kosog savijanja u bilo kojem presjeku štapa ravnina djelovanja momenta savijanja m-m prolazi težištem poprečnog presjeka i s glavnom osi tromosti z zatvara kut α . (slika 2.) . Vektor momenta savijanja M okomit je na ravninu m-m i s drugom glavnom osi tromosti y zatvara kut α .



Slika 2.

Moment savijanja M možemo rastaviti na komponente

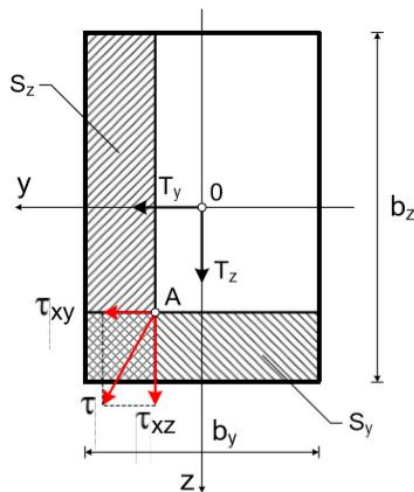
$$M_y = M \cdot \cos\alpha$$

$$M_z = M \cdot \sin\alpha$$

koje predstavljaju momente savijanja oko glavnih osi tromosti y i z . Prema tome, čisto koso savijanje možemo promatrati kao istodobno savijanje štapa u dvjema glavnim ravninama xz i xy .

3.2. Koso savijanje silama (poprečno koso savijanje)

U općem slučaju kosog savijanja silama rastavimo sile na komponente koje leže u glavnim ravninama xz i xy (slika 3.). U poprečnom presjeku djeluju momenti savijanja M_y i M_z i poprečne sile T_y i T_z . Normalna naprezanja određuju se istim izrazima kao iza slučaj čistog kosog savijanja.



Slika 3.

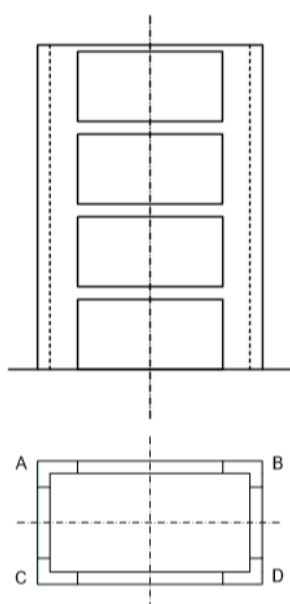
U općem slučaju kosog savijanja silama ravnina djelovanja momenta savijanja u različitim je presjecima različito orijentirana s obzirom na glavne osi tromosti presjeka. Zbog toga će savijena os štapa biti prostorna krivulja, tj. postojat će prostorno koso savijanje.

4. Crossov proračun prostornog okvira

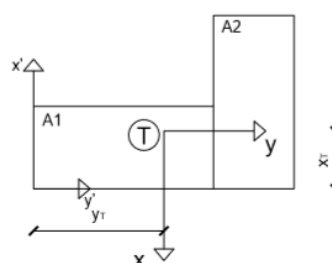
4.1. Općenito

Iterativno rješavanje ravninskih štapnih sistema je često i opsežno obrađivano u literaturi. Iz bitno šireg područja prostornih okvira, razrađen je u dostupnoj standardnoj literaturi (npr. Hirschfeld: Baustatik, Berlin 1972) iterativni postupak samo za slučaj povezivanja paralelnih ravnih okvira torzijskim djelovanjem greda okomitih okvira. Iako se time iscrpljuje većina praktičnih slučajeva može se i kod relativno jednostavne konstrukcije javiti povezanost djelovanjem greda na savijanje okvira iz dvaju ravnina.

Ovaj se prikaz ograničava na jedan takav slučaj. To je okvirni toranj sa četiri paralelna stupa, čije osi cine bridove pravokutne prizme. Glavne osi tromosti poprečnih presjeka stupova se ne poklapaju sa ravninama stranica prizme. Osi greda su okomite na osi stupova i paralelne sa stranicama prizme, te cine pravokutnik čiji se oblik ne mijenja opterećivanjem okvira. Štapovi su tako oblikovani da sistem ima dvije ravnine simetrije (slika 4.).



Slika 4.



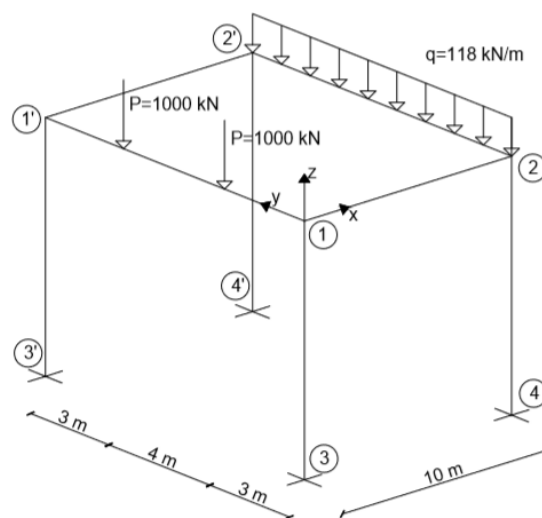
Slika 5.

Pretpostavke odgovaraju elementarnoj tehničkoj štapnoj statici. Ravnoteža je formulirana na nedeformiranom sistemu. Deformacije uslijed uzdužnih sila su zanemarene. Torzijska krutost štapova je zanemarena.

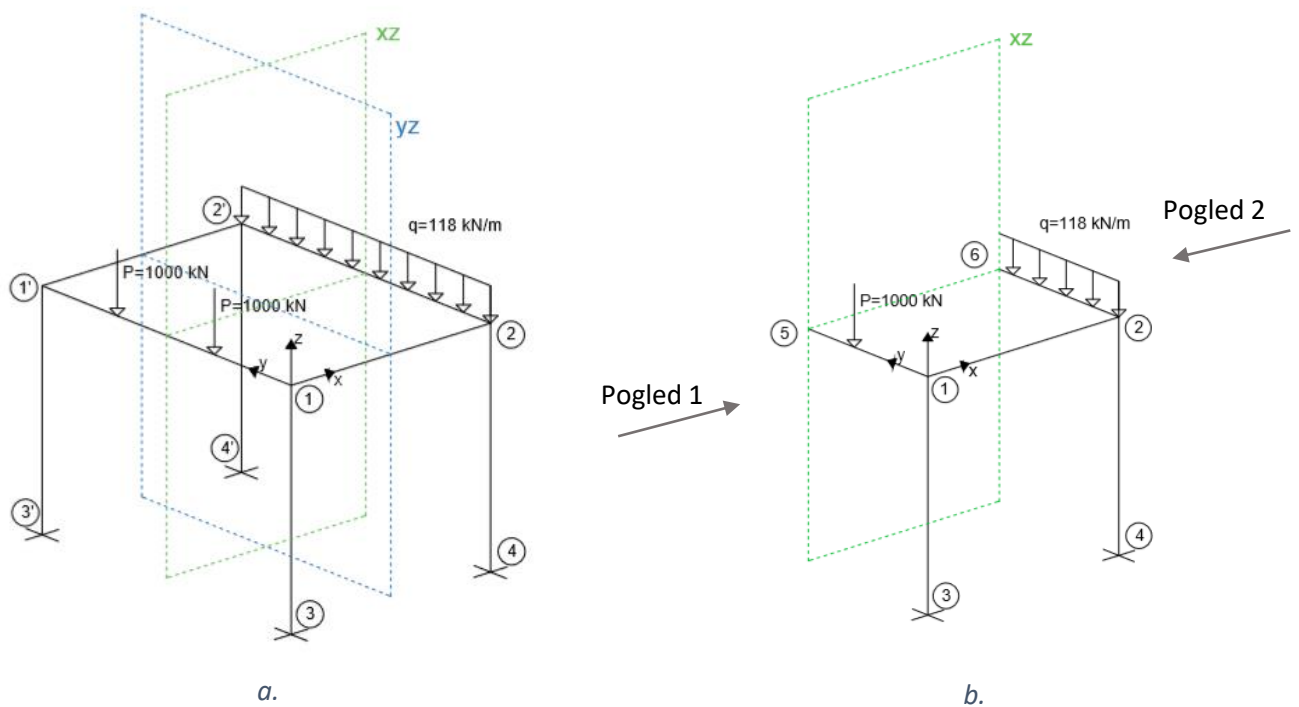
Prikazani postupak zasniva se na poznatoj metodi deformacija.

4.2. Opis postupka

Radi jednostavnosti odabran je primjer sa prizmatičnim štapovima i simetričnim opterećenjem. Na slici 6 prikazana je geometrija okvira sa opterećenjem. Okvir ćemo promatrati pomoću dvije ravnine simetrije (slika 7.a) , pomoću ravnine xz i ravnine yz. Promatrajući ravninu xz primijetimo da je opterećenje simetrično. Tako možemo gledati jednu stranu okvira te kasnije kada dobijemo konačne momente isti će vrijediti i za drugu stranu. Zbog simetrije okvira u odnosu na xz ravninu stavlja se upeto klizni ležaj na mjestu gdje ravnina prolazi kroz okvir. Tada dolazimo do momenata upetosti iz pogleda 1 za koncentrirano opterećenje, odnosno iz pogleda 2 za kontinuirano opterećenje (slika 7.b). Promatrajući sustav paralelno sa ravninom simetrije xz vidimo da nema momenata upetosti jer nema zadanog opterećenja.



Slika 6.



Slika 7.

Promatra se sustav opterećen u čvorovima, zaokreti čvorova su spriječeni. Dalje računamo razdjelne koeficijente pomoću kojih će se odvijati razdioba neuravnoteženih momenata. Razdjelne koeficijente dobivamo iz omjera krutosti pojedinog štapa i zbroja krutosti svih štapova koji su priključeni tom čvoru. Razdjelne koeficijente smo označili sa μ . Kako bi izračunali razdjelne koeficijente potrebni su nam momenti tromosti koje smo računali prema skici (slika 5.). Kako nam se sustav nalazi u prostoru potrebni su nam prijenosni koeficijenti koje smo označili kao $P_{1,3}^{y \rightarrow x}$ i $P_{1,3}^{x \rightarrow y}$. Zaokretanje čvora 1 oko osi y uzrokuje zaokretanje i oko osi x i obrnuto te radi toga koristimo prijenosne koeficijente pomoću kojih prenosimo momente u okomitu ravninu. Svakom zaokretu pripadaju komponente momenata savijanja oko obje osi nepoznatih zaokreta. Savijanjem stupa zaokretanjem presjeka oko osi x za kut nastaju komponente momenta:

$$M_{xx} = \chi \cdot \frac{I_{xx}}{l} \cdot \varphi_x$$

$$M_{yx} = -\chi \cdot \frac{I_{yx}}{l} \cdot \varphi_x = -\eta_{yx} \cdot M_{xx}$$

$$\eta_{yx} = \frac{I_{yx}}{I_{xx}}$$

$$\eta_{xy} = \frac{I_{xy}}{I_{yy}}$$

I_{xx} , I_{yx} su aksijalni i centrifugalni momenti tromosti presjeka stupa a faktor χ ovisi o raspodjeli krutosti duž osi štapa i uvjetima pridržavanja. Opterećenja čvorova rastavljaju se u smjerove osi x, y, z. Predznaci djelovanja momenata na krajevima štapova odabrani su tako da kod ravninskog prikaza razvijenog okvira odgovaraju uobičajenima u metodi deformacija.

Prijenosni koeficijenti dobivaju se pomoću izraza :

$$P_{1,3}^{y \rightarrow x} = -\eta_{xy}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(y)}$$

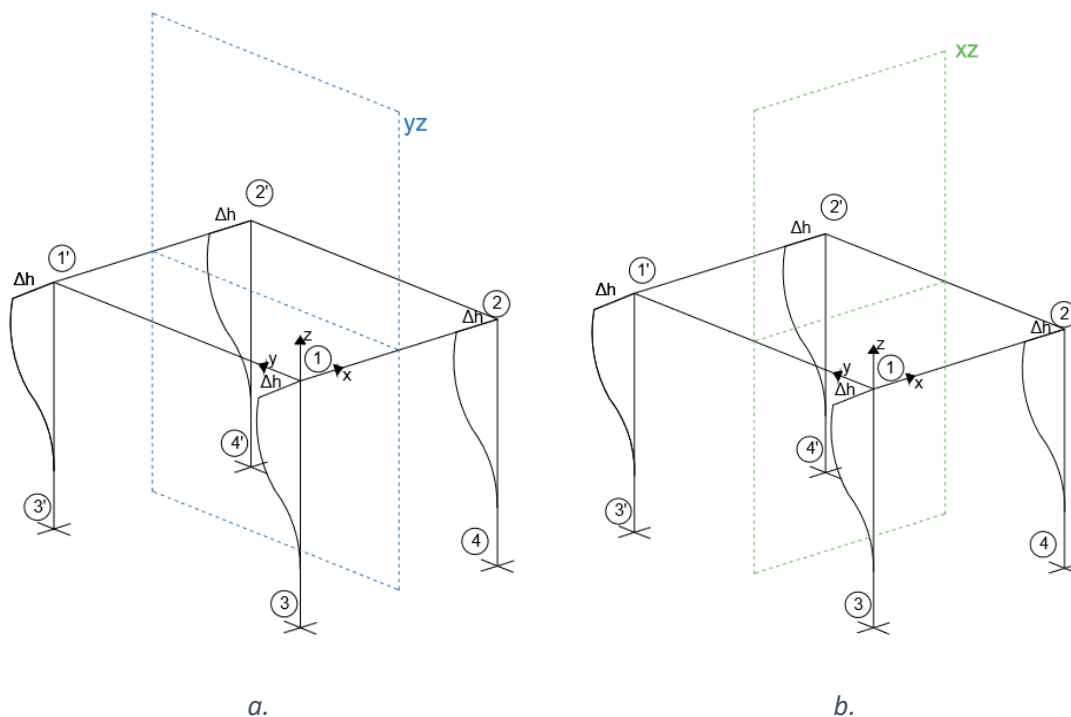
$$P_{1,3}^{x \rightarrow y} = -\eta_{yx}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(x)} .$$

Faktore η_{yx} i η_{xy} izračunali smo pomoću momenata tromosti presjeka stupa.

Postupak iteracije započinje kada smo izračunali potrebne razdjelne koeficijente i prienosne koeficijente $P_{1,3}^{y \rightarrow x}$ i $P_{1,3}^{x \rightarrow y}$. Krenuli smo od čvora u kojemu je najveći neuravnoteženi moment te nakon njegove razdiobe pomoću razdjelnih koeficijenata na stupu prenosimo polovicu dobivenih vrijednosti momenata na suprotan kraj zbog toga što je stup obostrano upet, dok na gredi imamo upeto klizni ležaj pa stoga prenosimo vrijednost momenta pomnoženu sa -1.

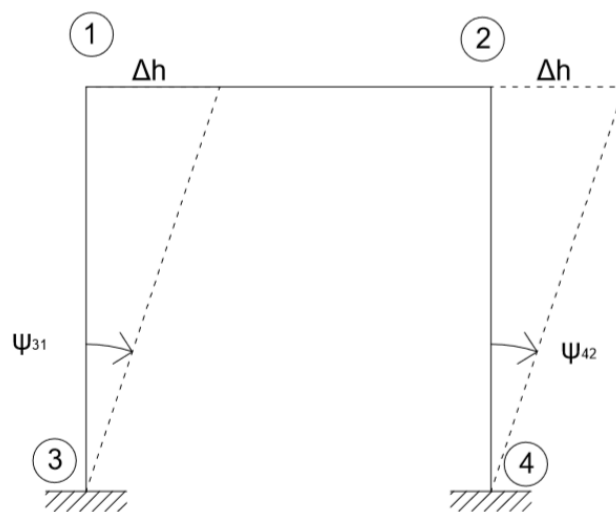
Nakon što smo ostvarili ravnotežu čvora, moramo isti taj početni neuravnoteženi moment prenijeti u okomitu ravninu pomoću koeficijenta $P_{1,3}^{y \rightarrow x}$ i $P_{1,3}^{x \rightarrow y}$. Polovica tako dobivene vrijednosti momenta se još prenosi na suprotan kraj štapa. Time je uravnotežen jedan čvor te se postupak ponavlja za sljedeće čvorove. Postupak se ponavlja za svaki čvor dok neuravnoteženi momenti na svim čvorovima ne postanu približno nula, ovisno o točnosti s kojom radimo. Konačne momente na upetim krajevima dobijemo tako da zbrojimo momente upetosti, raspodijeljene momente i prenesene momente.

Na okviru primijetimo da je zadan prisilni pomak u smjeru osi x. Prisilnim pomakom istovremeno opterećena su sva četiri ležaja. Okvir opet promatramo obzirom na ravnine simetrija. Bitno je uočiti da je prisilni pomak kao opterećenje u odnosu na ravninu yz antimetričan te da je u odnosu na ravninu xz simetričan (slika 8.).



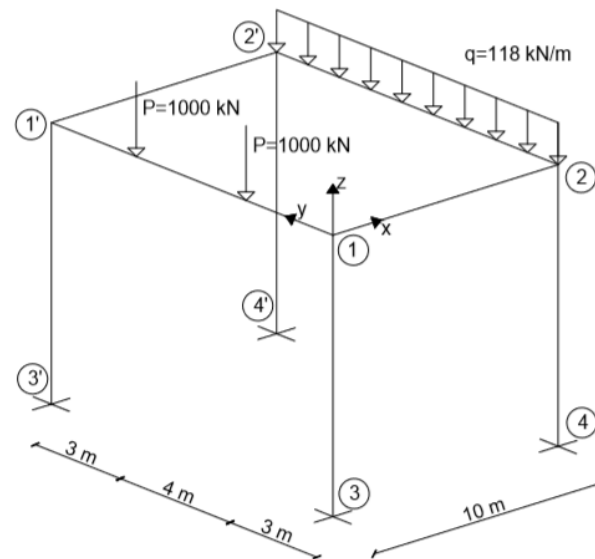
Slika 8.

Nadalje, promatrajući okvir paralelno sa ravninom xz doći ćemo do momenata upetosti koje uzrokuje pomak Δh (slika 9.). Razdjelne koeficijente, kao i prijenosne koeficijente $P_{1,3}^{y \rightarrow x}$ i $P_{1,3}^{x \rightarrow y}$ dobivamo na uobičajeni način te započinjemo iteraciju. Prisilni pomak Δh kao opterećenje u odnosu na ravninu xz je simetrično što nas dovodi do toga da će dijagram M_x biti simetričan, a isti pomak Δh kao opterećenje u odnosu na ravninu yz je antimetrično što za posljedicu ima da je dijagram M_y u odnosu na ravninu simetrije yz antimetričan. Konačan dijagram bit će zbroj momentnih dijagrama od koncentriranog i kontinuiranog opterećenja te od pomaka.



Slika 9.

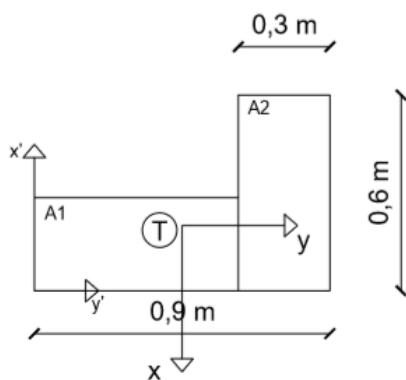
5. Primjer.



$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$q = 12 \text{ t} = 12\,000 \cdot \frac{981}{100\,000} = 117,72 \text{ kN/m} \sim 118 \text{ kN/m}$$

$$P = 100 \text{ t} = 100\,000 \cdot \frac{981}{100\,000} = 981 \text{ kN} \sim 1000 \text{ kN}$$



STUP

$$A_1 = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \text{ m}^2$$

$$\underline{A_2 = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 \text{ m}^2}$$

$$A = 0,36 \text{ m}^2$$

$$x'_1 = 0,15 \text{ m} \quad x'_2 = 0,3 \text{ m}$$

$$y'_1 = 0,3 \text{ m} \quad y'_2 = 0,75 \text{ m}$$

$$x_T = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A} = \frac{0,18 \cdot 0,15 + 0,18 \cdot 0,3}{0,36} = 0,225 \text{ m}$$

$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A} = \frac{0,18 \cdot 0,3 + 0,18 \cdot 0,75}{0,36} = 0,525 \text{ m}$$

$$I_x = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} + A_1 \cdot (y_T - y_1')^2 + \frac{0,6 \cdot 0,3^3}{12} + A_2 \cdot (y_T - y_2')^2 = 0,024975 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{0,6 \cdot 0,3^3}{12} + A_1 \cdot (x_T - x_1')^2 + \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} + A_2 \cdot (x_T - x_2')^2 = 0,008775 \text{ mm}^4$$

$$EI_x = 749250 \text{ kN/m}^2$$

$$EI_y = 263250 \text{ kN/m}^2$$

GREDA

$$x_1 = 0,075 \text{ m} \quad x_2 = -0,075 \text{ m}$$

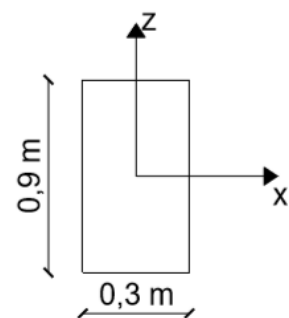
$$y_1 = -0,225 \text{ m} \quad y_2 = 0,225 \text{ m}$$

$$I_{xy} = -A_1 \cdot x_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot x_2 \cdot y_2 = -0,006075$$

$$EI_{xy} = 182250 \text{ kN/m}^2$$

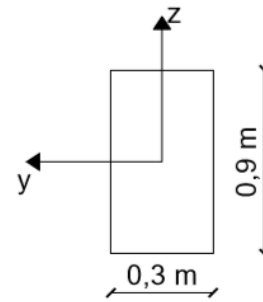
$$I_x = \frac{0,3 \cdot 0,9^3}{12} = 0,018$$

$$EI_x = 546750 \text{ kN/m}^2$$

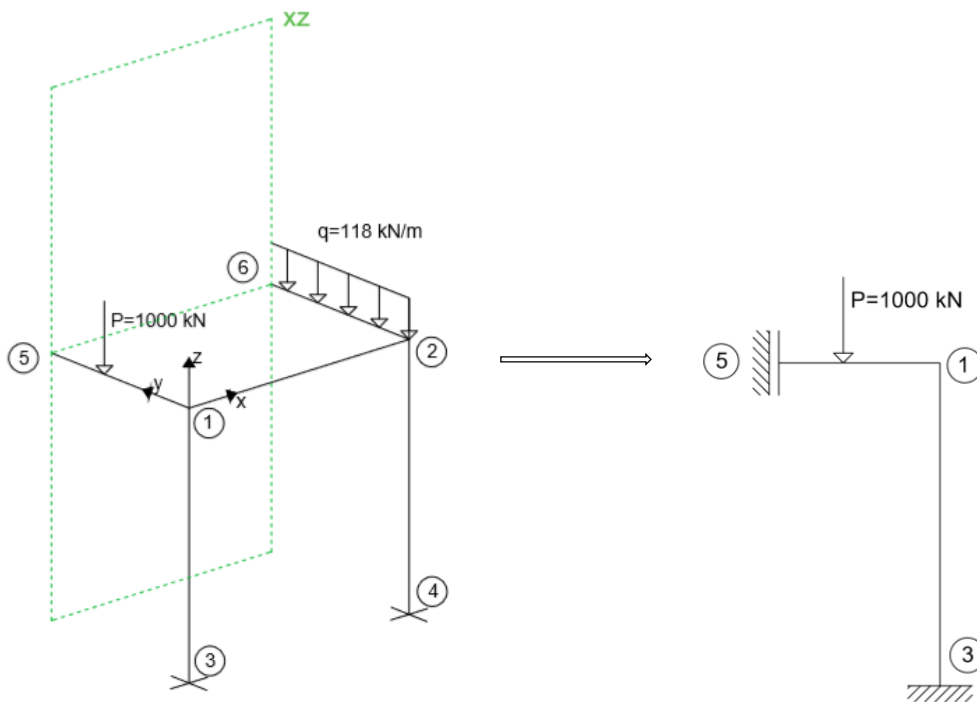


$$I_y = \frac{0,3 \cdot 0,9^3}{12} = 0,018$$

$$EI_y = 546750 \text{ kN/m}^2$$



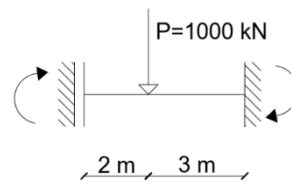
Momenti upetosti

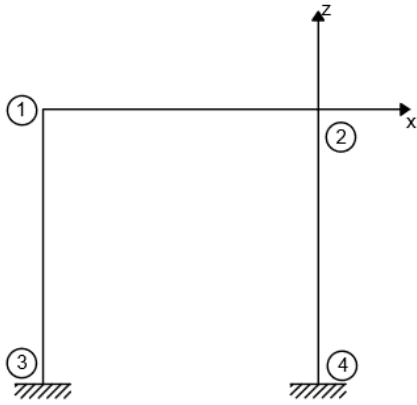


$$M_{15}^{(x)} = -\frac{P \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} + 1 \right) = -2100 \text{ kNm}$$

$$M_{51}^{(x)} = -\frac{P \cdot 3}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{5} \right) = -900 \text{ kNm}$$

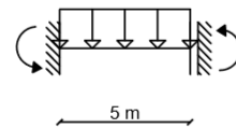
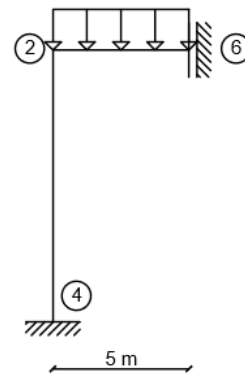
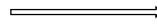
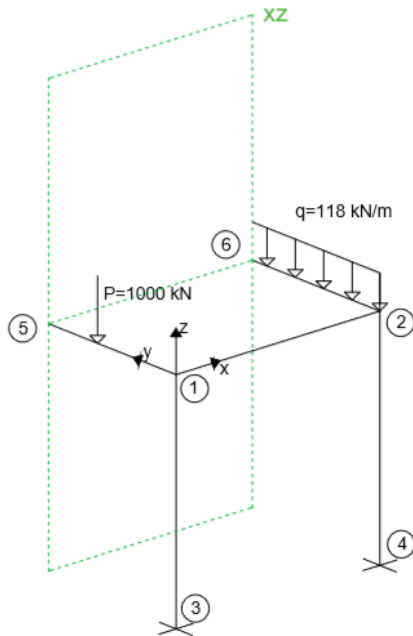
$$M_{13}^{(x)} = M_{31}^{(x)} = 0 \text{ kNm}$$





$$M_{12}^{(y)} = M_{21}^{(y)} = 0 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(y)} = M_{31}^{(y)} = M_{24}^{(y)} = M_{42}^{(y)} = 0 \text{ kNm}$$



$$M_{26}^{(x)} = \frac{q \cdot l^2}{3} = \frac{118 \cdot 5^2}{3} = 983,33 \text{ kNm}$$

$$M_{62}^{(x)} = \frac{q \cdot l^2}{6} = \frac{118 \cdot 5^2}{3} = 491,666 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{(x)} = M_{42}^{(x)} = 0 \text{ kNm}$$

Razdjelni koeficijenti-ravnina yz

$$a_{15}^{(x)} = \frac{k_{15}^{(x)}}{l} = \frac{I_x}{5} = 0,0036 \text{ m}^3$$

$$a_{13}^{(x)} = \frac{k_{13}^{(x)}}{l} = \frac{4 \cdot I_x}{10} = 0,00999 \text{ m}^3$$

$$A_1^{(x)} = a_{15}^{(x)} + a_{13}^{(x)} = 0,01359 \text{ m}^3$$

$$\mu_{15}^{(x)} = \frac{a_{15}^{(x)}}{A_1^{(x)}} = 0,265$$

$$\mu_{13}^{(x)} = \frac{a_{13}^{(x)}}{A_1^{(x)}} = 0,735$$

$$\eta_{yx}^{(1,3)} = \frac{I_{xy}^{stup}}{I_x^{stup}} = \frac{(-0,006075)}{0,024975} = -0,2432$$

$$\eta_{xy}^{(1,3)} = \frac{I_{xy}^{stup}}{I_y^{stup}} = \frac{(-0,006075)}{0,008775} = -0,6923$$

Prijenosni koeficijent s $M_x \rightarrow M_y$

$$P_{1,3}^{x \rightarrow y} = -\eta_{yx}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(x)} = 0,179$$

Ravnina xz

$$a_{12}^{(y)} = \frac{4 \cdot k_{12}}{l} = \frac{4 \cdot I_y^{grada}}{10} = 0,0072 \text{ m}^3$$

$$a_{13}^{(y)} = \frac{4 \cdot k_{13}}{l} = \frac{4 \cdot I_y^{stup}}{10} = 0,00351 \text{ m}^3$$

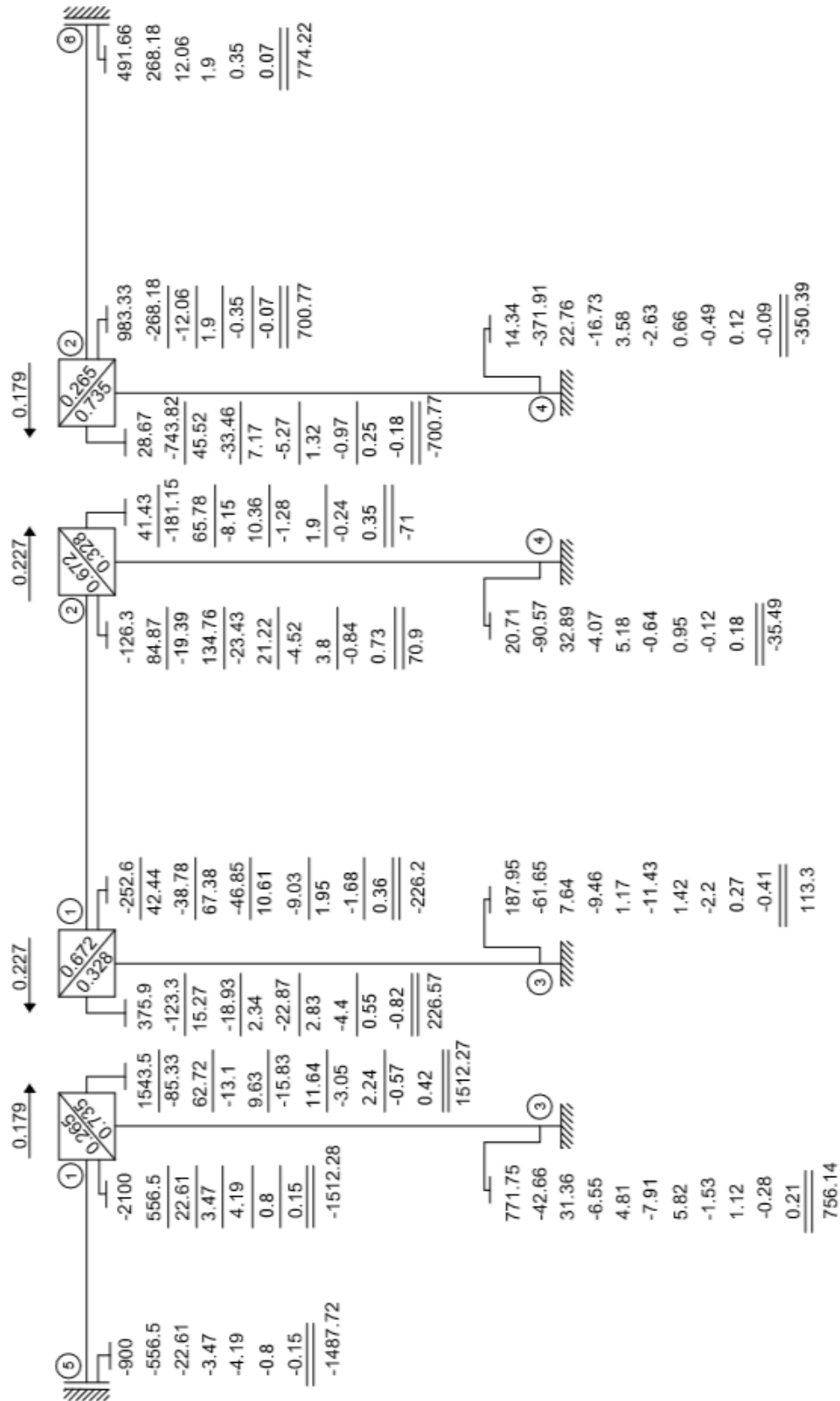
$$A_1^{(y)} = a_{12}^{(y)} + a_{13}^{(y)} = 0,01071$$

$$\mu_{12}^{(y)} = \frac{a_{12}^{(y)}}{A_1^{(y)}} = 0,672$$

$$\mu_{13}^{(y)} = \frac{a_{13}^{(y)}}{A_1^{(y)}} = 0,328$$

Prijenosni koeficijent s $M_y \rightarrow M_x$

$$P_{1,3}^{y \rightarrow x} = -\eta_{xy}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(y)} = 0,227$$



$$M_{15}^{(x)} = -1512.28 \text{ kNm}$$

$$M_{51}^{(x)} = -1487.72 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(x)} = 1512.28 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^{(x)} = 756.14 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^{(y)} = -226.2 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(y)} = 226.2 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^{(y)} = 113.3 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^{(y)} = 70.9 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{(y)} = -71 \text{ kNm}$$

$$M_{42}^{(y)} = -35.49 \text{ kNm}$$

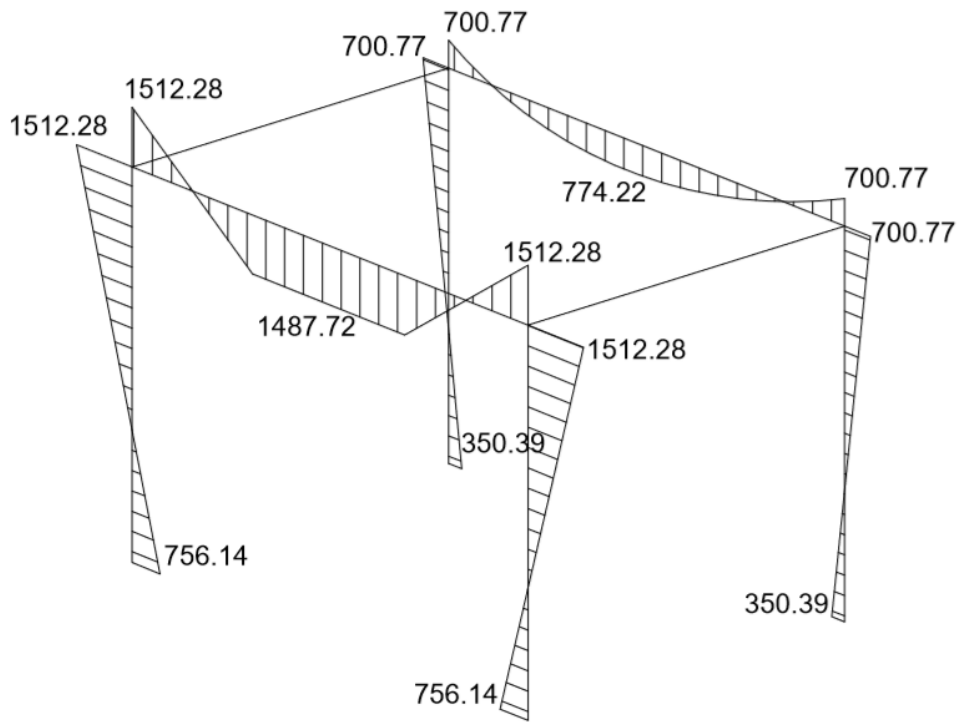
$$M_{26}^{(x)} = 700.77 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{(x)} = -700.77 \text{ kNm}$$

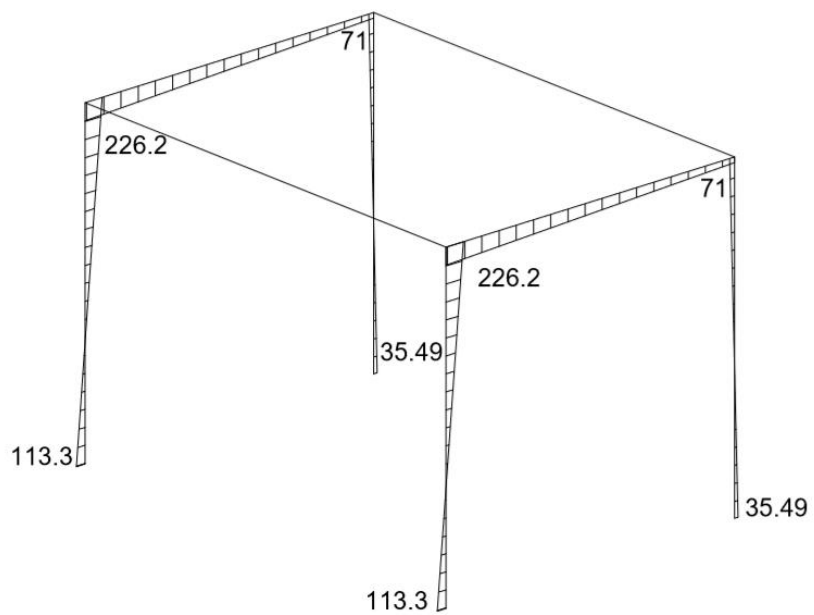
$$M_{42}^{(x)} = -350.39 \text{ kNm}$$

$$M_{62}^{(x)} = 774.22 \text{ kNm}$$

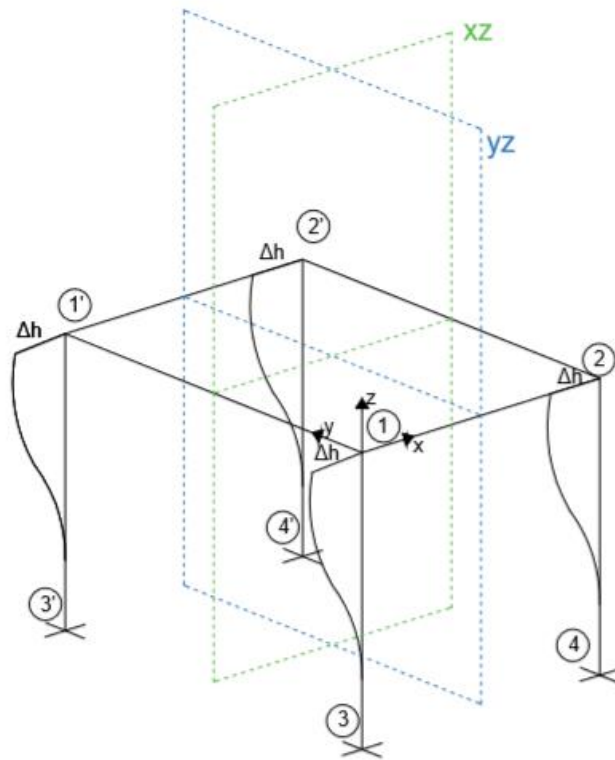
M_x [kNm]



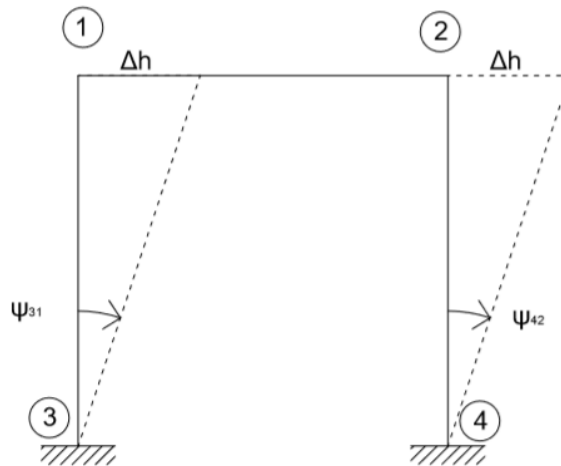
M_y [kNm]



Pomak



$$\Delta h = 2.5 \text{ cm} = 0.025 \text{ m}$$



$$\psi_{31} = \psi_{13} = -\frac{\Delta h}{10} = -\frac{0.025}{10} = -0.0025$$

$$\psi_{42} = \psi_{24} = -\frac{\Delta h}{10} = -\frac{0.025}{10} = -0.0025$$

$$M_{13} = M_{31} = -6 \cdot \frac{EI_x}{l} \cdot \psi_{31} = -6 \cdot \frac{749250}{10} \cdot (-0.0025) = 1123.875 \text{ kNm}$$

$$M_{24} = M_{42} = -6 \cdot \frac{EI_x}{l} \cdot \psi_{42} = -6 \cdot \frac{749250}{10} \cdot (-0.0025) = 1123.875 \text{ kNm}$$

Razdjelni koeficijenti

$$a_{15}^{(x)} = \frac{k_{15}^{(x)}}{l} = \frac{I_x}{5} = 0,0036 \text{ m}^3$$

$$a_{13}^{(x)} = \frac{k_{13}^{(x)}}{l} = \frac{4 \cdot I_x}{10} = 0,00999 \text{ m}^3$$

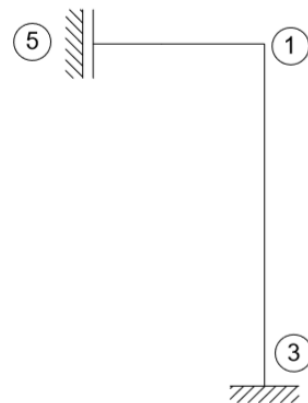
$$A_1^{(x)} = a_{15}^{(x)} + a_{13}^{(x)} = 0,01359 \text{ m}^3$$

$$\mu_{15}^{(x)} = \frac{a_{15}^{(x)}}{A_1^{(x)}} = 0,265$$

$$\mu_{13}^{(x)} = \frac{a_{13}^{(x)}}{A_1^{(x)}} = 0,735$$

$$\eta_{yx}^{(1,3)} = \frac{I_{xy}^{stup}}{I_x^{stup}} = \frac{(-0,006075)}{0,024975} = -0,2432$$

$$\eta_{xy}^{(1,3)} = \frac{I_{xy}^{stup}}{I_y^{stup}} = \frac{(-0,006075)}{0,008775} = -0,6923$$



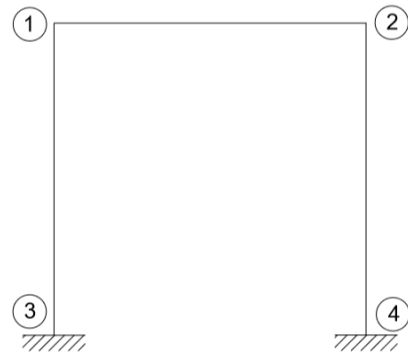
Prijenosni koeficijent s $M_x \rightarrow M_y$

$$P_{1,3}^{x \rightarrow y} = -\eta_{yx}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(x)} = 0,179$$

$$a_{12}^{(y)} = \frac{4 \cdot k_{12}}{l} = \frac{4 \cdot I_y^{grada}}{10} = 0,0072 \text{ m}^3$$

$$a_{13}^{(y)} = \frac{4 \cdot k_{13}}{l} = \frac{4 \cdot I_y^{stup}}{10} = 0,00351 \text{ m}^3$$

$$A_1^{(y)} = a_{12}^{(y)} + a_{13}^{(y)} = 0,01071$$



$$\mu_{12}^{(y)} = \frac{a_{12}^{(y)}}{A_1^{(y)}} = 0,672$$

$$\mu_{13}^{(y)} = \frac{a_{13}^{(y)}}{A_1^{(y)}} = 0,328$$

Prijenosni koeficijent s $M_y \rightarrow M_x$

$$P_{1,3}^{y \rightarrow x} = -\eta_{xy}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(y)} = 0,227$$

$$a_{21}^{(y)} = \frac{4 \cdot k_{21}}{l} = \frac{4 \cdot I_y^{greda}}{10} = 0,0072 \text{ m}^3$$

$$a_{24}^{(y)} = \frac{4 \cdot k_{24}}{l} = \frac{4 \cdot I_y^{stup}}{10} = 0,00351 \text{ m}^3$$

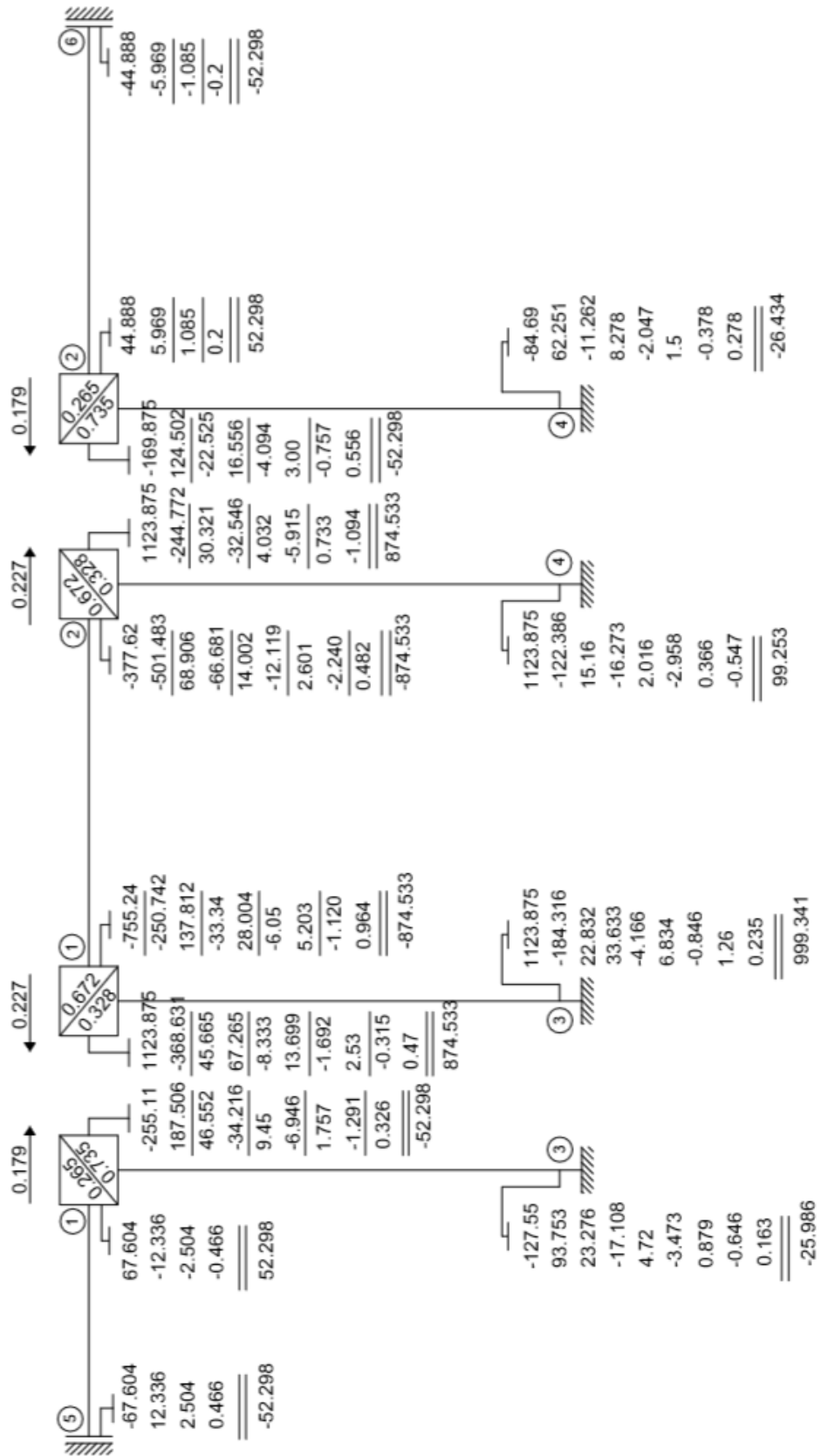
$$A_2^{(y)} = a_{21}^{(y)} + a_{24}^{(y)} = 0,01071$$

$$\mu_{21}^{(y)} = \frac{a_{21}^{(y)}}{A_2^{(y)}} = 0,672$$

$$\mu_{24}^{(y)} = \frac{a_{24}^{(y)}}{A_2^{(y)}} = 0,328$$

Prijenosni koeficijent s $M_y \rightarrow M_x$

$$P_{1,3}^{y \rightarrow x} = -\eta_{xy}^{(1,3)} \cdot \mu_{13}^{(y)} = 0,227$$



$$M_{15}^{(x)} = 52.298 \text{ kNm}$$

$$M_{51}^{(x)} = -52.298 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(x)} = -52.298 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^{(x)} = -26.434 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^{(y)} = -874.533 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^{(y)} = -874.533 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(y)} = 874.533 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^{(y)} = 999.253 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{(y)} = 874.533 \text{ kNm}$$

$$M_{42}^{(y)} = 999.253 \text{ kNm}$$

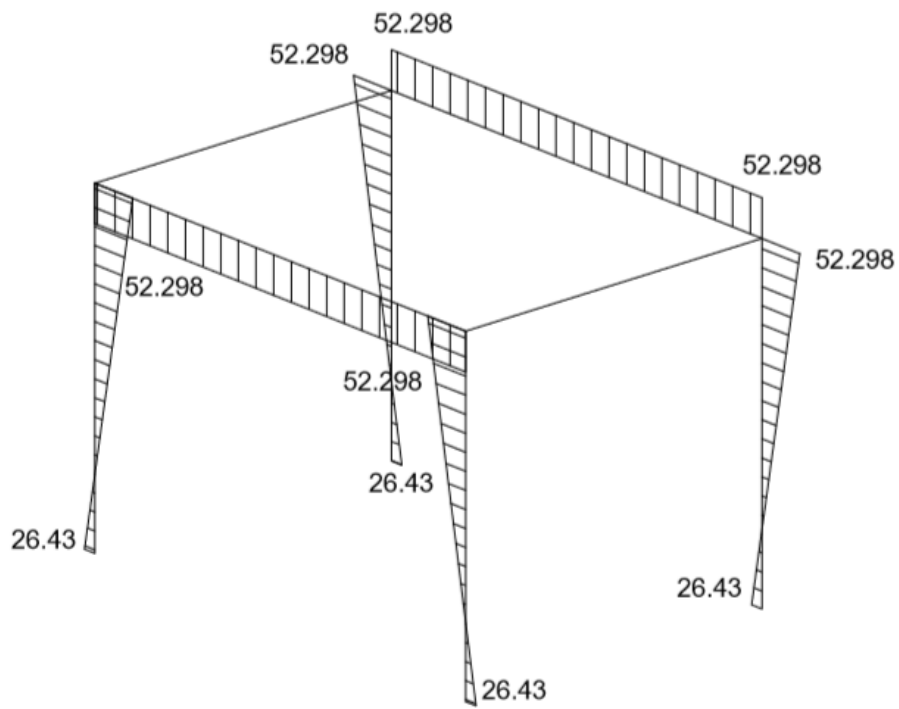
$$M_{26}^{(x)} = 52.298 \text{ kNm}$$

$$M_{62}^{(x)} = -52.298 \text{ kNm}$$

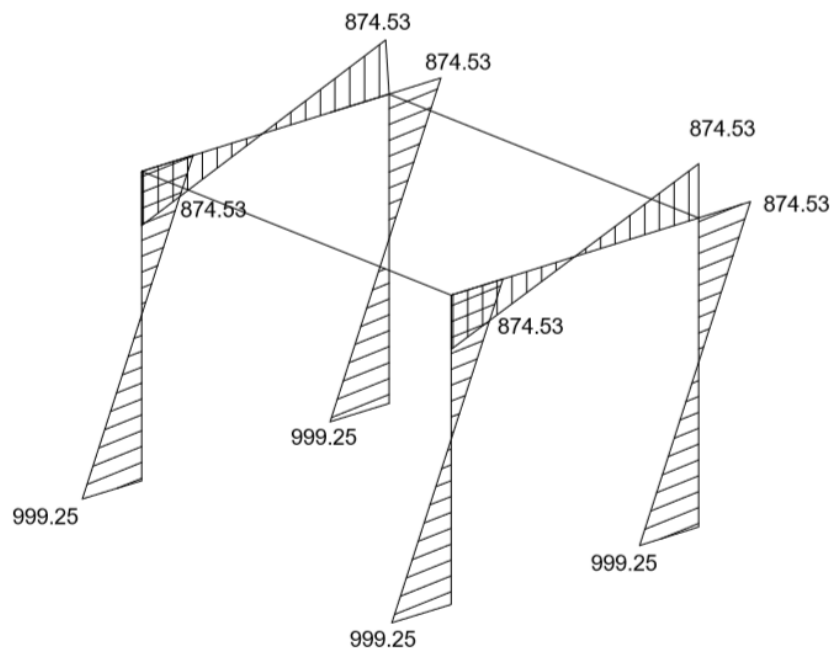
$$M_{24}^{(x)} = -52.298 \text{ kNm}$$

$$M_{42}^{(x)} = -26.434 \text{ kNm}$$

M_x [kNm]



M_y [kNm]



Konačni momenti

$$M_{15}^{(x)} = -1512.28 + 52.298 = -1459.98 \text{ kNm}$$

$$M_{51}^{(x)} = -1487.72 - 52.298 = -1540.018 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(x)} = 1512.28 - 52.298 = 1459.98 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^{(x)} = 756.14 - 26.434 = 729.71 \text{ kNm}$$

$$M_{1'5}^{(x)} = 1512.28 - 52.298 = 1459.98 \text{ kNm}$$

$$M_{1'3'}^{(x)} = -1512.28 + 52.298 = -1459.98 \text{ kNm}$$

$$M_{3'1'}^{(x)} = -756.14 + 26.434 = -729.71 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^{(y)} = -226.2 - 874.533 = -1100.73 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^{(y)} = 226.2 + 874.533 = 1100.73 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^{(y)} = 113.3 + 999.341 = 1112.64 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^{(y)} = 71 - 874.533 = -803.53 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{(y)} = -71 + 874.533 = 803.53 \text{ kNm}$$

$$M_{42}^{(y)} = -35.49 + 999.253 = 963.76 \text{ kNm}$$

$$M_{1'2'}^{(y)} = 226.2 + 874.533 = 1100.73 \text{ kNm}$$

$$M_{2'1'}^{(y)} = -71 + 874.533 = 803.53 \text{ kNm}$$

$$M_{1'3'}^{(y)} = -226.2 - 874.533 = -1100.73 \text{ kNm}$$

$$M_{3'1'}^{(y)} = -113.3 - 999.253 = -1112.64 \text{ kNm}$$

$$M_{2'4'}^{(y)} = 71 - 874.533 = -803.53 \text{ kNm}$$

$$M_{4'2'}^{(y)} = 35.49 - 999.253 = -963.76 \text{ kNm}$$

$$M_{26}^{(x)} = 700.77 + 52.298 = 753.07 \text{ kNm}$$

$$M_{2'6}^{(x)} = -700.77 - 52.298 = -753.07 \text{ kNm}$$

$$M_{2'4'}^{(x)} = 700.7 + 52.298 = 753.07 \text{ kNm}$$

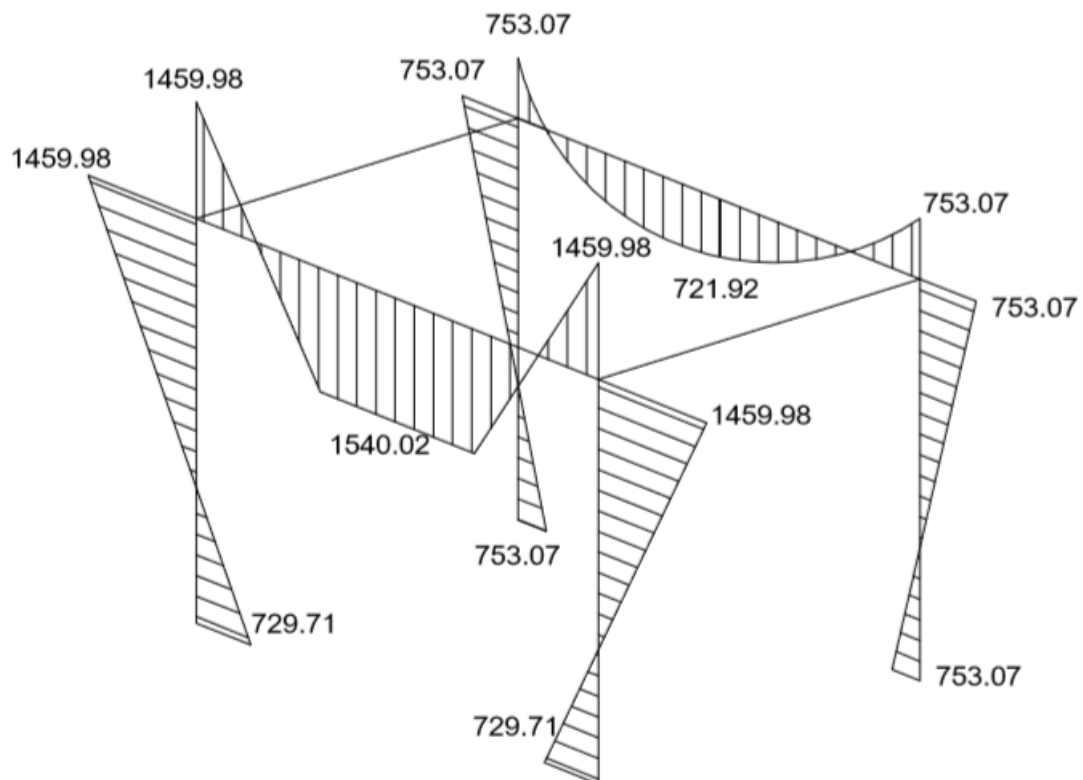
$$M_{4'2'}^{(x)} = 350.39 + 26.434 = 376.82 \text{ kNm}$$

$$M_{24}^{(x)} = -700.77 - 52.289 = -753.07 \text{ kNm}$$

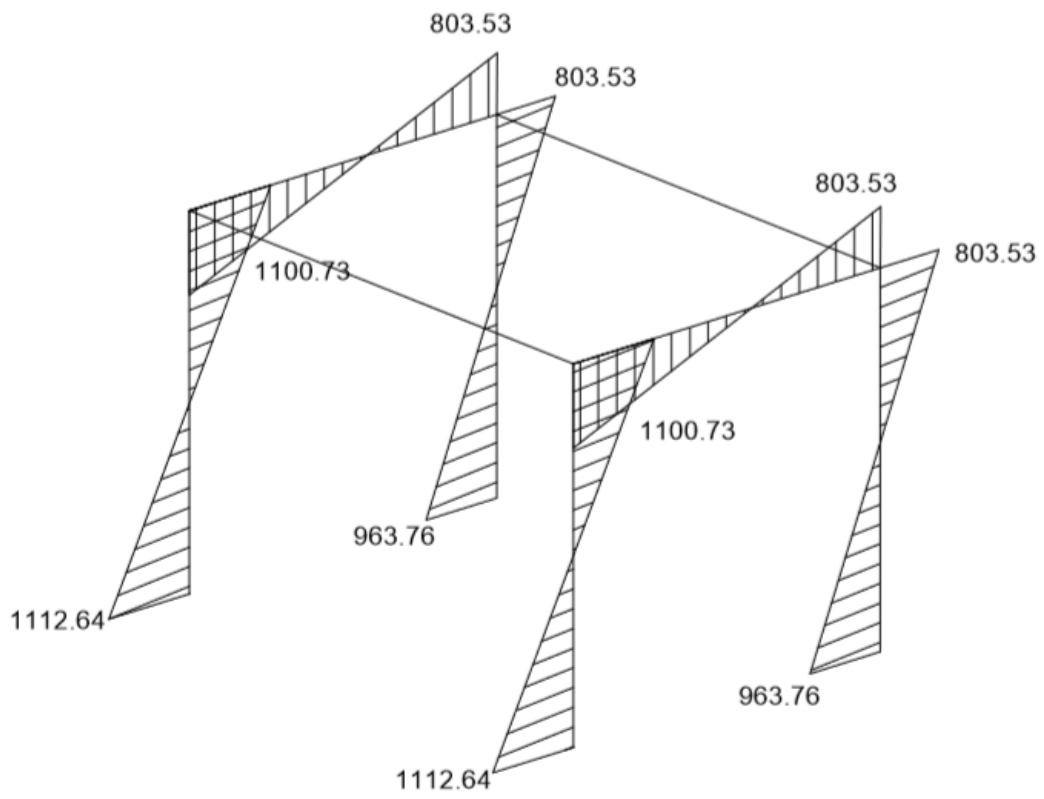
$$M_{42}^{(x)} = -350.39 - 26.434 = -376.82 \text{ kNm}$$

$$M_{62}^{(x)} = 774.22 - 52.298 = 721.92 \text{ kNm}$$

M_x [kNm]



M_y [kNm]



6. Usporedba Crossa u ravnini i prostoru

Crossov proračun prostornog okvira znatno je složeniji od ravninskog. Uočili smo da okvir u prostoru ima dvije ravnine simetrije. Ako osi nepoznatih zaokreta (osi x i y) se ne poklapaju s glavnim osima tromosti tada će zaokret čvora oko osi koja je okomita na jednu ravninu izazvati momente savijanja oko nje, ali i oko osi okomite na drugu ravninu. Stoga treba uravnotežiti momente u toj drugoj ravnini. A za to smo koristili prijenosne koeficijente $P_{1,3}^{y \rightarrow x}$ i $P_{1,3}^{x \rightarrow y}$. Sljedeće što čini prostorni okvir složenijim od ravninskog je što postoji torzijsko opterećenje okvira. Torzija nastaje nakon što se čvorovi zbog translatorskih pomaka pomaknu iz težišta. U ovom primjeru sustav je pridržan pa ne postoji torzija. Ipak, zbog simetrija sistema rezultirajuće sile u horizontalnim ravninama mogu se rastaviti u po dvije komponente u ravninama simetrije i potom neovisno rješavati djelovanje sila u tim ravninama i torzijsko djelovanje.

Literatura :

- ❖ Heinrich Werner, Primjer iterativnog proračuna prostornog okvira, Građevinar, God. XXVI (XCIV), ožujak 1974., broj 3
- ❖ Krešimir Fresl, Petra Gidak, Sanja Hak : Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka, Građevinar 62 2010.
- ❖ K. Fresl: Građevna statika 2 : Predavanja, <http://www.grad.hr/nastava/gs/gs2/gs2.pdf>
- ❖ V. Šimić, Otpornost materijala 1, II. Izdanje, Zagreb 2002.