



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

USPOREDBA ČALIŠEVLJEVA I CROSSOVA POSTUPKA

ZAVRŠNI RAD
GRAĐEVNA STATIKA 2.

Natalija Borković (0082044093)

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Fresl, dipl. ing. građ.

Ak. god. 2013./2014.

Zagreb, 24. rujna 2013.

SADRŽAJ:

1. Konstantin Čališev

- 1.1. Životopis Konstantina Čališeva.....3
- 1.2. Čališevljev postupak – općenito, definicije i izvodi.....5
- 1.3. Čališevljev postupak – primjer.....11

2. Hardy Cross

- 2.1. Životopis Hardya Crossa.....14
- 2.2. Crossov postupak – općenito, definicije i izvodi.....16
- 2.3. Crossov postupak – primjer.....21

3. Usporedba metoda Čališeva i Crossa

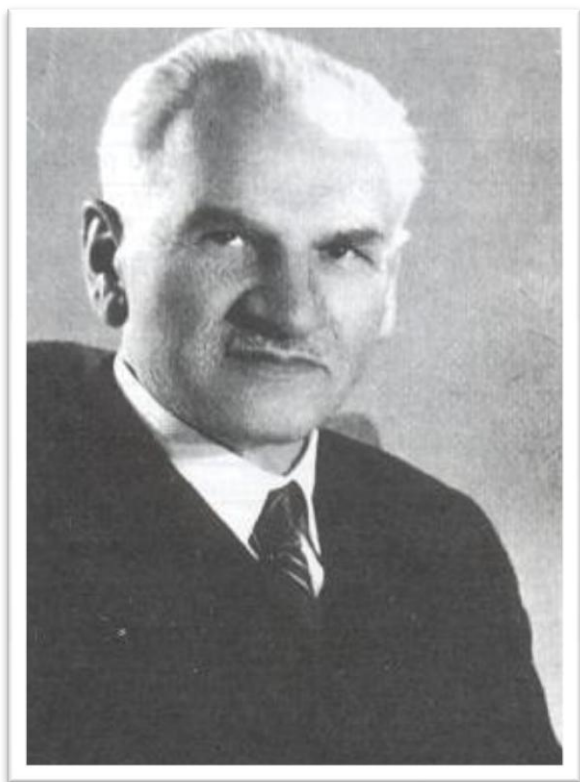
- 3.1. Čališevljev postupak.....25
- 3.2. Crossov postupak.....49
- 3.3. Rješenje iz programa LinPro.....64

4. Zaključak.....65

Literatura.....66

1. Konstanin Čališev

1.1. Životopis Konstantina Čališeva



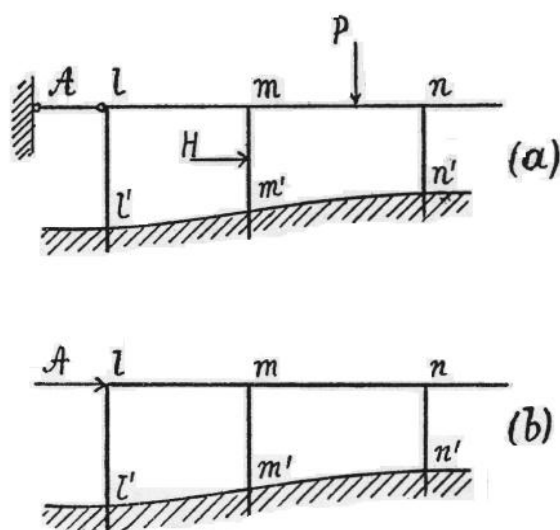
Slika 1: Konstantin Čališev

Konstantin Čališev (slika 1) rođen je 1888. u Kupjansku u Rusiji. Nakon završetka osnovne škole krenuo je u državnu realnu gimnaziju u Izjumu, gdje je 1906. maturirao. Godine 1911. diplomirao je građevinarstvo na Visokoj tehničkoj školi u Kijevu. Radio je kod proširenja električnih središnjica u Kijevu i Harkovu, a nakon toga se bavio geodetskim poslovima u odjelu za melioraciju zemljišta na poluotoku Krimu. Godine 1913. biran je za nastavnika u visokoj školi prometnih inženjera u Petrogradu, gdje je vodio vježbe iz nauke o čvrstoći i iz mehanike. Za vrijeme svjetskog rata radio je kao stručni tehnički časnik kod popravljanja pruga i mostova, gradnje provizornih mostova i željeznica, a kasnije i na ispitivanju materijala i konstrukcija za zrakoplove kao i ispitivanju statičkih proračuna zrakoplova. Nakon Prvog svjetskog rata ostao je u Kijevu radeći kao asistent na Akademiji znanosti. 1919. godine odlazi u Njemačku na službeno putovanje te se više nikada ne vraća u Rusiju. Nakon kratkog

vremena provedenog u Njemačkoj dolazi u Hrvatsku gdje je 1921. godine postao asistentom profesora Stjepana Timošenka, koji je također emigrirao iz Sovjetskog Saveza, na katedri za tehničku mehaniku Tehničke visoke škole u Zagrebu. Doktorirao je u travnju 1922. disertacijom naziva *Jednostavan način izračunavanja okvirnih nosača*. Zanimljivo je da je on prvi doktorirao nakon što su 1920. izdani propisi za dobivanje doktorata tehničkih znanosti. Iste je godine Čališev razvio jedan od prvih relaksacijskih postupaka rješavanja jednadžbi metode pomaka. Ostao je raditi na Tehničkoj visokoj školi u početku kao docent, a potom kao izvanredni pa redoviti profesor predavajući Nauku o čvrstoći / Otpornost materijala, Ispitivanje gradiva, Teoriju konstrukcija / Građevnu statiku i Teoriju elastičnosti. Od 1956. predavao je i na Arhitektonsko-građevinsko-geodetskom fakultetu. Na predavanjima se, kažu, nikada nije služio bilješkama, a predavanja izbornih kolegija znao je držati makar ih slušao samo jedan student. Do 1958. godine, kada se povukao u mirovinu, vodio je Zavod za ispitivanje gradiva, koji je osnovao Timošenko. Umro je 1970. godine u Zagrebu.

1.2. Čališevljev postupak – općenito, definicije i izvodi

Kod rješavanja statički neodređenih sistema potrebno je postaviti broj linearnih jednačbi koji odgovara broju nepoznanica tog sistema. Često je broj nepoznanica toliko velik da je nemoguće dobiti direktno rješenje jednačbi. Korištenjem brojnih pojednostavljenja te pogodnijim izborom suvišnih nepoznanica, moguće je smanjiti broj nepoznanica te dobiti sistem jednačbi koji se može jednostavnije riješiti. Međutim, ako i dalje postoji prevelik broj nepoznanica, najbolje rješenje je koristiti način postupnih aproksimacija. Upravo je taj način Konstantin Čališev primijenio kod proračunavanja okvirnih konstrukcija. U samom početku proračuna, Čališev zaokreće čvorove kako bi uravnotežio momente u čvorovima. Pod djelovanjem vanjskih sila, čvorovi nosača se zaokreću za neki kut φ te se transliraju za neku veličinu u koja je za sve čvorove jedne etaže jednaka. Pri tom ne uzima u obzir pomake zbog stlačivanja ili rastezanja štapova, nego promatra samo pomake zbog savijanja štapova. Prilikom određivanja momenata na krajevima štapova, koji su rezultat djelovanja vanjskih sila, Čališev pretpostavlja da je jedan čvor nosača spojen s tлом pomoću horizontalnog štapa pa je u tom čvoru pomak $u=0$. Zatim određuje momente koji su rezultat djelovanja horizontalne sile koja je jednaka, ali protusmjerna sili u štapu kojim je čvor nosača spojen s tлом. Stvarno stanje jednako je zbroju ovih dvaju stanja principom superpozicije (slika 2.)



Slika 2. Primjer iz originalnog članka K. Čališeva

S obzirom da su u svim čvorovima štapovi kruto spojeni, štapovi koji pripadaju istom čvoru će se zaokrenuti za isti kut $\varphi_{m,i} = \varphi_m$. Upravo ti kutovi zaokreta uzrokuju savijanje štapova pa je neuravnoteženi moment u čvoru m obostrano upetog štapnog elementa $m-i$ dan izrazom $M_{m,i} = 4k_{m,i}\varphi_m + 2k_{m,i}\varphi_i + \bar{M}_{m,i}$; pri čemu je $k_{m,i} = \frac{EI_{m,i}}{l_{m,i}}$. Prvi pribrojnik označava doprinos zaokreta čvora m , a drugi doprinos zaokreta čvora na drugom kraju štapa. $\bar{M}_{m,i}$ su momenti upetosti kojima se uzima u obzir utjecaj zadanog vanjskog opterećenja. Iz jednadžbe ravnoteže čvora m , pri čemu i označava sve susjedne čvorove, dobivamo da je $\sum_i (-M_{m,i}) = 0$. Momenti koji djeluju na čvor jednaki su po veličini, ali protusmjerni momentima koji djeluju na krajevima štapova. Ako dobiveni izraz iz jednadžbe ravnoteže čvora m pomnožimo sa -1 i uvrstimo u jednadžbu momenta u čvoru m dobivamo:

$$\left(\sum_i 4k_{m,i}\right)\varphi_m + \sum_i 2k_{m,i}\varphi_i + \sum_i \bar{M}_{m,i} = 0. \quad (1)$$

Kutove φ treba odabrati da zadovoljavaju ovu jednadžbu za bilo koji čvor konstrukcije. Kad bismo sve čvorove zaokrenuli za 'pravi' kut, istodobno bismo zadovoljili sve jednadžbe, međutim postupkom postupnih aproksimacija zaokrećemo svaki čvor zasebno i na taj način zadovoljavamo jednadžbe ravnoteže u svakom pojedinom čvoru. Polazimo od čvora u kojem pretpostavljamo da će se pojaviti najveći kut φ (u ovom slučaju će to biti čvor m). S obzirom da je samo u čvoru m dozvoljeno zakretanje, a u ostalim čvorovima spriječeno, slijedi

$$\varphi_m = -\frac{1}{\sum_i 4k_{m,i}} \sum_i \bar{M}_{m,i}.$$

Zaokretanjem čvora m narušavamo ravnotežu susjednih čvorova koji su štapno povezani s čvorom m , a moment koji se pojavljuje na drugom kraju m štapa jednak je $2k_{l,m}\varphi_m$. S obzirom da se svaki put kada jedan čvor uravnotežimo na susjednima pojavi neravnoteža momenata, morat ćemo svaki čvor više puta uravnotežavati, pa stoga φ_m možemo označiti sa $\varphi_m^{(1)}$, jer je to zapravo samo prva približna vrijednost. Približne vrijednosti kutova zaokreta u čvoru označavamo sa $\varphi_m^{(\beta_m)}$, gdje indeks β_m označava vrijednost kuta φ_m dobivenu nakon β_m uravnoteživanja čvora m . Zbog narušavanja ravnoteže čvora m prilikom uravnoteživanja susjednih čvorova, suma momenata čvora m više nije jednaka nuli već

$$\left(\sum_i 4k_{m,i}\right)\varphi_m^{(\beta_m)} + \sum_i 2k_{m,i}\varphi_i^{(\beta_i)} + \sum_i \bar{M}_{m,i} = m_m^{(\beta_m)}. \quad (2)$$

Moment $m_m^{(\beta_m)}$ nazivamo rezidualnim momentom. Oduzimanjem (1) od (2) uz

$$\varphi_i = \varphi_i^{(\beta_i)} + \Delta\varphi_i, \text{ dobivamo : } (4 \sum_i k_{m,i}) \Delta\varphi_m + \sum_i 2k_{m,i} \Delta\varphi_i = m_m^{(\beta_m)}.$$

Kako bismo čvor m ponovno uravnotežili, dodatno ga zaokrećemo, a zakretanje ostalih čvorova sprečavamo. Prirast kuta koji je potreban za uravnoteženje čvora m dan je izrazom

$$\Delta\varphi_m^{(\beta_m+1)} = -\frac{1}{\sum_i 4k_{m,i}} m_m^{(\beta_m)}.$$

Približna vrijednost kuta zaokreta čvora m nakon što smo ga uravnoteživali β_m+1 puta iznosi:

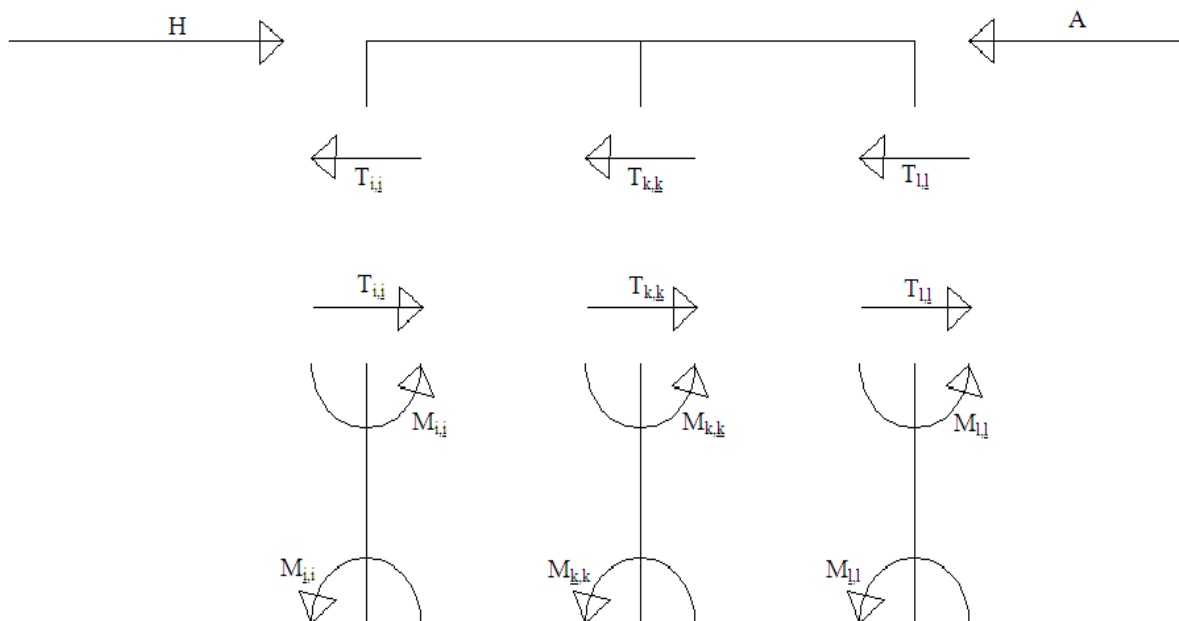
$$\varphi_m^{(\beta_m+1)} = \varphi_m^{(\beta_m)} + \Delta\varphi_m^{(\beta_m+1)} = \varphi_m^{(1)} + \sum_{k=1}^{\beta_m} \Delta\varphi_m^{(k+1)}.$$

Već druga aproksimacija obično daje dovoljnu točnost.

Nakon dobivenih momenata od zaokretanja čvorova, potrebno je odrediti momente koji nastaju pod djelovanjem horizontalne sile A , koja je jednaka i protusmjerna sili u štapu, kojim smo prethodno spriječili translacijski pomak sistema. Vrijednost sile u štapu dobijemo tako da presiječemo kontrukciju pri vrhovima stupova. Poprečne sile koje djeluju u presjecima stupova označavamo sa $T_{i,\underline{i}}$, a njihovu vrijednost odredimo iz uvjeta ravnoteže momenta oko donje točke stupa,

$$T_{i,\underline{i}} = \frac{1}{h_{i,\underline{i}}} (M_{i,\underline{i}} + M_{\underline{i},i}) + T_{i,\underline{i}}^0,$$

gdje je $T_{i,\underline{i}}^0$ vrijednost poprečne sile na odgovarajućem kraju jednostavno oslonjene grede jednakog raspona i s istim opterećenjem. Kada smo dobili vrijednosti poprečnih sila, iz uvjeta ravnoteže grede dobijemo vrijednost horizontalne sile u štapu. Rezultantu svih horizontalnih sila koje djeluju na gredu označavamo s H . (slika 3)



Slika 3: Dobivanje rezultante H i horizontalne sile A

Vrijednost sile A dana je izrazom $A = H - \sum_{(i,l)} T_{i,l}$. Upravo ova horizontalna sila A uzrokuje horizontalne pomake čvorova, međutim vrijednost tih pomaka u nam nije poznata. Pri translacijskom pomaku dolazi i do zaokretanja kutova između stupa i grede. U našem sistemu štapovi su kruto spojeni u čvorovima pa je zaokretanje čvorova spriječeno te dolazi do savijanja štapova. Pri daljnjem rješavanju mogli su se tražiti pomaci koje uzrokuje sila A , međutim Čališev u svom proračunu sam zadaje neki pomak u pomoću kojeg određuje momente na krajevima štapova koji odgovaraju tom pomaku. Pomoću dobivenih momenata izračunao je odgovarajuću horizontalnu silu B , a kako su sile linearne funkcije pomaka, momenti su razmjerni silama. Prave momente koji su nastali radi djelovanja sile A , dobio je tako što je prethodno dobivene momente množio s razlomkom $\frac{A}{B}$. Konačni momenti jednaki su zbroju momenata od zaokretanja čvorova i momenata koji su nastali pod utjecajem sile A .

Kod okvirnih konstrukcija s nekoliko katova, prvi dio proračuna je isti kao i kod proračuna okvirnih konstrukcija s jednim katom koji je opisan u prethodnom tekstu, ali uz pretpostavku da su centri čvorova nepomični. Razlike se pojavljuju u drugom dijelu proračuna s obzirom da se kod višekatnih okvirnih konstrukcija u čvoru svakog horizontalnog kata pojavljuje

djelovanje horizontalne reakcije. Na svakoj etaži presiječemo sistem ispod grede te iz uvjeta ravnoteže pojedine grede dobivamo izraz $A_r = H_{r,g} + \sum_{e>r} H_e - \sum_{(i,j) \in r} T_{ij} - \sum_{e>r} A_e$.

Prvi pribrojnik $H_{r,g}$ označava vrijednost rezultante zadanih horizontalnih sila grede na promatranoj etaži. Drugi pribrojnik je suma vrijednosti rezultanata zadanih horizontalnih sila koje djeluju na stupove i grede etaže e . S obzirom da je $e > r$, znači da se radi o sumi po svim etažama iznad etaže r . Treći pribrojnik je zbroj poprečnih sile u presjecima stupova etaže r (postupak već objašnjen), a četvrti pribrojnik je suma sila u zamišljenim štapovima iznad etaže r ($e > r$). Četvrti pribrojnik će nam u proračunu biti poznat ako krenemo od najviše etaže. S obzirom da se radi o višekatnoj okvirnoj konstrukciji, svaki kat, odnosno etaža, pomakne se za neku veličinu u . Čališev pretpostavlja da je vrijednost tih pomaka $u=1$ za pojedinu etažu, a ostale su nepomične. Pod tom pretpostavkom izračunava momente na krajevima štapova svake etaže posebno. Broj etaža označit ćemo s n , a s obzirom da imamo n etaža, imat ćemo i n linearnih jednadžbi:

$$A_1 = A_{1,1}u_1 + A_{1,2}u_2 + A_{1,3}u_3 + \dots + A_{1,n}u_n,$$

$$A_2 = A_{2,1}u_1 + A_{2,2}u_2 + A_{2,3}u_3 + \dots + A_{2,n}u_n,$$

⋮

$$A_n = A_{n,1}u_1 + A_{n,2}u_2 + A_{n,3}u_3 + \dots + A_{n,n}u_n.$$

Već u slučaju da je broj jednadžbi veći od dva, ovaj način nam zadaje velike poteškoće zbog velikog broja nepoznanica te dugog i kompliciranog proračuna. Zbog toga je povoljnije primjeniti postupak postupnih aproksimacija tako da sami zadamo pomak u . Čališev u svom proračunu za vrijednost pomaka u uzima vrijednost koja odgovara apsolutnoj krutosti horizontalnih štapova koja je u praksi najčešće puno veća od krutosti vertikalnih štapova. Zbog pomaka u čvorovi će se samo horizontalno pomaknuti, neće se zaokrenuti. Pod pretpostavkom da je h_r visina svih stupova neke etaže r , kut zaokreta će im biti

$$\psi_r = -\frac{u_r - u_{r-1}}{h_r}.$$

Ravnotežu horizontalnih sila na dijelu okvira iznad presjeka kroz stupove prikažemo kao

$$\sum_{e \geq r} A_e - \sum_{(i,j) \in r} T_{i,j} = 0.$$

Poprečne sile u stupovima izračunamo pomoću izraza $T_{i,i} = \frac{1}{h_{i,i}} (M_{i,i} + M_{i,i}) + T_{i,i}^0$,

pri čemu je $T_{i,i}^0 = 0$, jer sile A_e djeluju u čvorovima.

Uz $M_{i,i} = M_{i,i} = -6k_{i,i}\Psi_r$, dobivamo $\Psi_r = -\frac{1}{12 \sum_{(i,j) \in r} k_{i,i}} h_r \sum_{e \geq r} A_e$.

Momente upetosti u stupovima dobivamo uvrštavanjem kutova Ψ_r u jednadžbu za momente u stupovima. U gredi se neće pojaviti momenti upetosti, jer su grede po pretpostavci apsolutno krute. Zatim dodajemo zamišljene štapove koji su nam služili kao pridržanje konstrukcije te izračunamo momente koji odgovaraju odabranim deformacijama i krutostima greda. Nakon toga računamo reakcije B . Čališev je predložio da umjesto vrijednosti B uzmemo vrijednost ηB koja je točnija. η dobivamo metodom najmanjih kvadrata:

$$\sum_i (A_i - \eta B_i)^2 \rightarrow \min,$$

pri čemu je η varijabla.

Uvjet je minimuma :

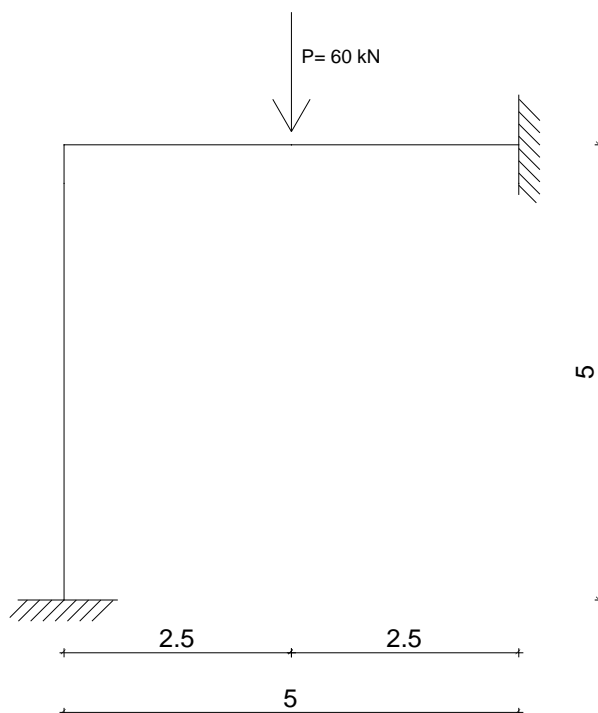
$$\frac{d}{d\eta} \sum_i (A_i - \eta B_i)^2 = \frac{d}{d\eta} \sum_i (A_i - 2\eta A_i B_i + \eta^2 B_i^2) = \sum_i (-2A_i B_i + 2\eta B_i^2) = 0,$$

$$\text{pa iz } -\sum_i A_i B_i + \eta \sum_i B_i^2 = 0$$

$$\text{slijedi } \eta = \frac{\sum_i A_i B_i}{\sum_i B_i^2}.$$

Dobivena rješenja su uglavnom zadovoljavajuća. Ako se dogodi da su razlike između vrijednosti A_i i ηB_i prevelike, postupak treba ponoviti sa silama vrijednosti kojih su $\Delta A_i = A_i - \eta B_i$ pa rezultate pribrojiti prethodnima.

1.3. Čališevljev postupak – primjer



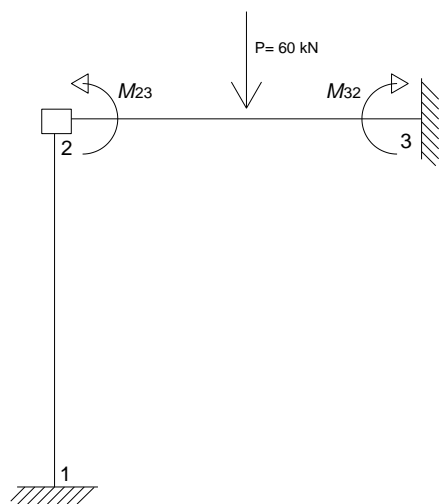
-stup 30/40 cm

-greda 30/60 cm

- $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

- $EI_s = EI_2 = 48\,000 \text{ kNm}^2$

- $EI_g = EI_1 = 162\,000 \text{ kNm}^2$



-momenti upetosti :

$$M_{23}^0 = \frac{60 \cdot 5}{8} = 37.5 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^0 = -\frac{60 \cdot 5}{8} = -37.5 \text{ kNm}$$

$\frac{I_{mn}}{l_{mn}}$ -omjer momenata tromosti presjeka i duljine štapnog elementa

-stup :

$$\frac{I_{21}}{l_{21}} = \frac{0.0016}{5} = 0.00032 \text{ m}^3$$

-greda :

$$\frac{I_{23}}{l_{23}} = \frac{0.0054}{5} = 0.00108 \text{ m}^3$$

1	2	3	4	5	6
štapovi	$\frac{I}{l} \cdot 10^4$	M^0 (kNm)	1. APROKSIMACIJA		
	$2 \sum \frac{I}{l} \cdot 10^4$		promjena momenta	N'	$M'_{mn} = \frac{I}{l} (2N'_{mn} + N'_{nm})$
2-1	3.2	0	-		-8.5715
2-3	10.8	<u>37.5</u>	-	-1.3393	-28.9289
	28.00	37.5			<u>37.5</u>
					0

-ukupni momenti nakon iteracije :

$$M_{mn} = M_{mn}^0 + M'_{mn}$$

$$M_{21} = 0 - 8.5715 = -8.5715 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 37.5 - 28.9289 = 8.5711 \text{ kNm}$$

-ležajni momenti :

$$M_{12} = M_{12}^0 + \frac{l_{12}}{l_{12}} \cdot N'$$

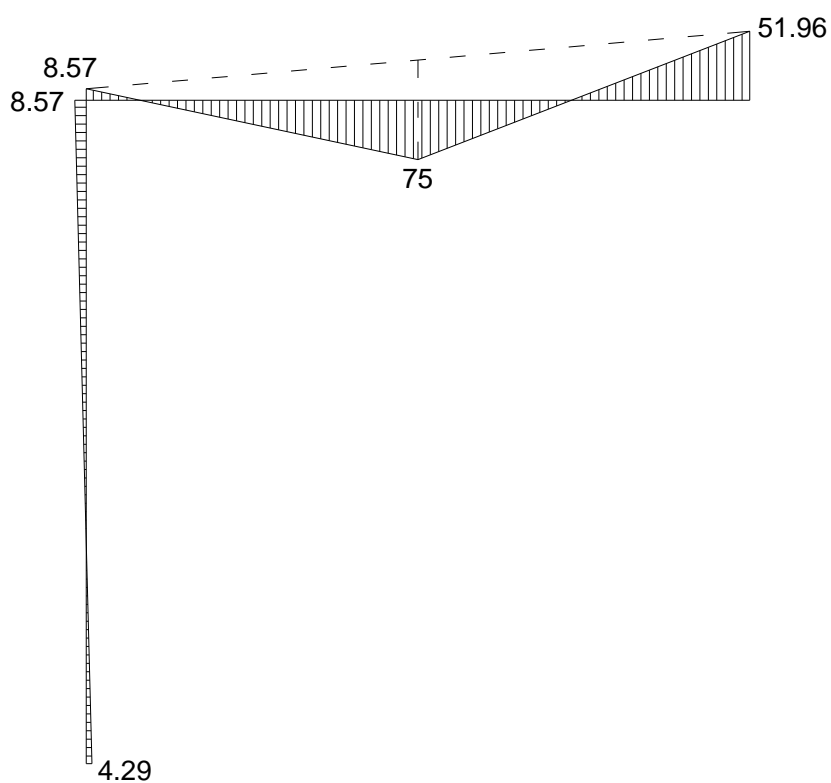
$$M_{12} = 0 + 3.2 \cdot (-1.3393) = -4.2858 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = M_{32}^0 + \frac{l_{32}}{l_{32}} \cdot N'$$

$$M_{32} = -37.5 + 10.8 \cdot (-1.3393) = -51.96 \text{ kNm}$$

$$M_P = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{60 \cdot 5}{4} = 75 \text{ kNm}$$

-M dijagram :



2. Hardy Cross

2.1. Životopis Hardya Crossa



Slika 4: Hardy Cross

[...] Hardy Cross je prikazao svoju metodu proračuna okvirnih konstrukcija. Nikada nisam čuo o Hardyju Crossu, ali sam odmah uočio da je njegova metoda vrlo blizu Čališevljeve metode, koju sam dobro poznao, i prikaz koje je bio objavljen u Zagrebu prije gotovo deset godina. Očito se tu nije radilo o plagijatu, jedino o dilemi tko je bio prvi. Metoda Hardyja Crossa postala je vrlo raširena u Americi, možda čak i previše. Studenta dakako treba poučiti kako se primjenjuje metoda, ali to nije dovoljno. On treba razumjeti i zbog čega metoda vodi rješenju. On treba znati da se metoda sastoji od uzastopnih aproksimacija rješenja sustava linearnih jednadžbi. Ali u američkim školama u to vrijeme podučavali su uglavnom kako se računa, a ne zbog čega proračun vodi rješenju.

S.P. Timošenko: Moja sjećanja

Hardy Cross (slika 4) rođen je 1885. u državi Virginija u Sjedinjenim Američkim Državama, a umro je 1959. Prvu diplomu dobio je iz engleskog jezika na Sveučilištu Hampden-Sydney 1902. godine. Tamo je počeo svoju učiteljsku karijeru predavajući engleski. Nakon što je diplomirao 1903. nastavio je još 3 godine predavati na Akademiji Norfolk. Građevinu je

diplomirao 1908. godine na Tehnološkom institutu u Massachusettsu, te se nakon toga priključio odjelu za mostove Missouri Pacific željeznica u St. Louisu. Tamo je proveo svega godinu dana, nakon čega se vratio u Akademiju Norfolk 1910. Nakon jedne godine diplomskog studija na Harvardu postao je magistar građevinarstva 1911. S novostečenim znanjima na Harvardu odlučio je postati asistent profesor građevine na Sveučilištu Brown, gdje je podučavao sedam godina. Godine 1921. prihvatio je ponudu Sveučilišta Illinois gdje je postao profesor iz područja konstrukcije. Tamo je proveo svoje najkreativnije godine te stekao ugled kao profesor. Nažalost patio je od gluhoće, međutim nije dopustio da ga to sputava već je to okretao u svoju korist koliko je god mogao. Studenti su uskoro shvatili da je radi njegove gluhoće vrlo teško improvizirati odgovore, te su ili odgovarali izričito ako su znali odgovor ili su priznali da ne znaju. Predavao je bez ikakvih bilježaka, a njegova predavanja su uvijek bila proračunata da proizvedu određenu atmosferu. Ponekad je znao ranije napustiti predavaonicu jer nitko nije pokušao riješiti određeni problem. Nakon tog demonstrativnog napuštanja predavanja znao je pitati nekog tko je gledao njegov izlazak : "Što misliš kako su to doživjeli?". Cross je smatrao da je predavaonica, kao prvo, mjesto za razvijanje genijalnosti i samopouzdanja. Za njega je Sveučilište mjesto gdje se rade mnoge intelektualne pogreške koje se onda uče ispraviti. Zajedno s N.D. Morganom, koji je nadopunio njegovo prvo djelo, izdao je knjigu *Continuous Frames of Reinforced Concrete (Kontinuirani okviri od armiranog betona)* 1932. Nadopunio je svoje geometrijske metode rješenja problema cjevovoda nastalih u općem dizajnu opskrbe vodom. Te metode bile su upotrijebljene za rješavanje sličnih sustava kao npr. plinovoda. Za svoje radove primio je brojna odlikovanja kao što su : priznanje Američkog društva za obrazovanje inženjera (1944.), priznanje Američkog Instituta za beton (1935.), Zlatnu medalju Instituta za Građevinske Inženjere Velike Britanije (1959.) te mnoge druge. Godine 1937. preselio se u Yale gdje je postao profesor i predsjednik Odjela građevinarstva. Godinu nakon umirovljenja 1951. izdao je kratku knjigu svojih "otkrića", koju je uredio Robert C. Goodpasture, *Engineers and Ivory Towers (Inženjeri i kule od bjelokosti)*. Naposljetku valja spomenuti i njegov nama najvažniji rad, metodu distribucije momenata, koja će biti detaljnije prikazana u ovom radu. Ovu metodu razvio je za vrijeme svog rada na Harvardu. Iz svega navedenog da se zaključiti da je Hardy Cross za vrijeme života stekao međunarodnu reputaciju, međutim zašto se onda danas zna tako malo o njemu, te je u biti nepoznat ljudima? Mnogi razlog tome vide u razvoju računalne tehnologije s kojom su se pojavili i programi koji nam lako rješavaju probleme kojima se on bavio.

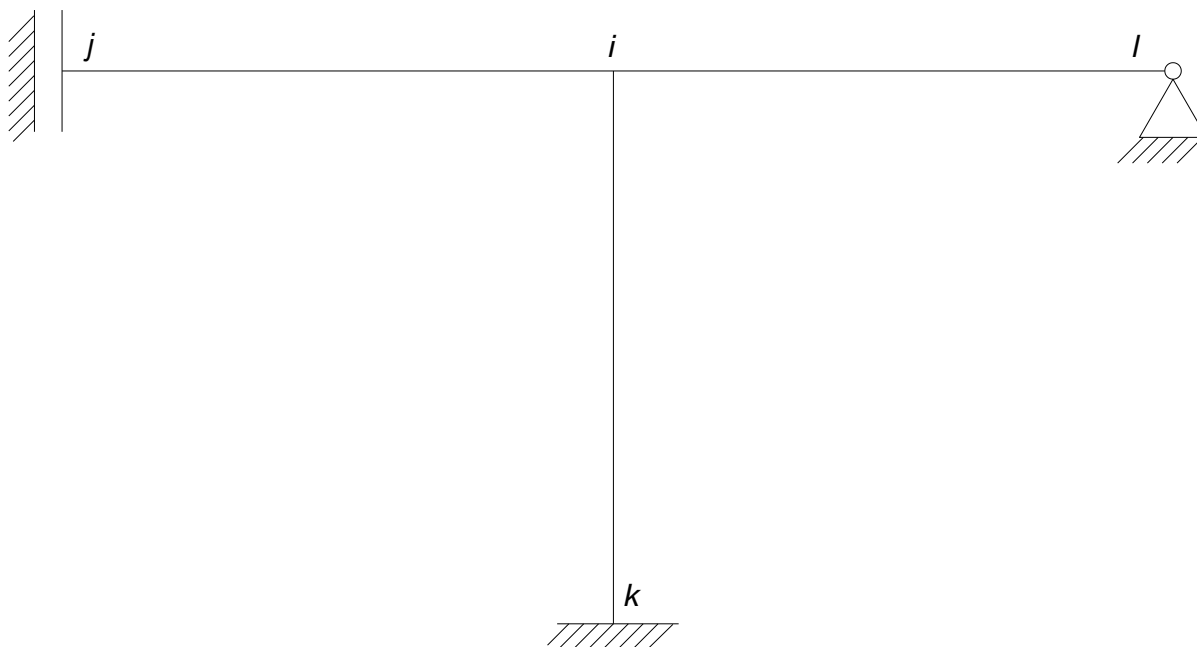
2.2. Crossov postupak – općenito, definicije i izvodi

Crossova metoda je postupak statičkog proračuna okvirnih konstrukcija i kontinuiranih nosača kod kojih su spriječeni translacijski pomaci. Kako bi izbjegao iterativno rješavanje sustava jednadži metode pomaka, Cross se bavio uravnoteživanjem momenata u čvorovima konstrukcije. Uočio je da na osnovnom sistemu u kojem su svi čvorovi ukrućeni, može otpustiti jedan čvor dok ostali ostaju ukrućeni. Otpustiti čvor, odnosno relaksirati čvor, znači omogućiti njegovo zaokretanje. Nakon otpuštanja čvora pojavljuju se momenti upetosti u štapovima koji su u osnovnom sistemu priključeni tom čvoru. Te momente skupa s vanjskim momentom, ako je zadan, treba uravnotežiti. Dio momenata koji nastaju uravnoteživanjem na krajevima štapova u čvoru, treba prebaciti na suprotne krajeve tih štapova. Razdioba neuravnoteženog momenta u čvoru provodi se pomoću razdjelnih koeficijenata. Razdjelne koeficijente dobijemo iz omjera krutosti pojedinog štapa i zbroja krutosti svih štapova koji su priključeni tom čvoru. Pomoću prijenosnih koeficijenata određeno je koliki se dio momenta prenosi na drugi kraj štapa kada se otpusti prvi kraj. Čvor koji smo sada uravnotežili ukrutimo, a otpuštamo idući čvor te ponavljamo postupak. Postupak se ponavlja za svaki čvor onoliko puta koliko je potrebno da se dobije rješenje zadovoljavajuće točnosti. Konačni momenti na krajevima štapova jednaki su zbroju momenata upetosti, uravnotežavajućih momenata i prenesenih momenata. U ovom postupku pretpostavlja se da je uvijek oslobođena upetost jednog čvora, a potpuno zadržana upetost ostalih čvorova konstrukcije. Iako je Crossova metoda postupak statičkog proračuna konstrukcija kod kojih su spriječeni translacijski pomaci, može se primijeniti i kod konstrukcija kod koji translacijski pomaci nisu spriječeni. Kod takvih konstrukcija prvo dodamo veze koje sprečavaju neovisne translacijske pomake, ali pod uvjetom da nema sila u tim vezama. Koliko dodamo veza, toliko ćemo imati jednadžbi pomoću kojih ćemo izračunati stvarne pomake, a iz njih ćemo dobiti konačne vrijednosti momenata u štapovima.

S obzirom da u samom početku proračuna Cross relaksira jedan čvor, najčešće onaj u kojem se pojavljuje najveća neravnoteža momenata, prirast kuta zaokreta čvora i kod obostrano upete grede označit ćemo sa $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, te ga možemo prikazati kao

$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{\sum_{j_i} 4k_{(ij_i)}}, \text{ pri čemu je } m_i^{(n_i)} \text{ neuravnoteženi rezidualni moment.}$$

Međutim grede nisu uvijek obostrano upete pa prirast kuta zaokreta ne možemo uvijek izračunati po prethodno navedenom izrazu. Na idućem primjeru prikazani su drugi oblici izraza kod drugačije upetih greda:



$$\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{k_{ij} + 4k_{ik} + 3k_{il}}$$

S obzirom da nam je poznat prirast kuta zaokreta (obostrano upeta greda), tada će prirast momenta na kraju i elementa (i, j_i) biti :

$$\Delta M_{i, j_i}^{(n_i+1)} = 4 \cdot k_{(i, j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} .$$

Prilikom uravnoteženja čvora i moramo uzeti u obzir da su zaokreti svih ostalih čvorova spriječeni pa uvrštavanjem izraza $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{m_i^{(n_i)}}{\sum_j 4k_{(i, j)}}$ dobivamo

$$\Delta M_{i, j_i}^{(n_i+1)} = \frac{4 \cdot k_{(i, j_i)}}{\sum_j 4k_{(i, j)}} \cdot m_i^{(n_i)} .$$

Koeficijent krutosti svih elemenata koji su priključeni u čvor i označit ćemo

$$k_i = \sum_j 4k_{(i,j)} \text{ i nazvati koeficijentom krutosti čvora } i.$$

Kada podijelimo koeficijent krutosti određenog elementa s koeficijentom krutosti čvora, dobivamo razdjelni koeficijent u tom čvoru za taj element i označavamo ga sa $\mu_{i,j} = \frac{4k_{(i,j)}}{k_i}$.

Na ovaj način računamo razdjelne koeficijente za svaki element koji je spojen u tom čvoru. Ako svi elementi jednog čvora imaju međusobno različite koeficijente krutosti, razdjelni koeficijenti elemenata će se također međusobno razlikovati. Do podudaranja dolazi ako su koeficijenti krutosti elemenata jednaki.

Razdjelni su koeficijent za jednostrano upetu gredu $\mu_{i,j} = \frac{3k_{(i,j)}}{k_i}$, dok su razdjelni koeficijent za gredu koja s jedne strane ima upeto klizni ležaj $\mu_{i,j} = \frac{k_{(i,j)}}{k_i}$, pri čemu u k_i krutost $k_{(i,j)}$ ulazi pomnožena sa 3, odnosno sa 1.

Suma razdjelnih koeficijenata u čvoru mora biti jednaka 1 s obzirom da je koeficijent krutosti čvora i jednak zbroju svih koeficijenata krutosti elemenata spojenih u taj čvor:

$$\sum_j \mu_{(i,j)} = 1.$$

Uvrštavanjem razdjelnog koeficijenta u jednadžbu za prirast vrijednosti momenta na kraju elementa dobivamo

$$\Delta M_{i,j}^{(n_i+1)} = \mu_{(i,j)} \cdot m_i^{(n_i)}.$$

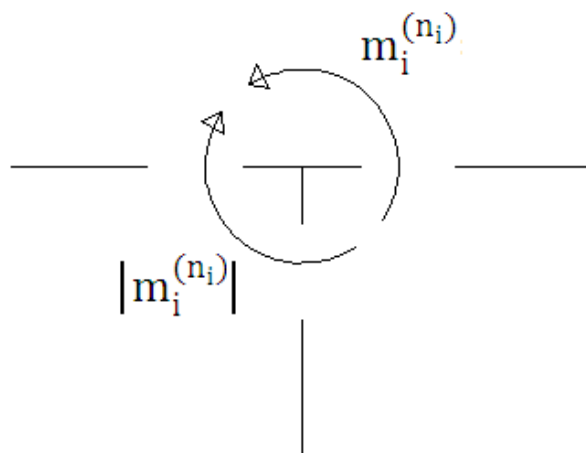
Budući da je suma razdjelnih koeficijenata jednaka 1, sumiranjem prirasta momenata dobivamo

$$\sum_j \Delta M_{i,j}^{(n_i+1)} = m_i^{(n_i)},$$

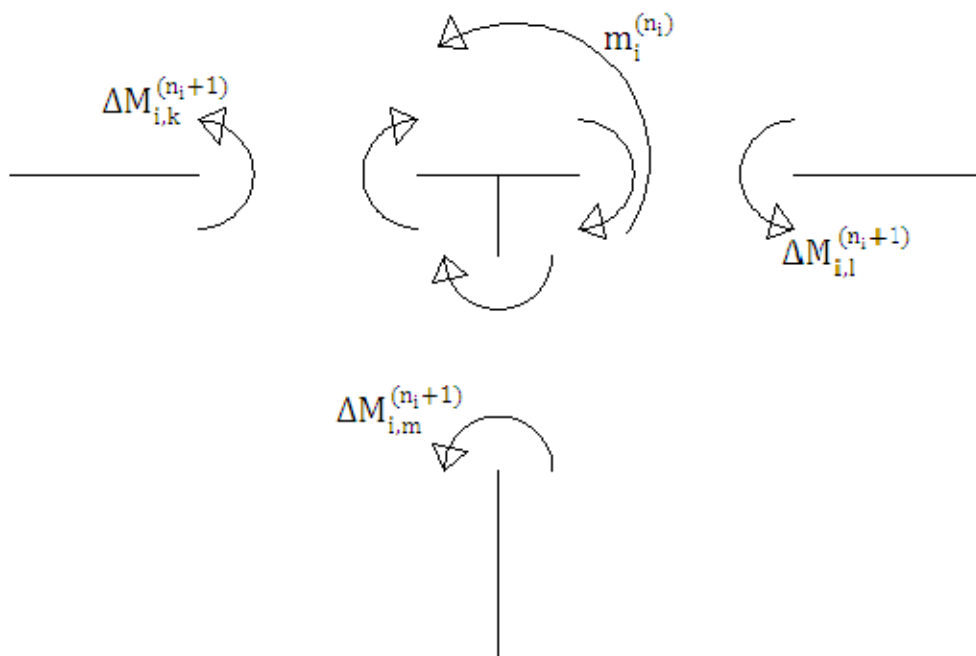
odnosno

$$-\sum_j \Delta M_{i,j}^{(n_i+1)} + m_i^{(n_i)} = 0.$$

Vidimo da dodavanjem momenta istog inteziteta rezidualnom momentu, ali suprotnog smjera vrtnje, možemo uravnotežiti čvor i . Međutim moramo ga razdijeliti na priključne elemente u omjeru njihovih krutosti. Upravo radi toga Crossov postupak nazivamo još i postupak razdiobe momenata ili postupak raspodjele momenata.



Slika 4 : Uravnoteživanje čvora



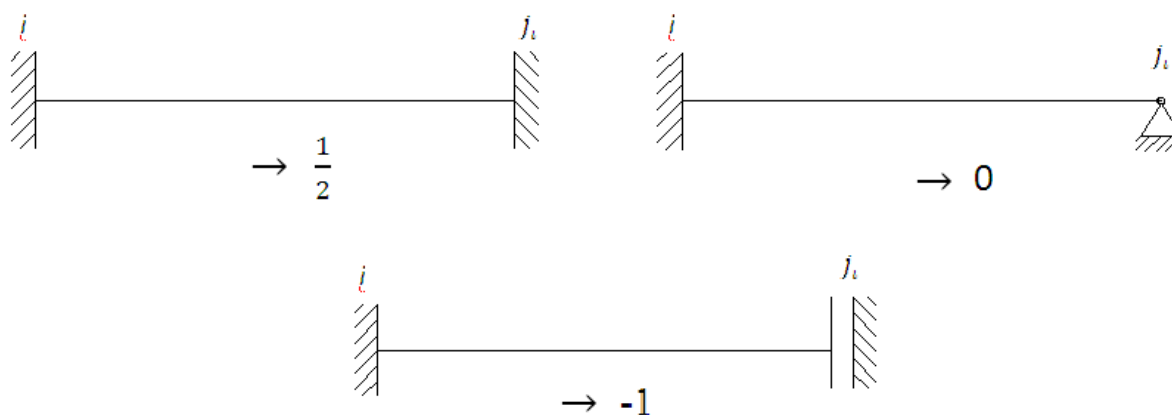
Slika 5 : Uravnoteživanje čvora pridruženim momentima na elementima

Dio razdijeljenog momenta koji smo dobili na nekom elementu treba prenijeti na drugi kraj tog elementa pomoću prijenosnog koeficijenta. Ako se kraj i elementa (i, j_i) zaokrene za kut $\Delta\varphi_i^{(n_i+1)}$, na drugom kraju elementa, j_i , pojavit će se moment vrijednosti :

$$\Delta M_{j_i i} = 2 \cdot k_{(i j_i)} \cdot \Delta\varphi_i^{(n_i+1)} = \frac{1}{2} \cdot \Delta M_{i j_i}^{(n_i+1)}.$$

Iz ovog izraza vidimo da je prijenosni koeficijent jednak $\frac{1}{2}$, što znači da nakon uravnoteženja čvora i , na drugi kraj elementa prenosimo polovinu vrijednosti momenta s kraja i .

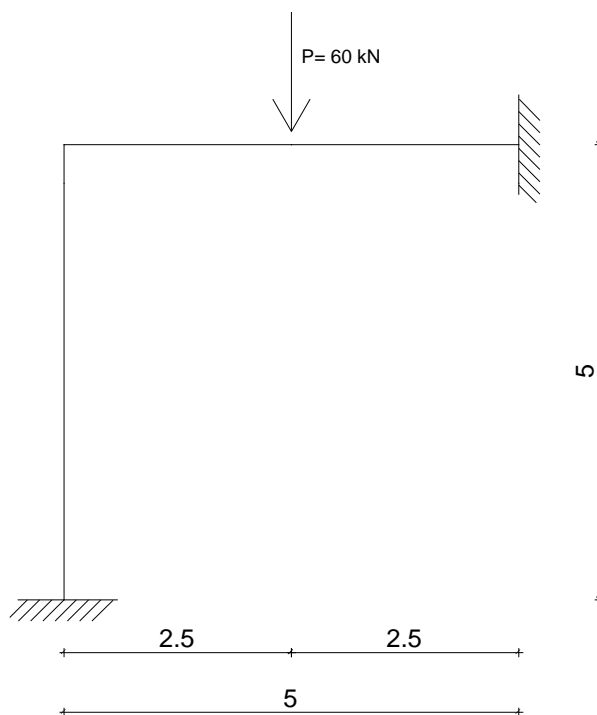
Prijenosni je koeficijent za jednostrano upetu gredu jednak nuli, a za gredu koja na jednom kraju ima upeto klizni ležaj on iznosi -1.



Slika 6 : prijenosni koeficijenti

Preporuka je krenuti uravnoteživati čvor u kojem je rezidualni moment najveći. Postupak nastavljamo sve dok vrijednost neuravnoteženih momenata ili vrijednosti momenata koje se prenose ne postanu toliko male da se mogu zanemariti. Konačni momenti na krajevima elemenata jednaki su zbroju momenata upetosti, raspodijeljenih momenata i prenesenih momente.

2.3. Crossov postupak – primjer



-stup 30/40 cm

-greda 30/60 cm

- $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

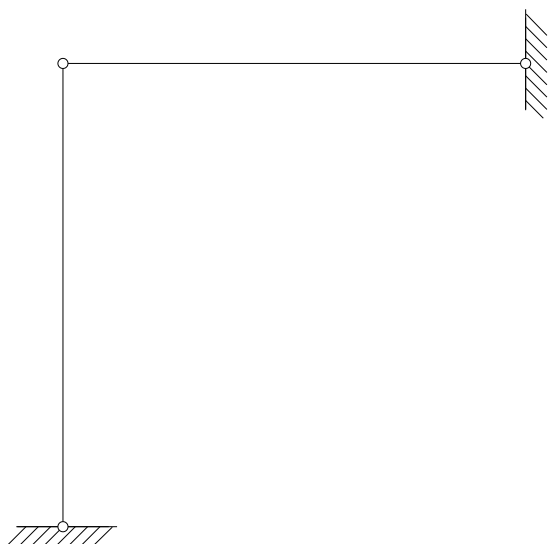
- $EI_s = EI_2 = 48\,000 \text{ kNm}^2$

- $EI_g = EI_1 = 162\,000 \text{ kNm}^2$

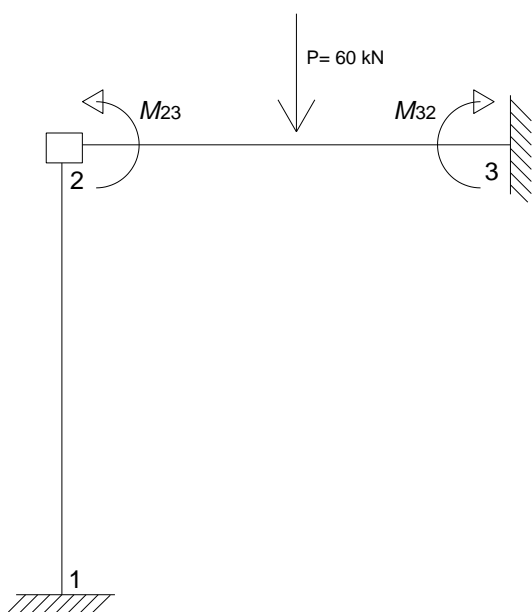
$\varphi_2 = ?$

-zglobna shema :

$$S = 3 \cdot 2 - 4 - 2 \cdot 1 = 6 - 4 - 2 = 0$$



-pridržani sistem :



-momenti upetosti :

$$M_{23}^0 = \frac{60 \cdot 5}{8} = 37.5 \text{ kNm}$$

$$M_{32}^0 = -\frac{60 \cdot 5}{8} = -37.5 \text{ kNm}$$

-proračunske fleksijske krutosti :

$$k_{ij} = \frac{k_{ij}^*}{(EI)_0} = \frac{(EI)_{ij}}{L_{ij} \cdot (EI)_0} \quad (EI)_0 = (EI)_1$$

$$k_{21}^* = \frac{48000}{5} = 9600$$

$$k_{21} = \frac{9600}{162000} = 0.0593$$

$$k_{23}^* = \frac{162000}{5} = 32400$$

$$k_{23} = \frac{32400}{162000} = 0.2$$

-razdjelni koeficijenti :

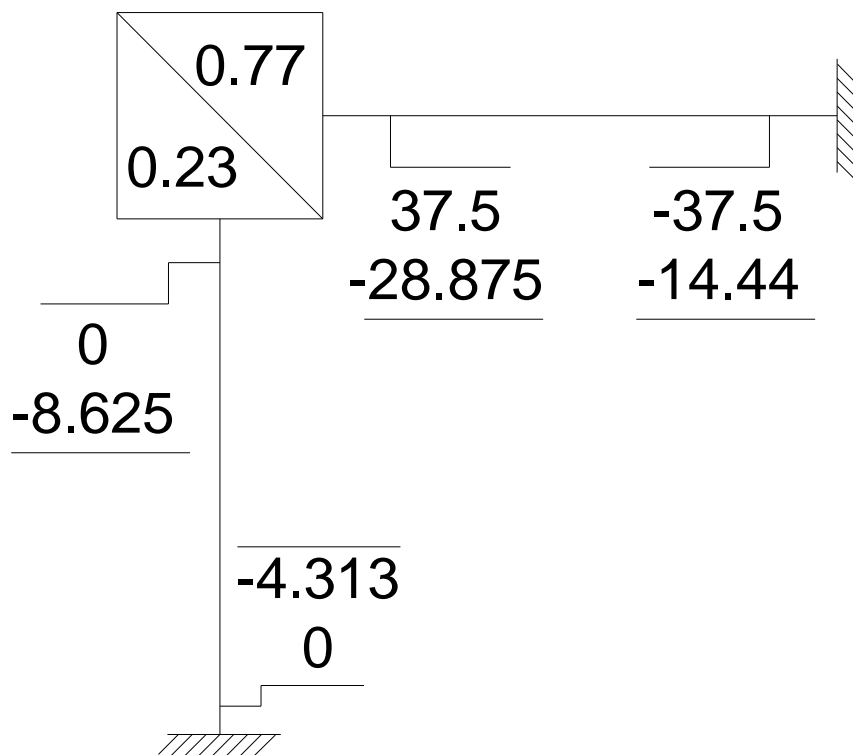
*čvor 2 $a_{21} = 4k_{21} = 0.24$

- $\mu_{74} = \frac{0.24}{1.04} = 0.23$

$a_{23} = 4k_{23} = 0.8$

- $\mu_{78} = \frac{0.8}{1.04} = 0.77 \rightarrow \Sigma = 1$

$A_7 = 1.04$



-ukupni momenti :

$$M_{12} = -4.313 \text{ kNm}$$

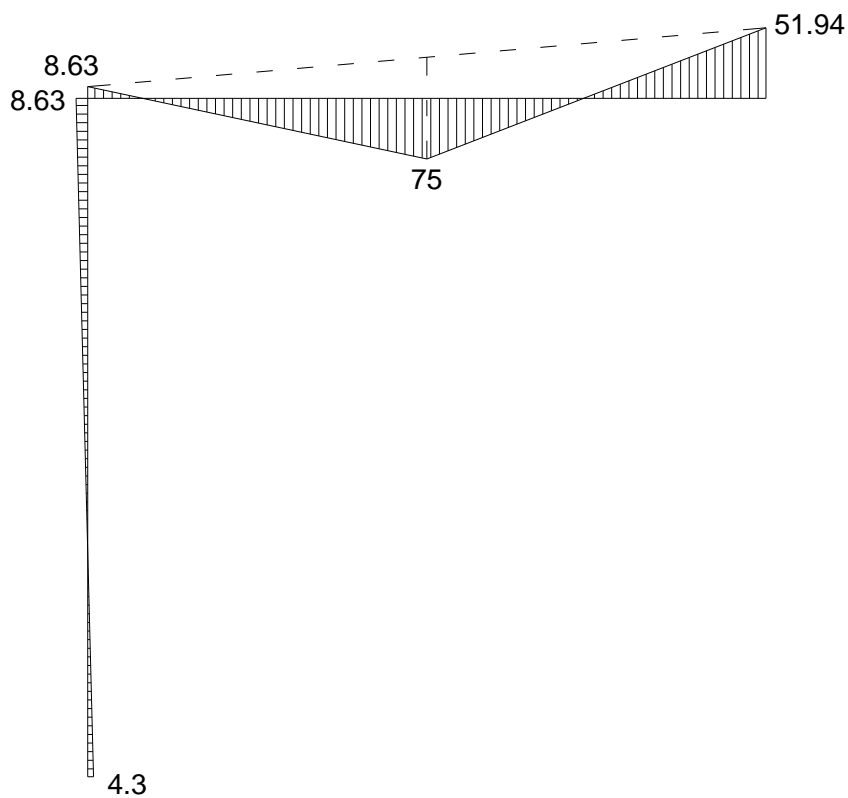
$$M_{21} = -8.625 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 8.625 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -51.94 \text{ kNm}$$

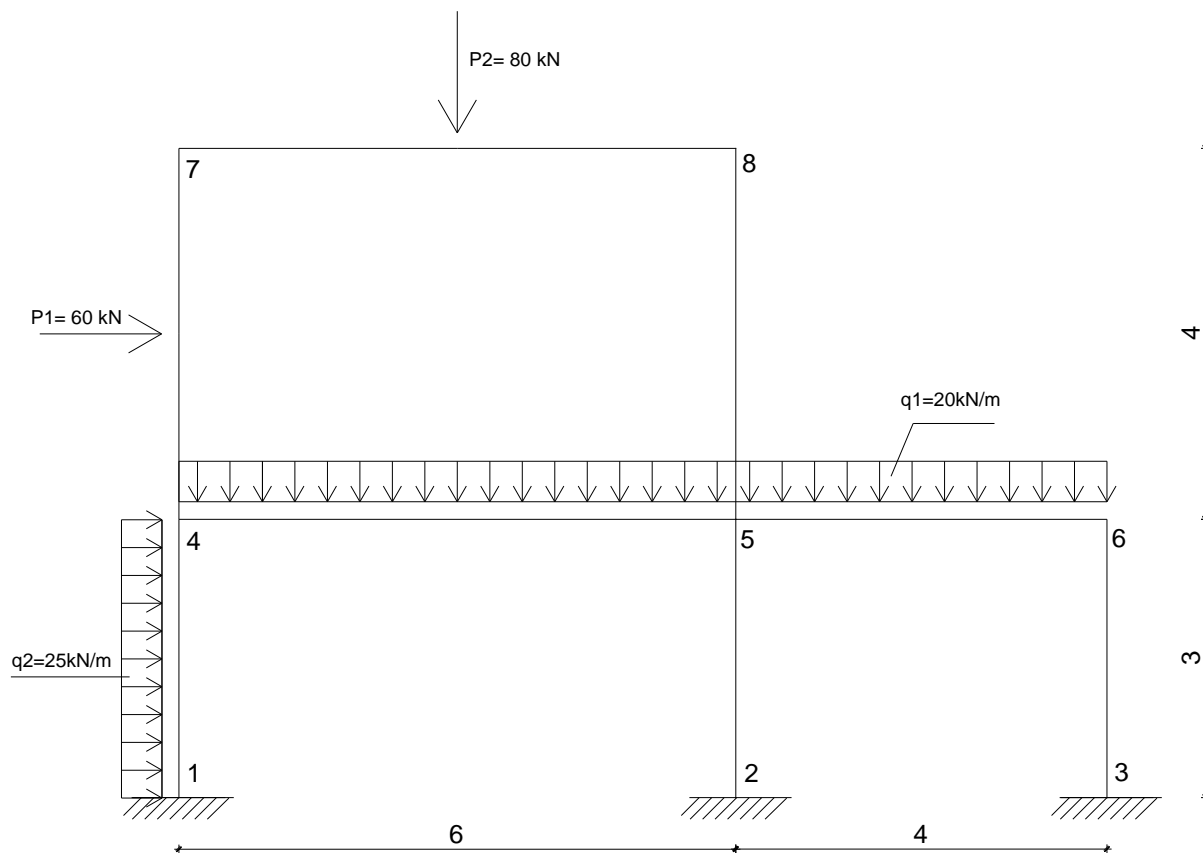
$$M_P = \frac{P \cdot L}{4} = \frac{60 \cdot 5}{4} = 75 \text{ kNm}$$

-M dijagram :



3. Usporedba metoda Čališeva i Crossa

3.1. Čališevljev postupak



-stupovi

$$E=3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad b/h=30/40 \text{ cm}$$

$$I_S = \frac{0.3 \cdot 0.4^3}{12} = 0.0016 \text{ m}^4$$

$$E \cdot I_S = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0.3 \cdot 0.4^3}{12} = 48\,000 \text{ kNm}^2$$

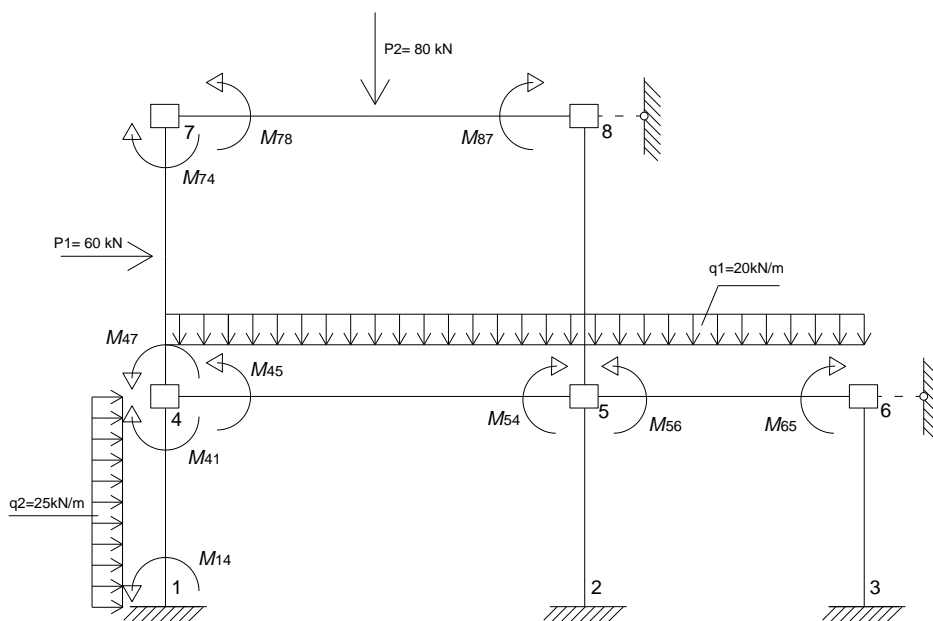
-grede

$$E=3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad b/h=30/60 \text{ cm}$$

$$I_G = \frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$$

$$E \cdot I_G = 3 \cdot 10^7 \cdot \frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12} = 162\,000 \text{ kNm}^2$$

-pridržani sistem :



-momenti upetosti :

$$M_{14}^0 = \frac{25 \cdot 3^2}{12} = 18.75 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^0 = -\frac{25 \cdot 3^2}{12} = -18.75 \text{ kNm}$$

$$M_{45}^0 = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}$$

$$M_{54}^0 = -\frac{20 \cdot 6^2}{12} = -60 \text{ kNm}$$

$$M_{56}^0 = \frac{20 \cdot 4^2}{12} = 26.66 \text{ kNm}$$

$$M_{65}^0 = -\frac{20 \cdot 4^2}{12} = -26.66 \text{ kNm}$$

$$M_{47}^0 = \frac{60 \cdot 4}{8} = 30 \text{ kNm}$$

$$M_{74}^0 = -\frac{60 \cdot 4}{8} = -30 \text{ kNm}$$

$$M_{78}^0 = \frac{80 \cdot 6}{8} = 60 \text{ kNm}$$

$$M_{87}^0 = -\frac{80 \cdot 6}{8} = -60 \text{ kNm}$$

$\frac{I_{mn}}{l_{mn}}$ -omjer momenata tromosti presjeka i duljine štapnog elementa

-stupovi :

$$\frac{I_{41}}{l_{41}} = \frac{I_{52}}{l_{52}} = \frac{I_{63}}{l_{63}} = \frac{0.0016}{3} = 0.000533 \text{ m}^3$$

$$\frac{I_{47}}{l_{47}} = \frac{I_{58}}{l_{58}} = \frac{0.0016}{4} = 0.0004 \text{ m}^3$$

-grede :

$$\frac{I_{78}}{l_{78}} = \frac{I_{45}}{l_{45}} = \frac{0.0054}{6} = 0.0009 \text{ m}^3$$

$$\frac{I_{56}}{l_{56}} = \frac{0.0054}{4} = 0.00135 \text{ m}^3$$

1	2	3	4	5	6
štapovi	$\frac{I}{l} \cdot 10^4$ $2 \sum \frac{I}{l} \cdot 10^4$	M^0 (kNm)	1. APROKSIMACIJA		
			promjena momenta	N'	$M'_{mn} = \frac{I}{l} (2N'_{mn} + N'_{nm})$
4-1	5.33	-18.75	-		-20.718
4-7	4.00	30	-		-22.1624
4-5	9.00	<u>60</u>	-	-0.19435	-29.1024
	36.66	71.25			<u>71.25</u> -0.7328
5-2	5.33	0	-		6.97
5-8	4.00	0	9.23		14.4572
5-4	9.00	-60	-17.491	+0.6534	-5.7303
5-6	13.5	<u>26.66</u>	-		24.0367
	63.66	-33.33			<u>-33.33</u> 6.404
6-3	5.33	0	-		5.053
6-5	13.5	<u>-26.66</u>	8.82	0.4737	21.6108
	37.66	-26.66			<u>-26.66</u> 0.0038
7-4	4.00	-30	-7.774		-21.003
7-8	9.00	<u>60</u>	<u>20.767</u>	-1.6536	-9.00
	26.00	30			<u>30</u> -0.003
8-5	4.00	0	-		21.073
8-7	9.00	<u>-60</u>	-	2.3075	26.6516
	26.00	-60			<u>-60</u> -12.277

7	8	9	10
2. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	$\Delta N'$	$N''=N'+\Delta N'$	$M''_{mn} = \frac{I}{l} (2N''_{mn} + N''_{nm})$
- - -	0.02	-1.9235	-20.504 -22.668 -29.94 <u>71.25</u> -1.862
- 1.888 0.18 -	-0.133	0.5204	5.35 15.283 -7.944 21.088 <u>-33.33</u> 0.647
- -1.7955	0.0476	0.5213	5.557 21.1005 <u>-26.66</u> -0.0025
0.08 4.248	-0.1663	-1.82	-22.254 -7.74 <u>30</u> 0.006
- -	0.472	2.78	24.3216 33.66 <u>-60</u> -2.0184

11	12	13	14
3. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	$\Delta N''$	$N''' = N'' + \Delta N''$	$M'''_{mn} = \frac{I}{l} (2N'''_{mn} + N'''_{nm})$
- - -	0.0508	-1.8727	-19.975 -22.40 -29.2248 <u>71.25</u> -0.3498
- 0.308 0.4572 -	-0.0222	0.4982	5.311 15.414 -7.886 20.897 <u>-33.33</u> 0.106
- -0.3	0.00803	0.5293	5.642 21.017 <u>-26.66</u> -0.001
0.203 0.693	-0.0347	-1.8547	-22.328 -7.672 <u>30</u> 0.0
- -	0.077	2.857	24.849 34.734 <u>-60</u> -0.417

-ukupni momenti nakon iteracije :

$$M_{mn} = M_{mn}^0 + M'''_{mn}$$

Čvor 4

$$M_{41} = -18.75 - 19.975 = -38.725 \text{ kNm}$$

$$M_{47} = 30 - 22.4 = 7.6 \text{ kNm}$$

$$M_{45} = 60 - 29.225 = 30.775 \text{ kNm}$$

Čvor 5

$$M_{52} = 0 + 5.311 = 5.311 \text{ kNm}$$

$$M_{58} = 0 + 15.414 = 15.414 \text{ kNm}$$

$$M_{54} = -60 - 7.886 = -67.886 \text{ kNm}$$

$$M_{56} = 26.66 + 20.597 = 47.257 \text{ kNm}$$

Čvor 6

$$M_{63} = 0 + 5.642 = 5.642 \text{ Nm}$$

$$M_{65} = -26.66 + 20.017 = 5.642 \text{ kNm}$$

Čvor 7

$$M_{74} = -30 - 22.328 = -52.328 \text{ kNm}$$

$$M_{78} = 60 - 7.672 = 52.328 \text{ kNm}$$

Čvor 8

$$M_{87} = 0 + 24.849 = 24.849 \text{ kNm}$$

$$M_{85} = -60 + 34.734 = -25.266 = -24.849 \text{ kNm}$$

-ležajni momenti :

$$M_{14} = M_{14}^0 + \frac{l_{14}}{l_{14}} \cdot N_4'''$$

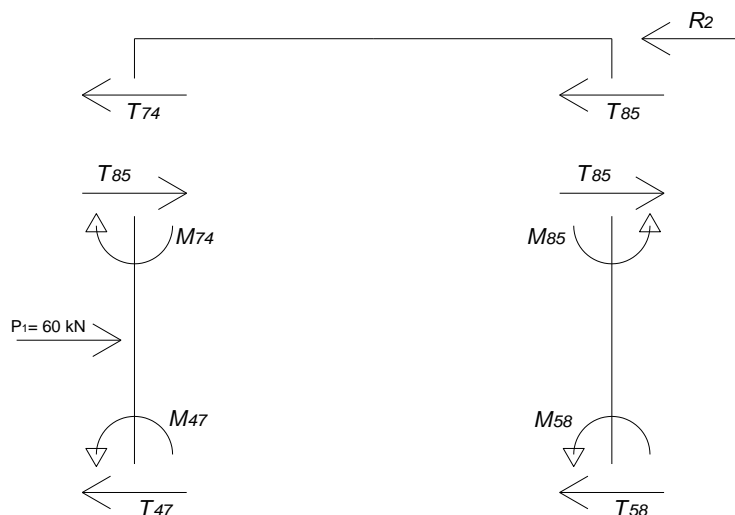
$$M_{14} = 8.77 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = M_{25}^0 + \frac{l_{25}}{l_{25}} \cdot N_5'''$$

$$M_{25} = 2.655 \text{ kNm}$$

$$M_{36} = M_{36}^0 + \frac{l_{36}}{l_{36}} \cdot N_6'''$$

$$M_{36} = 2.82 \text{ kNm}$$



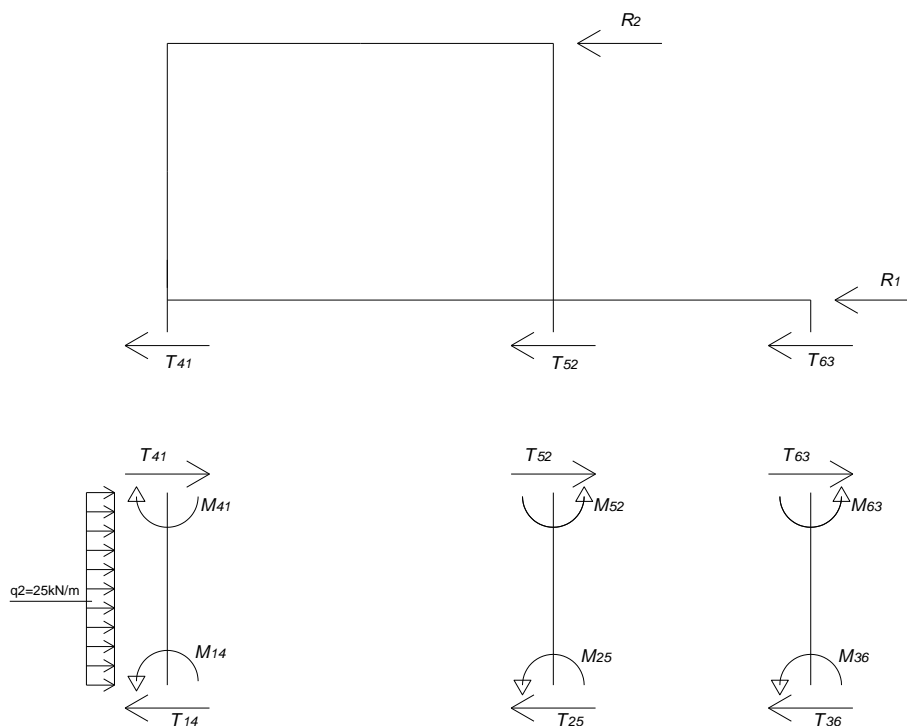
$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{4}$$

$$T_{74} = -41.182 \text{ kN}$$

$$T_{85} = 10.065 \text{ kN}$$

$$R_2 = -(T_{74} + T_{85})$$

$$R_2 = 31.117 \text{ kN}$$



$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{3}$$

$$T_{41} = -47.485 \text{ kN}$$

$$T_{52} = 2.655 \text{ kN}$$

$$T_{63} = 2.8206 \text{ kN}$$

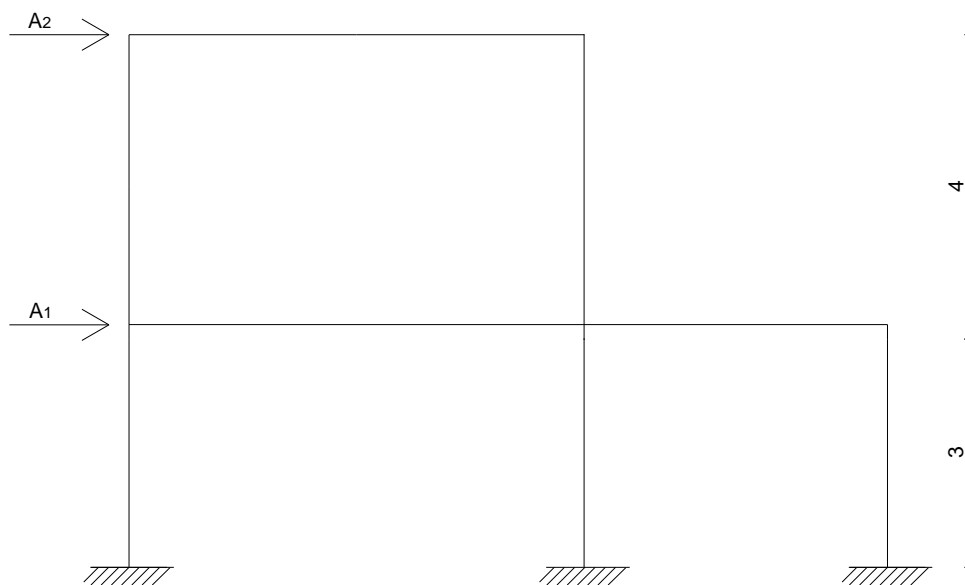
$$R_1 = -(R_2 + T_{41} + T_{52} + T_{63}) + 60$$

$$R_1 = 70.892 \text{ kN}$$

-zamjenjujuće horizontalno opterećenje :

$$\vec{A}_1 = -\vec{R}_1 \rightarrow A_1 = 70.892 \text{ kN}$$

$$\vec{A}_2 = -\vec{R}_2 \rightarrow A_2 = 31.117 \text{ kN}$$



-Čališev pretpostavlja apsolutno krute grede (fleksijskih) katova

-pripadajući kutovi zaokreta stupova kata :

I. kat :

$$N_{14}^0 = N_{25}^0 = N_{36}^0 = N_{63}^0 = N_{52}^0 = N_{41}^0 = N_I^0 = \Psi_1$$

$$\Psi_1 = -\frac{1}{6 \sum_{(i,j) \in 1} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right)} \cdot h_1 \cdot \sum_{e \geq 1} A_e$$

$$\sum_{(i,j) \in 1} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right) = \frac{I_{14}}{l_{14}} + \frac{I_{25}}{l_{25}} + \frac{I_{36}}{l_{36}} = 3 \cdot \frac{I_S}{h_1} = 16$$

$$\sum_{e \geq 1} A_e = A_1 + A_2 = 102.009 \text{ kN}$$

$$\Psi_1 = -\frac{1}{6 \cdot 16} \cdot 3 \cdot 109.009 = -3.1877$$

II. kat :

$$N_{47}^0 = N_{74}^0 = N_{58}^0 = N_{85}^0 = N_{II}^0 = \Psi_2$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{6 \sum_{(i,j) \in 2} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right)} \cdot h_2 \cdot \sum_{e \geq 2} A_e$$

$$\sum_{(i,j) \in 2} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right) = \frac{I_{47}}{l_{47}} + \frac{I_{58}}{l_{58}} = 2 \cdot \frac{I_S}{h_2} = 8$$

$$\sum_{e \geq 2} A_e = A_2 = 31.117 \text{ kN}$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{6 \cdot 8} \cdot 4 \cdot 31.117 = -2.593$$

-momenti od zaokreta stupova :

$$M_{ij}^{(A)} = -\frac{I_{ij}}{l_{ij}} \cdot (2N_{ij}^0 + N_{ji}^0)$$

1	2	3	4	5	6	7
štapovi	$\frac{I}{l} \cdot 10^4$ $2 \sum \frac{I}{l} \cdot 10^4$	N ⁰	Momenti od zaokreta stupova	1. APROKSIMACIJA		
				promjena momenta	N'	\tilde{M}'_{mn} $= \frac{I}{l} (2N'_{mn} + N'_{nm})$
4-1	5.33	-3,1877	51.0	-		-25.982
4-7	4.0	-2.593	31.16	-		-21.2424
4-5	9.0	-	-	-	-2.2436	-51.9316
	36.6		<u>82.116</u>			<u>82.116</u> 17.04
5-2	5.33	-3.1877	51.0	-		-9.58
5-8	4.0	-2.593	31.116	4.784		-11.97
5-4	9.0	-	-	-20.1924	-0.8982	-36.36
5-6	13.5	-	-	-		-38.185
	63.66		<u>82.16</u>			<u>82.16</u> -13.935
6-3	5.33	-3.1877	51.0	-		-11.01
6-5	13.5	-	-	-12.125	-1.0322	-39.995
	37.66		<u>51.0</u>			<u>51.7</u> 0.695
7-4	4.0	-2.593	31.116	-8.9744		-12.4832
7-8	9.0	-	-	-10.764	-0.4386	-18.66
	26.0		<u>31.116</u>			<u>31.11</u> -0.0332
8-5	4.0	-2.593	31.116	-		-13.1607
8-7	9.0	-	-	-	-1.196	-25.4754
	26.0		<u>31.116</u>			<u>31.116</u> -7.5201

8	9	10	11
2. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	$\Delta N'$	$N''=N'+\Delta N'$	$\tilde{M}_{mn}'' = \frac{I}{l}(2N_{mn}'' + N_{nm}'')$
- - -	0.4656	-1.778	-18.964 -16.66 -38.873 <u>82.116</u> 7.617
- 1.1568 4.1904 -	0.1349	-0.76328	-8.1464 -9.733 -29.741 -35.445 <u>82.16</u> -0.9054
- 1.821	-0.0668	-1.099	-11.722 -39.977 <u>51,0</u> -0.699
1.8624 2.6028	-0.17046	-0.60906	-11.984 -19.124 <u>31.116</u> 0.008
- -	0.2892	-0.9068	-10.3075 -21.804 <u>31.116</u> -0.9955

12	13	14	15
3. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	$\Delta N''$	$N'''=N''+\Delta N''$	$\tilde{M}_{mn}''' = \frac{I}{l}(2N_{mn}''' + N_{nm}''')$
- - -	-0.2081	-1.9861	-21.172 -18.1473 -42.205 <u>82.116</u> 0.5917
- -0.1532 -1.873 -	0.04604	-0.71724	-7.646 -9.528 -30.785 -34.175 <u>82.16</u> 0.036
- 0.6216	0.002055	-1.097	-11.694 -39.3017 <u>51.0</u> 0.004626
-0.8324 -0.3447	0.04496	-0.56464	-12.4612 -18.6687 <u>31.116</u> -0.0139
- -	-0.0383	-0.9451	-10.4298 -22.0935 <u>31.116</u> -1.4073

-u čvoru 4 neuravnoteženi ostatak momenta (-0.5917) raspodijeljujem na grane 4-1, 4-7, 4-5 u omjerima pripadajućih krutosti :

$$\Delta M_{41}''' = \frac{I_{41}}{l_{41}} \cdot \frac{(-0.5917)}{\Sigma(\frac{I}{l})} = \frac{5.33}{18.3} \cdot (-0.5917) = -0.172 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{47}''' = \frac{I_{47}}{l_{47}} \cdot \frac{(-0.5917)}{\Sigma(\frac{I}{l})} = \frac{4}{18.3} \cdot (-0.5917) = -0.1293 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{45}''' = \frac{I_{45}}{l_{45}} \cdot \frac{(-0.5917)}{\Sigma(\frac{I}{l})} = \frac{9}{18.3} \cdot (-0.5917) = -0.2904 \text{ kNm}$$

-isti postupak za čvor 8 :

$$\Delta M_{85}''' = \frac{I_{85}}{l_{85}} \cdot \frac{(+1.4073)}{\Sigma(\frac{I}{l})} = \frac{4}{13} \cdot (+1.4013) = 0.433 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{87}''' = \frac{I_{87}}{l_{87}} \cdot \frac{(+1.4073)}{\Sigma(\frac{I}{l})} = \frac{9}{13} \cdot (+1.4013) = -0.9743 \text{ kNm}$$

-ukupni momenti druge faze :

$$\tilde{M}_{mn} = \tilde{M}_{mn}''' + \Delta M_{mn}''' + M_{mn}^{(A)}$$

$$\tilde{M}_{41} = -21.172 + 0.172 + 51.0 = 29.656 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{47} = -18.1473 - 0.01293 + 0.31.116 = 12.8394 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{45} = -42.4954 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{52} = 43.354 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{58} = 21.598 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{54} = -30.785 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{56} = -34.175 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{63} = 39.3 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{65} = -39.3 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{74} = 18.67 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{78} = -18.67 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{85} = 21.119 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{87} = -21.119 \text{ kNm}$$

-ležajni momenti :

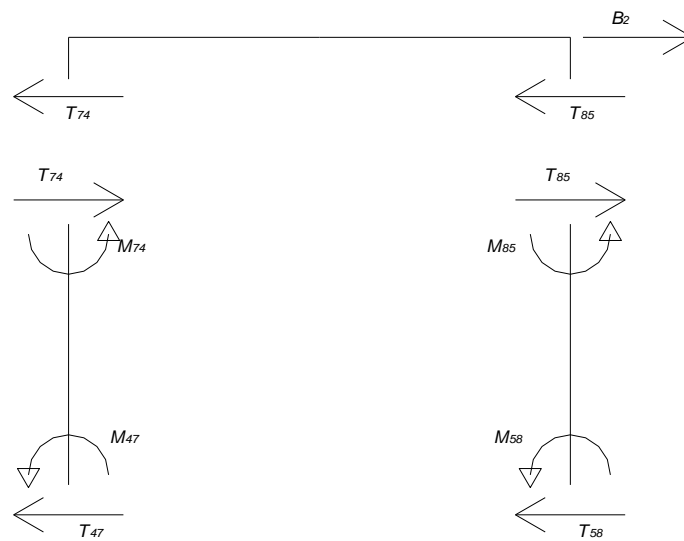
$$\tilde{M}_{14} = \tilde{M}_{41} - \frac{l_{41}}{l_{41}} \cdot N_{41}'''$$

$$\tilde{M}_{14} = 29.656 - (-1.9861) \cdot 5.33 = 40.2419 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{25} = 43.354 - (-0.71724) \cdot 5.33 = 47.179 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}_{36} = 39.3 - (-1.097) \cdot 5.33 = 45.147 \text{ kNm}$$

-nove sile u pridrzanju :

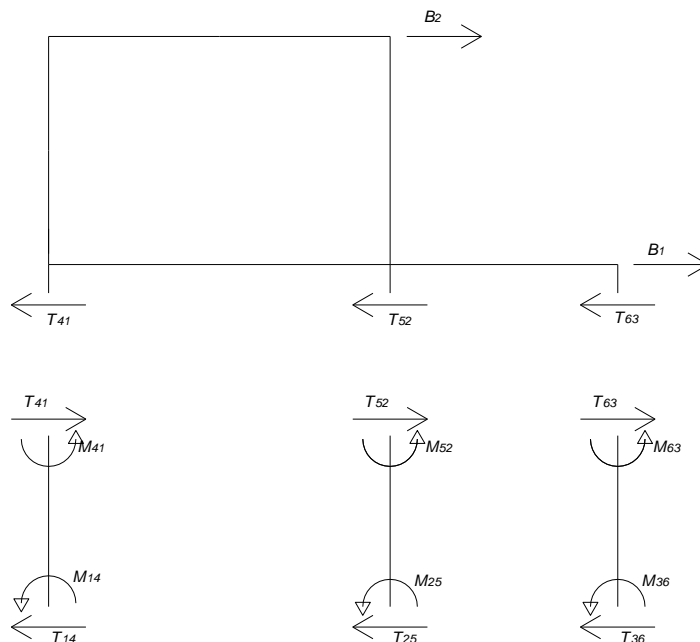


$$\tilde{T}_{ij} = \frac{\tilde{M}_{ij} + \tilde{M}_{ji}}{4}$$

$$\tilde{T}_{74} = 7.87735 \text{ kN}$$

$$\tilde{T}_{85} = 10.679 \text{ kN}$$

$$B_2 = \tilde{T}_{74} + \tilde{T}_{85} = 18.556 \text{ kN}$$



$$\tilde{T}_{ij} = \frac{\tilde{M}_{ij} + \tilde{M}_{ji}}{3}$$

$$\tilde{T}_{41} = 23.3 \text{ kN}$$

$$\tilde{T}_{52} = 30.178 \text{ kN}$$

$$\tilde{T}_{63} = 28.149 \text{ kN}$$

$$B_1 = \tilde{T}_{41} + \tilde{T}_{52} + \tilde{T}_{63} - B_2 = 63.071 \text{ kN}$$

-korekcijski faktor :

$$\eta = \frac{A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2}{B_1^2 + B_2^2} = \frac{70.892 \cdot 63.07 + 31.117 \cdot 18.556}{63.07^2 + 18.556^2} = 1.168$$

-razlika između zadanih i dobivenih sila :

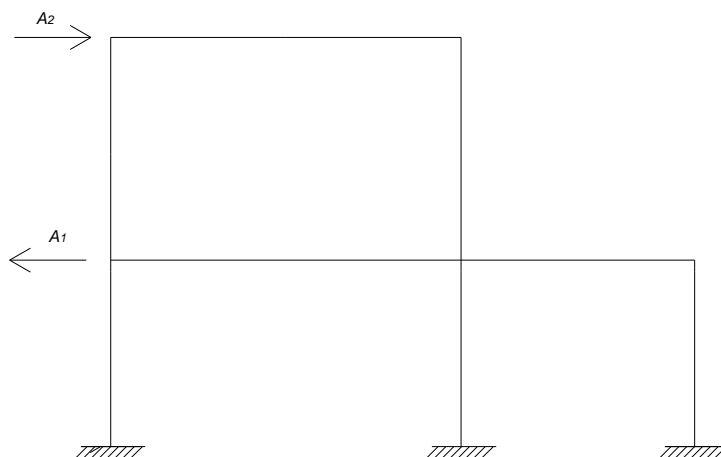
$$A'_1 = A_1 - \eta \cdot B_1$$

$$A'_1 = -2.774 \text{ kN}$$

$$A'_2 = A_2 - \eta \cdot B_2$$

$$A'_2 = 9.44 \text{ kN}$$

-utjecaj razlika horizontalnih sila A'_1, A'_2 :



-pripadajući kutovi zaokreta stupova kata :

I. kat :

$$N'_{14} = N'_{25} = N'_{36} = N'_{63} = N'_{52} = N'_{41} = N'_I = \Psi'_1$$

$$\Psi'_1 = -\frac{1}{6 \sum_{(i,j) \in 1} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right)} \cdot h_1 \cdot \sum_{e \geq 1} A'_e$$

$$\sum_{(i,j) \in 1} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right) = \frac{I_{14}}{l_{14}} + \frac{I_{25}}{l_{25}} + \frac{I_{36}}{l_{36}} = 3 \cdot \frac{I_S}{h_1} = 16$$

$$\sum_{e \geq 1} A'_e = A'_1 - A'_2 = 6.666 \text{ kN}$$

$$\Psi'_1 = -\frac{1}{6 \cdot 16} \cdot 3 \cdot 6.666 = -0.2083$$

II. kat :

$$N'_{47} = N'_{74} = N'_{58} = N'_{85} = N'_{II} = \Psi'_2$$

$$\Psi'_2 = -\frac{1}{6 \sum_{(i,j) \in 2} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right)} \cdot h_2 \cdot \sum_{e \geq 2} A'_e$$

$$\sum_{(i,j) \in 2} \left(\frac{I_{ij}}{l_{ij}}\right) = \frac{I_{47}}{l_{47}} + \frac{I_{58}}{l_{58}} = 2 \cdot \frac{I_S}{h_2} = 8$$

$$\sum_{e \geq 2} A'_e = A'_2 = 9.44 \text{ kN}$$

$$\Psi'_2 = -\frac{1}{6 \cdot 8} \cdot 4 \cdot 9.44 = -0.7866$$

-momenti od kuteva Ψ'_1, Ψ'_2 :

$$M_{ij}^{(A)} = -\frac{I_{ij}}{l_{ij}} \cdot (2N'_{ij} + N'_{ji})$$

1	2	3	4	5	6	7
štapovi	$\frac{I}{l} \cdot 10^4$ $2 \sum \frac{l}{i} \cdot 10^4$	N'	Momenti od dodatnih zaokreta stupova	1. APROKSIMACIJA		
				promjena momenta	N'	\tilde{M}'_{mn} $= \frac{I}{l} (2N'_{mn} + N'_{nm})$
4-1	5.33	-0.2083	3.33	-		-3-719
4-7	4.0	-0.7866	9.44	-		-3.526
4-5	9.0	-	-	-	-0.3489	-7.436
	36.6		12.77			12.77
						-1.911
5-2	5.33	-0.2083	3.33	-		-1.37
5-8	4.0	-0.7866	9.44	-1.452		-2.48
5-4	9.0	-	-	-3.14	-0.1285	-5.4524
5-6	13.5	-	-	-		-4.04
	63.66		12.77			12.77
						-0.5724
6-3	5.33	-0.2083	3.33	-		-0.452
6-5	13.5	-	-	-1.734	-0.0424	-2.878
	37.66		3.33			3.33
						0.0
7-4	4.0	-0.7866	9.44	-1.3956		-2.865
7-8	9.0	-	-	-3.267	-0.1837	-6.5736
	26.0		9.44			9.44
						0.0014
8-5	4.0	-0.7866	9.44	-		-3.418
8-7	9.0	-	-	-	-0.363	-8.1873
	26.0		9.44			9.44
						-2.165

8	9	10	11
2. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	$\Delta N'$	$N''=N'+\Delta N'$	$\tilde{M}_{mn}'' = \frac{I}{l}(2N_{mn}'' + N_{nm}'')$
- - -	0.0522	-0.2967	-3.163 -3.256 -6.529 <u>12.77</u> -0.178
- 0.333 0.47 -	-0.00362	-0.13208	-1.408 -2.1754 -5.0477 -4.1207 <u>12.77</u> 0.0181
- -0.0489	0.001298	-0.04108	-0.438 -2.892 <u>3.33</u> 0.0
0.2088 0.7494	-0.0369	-0.2206	-2.9516 -6.4881 <u>9.44</u> 0.0003
- -	0.08327	-0.2797	-2.766 -7.02 <u>9.44</u> -0.346

12	13	14	15
3. APROKSIMACIJA			
promjena momenta	$\Delta N''$	$N'''=N''+\Delta N''$	$\tilde{M}_{mn}''' = \frac{I}{l}(2N_{mn}''' + N_{nm}''')$
- - -	0.00486	-0.29184	-3.11 -3.238 -6.458 <u>12.77</u> -0.036
- 0.0532 0.04374 -	-0.00181	-0.13389	-1.427 -2.137 -5.0366 -4.161 <u>12.77</u> 0.0084
- -0.0244	0.000648	-0.04043	-0.431 -2.899 <u>3.33</u> 0.0
0.01944 0.1197	-0.00536	-0.2259	-2.974 -6.464 <u>9.44</u> 0.0022
- -	0.0133	-0.2664	-2.667 -6.828 <u>9.44</u> -0.055

$$\tilde{M}'_{mn} = \tilde{M}'''_{mn} + M_{mn}^{(A)}$$

$$\tilde{M}'_{41} = -3.11 + 3.33 = 0.22 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{47} = -3.238 + 9.44 = 6.202 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{48} = -6.422 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{52} = 1.903 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{58} = 7.303 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{54} = -5.0366 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{56} = -4.161 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{63} = 2.9 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{65} = -2.9 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{74} = 6.464 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{78} = -6.464 \text{ kNm}$$

-ležajni momenti :

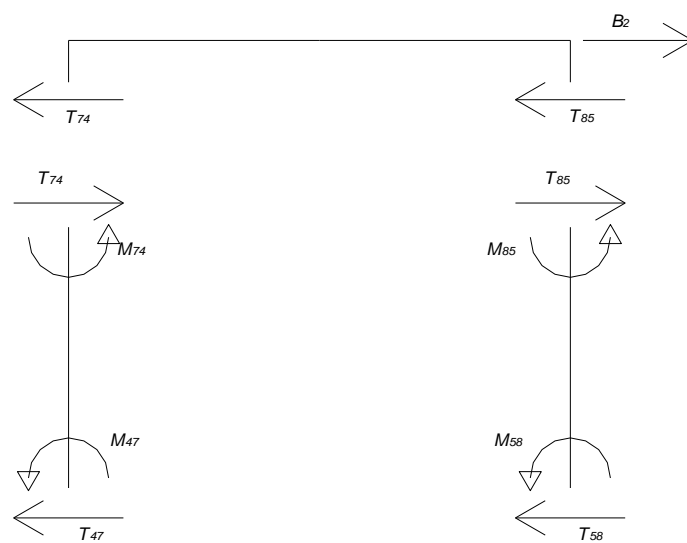
$$\tilde{M}'_{14} = \tilde{M}'_{41} - \frac{l_{41}}{l_{41}} \cdot N'''_{41}$$

$$\tilde{M}'_{14} = 1.775 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{25} = 2.6166 \text{ kNm}$$

$$\tilde{M}'_{36} = 3.115 \text{ kNm}$$

-sile u pridržanju :

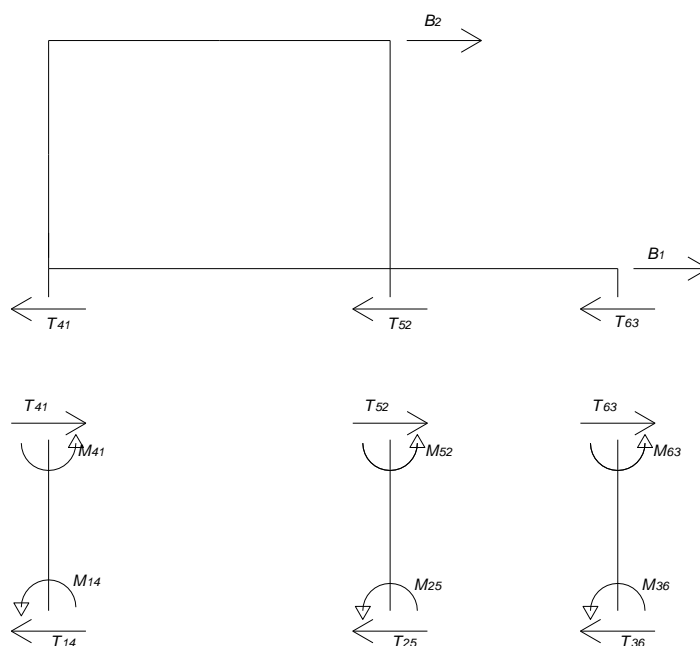


$$\tilde{T}'_{ij} = \frac{\tilde{M}'_{ij} + \tilde{M}'_{ij}}{4}$$

$$\tilde{T}'_{74} = 3.1665 \text{ kN}$$

$$\tilde{T}'_{85} = 3.533 \text{ kN}$$

$$B'_2 = \tilde{T}'_{74} + \tilde{T}'_{85} = 6.7 \text{ kN}$$



$$\tilde{T}'_{ij} = \frac{\tilde{M}'_{ij} + \tilde{M}'_{ij}}{3}$$

$$\tilde{T}'_{41} = 0.665 \text{ kN}$$

$$\tilde{T}'_{52} = 1.5066 \text{ kN}$$

$$\tilde{T}'_{63} = 2.005 \text{ kN}$$

$$B'_1 = \tilde{T}'_{41} + \tilde{T}'_{52} + \tilde{T}'_{63} - B'_2 = -2.523 \text{ kN}$$

-dodatni korekcijski faktor :

$$\eta' = \frac{A'_1 \cdot B'_1 + A'_2 \cdot B'_2}{(B'_1)^2 + (B'_2)^2} = \frac{(-2.774) \cdot (-2.523) + 9.44 \cdot 6.7}{(-2.523)^2 + 6.7^2} = 1.37$$

$$A''_1 = A'_1 - \eta' \cdot B'_1$$

$$A''_1 = 0.6825 \text{ kN}$$

$$A''_2 = A'_2 - \eta' \cdot B'_2$$

$$A''_2 = 0.261 \text{ kN}$$

-konačni rezultati :

$$M_{mn}^{(k)} = M_{mn} + \tilde{M}_{mn} \cdot \eta + \tilde{M}'_{mn} \cdot \eta'$$

$$M_{14}^{(k)} = 8.77 + 40.2419 \cdot 1.168 + 1.775 \cdot 1.37 = 58.204 \text{ kNm}$$

$$M_{25}^{(k)} = 61.345 \text{ kNm}$$

$$M_{36}^{(k)} = 59.189 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^{(k)} = -3.785 \text{ kNm}$$

$$M_{47}^{(k)} = 3.1093 \text{ kNm}$$

$$M_{45}^{(k)} = -27.658 \text{ kNm}$$

$$M_{52}^{(k)} = 58.55 \text{ kNm}$$

$$M_{58}^{(k)} = 50.645 \text{ kNm}$$

$$M_{54}^{(k)} = -110.743 \text{ kNm}$$

$$M_{56}^{(k)} = 1.64 \text{ kNm}$$

$$M_{63}^{(k)} = 55.5174 \text{ kNm}$$

$$M_{65}^{(k)} = -55.5174 \text{ kNm}$$

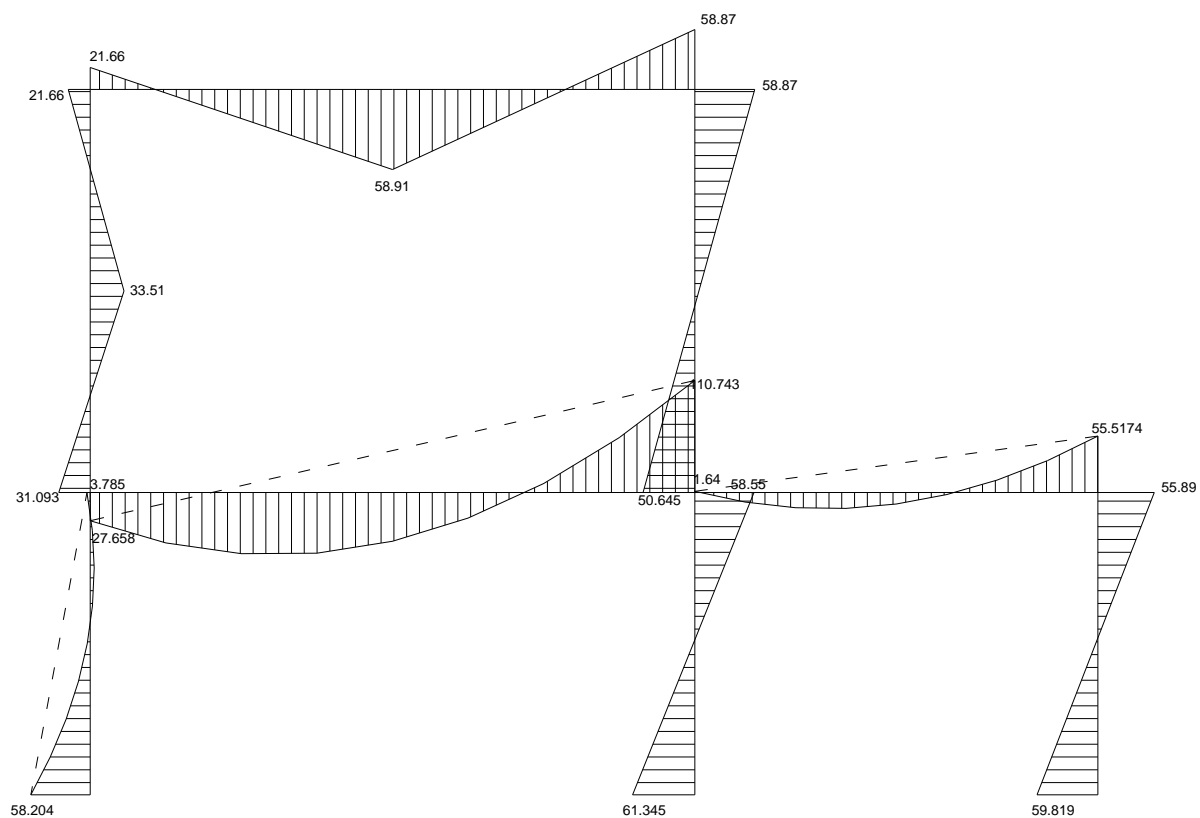
$$M_{74}^{(k)} = -21.666 \text{ kNm}$$

$$M_{78}^{(k)} = 21.666 \text{ kNm}$$

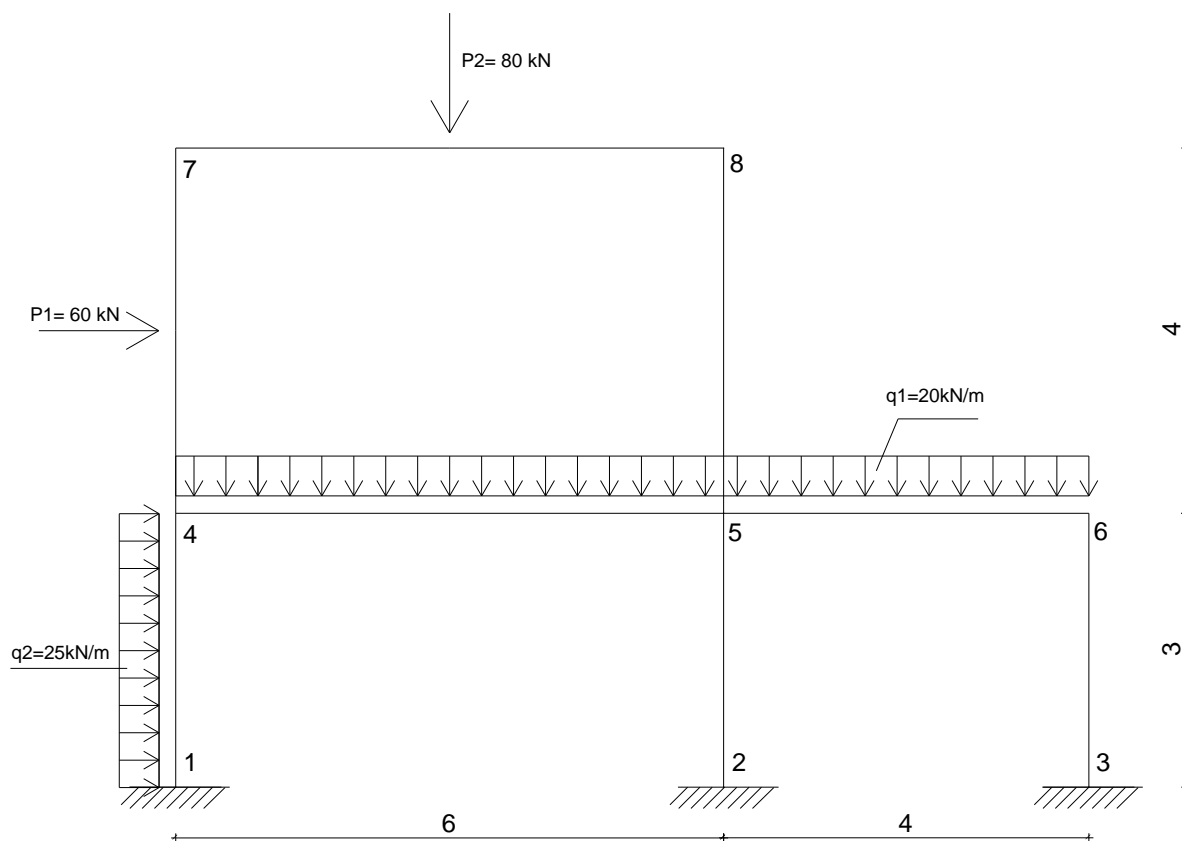
$$M_{85}^{(k)} = 58.87 \text{ kNm}$$

$$M_{87}^{(k)} = -58.87 \text{ kNm}$$

-M dijagram :



3.2. Crossov postupak



-stupovi 30/40 cm

-grede 30/60 cm

- $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$

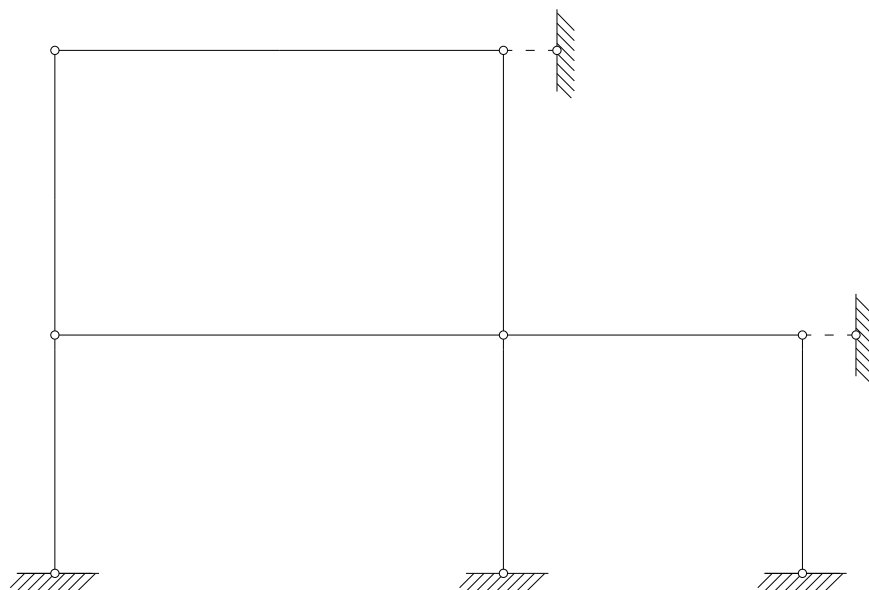
- $EI_s = EI_2 = 48\,000 \text{ kNm}^2$

- $EI_g = EI_1 = 162\,000 \text{ kNm}^2$

$\varphi_4 = ?$, $\varphi_5 = ?$, $\varphi_6 = ?$, $\varphi_7 = ?$, $\varphi_8 = ?$

-zglobna shema :

$$S = 3 \cdot 8 - 6 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 24 - 6 - 6 - 4 - 6 = 2$$



$$u_8 = ?$$

$$u_6 = ?$$

-proračunske fleksijske krutosti :

$$k_{ij} = \frac{k_{ij}^*}{(EI)_0} = \frac{(EI)_{ij}}{L_{ij} \cdot (EI)_0} \quad (EI)_0 = (EI)_1$$

$$k_{14}^* = \frac{48000}{3} = 16000 = k_{25}^* = k_{36}^*$$

$$k_{14} = \frac{16000}{162000} = 0.0988 = k_{25} = k_{36}$$

$$k_{47}^* = \frac{48000}{4} = 12000 = k_{58}^*$$

$$k_{47} = \frac{12000}{162000} = 0.0741 = k_{58}$$

$$k_{45}^* = \frac{162000}{6} = 27000 = k_{78}^*$$

$$k_{45} = \frac{27000}{162000} = 0.1666 = k_{78}$$

$$k_{56}^* = \frac{162000}{4} = 40500$$

$$k_{56} = \frac{40500}{162000} = 0.25$$

-razdjelni koeficijenti :

$$\begin{aligned} \text{*čvor 4} \quad a_{41} = 4k_{41} = 0.3952 & \quad - \quad \mu_{41} = \frac{0.3952}{1.358} = 0.29 \\ a_{45} = 4k_{45} = 0.6664 & \quad - \quad \mu_{45} = \frac{0.6664}{1.358} = 0.49 \\ a_{47} = 4k_{47} = 0.2964 & \quad - \quad \mu_{47} = \frac{0.2964}{1.358} = 0.22 \quad \rightarrow \quad \Sigma = 1 \end{aligned}$$

$$A_4 = 1.358$$

$$\begin{aligned} \text{*čvor 7} \quad a_{74} = 4k_{74} = 0.2964 & \quad - \quad \mu_{74} = \frac{0.2964}{0.9628} = 0.31 \\ a_{78} = 4k_{78} = 0.6664 & \quad - \quad \mu_{78} = \frac{0.6664}{0.9628} = 0.69 \quad \rightarrow \quad \Sigma = 1 \end{aligned}$$

$$A_7 = 0.9628$$

$$\begin{aligned} \text{*čvor 5} \quad a_{52} = 4k_{52} = 0.3952 & \quad - \quad \mu_{41} = \frac{0.3952}{2.358} = 0.17 \\ a_{56} = 4k_{56} = 1.0 & \quad - \quad \mu_{45} = \frac{1.0}{2.358} = 0.42 \\ a_{58} = 4k_{58} = 0.2964 & \quad - \quad \mu_{58} = \frac{0.2964}{2.358} = 0.13 \\ a_{54} = 4k_{54} = 0.6664 & \quad - \quad \mu_{54} = \frac{0.6664}{2.358} = 0.28 \quad \rightarrow \quad \Sigma = 1 \end{aligned}$$

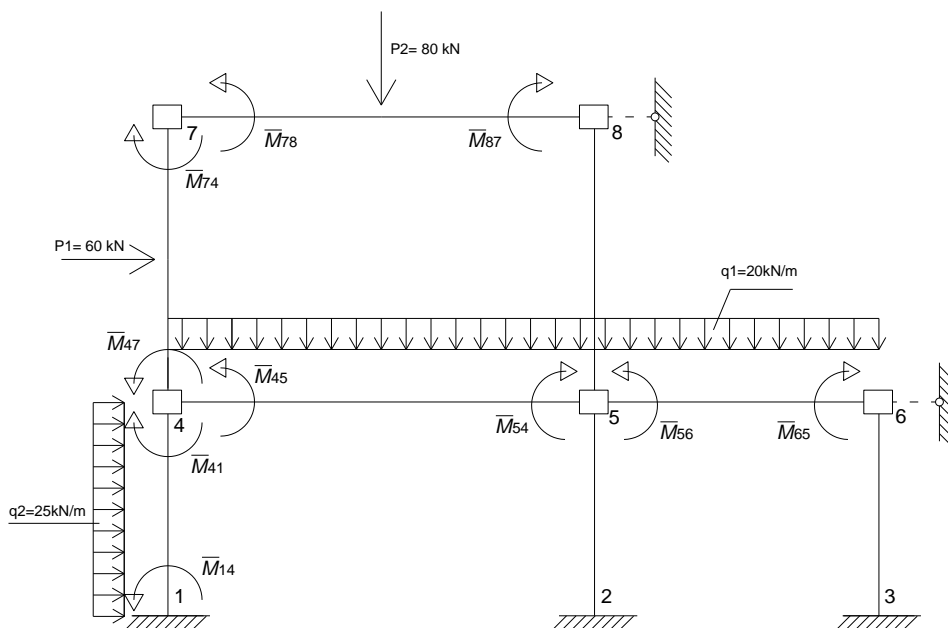
$$A_5 = 2.358$$

$$\begin{aligned} \text{*čvor 8} \quad a_{87} = 4k_{87} = 0.6664 & \quad - \quad \mu_{74} = \frac{0.6664}{0.9628} = 0.69 \\ a_{84} = 4k_{84} = 0.2964 & \quad - \quad \mu_{85} = \frac{0.2964}{0.9628} = 0.31 \quad \rightarrow \quad \Sigma = 1 \end{aligned}$$

$$A_7 = 0.9628$$

$$\begin{aligned} \text{*čvor 6} \quad a_{65} = 4k_{65} = 1.0 & \quad - \quad \mu_{65} = \frac{1.0}{1.3952} = 0.72 \\ a_{63} = 4k_{63} = 0.3952 & \quad - \quad \mu_{85} = \frac{0.3952}{1.3952} = 0.28 \quad \rightarrow \quad \Sigma = 1 \end{aligned}$$

$$A_6 = 1.3952$$



-momenti upetosti od vanjskog opterećenja :

$$\overline{M}_{14} = \frac{25 \cdot 3^2}{12} = 18.75 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{41} = -\frac{25 \cdot 3^2}{12} = -18.75 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{45} = \frac{20 \cdot 6^2}{12} = 60 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{54} = -\frac{20 \cdot 6^2}{12} = -60 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{56} = \frac{20 \cdot 4^2}{12} = 26.67 \text{ kNm}$$

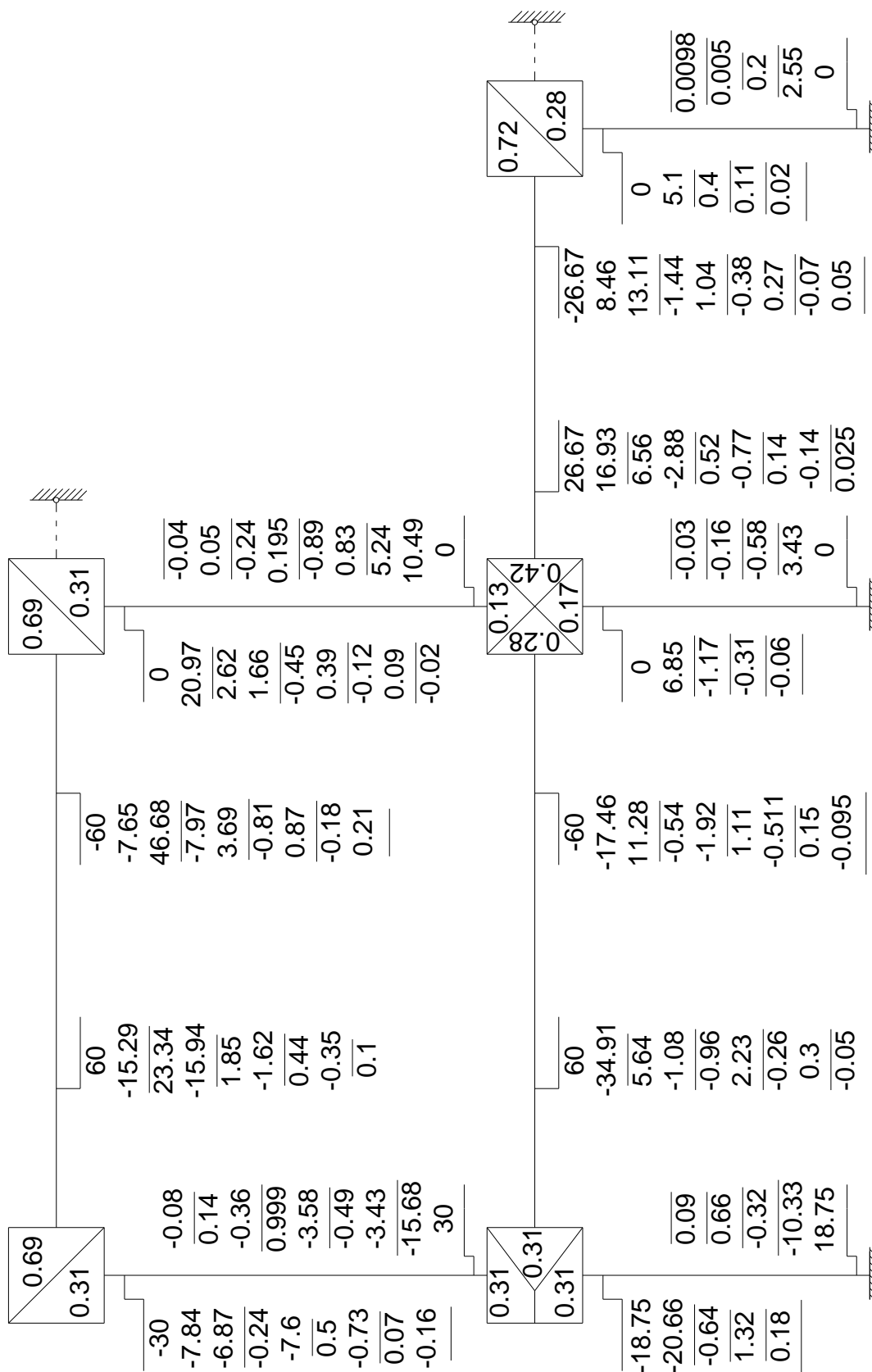
$$\overline{M}_{65} = -\frac{20 \cdot 4^2}{12} = -26.67 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{47} = 60 \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{4^2} = 30 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{74} = -60 \cdot \frac{2^2 \cdot 2}{4^2} = -30 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{78} = 80 \cdot \frac{3 \cdot 3^2}{6^2} = 60 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{87} = -80 \cdot \frac{3^2 \cdot 3}{6^2} = -60 \text{ kNm}$$



$$M_{14} = 8.85 \text{ kNm} \quad , \quad M_{41} = -38.55 \text{ kNm}$$

$$M_{47} = 7.599 \text{ kNm} \quad , \quad M_{74} = -52.43 \text{ kNm}$$

$$M_{45} = 30.96 \text{ kNm} \quad , \quad M_{54} = -67.99 \text{ kNm}$$

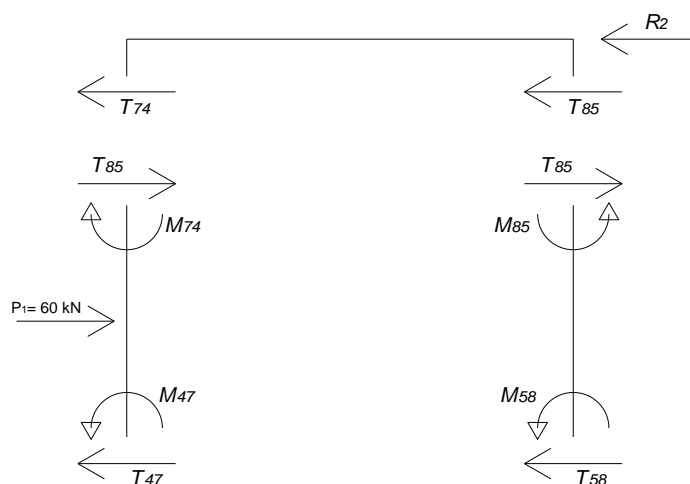
$$M_{78} = 52.43 \text{ kNm} \quad , \quad M_{87} = -25.16 \text{ kNm}$$

$$M_{25} = 2.66 \text{ kNm} \quad , \quad M_{52} = 5.31 \text{ kNm}$$

$$M_{58} = 15.64 \text{ kNm} \quad , \quad M_{85} = 26.16 \text{ kNm}$$

$$M_{56} = 47.03 \text{ kNm} \quad , \quad M_{65} = -5.63 \text{ kNm}$$

$$M_{36} = 2.81 \text{ kNm} \quad , \quad M_{63} = 5.63 \text{ kNm}$$



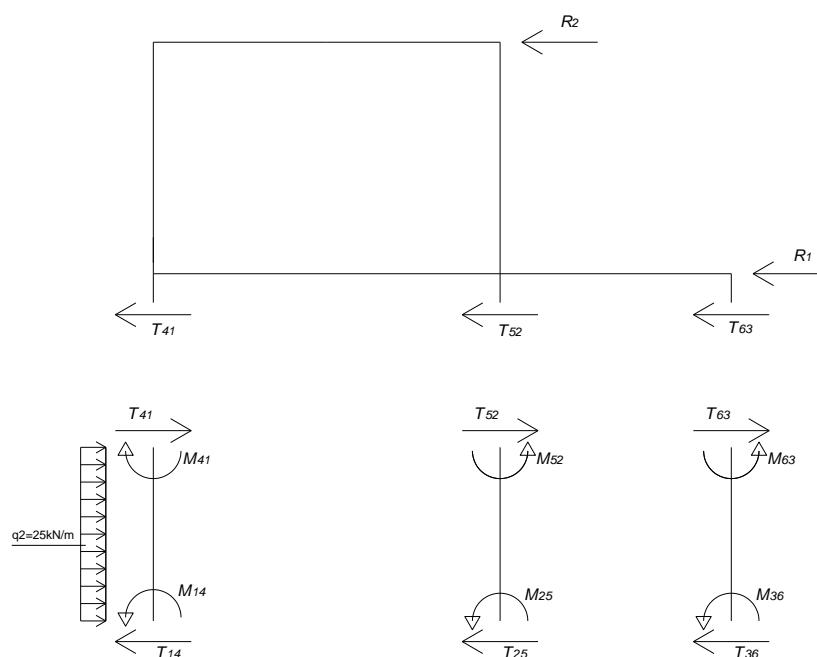
$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{4}$$

$$T_{74} = -41.21 \text{ kN}$$

$$T_{85} = 10.2 \text{ kN}$$

$$R_0^2 = -(T_{74} + T_{85})$$

$$R_0^2 = 31.01 \text{ kN}$$



$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{3}$$

$$T_{41} = -47.38 \text{ kN}$$

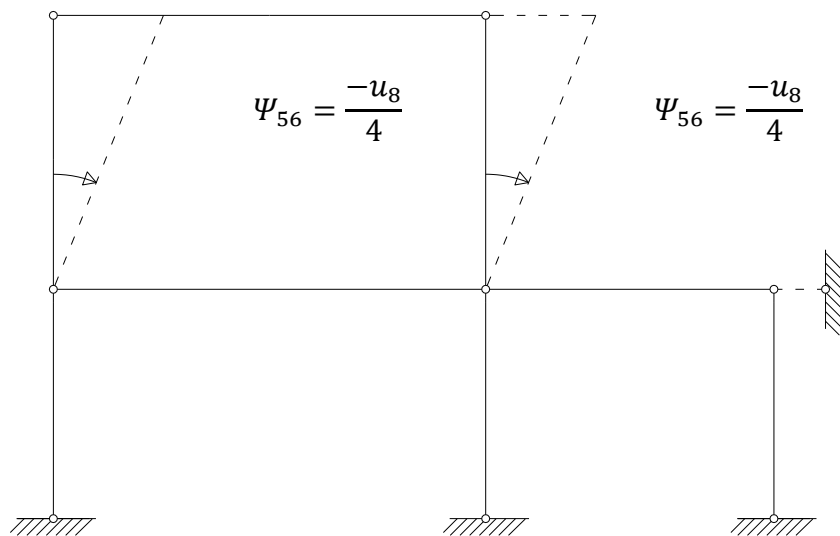
$$T_{52} = 2.66 \text{ kN}$$

$$T_{63} = 2.81 \text{ kN}$$

$$R_0^1 = -(R_0^2 + T_{41} + T_{52} + T_{63}) + P_1$$

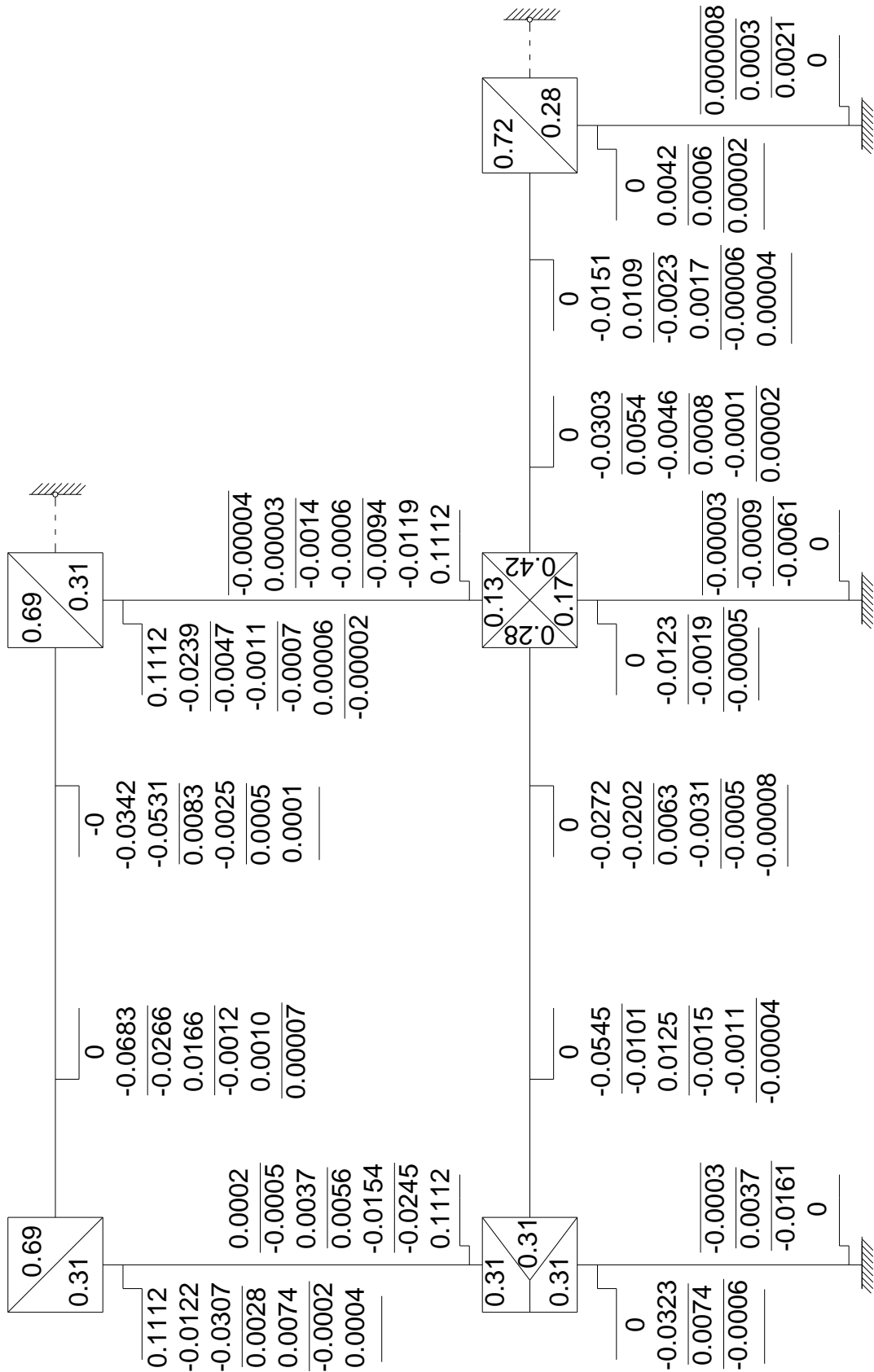
$$R_0^1 = 70.84 \text{ kN}$$

+ u_8



$$m_{47}^{u_8} = m_{74}^{u_8} = -6 \cdot k_{47} \cdot \psi_{47} = -6 \cdot 0.0741 \cdot \frac{-u_8}{4} = 0.1112u_9$$

$$m_{58}^{u_8} = m_{85}^{u_8} = -6 \cdot k_{58} \cdot \psi_{58} = -6 \cdot 0.0741 \cdot \frac{-u_8}{4} = 0.1112u_9$$



$$M_{14}^{u_8} = -0.127u_8 \quad , \quad M_{41}^{u_8} = -0.0255u_8$$

$$M_{47}^{u_8} = 0.0801u_8 \quad , \quad M_{74}^{u_8} = 0.0787u_8$$

$$M_{45}^{u_8} = -0.0547u_8 \quad , \quad M_{54}^{u_8} = -0.04478u_8$$

$$M_{78}^{u_8} = -0.0785u_8 \quad , \quad M_{87}^{u_8} = -0.0809u_8$$

$$M_{52}^{u_8} = -0.01425u_8 \quad , \quad M_{25}^{u_8} = -0.00703u_8$$

$$M_{58}^{u_8} = 0.08789u_8 \quad , \quad M_{85}^{u_8} = 0.0809u_8$$

$$M_{56}^{u_8} = -0.0288u_8 \quad , \quad M_{65}^{u_8} = -0.00482u_8$$

$$M_{36}^{u_8} = 0.00241u_8 \quad , \quad M_{63}^{u_8} = 0.00482u_8$$

$$T_{ij}^{u_8} = \frac{M_{ij}^{u_8} + M_{ji}^{u_8}}{h_{ij}}$$

$$T_{74}^{u_8} = 0.0397u_8$$

$$T_{85}^{u_8} = 0.0422u_8$$

$$T_{41}^{u_8} = -0.01273u_8$$

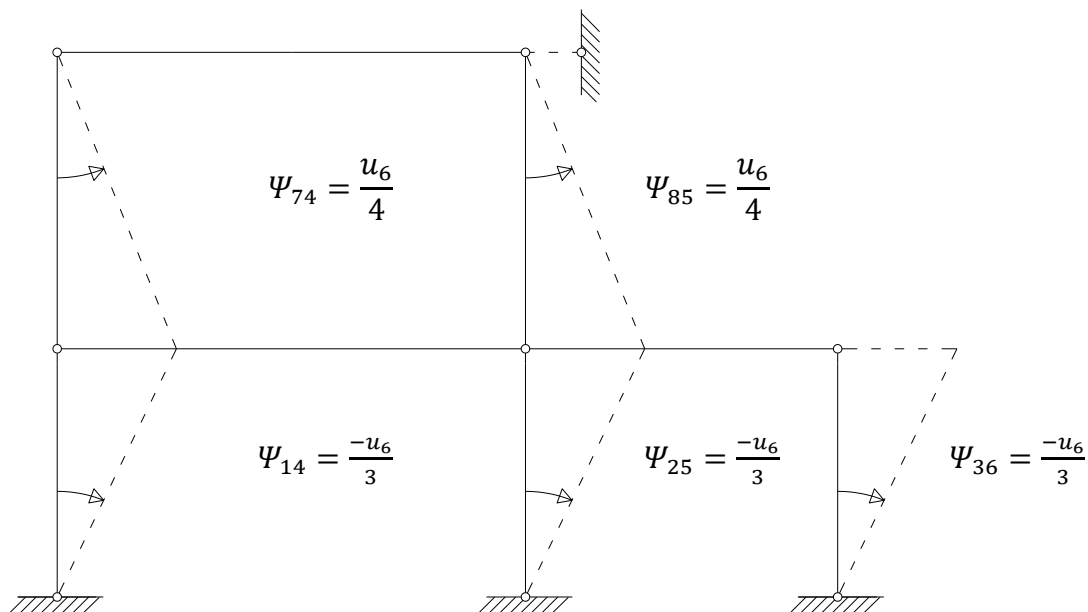
$$T_{52}^{u_8} = -0.00709u_8$$

$$T_{63}^{u_8} = 0.00241u_8$$

$$R_{u_8}^2 = -(T_{74} + T_{85}) = -0.0819u_8$$

$$R_{u_8}^1 = -(R_{u_8}^2 + T_{41} + T_{52} + T_{63}) = 0.09931u_8$$

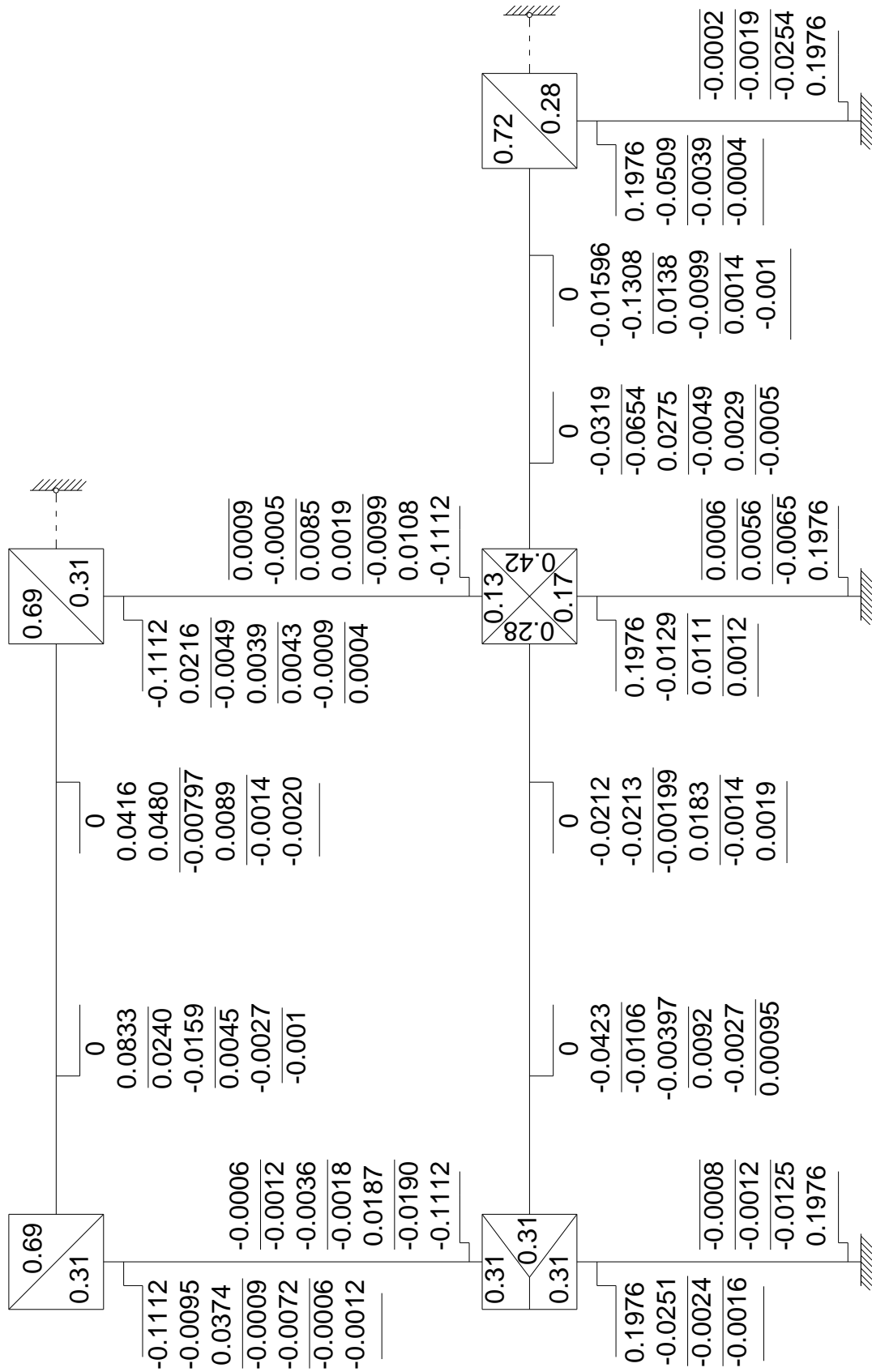
+ u_6



$$m_{14}^{u_6} = m_{41}^{u_6} = -6 \cdot k_{14} \cdot \psi_{14} = -6 \cdot 0.0988 \cdot \frac{-u_6}{3} = 0.1976u_6$$

$$m_{25}^{u_6} = m_{52}^{u_6} = m_{36}^6 = m_{63}^{u_6} = m_{14}^{u_6} = 0.1976u_6$$

$$m_{47}^{u_6} = m_{74}^{u_6} = m_{58}^{u_6} = m_{85}^{u_6} = -6 \cdot 0.0741 \cdot \frac{u_6}{4} = -0.1112u_6$$



$$M_{14}^{u_6} = 0.1831u_6 \quad , \quad M_{41}^{u_6} = 0.1685u_6$$

$$M_{47}^{u_6} = -0.1181u_6 \quad , \quad M_{74}^{u_6} = -0.0932u_6$$

$$M_{45}^{u_6} = -0.0504u_6 \quad , \quad M_{54}^{u_6} = -0.0257u_6$$

$$M_{78}^{u_6} = 0.0932u_6 \quad , \quad M_{87}^{u_6} = 0.08713u_6$$

$$M_{52}^{u_6} = 0.197u_6 \quad , \quad M_{25}^{u_6} = 0.1973u_6$$

$$M_{58}^{u_6} = -0.0995u_6 \quad , \quad M_{85}^{u_6} = -0.0872u_6$$

$$M_{56}^{u_6} = -0.0718u_6 \quad , \quad M_{65}^{u_6} = -0.1424u_6$$

$$M_{36}^{u_6} = 0.1707u_6 \quad , \quad M_{63}^{u_6} = 0.1424u_6$$

$$T_{ij}^{u_6} = \frac{M_{ij}^{u_6} + M_{ji}^{u_6}}{h_{ij}}$$

$$T_{74}^{u_6} = -0.0528u_6$$

$$T_{85}^{u_6} = -0.0467u_6$$

$$T_{41}^{u_6} = 0.1171u_6$$

$$T_{52}^{u_6} = 0.1314u_6$$

$$T_{63}^{u_6} = 0.1042u_6$$

$$R_{u_6}^2 = -(T_{74} + T_{85}) = 0.0995u_6$$

$$R_{u_6}^1 = -(R_{u_6}^2 + T_{41} + T_{52} + T_{63}) = -0.4522u_6$$

$$R_1^0 + R_1^{u_8} + R_1^{u_6} = 0$$

$$R_2^0 + R_2^{u_8} + R_2^{u_6} = 0$$

$$70.84 + 0.09931u_8 - 0.4522u_6 = 0$$

$$31.08 - 0.0813u_8 - 0.4522u_6 = 0$$

$$u_8 = 777.16$$

$$u_6 = 327.33$$

$$M_{ij} = M_{ij} + M_{ij}^{u_8} + M_{ij}^{u_6}$$

$$M_{14} = 58.91 \text{ kNm} \quad , \quad M_{41} = -3.21 \text{ kNm}$$

$$M_{47} = 31.19 \text{ kNm} \quad , \quad M_{74} = -21.77 \text{ kNm}$$

$$M_{45} = -28.05 \text{ kNm} \quad , \quad M_{54} = -111.2 \text{ kNm}$$

$$M_{78} = 21.93 \text{ kNm} \quad , \quad M_{87} = -59.51 \text{ kNm}$$

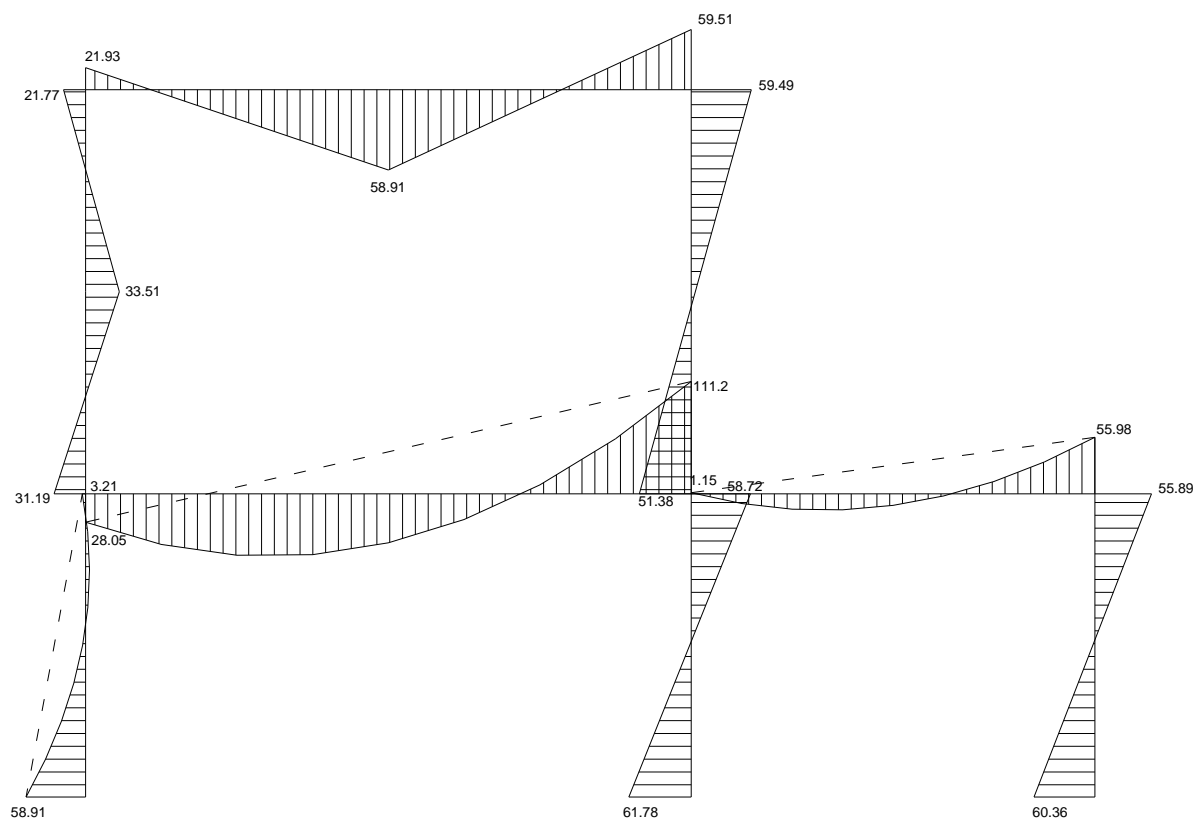
$$M_{52} = 58.72 \text{ kNm} \quad , \quad M_{25} = 61.78 \text{ kNm}$$

$$M_{58} = 51.38 \text{ kNm} \quad , \quad M_{85} = 59.49 \text{ kNm}$$

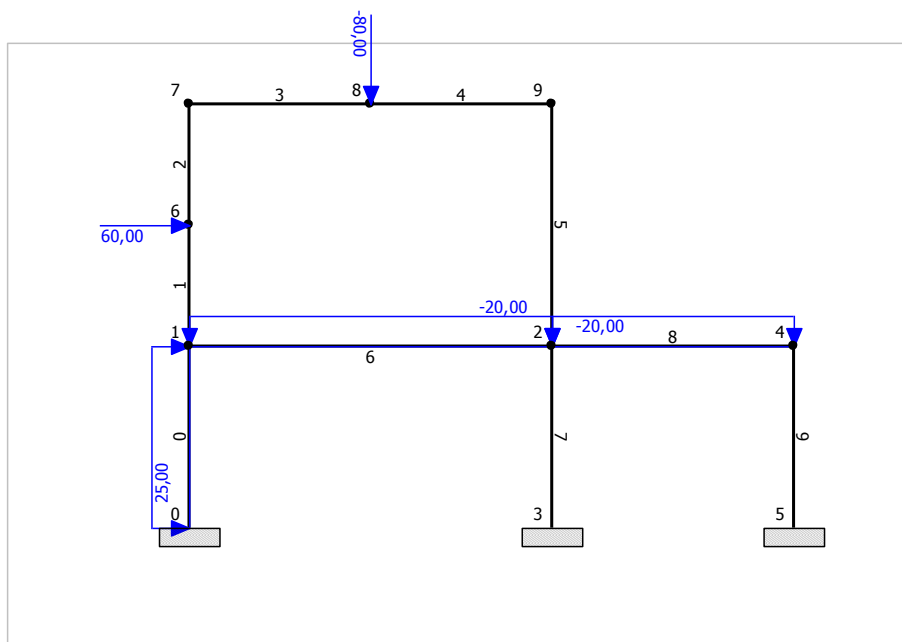
$$M_{56} = 1.15 \text{ kNm} \quad , \quad M_{65} = -55.98 \text{ kNm}$$

$$M_{36} = 60.36 \text{ kNm} \quad , \quad M_{63} = 55.89 \text{ kNm}$$

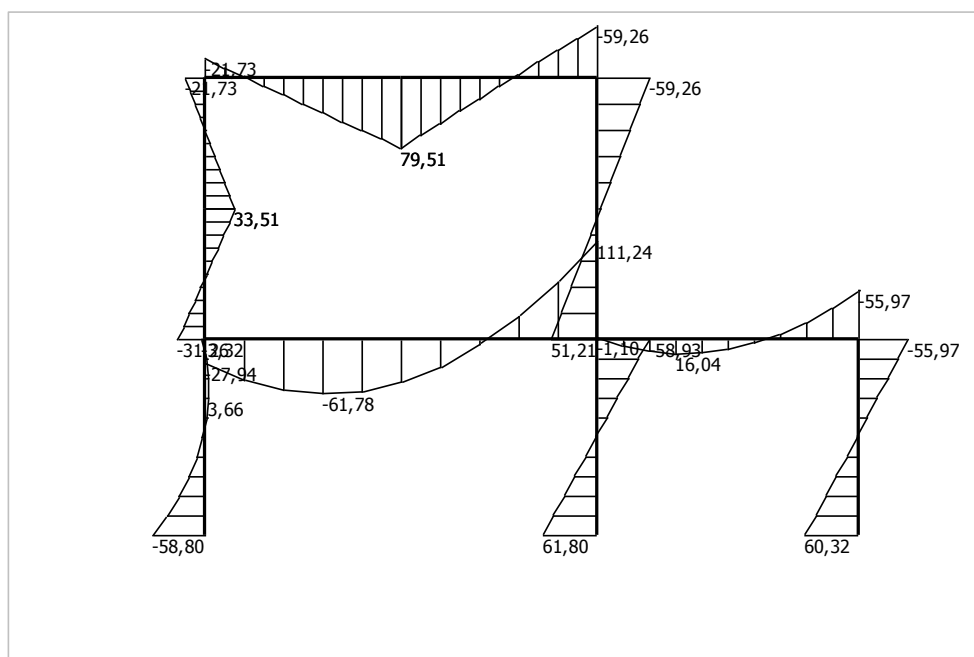
-M dijagram :



3.3. Rješenje iz programa LinPro



-M dijagram :



4. Zaključak

Nakon što sam isti zadatak proračunala prvo Čališevljevim postupkom, a zatim Crossovim postupkom, zaključila sam da je postupak K. Čališeva znatno zahtjevniji, zamorniji i teži. Rješavanje zadatka Čališevljevim postupkom je vremenski trajalo znatno duže nego rješavanje Crossovim. Isto tako, kod Crossa su aproksimacije bile puno lakše i jednostavnije nego kod Čališeva. S obzirom na velik broj tablica u Čališevljevom postupku, puno je veća mogućnost pogreške, te je sam postupak znatno nepregledniji od Crossovog, gdje se većina postupka izvodi na shemi konstrukcije, što daje veću preglednost i urednost. Rješavajući isti zadatak na oba načina, dobila sam momentne dijagrame s vrlo sličnim rezultatima. Odstupanja u čvorovima su u iznosu do 1kN. Zatim sam te rezultate usporedila s rezultatima koje sam dobila riješivši zadatak u programu Tower na računaru. Usporedba je pokazala da su obje metode vrlo precizne, pri čemu preciznost ovisi o broju aproksimacija s kojima se sve više približavamo točnim rezultatima. Upravo zbog toga je Crossova metoda puno pogodnija, jer u istom vremenskom roku možemo izvršiti više aproksimacija, te tako doći do točnijih rješenja.

Literatura

- Čališev, K.: *Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija*, Tehnički list Udruženja jugoslavenskih inženjera i arhitekta 5, Zagreb, 1923., 17, 125-127; 18/19, 141-143; 20, 151-154; 21, 157-158
- Čališev, K.: *Primjenjena statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.
- Leonard K. Eaton, *Hardy Cross and the 'Moment Distribution Method'*, Nexus Network Journal, vol. 3, no.3, 2001.
- *Spomenica Tehničkom fakultetu Hrvatskog Sveučilišta u Zagrebu*, urednik Prof. Ing. Stjepan Horvat, Zagreb, 1943.
- *Bilješke i skice s predavanja*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, kolegij Građevna statika 2, Zagreb, 2008., www.grad.unizg.hr/nastava/ga
- www.wikipedia.org/wiki/Hardy_Cross