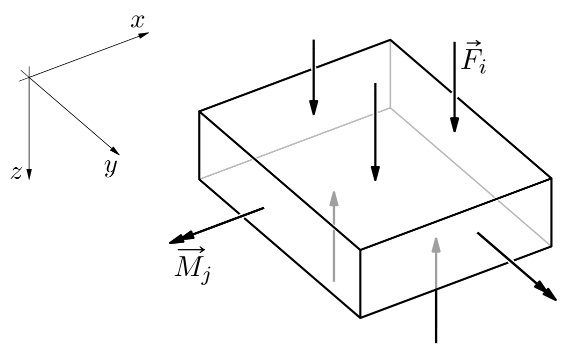
Sile na usporednim pravcima

K. F.



$\vec{F}_i \parallel z \ \ \forall i \quad \& \quad \overrightarrow{M}_j \perp z \ \ \forall j$

$\left[\ \vec{F}_i \perp xy \quad \& \quad \overrightarrow{M}_j \parallel xy\ \right]$

$\vec{F}_i \perp xy \quad \Rightarrow \quad F_{i,x} = F_{i,y} = 0$

$\vec{F}_i = F_{i,z}\,\vec{k}$

$\vec{F}_i \parallel z \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{M}_{\vec{F}_i/T} \perp z \quad \Rightarrow \quad M_{i,z} = 0$

$\overrightarrow{M}_j \perp z \quad \Rightarrow \quad M_{j,z} = 0$

$\overrightarrow{M}_k = M_{k,x}\,\vec{\imath} + M_{k,y}\,\vec{\jmath} \qquad (k = i, j)$

osnovna formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže tijela u prostoru:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} = 0$$

za sile na pravcima usporednima s osi z identično su zadovoljene jednadžbe:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} = 0$$

preostali **skalarni uvjeti ravnoteže za sile na pravcima usporednima s osi z**:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,z} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} = 0$$

druge formulacije skalarnih uvjeta ravnoteže:

- varijacija osnovne formulacije:

  $$\sum_{i=1}^{n} F_{i,w} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,u} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,v} = 0$$

  w — bilo koja os koja nije okomita na pravce djelovanja sila

  u, v — bilo koje dvije osi koje nisu usporedne s jednom ravninom usporednom s pravcima djelovanja sila (posebno, ni jedna os nije usporedna s tim pravcima)

  najpogodnije: w usporedna sa z, a u i v u ravnini xy, pri čemu ne smiju biti međusobno usporedne

- tri momentna uvjeta:

$$\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,u} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,v} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,w} = 0$$

  u, v, w — bilo koje tri osi koje (1) nisu usporedne s jednom ravninom usporednom s pravcima djelovanja sila i (2) ne sijeku jedan pravac usporedan s tim pravcima (i posebno, ni jedna os nije usporedna s njima)

  najpogodnije: u, v, w u ravnini xy, pri čemu ne smiju prolaziti istom točkom (pa ni neizmjerno dalekom)

usporedne sile: sile na usporednim pravcima, s istim smislom djelovanja, bez koncentriranih momenata

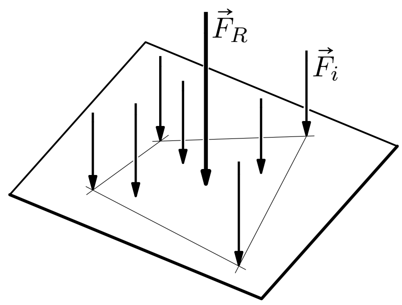
$\vec{F}_i = F_{i,z}\,\vec{k} = F_i\,\vec{k}$ uz $F_i = F_{i,z} > 0\ \forall i$ [ili $F_i < 0\ \forall i$]

rezultanta: $\vec{F}_R = F_{R,z}\,\vec{k} = F_R\,\vec{k}$ uz $F_R = \sum_i F_i$

ako pravci djelovanja sila $\vec{F}_i$ probadaju ravninu xy u točkama (x_i, y_i):

$$x_R\,F_R = \sum_i x_i\,F_i \qquad \Rightarrow \qquad x_R = \frac{\sum_i x_i\,F_i}{F_R} = \frac{\sum_i x_i\,F_i}{\sum_i F_i}$$

$$y_R\,F_R = \sum_i y_i\,F_i \qquad \Rightarrow \qquad y_R = \frac{\sum_i y_i\,F_i}{F_R} = \frac{\sum_i y_i\,F_i}{\sum_i F_i}$$



pravac na kojemu djeluje rezultanta $\vec{F}_R$ probada ravninu xy u točki (x_R, y_R) koja leži unutar *konveksne ovojnice* — najmanjega konveksnog poligona koji „obuhvaća” sva probodišta pravaca djelovanja zadanih sila

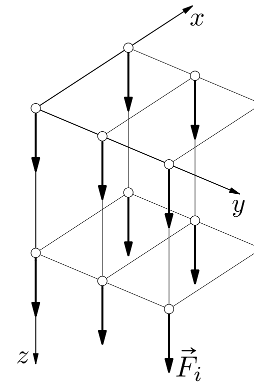
posebni slučajevi:

- probodište pravca djelovanja rezultante dviju sila leži na spojnici probodišta njihovih pravaca, između njih
- probodište pravca djelovanja rezultante triju sila leži unutar trokuta vrhovi kojeg su probodišta njihovih pravaca
- ako sve sile leže u istoj ravnini, i njihova je rezultanta u toj ravnini, između tih sila
- ako raspored intenziteta sila i probodišta njihovih pravaca ima os simetrije, probodište pravca djelovanja rezultante na toj je osi
- ako raspored intenziteta sila i probodišta njihovih pravaca ima dvije različite osi simetrije, probodište pravca djelovanja rezultante u sjecištu je tih osi

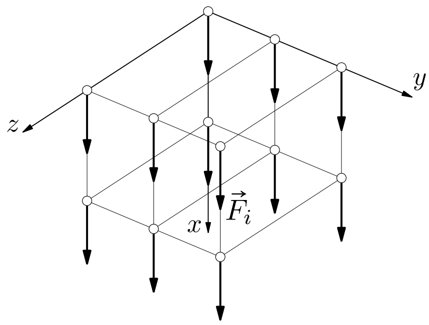
težište skupa materijalnih točaka: točka kojom prolazi rezultanta težinâ materijalnih točaka pri zaokretanju skupa tih točaka kao cjeline (dakle, tako da se njihove međusobne udaljenosti ne mijenjaju)

koordinatni sustav „vezan” za skup točaka → zaokretanje sustava u položaje u kojima su težine usporedne s koordinatnim osima:

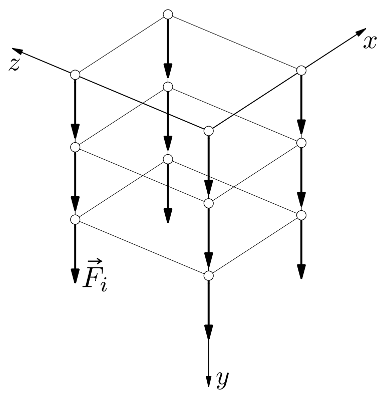
$$\vec{F}_i \parallel z: \qquad \boxed{x_T = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}}, \qquad \boxed{y_T = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}}$$



$$\vec{F}_i \parallel x: \qquad y_T = \frac{\sum_i y_i F_i}{\sum_i F_i}, \qquad \boxed{z_T = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i}}$$



$$\vec{F}_i \parallel y: \qquad x_T = \frac{\sum_i x_i F_i}{\sum_i F_i}, \qquad z_T = \frac{\sum_i z_i F_i}{\sum_i F_i}$$



vektorski izraz: $\quad \vec{r}_T = \dfrac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$

posebni slučajevi:

- postoji li ravnina simetrije skupa točaka i njihovih težina, težište je u toj ravnini
- postoje li dvije ravnine simetrije, težište je na njihovoj presječnici
- postoje li tri ravnine simetrije, težište je u njihovu sjecištu
- postoji li os simetrije, težište je na njoj
- postoji li središte simetrije, težište je u toj točki

težište skupa točaka izraženo pomoću težištâ podskupova:

$$x_T = \frac{x_{T,\mathrm{I}}\, F_\mathrm{I} + x_{T,\mathrm{II}}\, F_\mathrm{II}}{F_\mathrm{I} + F_\mathrm{II}} \qquad \text{itd.}$$

središte sistema sila na usporednim pravcima (sile koje ne moraju imati isti smisao djelovanja): točka kojom prolazi rezultanta $\vec{F}_R \neq \vec{0}$ sistema sila na usporednim pravcima („vezanih" za njihova hvatišta) pri zaokretanju svih sila za isti kut:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i F_i\, \vec{r}_i}{\sum_i F_i} \qquad \text{uz uvjet} \quad \sum_i F_i \neq 0$$

primjena: nalaženje težišta „nadopunjavanjem" — uvođenje „negativnih težina"