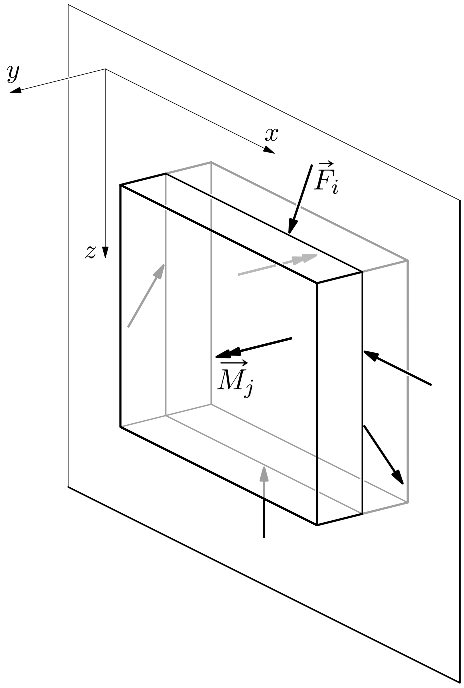
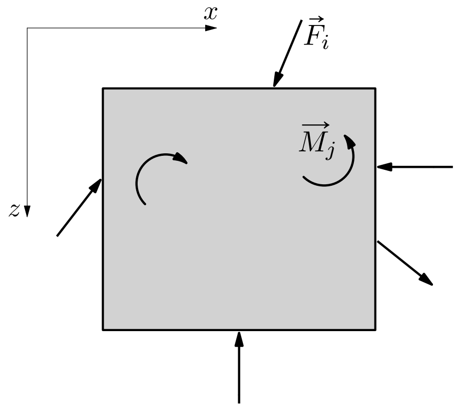
Statika tijela u ravnini

K. F.

$\vec{F}_i \in xz \;\; \forall i \quad \& \quad \overrightarrow{M}_j \perp xz \;\; \forall j$





uvjeti ravnoteže tijela na koje djeluju koncentrirane sile $\{\vec{F}_i\}_{i=0}^{n-1}$ i koncentrirani momenti $\{\overrightarrow{M}_j\}_{j=0}^{m-1}$ izraženi **u vektorskom obliku**:

1. iščezavanje zbroja svih sila:
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \;=\; \vec{0}$$

2. iščezavanje zbroja svih koncentriranih momenata i momenata svih sila u odnosu na bilo koju točku:
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{F_i/\mathsf{T}} \times \vec{F}_i \;+\; \sum_{j=1}^{m} \overrightarrow{M}_j \;=\; \vec{0} \qquad \left[\text{sažetije: } \sum_{k=1}^{n+m} \overrightarrow{M}_{/\mathsf{T},k} \;=\; \vec{0}\right]$$

osnovna formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže tijela u prostoru:

prva grupa jednadžbi izražava uvjet iščezavanja zbroja svih sila:
$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \;=\; 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} \;=\; 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} \;=\; 0$$

druga grupa izražava uvjet iščezavanja zbroja svih momenata u odnosu na ishodište:
$$\sum_{i=1}^{n} (y_i\,F_{i,z} - z_i\,F_{i,y}) \;+\; \sum_{j=1}^{m} M_{j,x} \;=\; 0 \qquad \left[\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} \;=\; 0\right],$$

$$\sum_{i=1}^{n}(z_i\,F_{i,x} - x_i\,F_{i,z}) \;+\; \sum_{j=1}^{m} M_{j,y} \;=\; 0 \qquad \left[\;\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} \;=\; 0\;\right],$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i\,F_{i,y} - y_i\,F_{i,x}) \;+\; \sum_{j=1}^{m} M_{j,z} \;=\; 0 \qquad \left[\;\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} \;=\; 0\;\right]$$

u ravnini xz identično su zadovoljene jednadžbe:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,y} \;=\; 0, \quad \text{jer iz } \vec{F}_i \in xz \text{ slijedi } F_{i,y} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} \;=\; 0 \quad \& \quad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,z} \;=\; 0, \quad \text{jer } \vec{F}_i \text{ sijeku } x \,\&\, z;$$

$$\text{uz to, iz } \vec{F}_i \perp y \text{ slijedi } \overrightarrow{M}_i \parallel y$$

$\Longrightarrow$ **osnovna formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže tijela u ravnini xz:**

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \;=\; 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,z} \;=\; 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(z_i\,F_{i,x} - x_i\,F_{i,z}) \;+\; \sum_{j=1}^{m} M_{j,y} \;=\; 0$$

moment sile $\vec{F}$ u odnosu na točku A u ravnini xz:

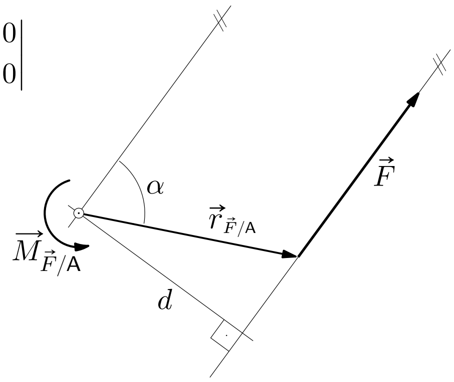
$$\overrightarrow{M}_{\vec{F}/\mathsf{A}} \;=\; \vec{r}_{\vec{F}/\mathsf{A}} \times \vec{F} \;=\; \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_{\vec{F}/\mathsf{A}} & 0 & z_{\vec{F}/\mathsf{A}} \\ F_x & 0 & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}\begin{vmatrix} 0 & z_{\vec{F}/\mathsf{A}} \\ 0 & F_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} x_{\vec{F}/\mathsf{A}} & z_{\vec{F}/\mathsf{A}} \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_{\vec{F}/\mathsf{A}} & 0 \\ F_x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \;(z_{\vec{F}/\mathsf{A}}\,F_x \;-\; x_{\vec{F}/\mathsf{A}}\,F_z)\,\vec{\jmath} \;=\; M_{F/\mathsf{A}}\;\vec{\jmath}$$

$$\|\overrightarrow{M}_{\vec{F}/\mathsf{A}}\| \;=\; \|\vec{r}_{\vec{F}/\mathsf{A}}\|\;\|\vec{F}\|\,\sin\alpha$$

$$= \;\big(\|\vec{r}_{\vec{F}/\mathsf{A}}\|\,\sin\alpha\big)\,\|\vec{F}\| \;=\; d\,|F|$$



u ravnini xy identično su zadovoljene jednadžbe:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,z} \;=\; 0, \quad \text{jer iz } \vec{F}_i \in xy \text{ slijedi } F_{i,z} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n+m} M_{k,x} \;=\; 0 \quad \& \quad \sum_{k=1}^{n+m} M_{k,y} \;=\; 0, \quad \text{jer iz } \vec{F}_i \perp z \;\&\; \vec{F}_i \text{ sijeku } x, y \text{ slijedi } \overrightarrow{M}_i \parallel z$$

$\Longrightarrow$ osnovna formulacija skalarnih uvjeta ravnoteže u ravnini xy:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,x} \;=\; 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,y} \;=\; 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i\,F_{i,y} - y_i\,F_{i,x}) \;+\; \sum_{j=1}^{m} M_{j,z} \;=\; 0$$

moment sile $\vec{F}$ u odnosu na točku A u ravnini xy:

$$\overrightarrow{M}_{\vec{F}/\mathsf{A}} \,=\, \vec{r}_{\vec{F}/\mathsf{A}} \times \vec{F} \,=\, \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_{\vec{F}/\mathsf{A}} & y_{\vec{F}/\mathsf{A}} & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} \,=\, (x_{\vec{F}/\mathsf{A}}\, F_y \,-\, y_{\vec{F}/\mathsf{A}}\, F_x)\, \vec{k} \,=\, M_{F/\mathsf{A}}\, \vec{k}$$

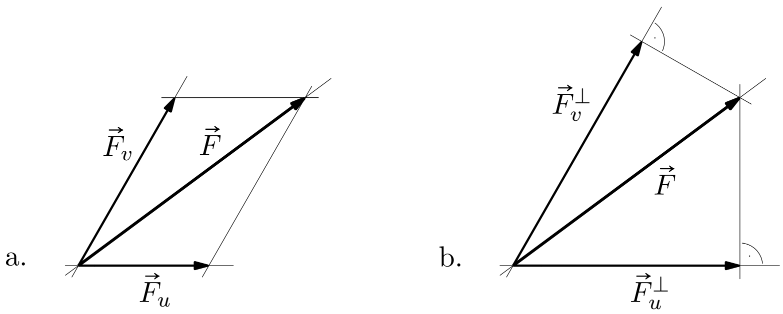
ostale formulacije skalarnih uvjeta ravnoteže u ravnini:

- [nekorektno postavljeni uvjeti: postoji sila čiji doprinos svim uvjetima iščezava]
- varijacija osnovne formulacije:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,u} \,=\, 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{i,v} \,=\, 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{/\mathsf{A},k} \,=\, 0$$

  - ◇ u, v — bilo koje dvije osi koje nisu međusobno paralelne; A — bilo koja točka

    [u protivnom, iščezava doprinos sile koja prolazi točkom okomito na osi (obrazložite!)]
  - ◇ $F_{i,u}, F_{i,v}$ — skalarne komponente sile $\vec{F}_i$ (sl. a.) ili njezine projekcije na osi (sl. b.)



- uvjeti iščezavanja zbroja projekcija sila i dva zbroja momenata u odnosu na dvije točke:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{i,u} \,=\, 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{/\mathsf{A},k} \,=\, 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{/\mathsf{B},k} \,=\, 0$$

  - ◇ os u ne smije biti okomita na spojnicu točaka A i B

    [u protivnom, doprinos sile na spojnici iščezava (obrazložite!)]

- uvjeti iščezavanja tri zbroja momenata u odnosu na tri točke:

$$\sum_{k=1}^{n+m} M_{/\mathsf{A},k} \,=\, 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{/\mathsf{B},k} \,=\, 0, \qquad \sum_{k=1}^{n+m} M_{/\mathsf{C},k} \,=\, 0$$

  - ◇ točke A, B i C ne smiju ležati na istomu pravcu

    [u protivnom, doprinos sile na tom pravcu iščezava (obrazložite!)]

svaka skupina uvjeta sadrži tri jednadžbe ⇒ mogu se izračunati tri nepoznanice:

- sila na zadanomu pravcu djelovanja — jedna nepoznanica: vrijednost sile
- sila u zadanoj točki (hvatištu) — dvije nepoznanice:
  - vrijednost sile i nagib pravca djelovanja ili
  - vrijednosti njezinih dviju pogodno odabranih komponenata ili projekcija na dva pogodno odabrana pravca

- sila na nepoznatom pravcu — tri nepoznanice:
  vrijednost sile i koeficijenti jednadžbe pravca $a\,x + b\,y + c = 0$
  [budući da je jednadžbama $ax + by + c = 0$ i $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ zadan isti pravac, neovisna su samo dva koeficijenta]
- moment (u odnosu na točku) — jedna nepoznanica: njegova vrijednost

tipovi zadataka (uravnoteženje ili statička ekvivalencija):

- [ako za barem jednu os za projekciju sila ili za barem jednu točku za određivanje momenta iščezavaju doprinosi svih nepoznanica (prazan uvjet ravnoteže), zadatak nema jedinstveno rješenje (obrat ne vrijedi — *statička neodređenost*)]

I. osnovni zadaci:

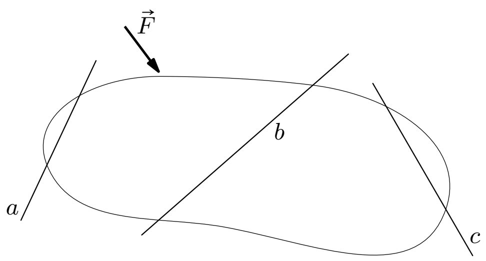
1. odrediti vrijednosti triju sila na zadanim pravcima
   - ◇ pravci ne smiju prolaziti istom točkom ni biti međusobno paralelni
     [prazni uvjeti:
     sjecište u jednoj točki — zbroj momenata u odnosu na sjecište
     paralelni pravci — zbroj projekcija sila na os okomitu na pravce]
2. odrediti vrijednosti dviju sila na zadanim pravcima i vrijednost momenta
   - ◇ pravci ne smiju biti međusobno paralelni
     [prazan uvjet: zbroj projekcija sila na os okomitu na pravce]

II. dodatni/izvedeni zadaci:

1. odrediti silu u zadanoj točki i vrijednost sile na zadanomu pravcu
   - ◇ pravac ne smije prolaziti točkom
     [prazan uvjet: zbroj momenata u odnosu na točku]
2. odrediti silu u zadanoj točki i vrijednost momenta
   - ◇ bezuvjetno rješivo

I.1.: uravnoteženje tijela silama na pravcima *a*, *b* i *c*

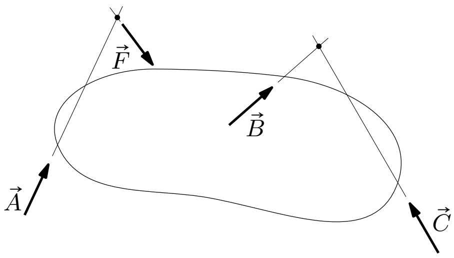
primjer zadatka:



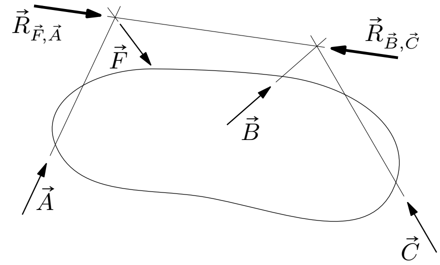
Culmannov postupak:

grafički postupak uravnoteženja četiriju sila u ravnini, pri čemu je jedna sila poznata, a tri nepoznate sile djeluju na zadanim pravcima: četiri su sile u ravnoteži ako rezultanta bilo koje dvije sile leži na pravcu određenu rezultantom preostalih dviju sila — *Culmannovu pravcu* (sl. cb. i cc.), te ako su te dvije rezultante jednake po veličini, a suprotne po smislu djelovanja (sl. ce.)

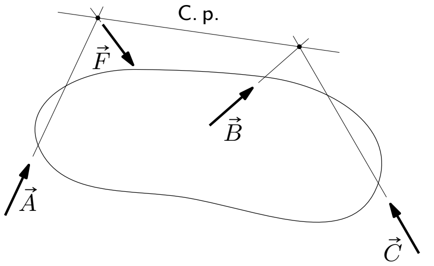
ca.



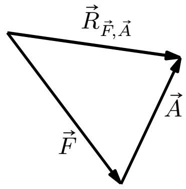
cb.



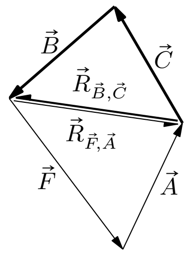
cc.



cd.



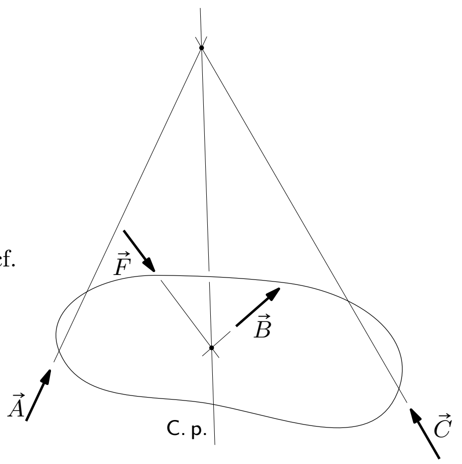
ce.



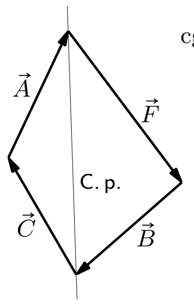
[crteži na slikama cb. i cc. nazivaju se *planovima položajâ*, a crteži na slikama cd. i ce. *planovima silâ* ili, češće, *poligonima silâ*]

rješenje s drugačijim izborom parova točaka:

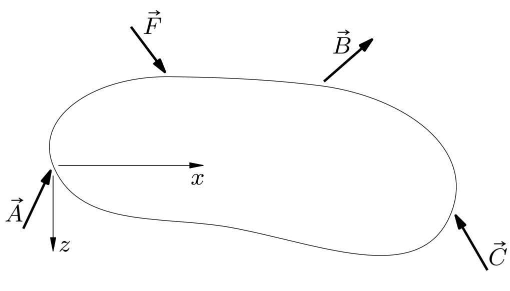
cf.

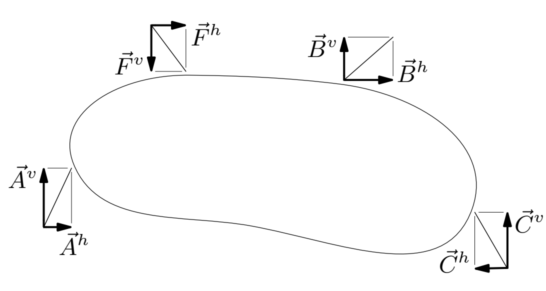


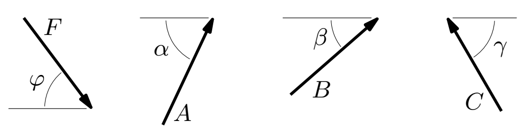
cg.



primjena osnovne formulacije skalarnih uvjeta ravnoteže:







$\sum_i F_{i,x} = 0 : \qquad A^h + B^h - C^h + F^h = 0,$

$\sum_i F_{i,z} = 0 : \qquad -A^v - B^v - C^v + F^v = 0,$

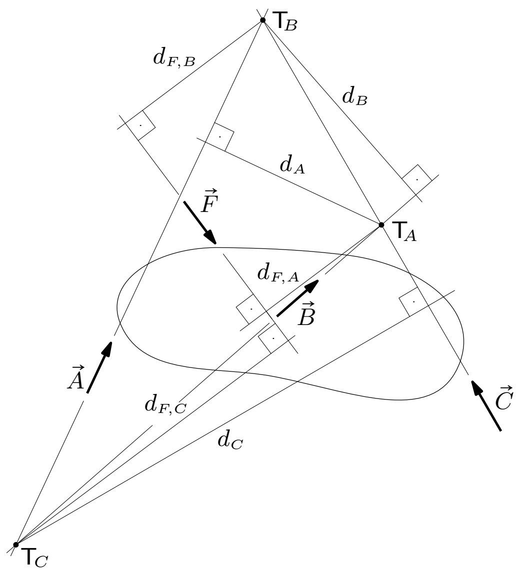
$\sum_k M_{k,y} = 0 : \qquad d^h_{\mathsf{B}}\, B^v - d^v_{\mathsf{B}}\, B^h + d^h_{\mathsf{C}}\, C^v - d^v_{\mathsf{C}}\, C^h - d^h_{\mathsf{F}}\, F^v - d^v_{\mathsf{F}}\, F^h = 0$

[ishodište na pravcu djelovanju sile A]

$$\cos\alpha\, A + \cos\beta\, B - \cos\gamma\, C = -\cos\varphi\, F,$$
$$-\sin\alpha\, A - \sin\beta\, B - \sin\gamma\, C = -\sin\varphi\, F,$$
$$(d^h_{\mathsf{B}} \cos\beta - d^v_{\mathsf{B}} \sin\beta)\, B + (d^h_{\mathsf{C}} \cos\gamma - d^v_{\mathsf{C}} \sin\gamma)\, C = (d^h_{\mathsf{F}} \cos\varphi + d^v_{\mathsf{F}} \sin\varphi)\, F$$

Ritterov postupak:

analitički ili grafoanalitički postupak izračunavanja vrijednostî sila na tri zadana pravca; potrebne se jednadžbe izvode iz uvjetâ ravnoteže momenata u odnosu na točke u kojima se sijeku po dva zadana pravca, tako da je u svakoj jednadžbi jedina nepoznanica vrijednost sile na trećemu pravcu



$\sum M_{/\mathsf{T}_A} = 0 :$

$-d_A\, A + d_{F,A}\, F = 0$

$\Longrightarrow \qquad A = \dfrac{d_{F,A}}{d_A}\, F$

$\sum M_{/\mathsf{T}_B} = 0 :$

$d_B\, B + d_{F,B}\, F = 0$

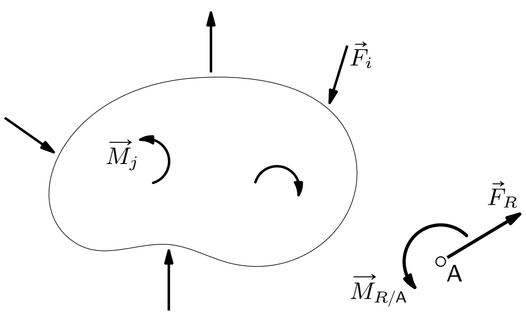
$\Longrightarrow \qquad B = -\dfrac{d_{F,B}}{d_B}\, F$

$\sum M_{/\mathsf{T}_C} = 0 :$

$d_C\, C - d_{F,C}\, F = 0$

$\Longrightarrow \qquad C = \dfrac{d_{F,C}}{d_C}\, F$

II.2.: rezultirajuće djelovanje u točki A



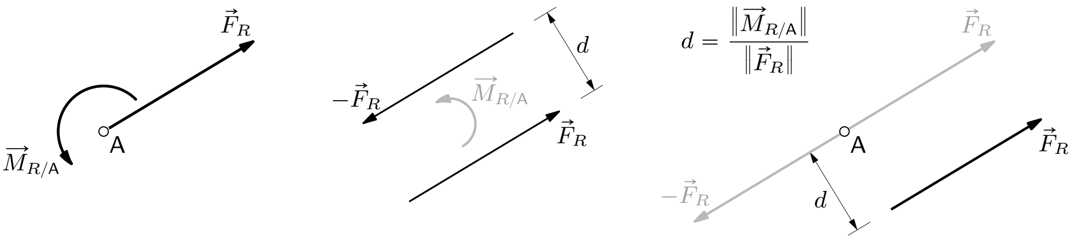
$$F_{R,x} = \sum_{i=1}^{n} F_{i,x}, \qquad F_{R,z} = \sum_{i=1}^{n} F_{i,z}$$

$$F_R = \sqrt{F_{R,x}^2 + F_{R,z}^2}$$

$$M_{R/\mathsf{A}} = \sum_{i=1}^{n} M_{F_i/\mathsf{A}} + \sum_{j=1}^{m} M_j$$

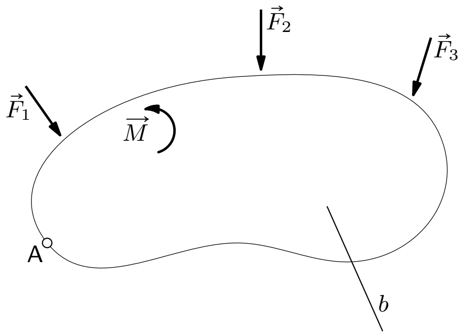
mogućnosti:

- $F_R \neq 0$ & $M_{R/\mathsf{A}} = 0$ — $\vec{F}_R$ je *rezultanta* koja djeluje na pravcu kroz točku A
- $F_R = 0$ & $M_{R/\mathsf{A}} \neq 0$ — vrijednost $M_R = M_{R/\mathsf{A}}$ rezultirajućega momenta ne ovisi o izboru točke A
- $F_R = 0$ & $M_{R/\mathsf{A}} = 0$ — sustav sila i momenata je *statički neutralan* (*uravnotežen*)
- $F_R \neq 0$ & $M_{R/\mathsf{A}} \neq 0$ — može se pronaći rezultanta „pomakom” sile $\vec{F}_R$ s pravca kroz točku A na paralelan pravac:



II.1.: uravnoteženje tijela silom u točki A i silom na pravcu *b*

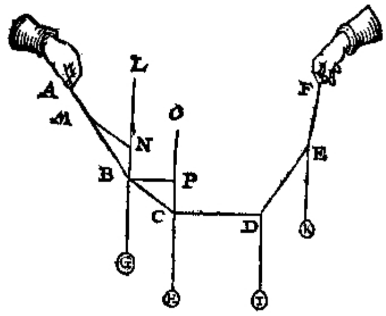
primjer zadatka:



verižni poligon:

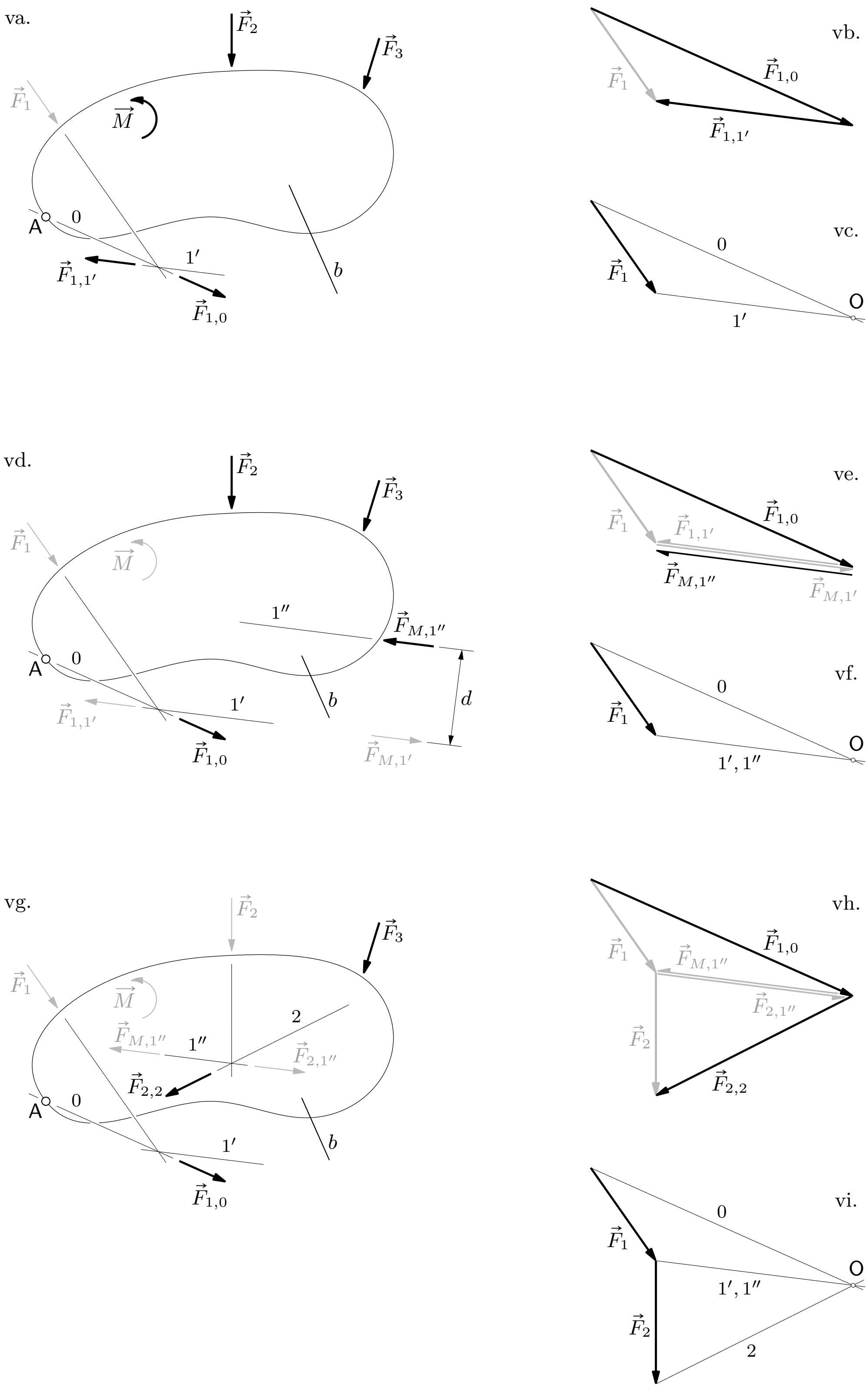
grafički postupak kojim se ravninski sustav sila i koncentriranih momenata uravnotežuje ili svodi na drugi, jednostavniji sustav:

- fizička interpretacija verižnoga poligona u *Počelima umijeća vaganja* Simona Stevina [²1608.]:

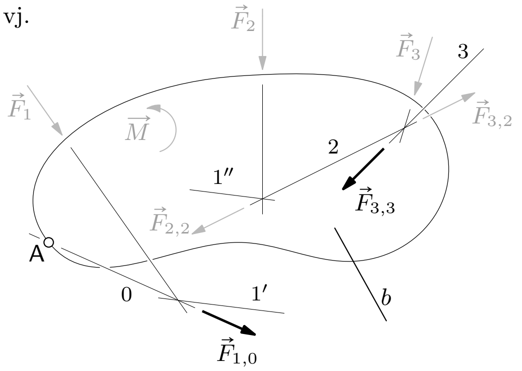


- postupak se provodi tako da se svaka zadana sila rastavlja u dvije komponente, a svaki zadani koncentrirani moment zamjenjuje spregom sila, pri čemu te komponente i sile tih spregova biramo tako da jedna komponenta svake sile ili jedna sila svakoga sprega ponište jednu komponentu neke druge sile ili jednu silu nekoga drugog sprega; primjerice, silu $\vec{F}_1$ rastavljamo u komponente $\vec{F}_{1,0}$ i $\vec{F}_{1,1'}$ (poligon sila na sl. vb. na sljedećoj stranici) na pravcima 0 i $1'$ (plan položaja na sl. va.), a moment $\overrightarrow{M}$ zamjenjujemo spregom sila $\vec{F}_{M,1'} = -\vec{F}_{1,1'}$ i $\vec{F}_{M,1''}$ (sl. ve.) na pravcima $1'$ i $1''$ čija je udaljenost $d = \|\overrightarrow{M}\|/\|\vec{F}_{1,1'}\|$ (sl. vd.); sile $\vec{F}_{1,1'}$ i $\vec{F}_{M,1'}$ djeluju na pravcu $1'$, jednakih su intenzitetâ, a suprotnoga smisla djelovanja, pa će se međusobno poništiti;

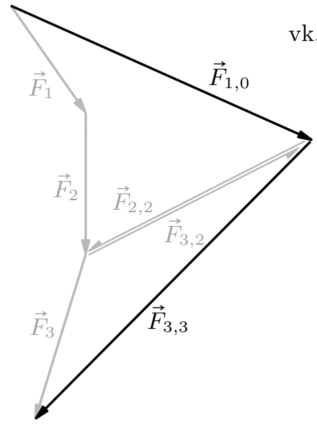
- konstruiranjem verižnoga poligona cijeli se sustav zadanih sila i momenata svodi na dvije sile (u primjeru su to $\vec{F}_{1,0}$ i $\vec{F}_{3,3}$, sl. vj. i vk.) koje djeluju na prvoj i posljednjoj njegovoj stranici (stranicama 0 i 3);
  - ◇ sijeku li se te dvije stranice, kao u primjeru, njihovim sjecištem prolazi pravac djelovanja *rezultante* zadanoga sustava (sl. vm.), a nagib toga pravca te intenzitet i smisao djelovanja rezultante određeni su u poligonu sila zbrojem pripadnih sila ($\vec{F}_{1,0}$ i $\vec{F}_{3,3}$, sl. vn.);
  - ◇ ako su prva i posljednja stranica verižnoga poligona paralelne, a poligon je sila pritom zatvoren, tako da se prva i posljednja njegova zraka poklapaju, zadani se sustav sila i momenata svodi na dvije sile intenziteti kojih su jednaki, smisao djelovanja suprotan, a pravci djelovanja različiti, ali paralelni, drugim riječima, na spreg sila;
  - ◇ poklope li se, uz zatvoreni poligon sila, prva i posljednja stranica verižnoga poligona, zadani se sustav svodi na dvije sile jednakih intenziteta, ali suprotnih orijentacija, koje djeluju na istomu pravcu, pa se poništavaju; prema tome, sustav je statički neutralan;
- sile, koje se u zadatku uravnoteženja traže, sastavljaju se od po dvije komponente, pri čemu se u svakom paru komponenata jedna zadaje tako da poništi jednu od dvije sile na koje svedene zadane sile i momenti: $\vec{B}_3 = -\vec{F}_{3,3}$ na stranici 3 verižnoga poligona i $\vec{A}_0 = -\vec{F}_{1,0}$ na stranici 0; da bi cijeli sustav bio u ravnoteži, preostale dvije komponente $\vec{A}_4$ i $\vec{B}_4$ moraju djelovati na istomu pravcu, na stranici 4 verižnog poligona koja prolazi točkom A i sjecištem pravca b i stranice 3 (sl. vo.), i moraju imati jednake intenzitete, a suprotan smisao djelovanja (sl. vp.); i na kraju, sl. vr.: zbrajanje komponenata daje uravnotežujuće sile koje zatvaraju poligon sila


va.
vb.
vc.
vd.
ve.
vf.
vg.
vh.
vi.
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_3$
$\vec{M}$
A
O
0
$1'$
$1''$
$1', 1''$
2
b
d
$\vec{F}_{1,0}$
$\vec{F}_{1,1'}$
$\vec{F}_{M,1'}$
$\vec{F}_{M,1''}$
$\vec{F}_{2,1''}$
$\vec{F}_{2,2}$

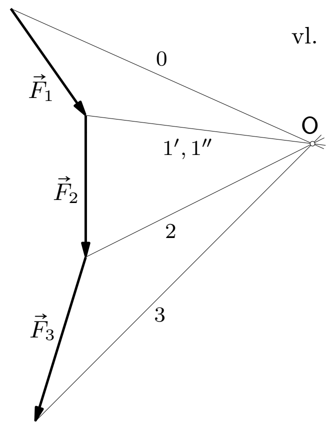
vj.


$\vec{F}_2$
$\vec{F}_3$
3
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_{3,2}$
$\overrightarrow{M}$
2
$1''$
$\vec{F}_{3,3}$
$\vec{F}_{2,2}$
A
0
$1'$
b
$\vec{F}_{1,0}$

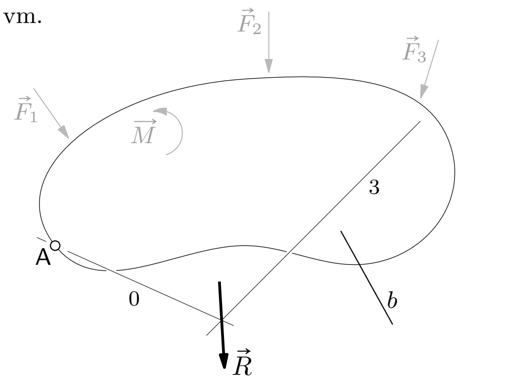
vk.


$\vec{F}_{1,0}$
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\vec{F}_{2,2}$
$\vec{F}_{3,2}$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_{3,3}$

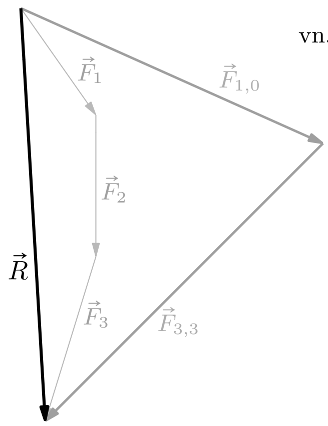
vl.


0
$\vec{F}_1$
O
$1', 1''$
$\vec{F}_2$
2
3
$\vec{F}_3$

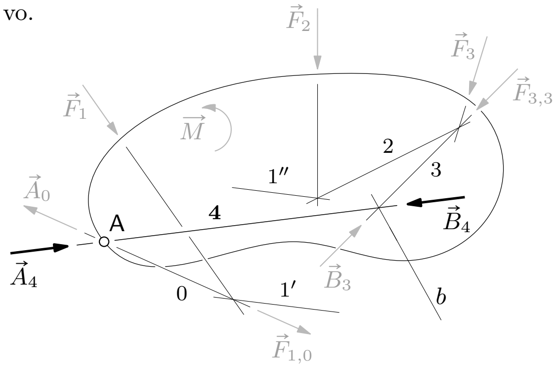
vm.


$\vec{F}_2$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_1$
$\overrightarrow{M}$
3
A
0
b
$\vec{R}$

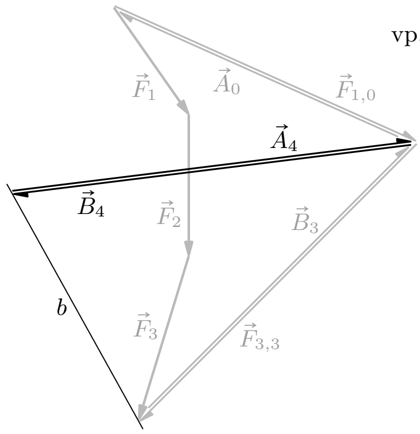
vn.


$\vec{F}_1$
$\vec{F}_{1,0}$
$\vec{F}_2$
$\vec{R}$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_{3,3}$

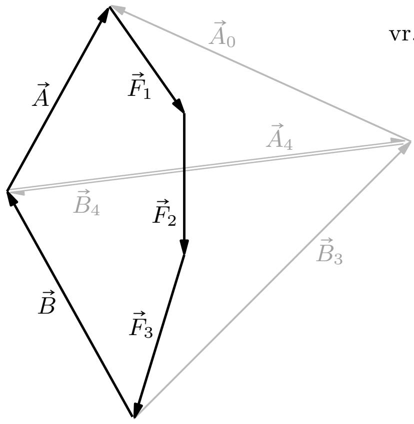
vo.


$\vec{F}_2$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_{3,3}$
$\vec{F}_1$
$\vec{M}$
$\vec{A}_0$
A
$\vec{A}_4$
$\vec{B}_4$
$\vec{B}_3$
$\vec{F}_{1,0}$
0
$1'$
$1''$
2
3
4
b

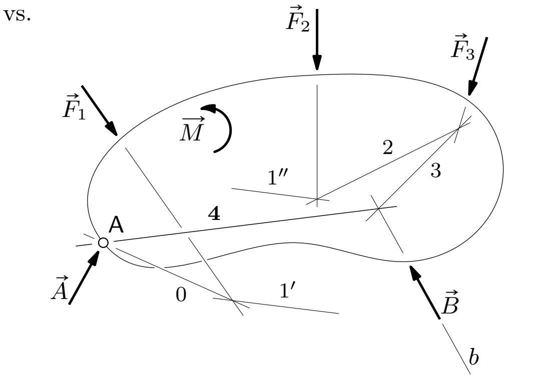
vp.


$\vec{F}_1$
$\vec{A}_0$
$\vec{F}_{1,0}$
$\vec{A}_4$
$\vec{B}_4$
$\vec{F}_2$
$\vec{B}_3$
b
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_{3,3}$

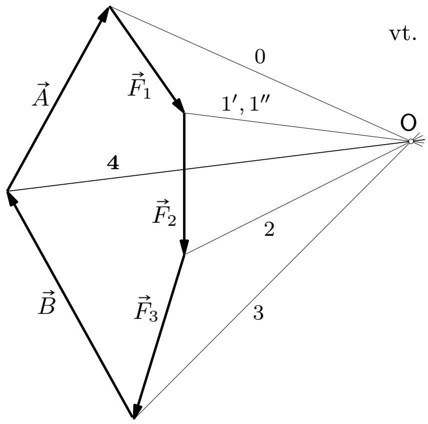
vr.


$\vec{A}_0$
$\vec{A}$
$\vec{F}_1$
$\vec{A}_4$
$\vec{B}_4$
$\vec{F}_2$
$\vec{B}_3$
$\vec{B}$
$\vec{F}_3$

vs.


$\vec{F}_2$
$\vec{F}_3$
$\vec{F}_1$
$\vec{M}$
$1''$
2
3
A
4
$\vec{A}$
0
$1'$
$\vec{B}$
b

vt.


0
$\vec{A}$
$\vec{F}_1$
$1', 1''$
O
4
$\vec{F}_2$
2
$\vec{B}$
$\vec{F}_3$
3