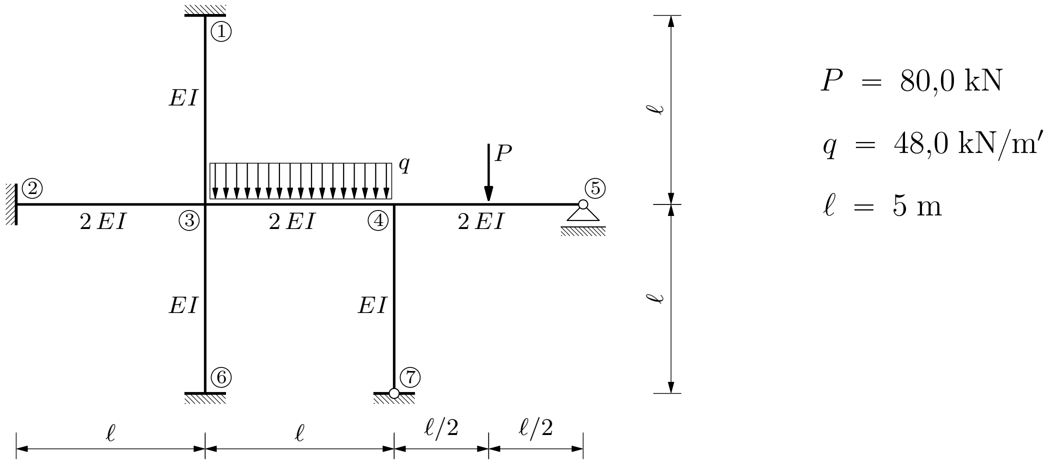
Crossov postupak

Primjer proračuna nepomičnoga sistema

Za sistem prikazan na slici 1. izračunat ćemo vrijednosti momenata savijanja na krajevima štapova.

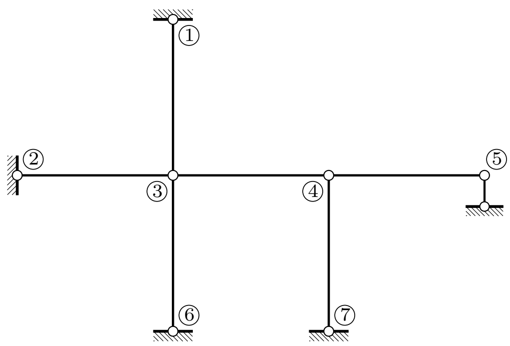


Slika 1.

Lako je vidjeti da je zadani sistem nepomičan. Ponajprije, zglobna shema na slici 2. sadrži tri „slobodna" čvora (3, 4 i 5) i sedam štapova, pa je

$$S_{\min} = n_{\check{c}} \cdot 2 - n_{\check{s}} = 3 \cdot 2 - 7 = -1;$$

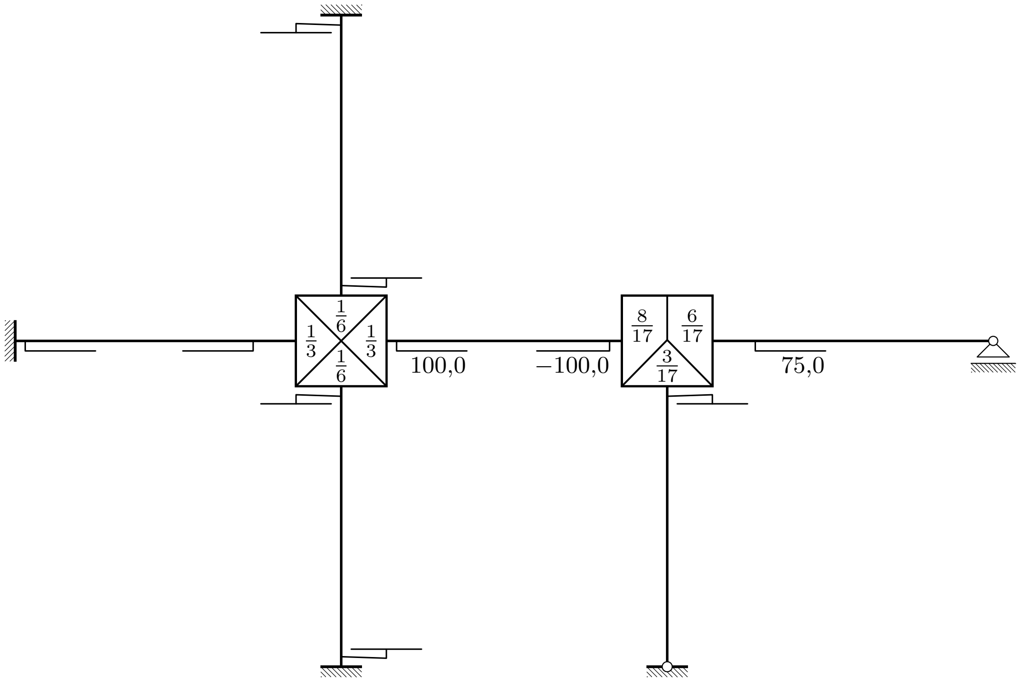
dakle, stupnjevi slobode najvjerojatnije nedostaju. Nadalje, čvor 3 te sheme spojen je s podlogom dvama štapovima osi kojih se ne poklapaju (možemo uzeti štapove $\{2,3\}$ i $\{1,3\}$ ili štapove $\{2,3\}$ i $\{3,6\}$, ali ne i štapove $\{1,3\}$ i $\{3,6\}$*); čvor 4 je s nepomičnim čvorom 3 i s podlogom spojen dvama štapovima različitih osi; čvor 5 je … &td.



Slika 2.

* Zglobna je shema u stvari statički neodređena, pa je sistem djelomice rješiv — vrijednosti uzdužnih sila u štapovima $\{1,3\}$ i $\{3,6\}$ ne mogu se izračunati iz jednadžbi ravnoteže.

Proračun provodimo na shemi sistema prikazanoj na slici 3. Prije početka proračuna upisujemo u kvadratiće ucrtane u čvorove razdjelne koeficijente prema priključenim štapovima, a na krajeva štapova vrijednosti pripadnih momenata upetosti, ako postoje.



Slika 3.

Greda $\{3,4\}$ obostrano je upeta, pa su prema izrazima za vrijednosti momenata upetosti na stranici 7 *Bilježaka s predavanja*

$$\overline{M}_{3,4} \;=\; -\overline{M}_{4,3} \;=\; \frac{q\,\ell^2}{12} \;=\; 100{,}0\ \text{kNm}.$$

I za jednostrano upetu gredu $\{4,5\}$ možemo vrijednost momenta upetosti izračunati pomoću izrazâ za vrijednosti momenata upetosti obostrano upete grede:

$$\overline{M}^{(c)}_{4,5} \;=\; \overline{M}_{4,5} - \frac{1}{2}\,\overline{M}_{5,4} \;=\; \frac{P\,\ell}{8} - \frac{1}{2}\left(-\frac{P\,\ell}{8}\right) \;=\; \frac{3\,P\,\ell}{16} \;=\; 75{,}0\ \text{kNm}.$$

Ako je $k = EI/\ell$, koeficijenti su krutosti stupova

$$k_{\{1,3\}} \;=\; k_{\{3,6\}} \;=\; k_{\{4,7\}} \;=\; k,$$

dok su koeficijenti krutosti greda

$$k_{\{2,3\}} \;=\; k_{\{3,4\}} \;=\; k_{\{4,6\}} \;=\; 2k.$$

Koeficijent je krutosti čvora 3 tada

$$\begin{aligned} k_3 \;&=\; 4\,k_{\{2,3\}} \;+\; 4\,k_{\{3,6\}} \;+\; 4\,k_{\{3,4\}} \;+\; 4\,k_{\{1,3\}} \\ &=\; 4\,(2k) \;+\; 4k \;+\; 4\,(2k) \;+\; 4k \;=\; 24k, \end{aligned}$$

pa su razdjelni koeficijenti u tom čvoru

$$\mu_{3,2} = \frac{4\,k_{\{2,3\}}}{k_3} = \frac{4\,(2k)}{24k} = \frac{1}{3}, \qquad \mu_{3,6} = \frac{4\,k_{\{3,6\}}}{k_3} = \frac{4k}{24k} = \frac{1}{6},$$

$$\mu_{3,4} = \frac{4\,k_{\{3,4\}}}{k_3} = \frac{4\,(2k)}{24k} = \frac{1}{3}, \qquad \mu_{3,1} = \frac{4\,k_{\{1,3\}}}{k_3} = \frac{4k}{24k} = \frac{1}{6};$$

njihov je zbroj

$$\mu_{3,3} + \mu_{3,6} + \mu_{3,4} + \mu_{3,1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Koeficijent je krutosti čvora 4

$$\begin{aligned} k_4 &= 4\,k_{\{3,4\}} + 3\,k_{\{4,7\}} + 3\,k_{\{4,5\}} \\ &= 4\,(2k) + 3k + 3\,(2k) = 17k; \end{aligned}$$

razdjelni su koeficijenti u tom čvoru

$$\mu_{4,3} = \frac{4\,k_{\{3,4\}}}{k_3} = \frac{4\,(2k)}{17k} = \frac{8}{17}, \qquad \mu_{4,7} = \frac{3\,k_{\{4,7\}}}{k_3} = \frac{3k}{17k} = \frac{3}{17},$$

$$\mu_{4,5} = \frac{3\,k_{\{4,5\}}}{k_3} = \frac{3\,(2k)}{17k} = \frac{6}{17},$$

a zbroj im je

$$\mu_{4,3} + \mu_{4,7} + \mu_{4,5} = \frac{8}{17} + \frac{3}{17} + \frac{6}{17} = 1.$$

Na čvor 3 djeluje neuravnoteženi moment vrijednost kojega je

$$\mathfrak{M}_3 = -\overline{M}_{3,4} = -100{,}0\ \mathrm{kNm},$$

dok je vrijednost neuravnoteženoga momenta koji djeluje na čvor 4

$$\mathfrak{M}_4 = -\overline{M}_{4,3} - \overline{M}_{4,5} = 100{,}0 - 75{,}0 = 25{,}0\ \mathrm{kNm}.$$

Kako je $\mathfrak{M}_3$ po apsolutnoj vrijednosti veća, prvo ćemo uravnotežiti čvor 3. Uravnotežujemo ga zaokretanjem za odgovarajući kut: zbroj vrijednosti momenata kojima će pri zaokretu priključenih krajeva štapovi djelovati na čvor 3 mora biti $-\mathfrak{M}_3 = 100{,}0$ [kNm], a to pak znači da zbroj vrijednostî momenata na priključenim krajevima štapova mora biti $-100{,}0$. Drugim riječima, moment vrijednosti $-100{,}0$ treba raspodijeliti na priključene krajeve štapova množenjem razdjelnim koeficijentima:

$$\Delta M_{3,2}^{(1)} = \mu_{3,2} \cdot (-100{,}0) = \tfrac{1}{3} \cdot (-100{,}0) = -33{,}3,$$

$$\Delta M_{3,6}^{(1)} = \mu_{3,6} \cdot (-100{,}0) = \tfrac{1}{6} \cdot (-100{,}0) = -16{,}7,$$

$$\Delta M_{3,4}^{(1)} = \mu_{3,4} \cdot (-100{,}0) = \tfrac{1}{3} \cdot (-100{,}0) = -33{,}3,$$

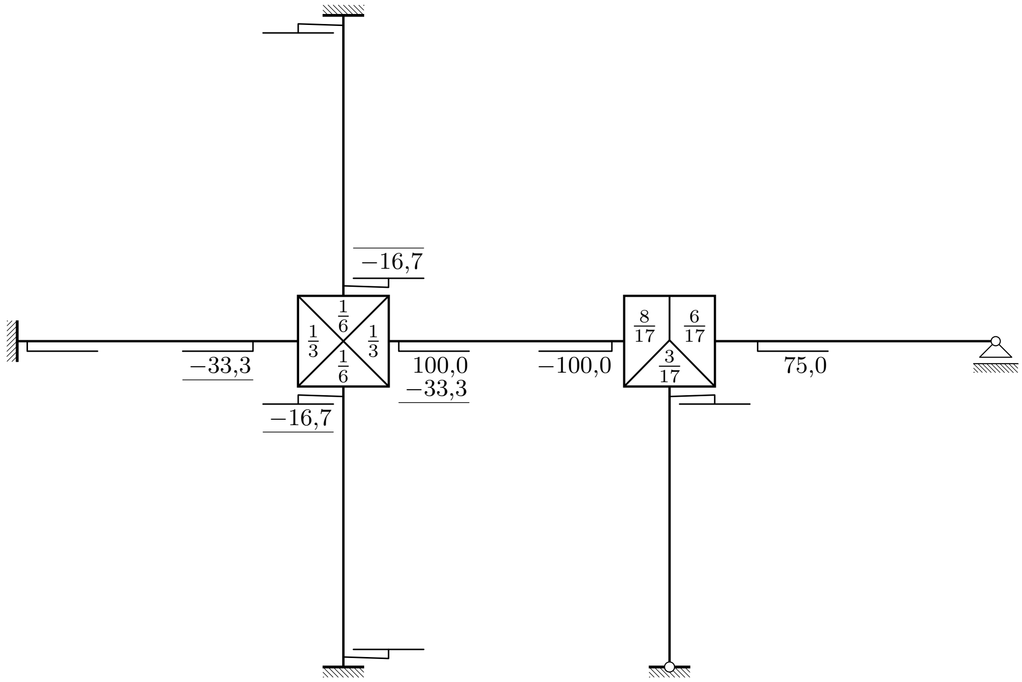
$$\Delta M_{3,1}^{(1)} = \mu_{3,1} \cdot (-100{,}0) = \tfrac{1}{6} \cdot (-100{,}0) = -16{,}7;$$

zbroj je razdjeljnih koeficijenata 1 (u svakom je čvoru, ne samo u čvoru 3), pa će zbroj vrijednosti raspodijeljenih momenata biti −100:

$$\Delta M_{3,2}^{(1)} + \Delta M_{3,6}^{(1)} + \Delta M_{3,4}^{(1)} + \Delta M_{3,1}^{(1)} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \cdot (-100{,}0)$$
$$1 \cdot (-100{,}0) = -33{,}3 + (-16{,}7) + (-33{,}3) + (-16{,}7).$$

Vrijednosti raspodijeljenih momenata upisujemo na krajeve 3 odgovarajućih štapova (slika 4.). Upisane vrijednosti podcrtavamo[†], označavajući tako da je čvor u ravnoteži — zbroj svih vrijednosti iznad crta[‡] jednak je nuli:

$$100{,}0 + (-33{,}3) + (-16{,}7) + (-33{,}3) + (-16{,}7) = 0{,}0.$$



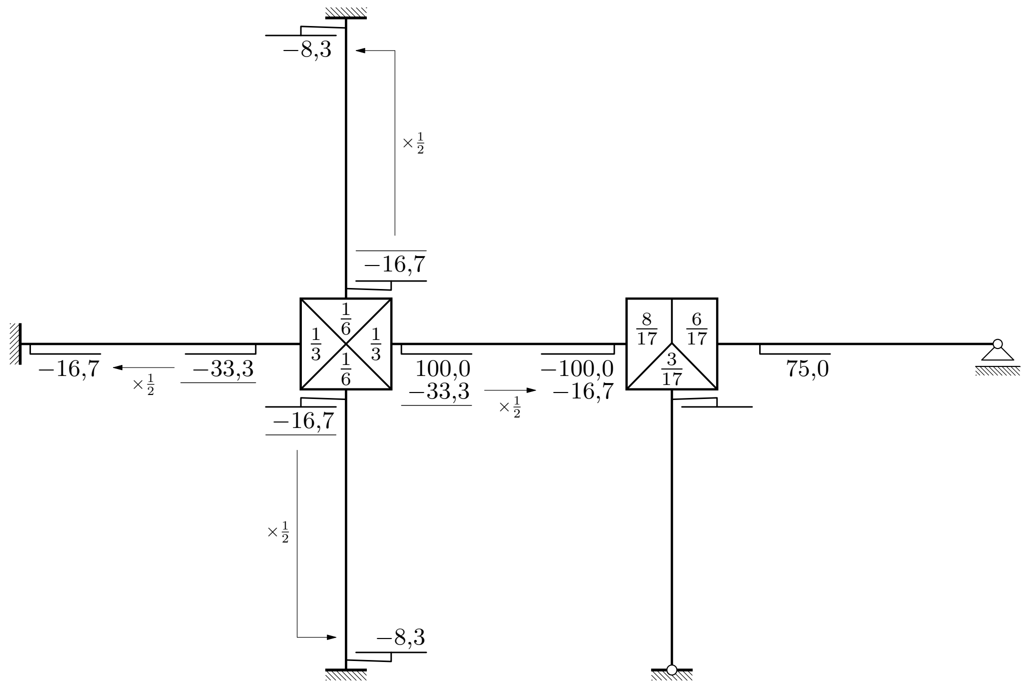
Slika 4.

Zaokret jednoga kraja štapa uzrokuje moment i na drugom kraju, pa momente vrijednostî kojih su jednake polovinama vrijednostî momenata na krajevima 3 prenosimo na druge krajeve (slika 5.).

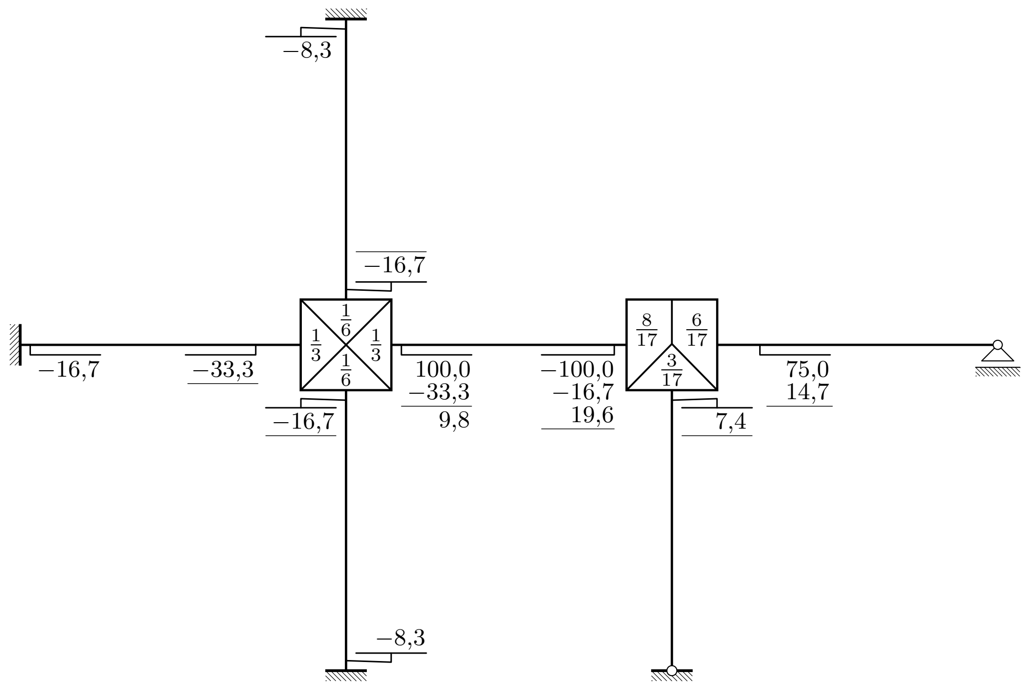
Na čvor 4 djeluje sada neuravnoteženi moment vrijednosti

$$\mathfrak{M}_4^{(1)} = \mathfrak{M}_4 - \tfrac{1}{2}\,\Delta M_{3,4}^{(1)} = -\overline{M}_{4,3} - \overline{M}_{4,5} - \tfrac{1}{2}\,\Delta M_{3,4}^{(1)}$$
$$= 100{,}0 - 75{,}0 + 16{,}7 = 41{,}7.$$

† Niz vrijednosti momenata na dnu (na kraju 3) stupa $\{1, 3\}$ pisat ćemo odozdo prema gore, pa će linije „podcrtavanja” biti iznad vrijednosti.
‡ … na stupu $\{1, 3\}$ vrijednost ispod crte.



Slika 5.



Slika 6.

Čvor uravnotežujemo „dodavanjem” momenta (uzrokovanoga zokretanjem čvora 4) vrijednost kojega je $-41{,}7$, što znači da na u čvor priključene krajeve štapova razdjeljujemo moment vrijednosti 41,7 (slika 6., vrijednosti iznad crta):

$$\begin{aligned}
\Delta M_{4,3}^{(1)} &= \mu_{4,3} \cdot 41{,}7 = \tfrac{8}{17} \cdot 41{,}7 = 19{,}6,\\
\Delta M_{4,7}^{(1)} &= \mu_{4,7} \cdot 41{,}7 = \tfrac{3}{17} \cdot 41{,}7 = 7{,}4,\\
\Delta M_{4,5}^{(1)} &= \mu_{4,5} \cdot 41{,}7 = \tfrac{6}{17} \cdot 41{,}7 = \underline{14{,}7}\\
& \hphantom{= \mu_{4,5} \cdot 41{,}7 = \tfrac{6}{17} \cdot 41{,}7 = } 41{,}7.
\end{aligned}$$

Krajevi 7 i 5 štapova $\{4,7\}$ i $\{4,5\}$ zglobno su spojeni s podlogom, pa se na njih ništa ne prenosi, dok se moment čije je vrijednosti polovina vrijednosti $\Delta M_{4,3}^{(1)}$ prenosi s kraja 4 na kraj 3 štapa $\{3,4\}$ (ista slika, vrijednost ispod crte).

Nastavak proračuna prikazan je na slici 7.

Čvor 3 po drugi put uravnotežujemo razdiobom momenta vrijednosti $-9{,}8$ na priključene krajeve štapova (vrijednost prenesenoga momenta na kraj 3 štapa $\{3,4\}$ jest 9,8; zbroj ostalih vrijednosti u čvoru 3 [vrijednosti iznad crta], kao što smo rekli, jednaka je nuli):

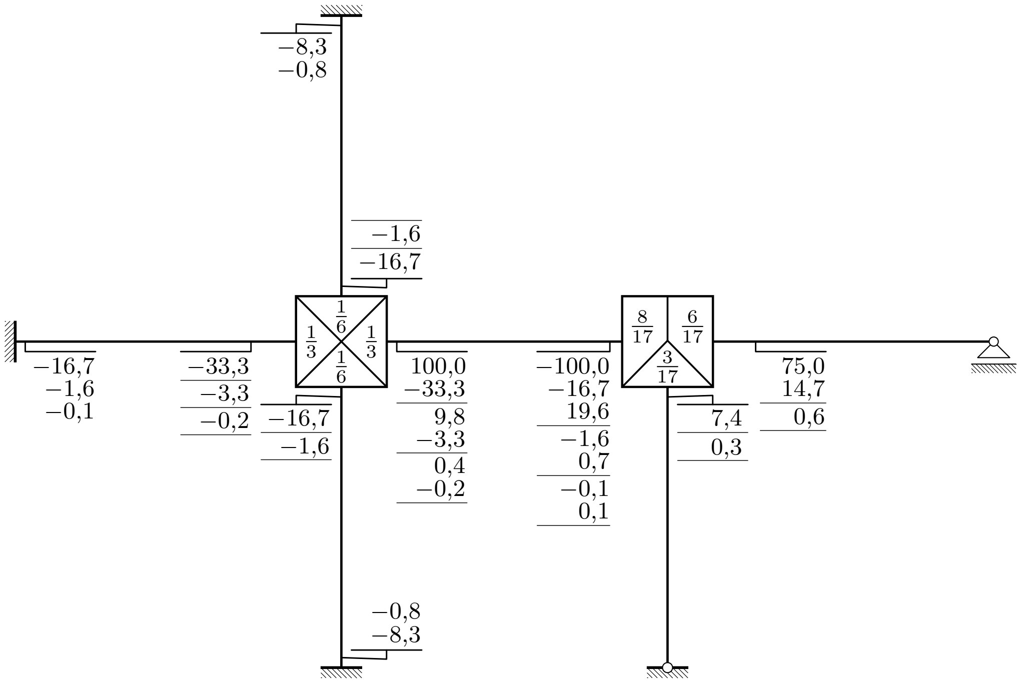
$$\begin{aligned}
\Delta M_{3,2}^{(2)} &= \tfrac{1}{3} \cdot (-9{,}8) = -3{,}3,\\
\Delta M_{3,6}^{(2)} &= \tfrac{1}{6} \cdot (-9{,}8) = -1{,}6,\\
\Delta M_{3,4}^{(2)} &= \tfrac{1}{3} \cdot (-9{,}8) = -3{,}3,\\
\Delta M_{3,1}^{(2)} &= \tfrac{1}{6} \cdot (-9{,}8) = \underline{-1{,}6;}\\
& \hphantom{= \tfrac{1}{6} \cdot (-9{,}8) = } -9{,}8.
\end{aligned}$$

Na druge krajeve prenosimo momente raspolovljenih vrijednosti; posebno, na kraj 4 štapa $\{3,4\}$ prenosimo moment vrijednosti $\frac{1}{2}\,\Delta M_{3,4}^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot (-3{,}3) = -1{,}6$.

Napomena o zaokruživanju vrijednosti. Prenesena je vrijednost $\frac{1}{2} \cdot (-3{,}3) = -1{,}65$, ali vrijednosti momenata zapisujemo s jednom znamenkom iza decimalnoga zareza, pa vrijednost $-1{,}65$ treba zaokružiti. Obično se brojevi, ako im je posljednja znamenka 5, zaokružuju po apsolutnoj vrijednosti „naviše”, pa bi zaokružena vrijednost trebala biti $-1{,}7$. Međutim, ako se u iteracijskome postupku uvijek zaokružuje „naviše”, pogreške se zaokruživanja gomilaju. Stoga je dobro zaokruživati naizmjence „naviše” i „naniže”. U jednom od prethodnih koraka zaokružili smo $\frac{1}{2} \cdot (-33{,}3) = -16{,}65$, po apsolutnoj vrijednosti „naviše” u $-15{,}7$, pa sad zaokružujemo „naniže”.

Čvor 4 uravnotežujemo razdiobom momenta vrijednosti 1,6:

$$\begin{aligned}
\Delta M_{4,3}^{(2)} &= \tfrac{8}{17} \cdot 1{,}6 = 0{,}8,\\
\Delta M_{4,7}^{(2)} &= \tfrac{3}{17} \cdot 1{,}6 = 0{,}6,\\
\Delta M_{4,5}^{(2)} &= \tfrac{6}{17} \cdot 1{,}6 = \underline{0{,}3}\\
& \hphantom{= \tfrac{6}{17} \cdot 1{,}6 = } 1{,}7.
\end{aligned}$$



Slika 7.

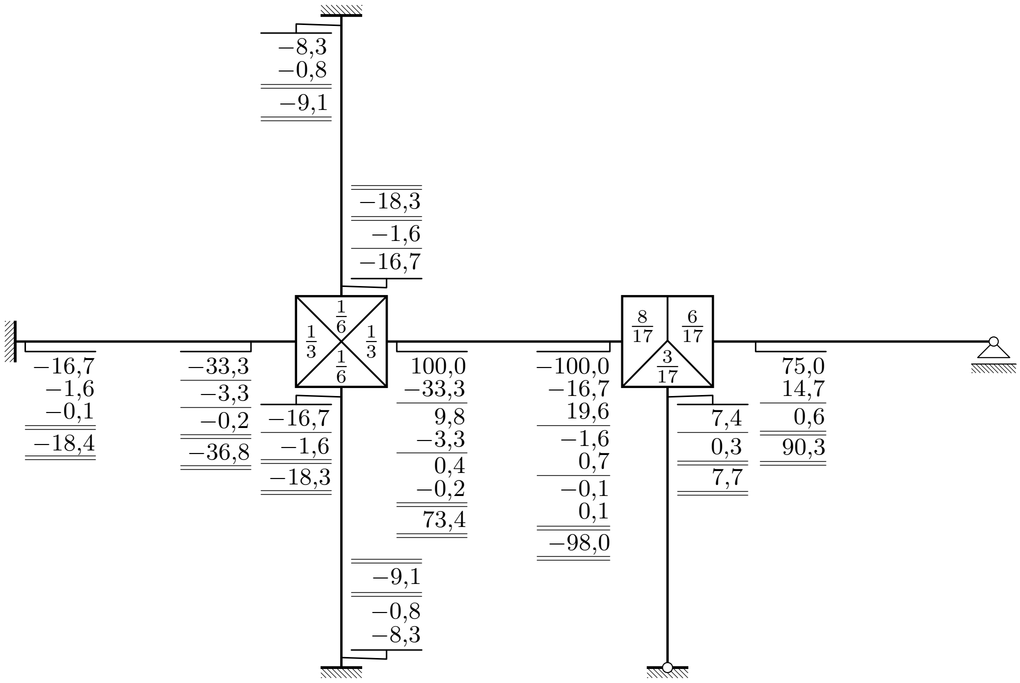
Zbog pogrešaka zaokruživanja zbroj je raspodijeljenih vrijednosti 1,7. „Prilagodili” smo stoga najveću vrijednost i uzeli $\Delta M_{4,3}^{(2)} = 0{,}7$.

Na kraj 3 štapa $\{3,4\}$ prenosimo vrijednost $\frac{1}{2}\,\Delta M_{4,3}^{(2)} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}7 = 0{,}4$ (zaokružujemo „naviše”), pa za uravnoteženje čvora 3 treba na priključene krajeve štapova raspodijeliti moment vrijednosti $-0{,}4$. Budući da vrijednosti momenata zaokružujemo na jednu znamenku iza decimalnoga zareza, na krajeve greda stavljamo momente kojima je vrijednost $-0{,}2$, a na stupove ništa, jer su razdjelni koeficijenti za grede dvostruko veći od razdjelnih koeficijenata za stupove. (Drugi je, jednako ispravan način razdiobe staviti momente vrijednosti $-0{,}1$ na sve priključene krajeve.)

Na krajeve 2 i 4 greda $\{2,3\}$ i $\{3,4\}$ prenosimo momente vrijednosti $\frac{1}{2}\cdot(-0{,}2) = -0{,}1$. Uz zapis vrijednosti momenata s jednom znamenkom iza decimalnoga zareza možemo čvor 4 uravnotežiti jedino tako da moment vrijednosti 0,1 dodamo na kraj 4 štapa $\{3,4\}$, za koji je razdjelni koeficijent najveći. Time je iteracijski postupak uravnoteženja čvorova završen.

Konačne vrijednosti momenata zbrojevi su svih na pojedinim krajevima štapova upisanih vrijednosti. Ti su zbrojevi na slici 8. istaknuti upisom izmedu parova dvostrukih linija.

[Domaća zabava: nacrtajte momentni dijagram!]



−8,3
−0,8
−9,1
−18,3
−1,6
−16,7
1/6
1/3
1/3
1/6
8/17
6/17
3/17
−16,7
−1,6
−0,1
−18,4
−33,3
−3,3
−0,2
−36,8
−16,7
−1,6
−18,3
100,0
−33,3
9,8
−3,3
0,4
−0,2
73,4
−100,0
−16,7
19,6
−1,6
0,7
−0,1
0,1
−98,0
7,4
0,3
7,7
75,0
14,7
0,6
90,3
−9,1
−0,8
−8,3

Slika 8.