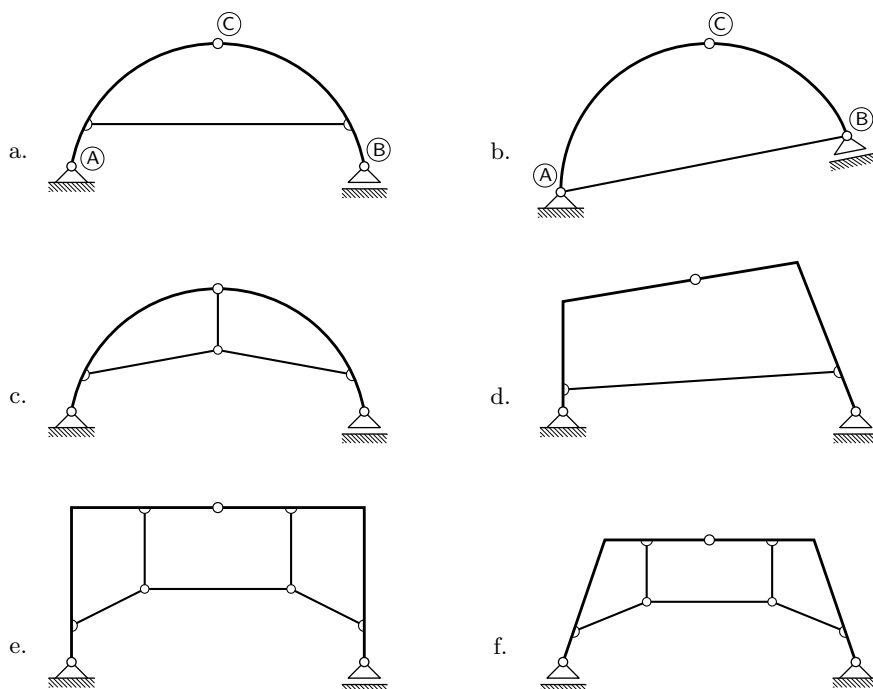


Lukovi i okviri sa zategama

1. Analitički postupak

Lukovi i okviri sa zategama konstrukcijski su sistemi sastavljeni, kao i „obični” trozglobni nosači, od dvaju punostjenih ili rešetkastih diskova. No, dok su u trozglobnim nosačima ti diskovi međusobno povezani samo zglibom, tako da je dobiveni sklop iznutra geometrijski promjenjiv i da su za geometrijsku nepromjenjivost u odnosu na podlogu potrebne četiri veze s podlogom, u sistemima sa zategama diskovi su zglibom i jednim zglibnim štapom (slike 1.a., b. i d.) ili zglibom i sistemom zglibnih štapova (slike c., e. i f.) spojeni u iznutra geometrijski nepromjenjivu figuru, pa se geometrijska nepromjenjivost u odnosu na podlogu može ostvariti trima vanjskim vezama, jednim zglibnim nepomičnim i jednim zglibnim pomičnim ležajem (pri čemu je najčešće mogući pomak horizontalan).



Slika 1.

Za određivanje vrijednosti reakcija stoga su dovoljne tri jednadžbe ravnoteže nosača kao cjeline — postupamo kao da je riječ o nosaču s jednim punostjenim diskom (odjeljak 4.1.5.). Primjerice, za nosač sa slike 2. jednadžba ravnoteže projekcija sila na os x

$$\sum_{AB} F_x = 0 : \quad A^h + F^h = 0$$

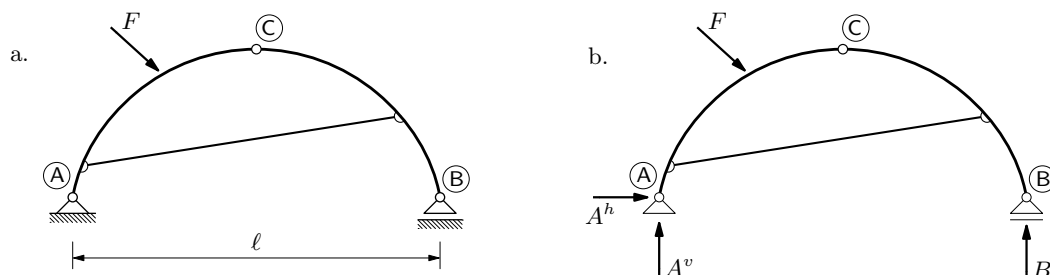
neposredno daje vrijednost A^h horizontalne komponente reakcije u nepomičnom zglibnom ležaju, dok su jedine nepoznanice u jednadžbama ravnoteže momenata oko točaka B i A vrijednost A^v vertikalne komponente reakcije u nepomičnom zglibnom ležaju i vrijednost B reakcije

u pomičnom zglobnom ležaju:

$$\sum_{\widehat{AB}} M_{/B} = 0 : \quad -\ell A^v + (\ell - x_F) F^v - z_F F^h = 0,$$

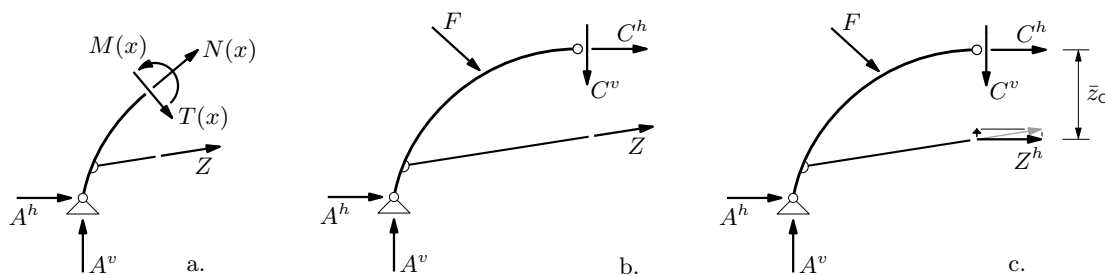
$$\sum_{\widehat{AB}} M_{/A} = 0 : \quad -x_F F^v - z_F F^h + \ell B = 0$$

(u jednadžbama ravnoteže momenata pišemo uvijek duljine, a ne koordinate).



Slika 2.

Da izdvojimo dio nosača za izračunavanje sila u nekom presjeku između točaka u kojima je zatega spojena s diskovima presjeci treba i zategu. Na izdvojeni dio tada djeluju četiri sile: uzdužna i poprečna sila te moment savijanja u presjeku i sila u zategi (slika 3.a.). Tri jednadžbe ravnoteže izdvojenoga dijela stoga nam nisu dovoljne za nalaženje njihovih vrijednosti.



Slika 3.

Presjek kroz zglob omogućava smanjivanje broja nepoznanica — zglob ne prenosi moment, pa je u njemu $M_C = 0$. Jednadžbe ravnoteže momenata oko zgloba za dio prikazan na slici 3.b.,

$$\sum_{\widehat{AC}} M_{/C} = 0 : \quad -x_C A^v + z_C A^h + (x_C - x_F) F^v + (z_C - z_F) F^h + d_C Z = 0,$$

gdje je d_C udaljenost zgloba od zatega (mjerena po okomici spuštenuj iz zgloba na zategu), daje vrijednost Z sile u zategi. Rastavimo li silu \vec{Z} u točki na vertikali ispod zgloba u horizontalnu i vertikalnu komponentu (slika c.), bit će

$$\sum_{\widehat{AC}} M_{/C} = 0 : \quad -x_C A^v + z_C A^h + (x_C - x_F) F^v + (z_C - z_F) F^h + \bar{z}_C Z^h = 0,$$

S poznatom vrijednošću sile u zategi možemo se vratiti u odabrani „opći” presjek. Sustav je jednadžbi za izračunavanje vrijednosti uzdužne i poprečne sile

$$\sum_{\widehat{As}} F_x = 0 : \quad N(x) \cdot \cos \vartheta(x) + T(x) \cdot \sin \vartheta(x) + A^h + Z^h = 0,$$

$$\sum_{\widehat{As}} F_z = 0 : \quad -N(x) \cdot \sin \vartheta(x) + T(x) \cdot \cos \vartheta(x) - A^v - Z^v = 0.$$

Ako se presjek nalazi desno od hvatišta sile \vec{F} , u jednadžbe će ući i vrijednosti njezinih komponenta.

Jednadžbe je ravnoteže momenata u odnosu na točku $\vec{r}(x)$

$$\sum_{\widehat{Ax}} M_{/r(x)} = 0 : \quad z(x) A^h - x A^v + d(x) Z + M(x) = 0$$

ili

$$\sum_{\widehat{Ax}} M_{/r(x)} = 0 : \quad z(x) A^h - x A^v + \bar{z}(x) Z^h + M(x) = 0.$$

I sada, ako je presjek desno od hvatišta sile \vec{F} , dodati treba vrijednost njezina momenta.

2. Primjena principa superpozicije

Opći je izraz za moment savijanja u po volji odabranom presjeku s između zglobova koji spajaju zategu s diskovima

$$M(x) = -z(x) A^h + x A^v - \sum_{i \in \widehat{Ax}} M_{i/r(x)} - \sum_{j \in \widehat{Ax}} M_j - \bar{z}(x) Z^h;$$

$M_{i/r(x)}$ su vrijednosti momenata zadanih sila \vec{F}_i u odnosu na točku $\vec{r}(x)$, dok su M_j vrijednosti zadanih momenata (neke sile \vec{F}_i mogu biti rezultante pripadnih dijelova distribuiranih sila, a neki M_j vrijednosti rezultirajućih momenata dijelova distribuiranih momenata na luku \widehat{Ax}). Umjesto $\bar{z}(x) Z^h$ možemo pisati $d(x) Z$.

Djeluje li na nosač samo vertikalno opterećenje, horizontalna komponenta sile u nepomičnom zglobovom ležaju jedina je horizontalna sila, pa je $A^h = 0$. Vrijednosti momenata zadanih sila umnoški su vrijednosti tih sila i razlika apscise presjeka i apscisa njihovih hvatišta, pa je

$$M(x) = x A^0 - \sum_{i \in \widehat{Ax}} (x - x_i) F_i - \sum_{j \in \widehat{Ax}} M_j - \bar{z}_i(x) Z_i^h; \quad (1)$$

umjesto A^v pisali smo A^0 . Uz to smo umjesto $\bar{z}(x) Z^h$ stavili $\bar{z}_i(x) Z_i^h$ tako da možemo postupak primijeniti i na nosače sa sistemima zatega, poput nosača na gornjem dijelu slike 4.a.

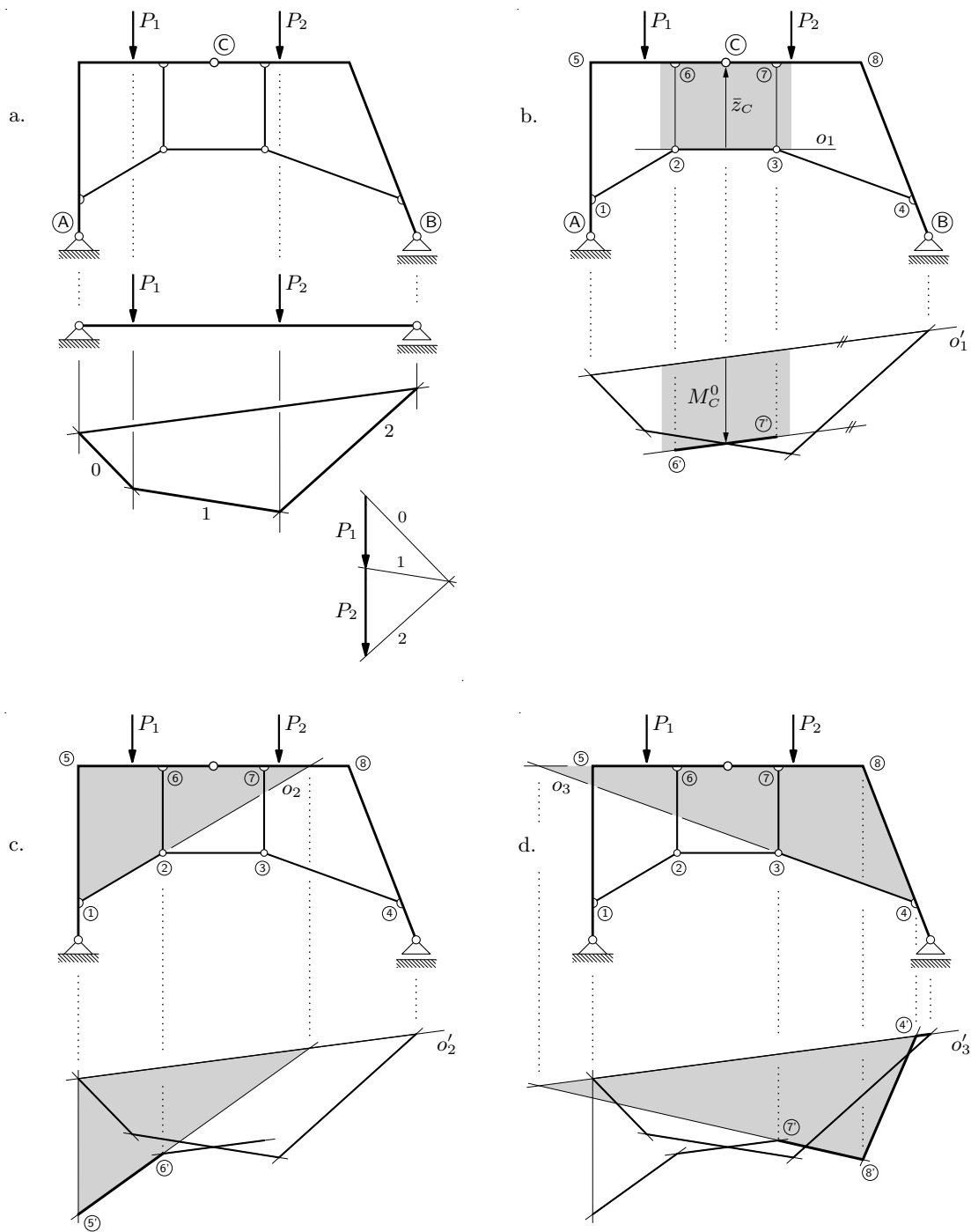
Izraz za $M(x)$ razlikuje od izraza za vrijednost $M^0(x)$ momenta savijanja u presjeku x slobodno oslonjene grede istoga raspona s istim tlocrtnim rasporedom opterećenja (srednji dio slike 4.a.) po zadnjemu pribrojniku kojega u izrazu za $M^0(x)$ nema, pa je

$$M(x) = M^0(x) - \bar{z}_i(x) Z_i^h. \quad (2)$$

Prema tome, vrijednost momenta savijanja u presjeku nosača sa zategom ili sistemom zatega možemo izračunati tako da od vrijednosti momenta u odgovarajućem presjeku slobodno oslonjene grede oduzmemo vrijednost momenta sile u zategi u odnosu na težište presjeka.

Za nosač u našem primjeru na donjem je dijelu slike 4.a. prikazan dijagram M^0 , nacrtan kao verižni poligon. Zaključna linija verižnoga poligona os je momentnoga dijagrama; ona nije horizontalna, ali to u postupku ništa ne mijenja, a vrijednosti momenata i sada očitavamo po vertikalnim pravcima.

Izdvojimo li dio nosača da nađemo vrijednost momenta savijanja u nekom presjeku dijela 5–6 grede 5–6–7–8, presjeći ćemo i zategu 1–2. Izdvojimo li pak dio za presjek na dijelu 6–7, sjeći ćemo zategu 2–3, za presjek na dijelu 7–8 zategu 3–4. Na svakom će dijelu, prema tome, moment izazivati sila u drugoj zategi, u skladu s indeksom i u zadnjem pribrojniku izrazâ (1) i (2).



Slika 4.

A to znači da ćemo na svakom dijelu pripadni dijagram momenata konstruirati drugim afinim preslikavanjem, no ta će preslikavanja ipak biti povezana.

Osi svi afinih preslikavanja bit će pravci na kojima su zatege, jer su momenti dijagrame kojih crtamo momenti zbog sila u njima. A budući da je riječ o momentima u odnosu na težišta poprečnih presjeka, preslikavaju se osi grede i stupova nosača.

Niz afinih preslikavanja započinjemo na dijelu na kojemu se preslikavanje može zadati poznatim parom pridruženih točaka. To su, naravno, zglobov C i točka M_C^0 dijagrama M^0 . Prvo će

afino preslikavanje, dakle, biti preslikavanje kojemu je os u polju nosača pravac na kojemu je zatega 2–3; tu ćemo os označiti s o_1 . U polju momenata os o'_1 nulta je linija dijagrama M^0 .

Sila u zategi 2–3 izaziva momente u dijelu 6–7 grede nosača. Os grede usporedna je sa zategom, to jest s osi afinosti o_1 (osi u polju nosača), pa će pravac koji je njezina slika biti usporedan s osi o'_1 (osi u polju momenata), a kako os grede prolazi zglobovom C, njezina će slika proći točkom M_C^0 . Slika dijela 6–7 dio je slike osi grede između njezinih sjecišta $6'$ i $7'$ sa zrakama afinosti kroz točke 6 i 7.

U dijelovima grede 5–6 i 7–8 momente izazivaju sile u zategama 1–2 i 3–4. Drugo će afino preslikavanje biti preslikavanje kojemu je os u polju nosača — označit ćemo je s o_2 — pravac na kojemu je zatega 1–2; u polju momenata os o'_2 ponovno je zaključna linija verižnoga poligona. Par točaka kojima je to preslikavanje zadano su točka 6 i točka $6'$ koja joj je pridružena u prvom preslikavanju. Naime, kako je u točki 6 sistem zatega s gredom spojen zglobovom, momenti savijanja u gredi neposredno lijevo i neposredno od te točke jednaki su. Par točaka 6 i $6'$ povezuje, dakle, drugo preslikavanje s prvim.

Za nalaženje slike osi grede 5–6–7–8 treba nam još jedna točka. Uzet ćemo sjecište osi grede s osi afinosti; ta je točka sama sebi pridružena. Doduše, budući da smo razdvojili osi afinosti u polju nosača i u polju momenata, razdvojeno je i sjecište osi grede i osi o_2 od sjecišta slike osi grede i osi o'_2 . Slika dijela 5–6 dio je slike osi grede između njezina sjecišta $5'$ sa zrakom afinosti kroz točku 5 i točke $6'$.

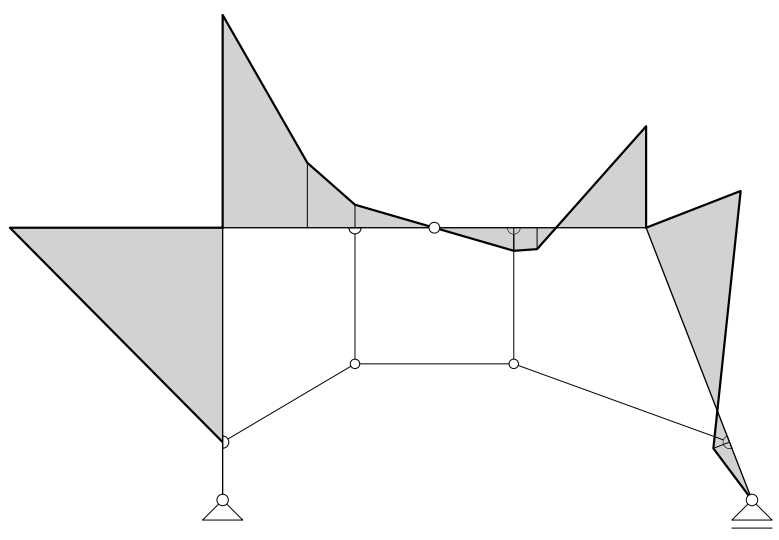
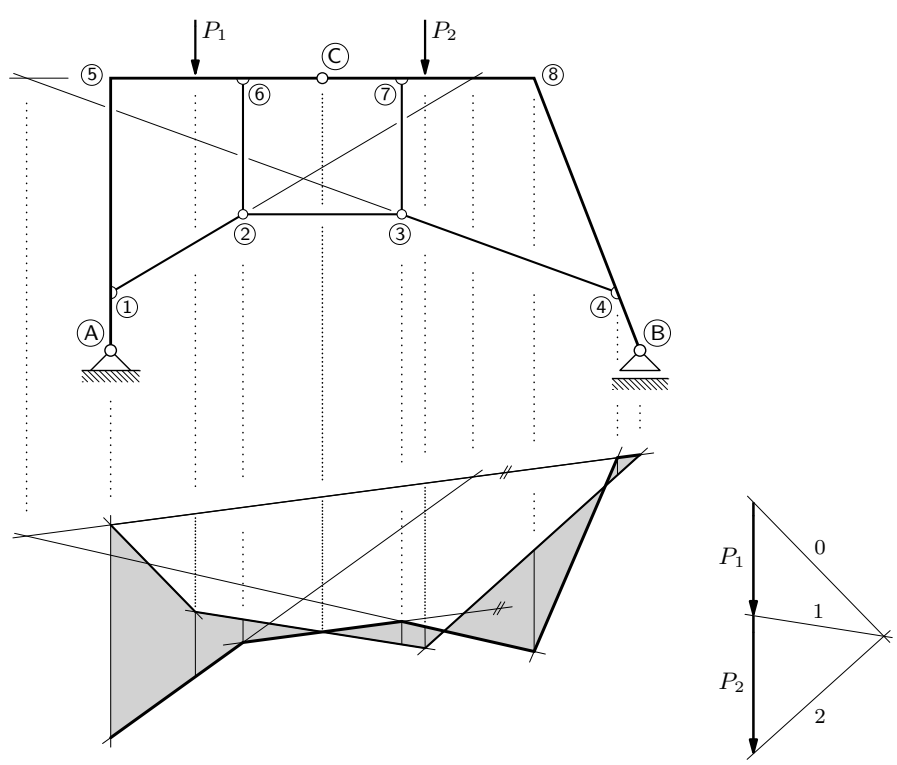
Treće je afino preslikavanje preslikavanje kojemu je os u polju nosača — označena s o_3 — pravac na kojemu je zatega 3–4, dok je u polju momenata os o'_3 ponovno zaključna linija verižnoga poligona. Preslikavanje je zadano parom točaka 7 i $7'$. Sliku osi grede 5–6–7–8 i sada nalazimo pomoću sjecišta osi grede i osi afinosti.

Sila u zategi 3–4 izaziva i momente u dijelu 8–4 desnoga kosog stupa, pa treba naći i njegovu sliku. Čvor 8 zajednička je točka grede i stupa, pa moment u stupu neposredno ispod toga čvora mora biti jednak momentu u gredi neposredno lijevo od njega. Slika stupa stoga mora proći točkom $8'$. Os stupa siječe os o_3 u točki 4, pa će točka $4'$ biti u sjecištu osi o'_3 i zrake afinosti.

Nismo do sada spomenuli, ali jasno je da i sila u zategi 1–2, osim u dijelu 5–6 grede, izaziva momente u stupu — u dijelu 1–5 lijevoga, vertikalnog stupa. Pravac na kojemu je os stupa poklapa se sa zrakom afinosti, pa će se s njom poklopiti i njegova slika. Kako su zrake afinosti vertikalne i kako vrijednosti momenata očitavamo po vertikalnim pravcima, momentni dijagram na vertikalnom stupu ne možemo nacrtati. No, znamo da je moment na vrhu stupa jednak momentu na početku grede. Budući da sila u zategi jedina uzrokuje moment u tom stupu (reakcija je vertikalna, pa djeluje na osi stupa), u točki 1 u kojoj je zatega 1–2 zglobno spojena sa stupom moment iščezava, a između te točke i vrha stupa njegova se vrijednost mijenja linearno. Ispod točke 1 momenata nema.

Dijagram momenata na lijevom stupu možemo nacrtati na „klasičan” način, nanoseći vrijednosti momenata okomito na njegovu os.

Na donjem dijelu slike 5. prikazan je takav „klasičan” momentni dijagram na cijelom nosaču. Vrijednosti momenata prenesene su na okomice na dijelove osi nosača s dijagrama na gornjem dijelu slike, nacrtanoga primjenom afinih preslikavanja ponovno, preglednosti i jasnoće radi na jednoj slici.



Slika 5.