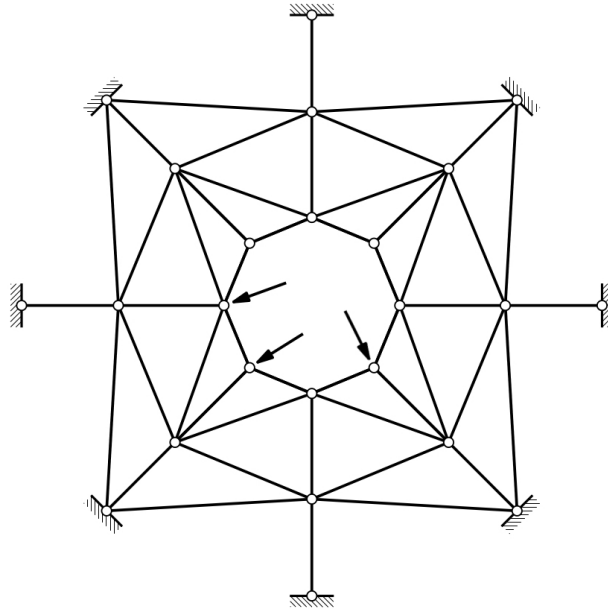


Označite štapove prikazane Schwedlerove kupole u kojima će za zadano opterećenje vrijednosti sila biti različite od nule.



Prije rješavanja zadatka prisjetit ćemo se nekoliko postavaka o ravnoteži čvora prostorne rešetke:

1. Ako se u čvoru sastaju tri kuglastozglobna štapa tako da njihove osi nisu u jednoj ravnini (kraće: tri štapa nekomplanarnih osi) i ako na čvor ne djeluje sila, vrijednosti su sila u svim štapovima jednake nuli.

Dokaz. U jednadžbi ravnoteže projekcija sila na os okomitu na ravninu koju razapinju osi dvaju štapova pojavljuje se samo vrijednost projekcije sile u trećemu štapu. Za ravnotežu čvora mora ta vrijednost biti jednaka nuli. To vrijedi za svaki od tri para štapova i odgovarajući treći štap (prvi i drugi, treći; prvi i treći, drugi; drugi i treći, prvi).

2. Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako na čvor djeluje sila na pravcu koji ne leži ni u jednoj od ravnina razapetih osima parova štapova, vrijednosti su sila u svim štapovima različite od nule.

Dokaz. U jednadžbi ravnoteže projekcija sila na os okomitu na ravninu koju razapinju osi bilo kojih dvaju štapova pojavljuju se vrijednost projekcije sile u trećemu štapu i vrijednost projekcije vanjske sile. Budući da je vrijednost projekcije vanjske sile različita od nule, za ravnotežu čvora mora od nule biti različita i vrijednost projekcije sile u štapu.

3. Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako na čvor djeluje sila na pravcu koji leži u ravnini razapetoj osima dvaju štapova (ali se ne poklapa ni s jednom od tih dviju osi),

vrijednosti su sila u ta dva štapa različite od nule, dok je vrijednost sile u trećemu štapu jednaka nuli.

Dokaz. Na os okomitu na ravninu u kojoj su osi dvaju štapova i pravac djelovanja vanjske sile projicira se samo sila u trećemu štapu, pa njezina vrijednost mora biti jednaka nuli. A sila na pravcu u ravnini osi dvaju štapova i sile u tim štapovima sastavnice su „klasičnoga” ravninskog zadatka uravnoteženja točke (čvora ravninske rešetke): budući da su osi štapova i pravac djelovanja sile tri različita pravca¹, možemo zatvoriti trokut sila.

4. Ako se u čvoru sastaju tri štapa nekomplanarnih osi i ako na čvor djeluje sila na osi jednoga štapa, vrijednost je sile u tome štapu različita od nule, dok su vrijednosti sila u ostala dva štapa jednake nuli.²

Dokaz. Na os okomitu na ravninu koju razapinju osi štapa na kojoj djeluje vanjska sila i osi jednoga od preostala dva štapa projicira se samo sila u trećemu štapu, pa njezina vrijednost mora biti jednaka nuli. Nakon što smo utvrdili da su nuli jednake vrijednosti sila u štapovima kojima osi nisu na pravcu djelovanja sile, ravnoteža sila na pravcu djelovanja sile/osu trećega štapa daje vrijednost sile u tom štapu.

5. Ako se u čvoru sastaju četiri štapa tako da su osi triju štapova u jednoj ravnini, a os četvrtoga izvan nje, i ako na čvor ne djeluje sila, vrijednost je sile u četvrtome štapu različita od nule.

Dokaz. Na os okomitu na ravninu osi triju štapova projicira se samo sila u četvrtome štapu, pa njezina vrijednost mora biti jednaka nuli.

Postavka 5. u stvari je inačica postavke 3. u kojoj ulogu vanjske sile preuzima sila u jednoj od triju štapova osi kojih su u ravnini.

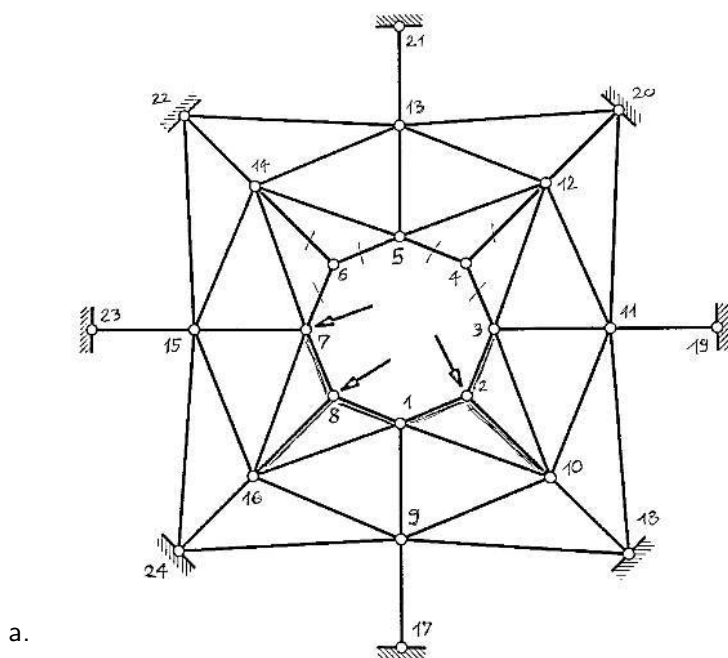
Postavke 2., 3. i 4. možemo primijeniti i u analizi ravnoteže čvorova u kojima se sastaje četiri, pet, šest, ... štapova, ako su vrijednosti sila nepoznate u, najviše, tri štapa. Rezultanta sila poznatih vrijednosti u ostalim štapovima i možebitnih vanjskih sila ona je sila za koju je u tim postavkama rečeno da djeluje na čvor u kojemu nas sada zanimaju samo tri štapa i vrijednosti sila u njima. Ako pak znamo da su vrijednosti sila u štapovima koji se sastaju u čvoru, osim u tri štapa, jednake nuli, primjenjiva je postavka 1.

Vratit ćemo se sada zadanoj Schwedlerovoj kupoli.

Počinjemo s čvorovima gornjega (u tlocrtu unutarnjega) prstena u kojima se sastaju po tri štapa. Na crtežu a. na sljedećoj stranici to su čvorovi 2, 4, 6 i 8. Na čvorove 4 i 6 ne djeluju vanjske sile, pa su prema postavci 1. vrijednosti sila u priključenim štapovima ($\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{4, 12\}$, $\{5, 6\}$, $\{6, 7\}$ i $\{6, 14\}$) jednake nuli (ti su štapi na crtežu a. prekriveni).

¹ Rekli smo da se pravac djelovanja sile ne poklapa ni s jednom osi. Osi štapova također se ne mogu poklapati: da se poklapaju, ta zajednička os i os trećega štapa razapinjale bi ravninu, što proturječi činjenici da su osi nekomplanarne.

² U našem nam primjeru ova postavka neće trebati, ali smo je naveli potpunosti radi.



Zadane sile djeluju na čvorove 2 i 8. Uzet ćemo da pravci djelovanja tih sila nisu ni u jednoj od ravnina razapetih parovima u čvorove priključenih štapova³, tako da možemo primijeniti postavku 2. prema kojoj će vrijednosti sila u štapovima $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 10\}$, $\{1, 8\}$, $\{7, 8\}$ i $\{8, 16\}$ biti različite od nule (na crtežu a. ti su štapovi „podebljani“).

U čvorovima 1, 3, 5 i 7 sastaje se po pet štapova, no kako smo u prethodnom koraku utvrdili jesu li vrijednosti sila u štapovima gornjega prstena jednake nuli ili različite od nje, u tim se čvorovima sastaju po tri štapa za koje o vrijednostima sila u njima još ništa ne znamo (crtež a.).

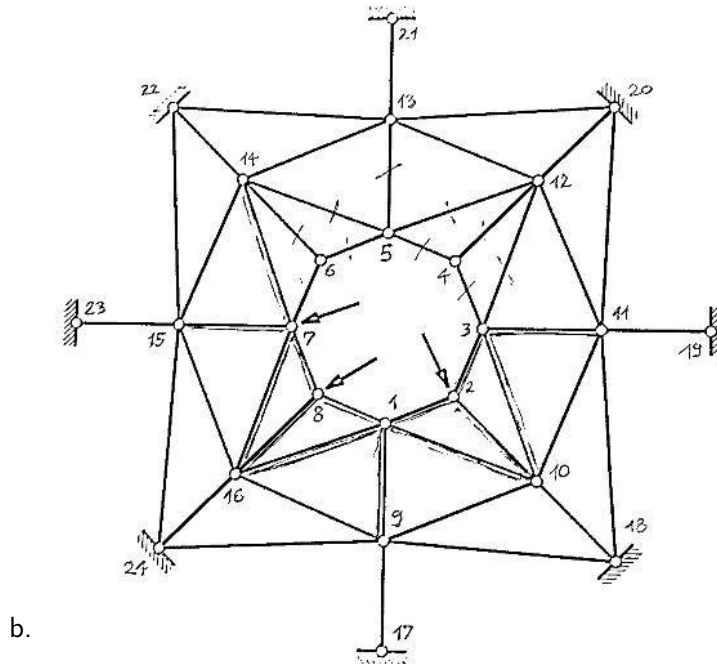
Na čvor 5 ne djeluje vanjska sila, a uz to su vrijednosti sila u štapovima $\{4, 5\}$ i $\{5, 6\}$ jednake nuli, pa su prema proširenoj postavci 1. nuli jednake i vrijednosti sila u ostala tri štapa priključena u čvor 5 (u štapovima $\{5, 12\}$, $\{5, 13\}$ i $\{5, 14\}$; crtež b. na sljedećoj stranici).

Na čvor 1 također ne djeluje vanjska sila, ali su vrijednosti sila u štapovima $\{1, 2\}$ i $\{1, 8\}$ različite od nule. Budući da su osi tih štapova u horizontalnoj ravnini, u toj će ravnini biti i pravac djelovanja rezultante sila u njima. Iako postoji mogućnost da je taj pravac presječnica te ravnine s jednom od triju ravnina koje razapinju osi parova štapova $\{\{1, 16\}, \{1, 9\}\}$, $\{\{1, 16\}, \{1, 10\}\}$ i $\{\{1, 9\}, \{1, 10\}\}$, on u općem slučaju neće ležati ni u jednoj od njih, pa ćemo primijeniti proširenu postavku 2.; prema njoj su vrijednosti sila u štapovima $\{1, 16\}$, $\{1, 9\}$ i $\{1, 10\}$ različite od nule (također crtež b.).

Ni na čvor 3 ne djeluje vanjska sila. U štapu $\{2, 3\}$ vrijednost je sile različita od nule, dok je u štapu $\{3, 4\}$ vrijednost jednaka nuli, tako da silu u štapu $\{2, 3\}$ treba uravnotežiti silama u

³ To je opći slučaj: točkom u prostoru prolazi ∞^2 pravaca, a točkom u ravnini samo njih ∞^1 .

štapovima $\{3, 10\}$, $\{3, 11\}$ i $\{3, 12\}$. Osi štapova $\{2, 3\}$, $\{3, 10\}$ i $\{3, 11\}$ u jednoj su ravnini, a os štapa $\{3, 12\}$ „izlazi” iz nje. Prema proširenoj postavci 3. i(li) postavci 5. vrijednost je sile u štapu $\{3, 12\}$ jednaka nuli, dok su vrijednosti sile u štapovima $\{3, 10\}$ i $\{3, 11\}$ od nje različite (crtež b., još jednom).



Na čvor 7 djeluje vanjska sila, a uz to je vrijednost sile u štapu $\{7, 8\}$ različita od nule, dok je vrijednost sile u štapu $\{6, 7\}$ jednaka nuli. Resultanta vanjske sile i sile u štapu $\{7, 8\}$ u općem slučaju neće ležati ni u jednoj od tri ravnine koje razapinju osi dvaju od preostala tri štapa priključena u čvor. Prema postavci 2. vrijednosti su sile u tim štapovima ($\{7, 14\}$, $\{7, 15\}$ i $\{7, 16\}$) različite od nule (ponovno crtež b.).

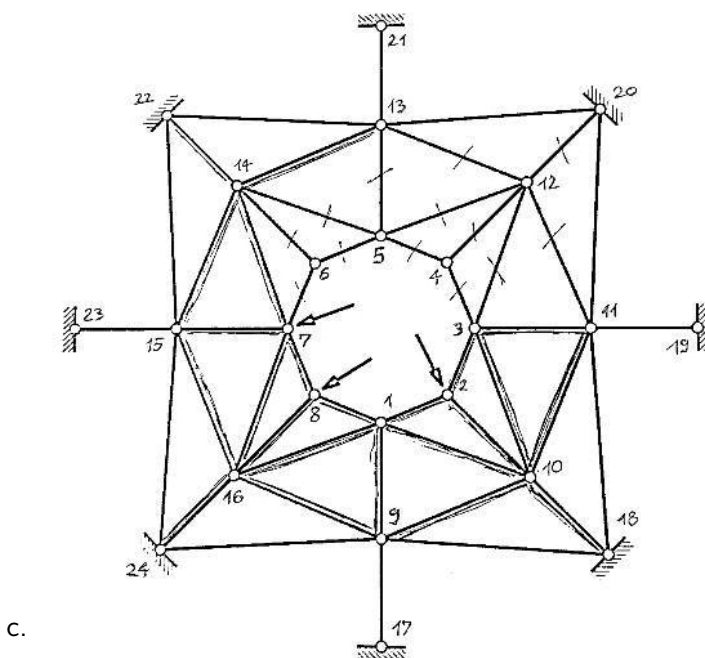
Iako je u sve čvorove donjega prstena priključeno po šest štapa, sada za samo po tri štapa priključena u čvorove 10, 12, 14 i 16 ne znamo jesu li vrijednosti sile u njima jednake nuli ili nisu (crtež b., posljednji put).

Utvdili smo da su u štapovima $\{3, 12\}$, $\{4, 12\}$ i $\{5, 12\}$, koji su iznad donjega prstena priključeni u čvor 12, vrijednosti sile jednake nuli. Prema postavci 1. nuli su jednake i vrijednosti sile u štapovima $\{11, 12\}$, $\{12, 13\}$ i $\{12, 20\}$ (crtež c. na sljedećoj stranici).

U štapu $\{7, 14\}$ vrijednost je sile različita od nule, dok su u ostala dva štapa, koja su u čvor 14 priključena iznad donjega prstena, vrijednosti sile jednake nuli. Os štapa $\{7, 14\}$ ne leži ni u jednoj od triju ravnina koje razapinju parovi osi štapova $\{13, 14\}$, $\{14, 15\}$ i $\{14, 22\}$, pa su prema postavci 2. vrijednosti sile u ta tri štapa različite od nule (ponovno crtež c.).

U čvorove 10 i 16 priključena su iznad donjega prstena po tri štapa u kojima su vrijednosti sile različite od nule. Ovisno o vrijednostima sile, pravci djelovanja rezultanata tih dviju trojki

sila mogu biti bilo koji pravci koji prolaze čvorovima 10 i 16. U posebnim slučajevima to mogu biti osi preostalih triju štapova priključenih u te čvorove ili pravci u ravninama razapetima parovima tih osi, no u općem je slučaju primjenjiva postavka 2., što znači da su vrijednosti sila u štapovima $\{9, 10\}$, $\{10, 11\}$, $\{10, 18\}$ te $\{9, 16\}$, $\{15, 16\}$, $\{16, 24\}$ različite od nule (crtež c. treći put).

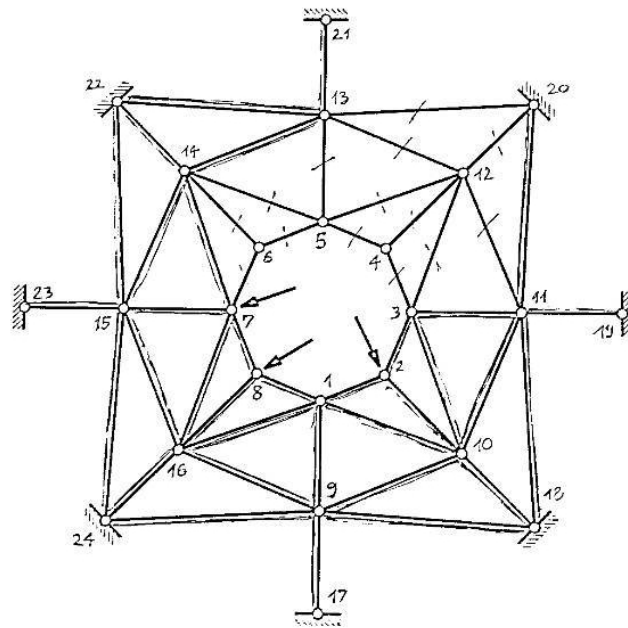


Budući da sada za sve štapove donjega prstena znamo jesu li vrijednosti sila u njima različite od nule ili ne, i u čvorovima 9, 11, 13 i 15 sastaju se po tri štapa za koje o vrijednostima sila u njima ne znamo ništa (crtež c. posljednji put).

U čvorove 9 i 15 priključena su po tri štapa (po dva štapa donjega prstena i po jedan štap iznad njega) u kojima su sile vrijednosti različite od nule, pa su prema onome što smo rekli o čvorovima 10 i 16 od nule različite i vrijednosti sila u ostalima u njih priključenim štapovima ($\{9, 17\}$, $\{9, 18\}$ i $\{9, 24\}$ te $\{15, 22\}$, $\{15, 23\}$ i $\{15, 24\}$; crtež d. na sljedećoj stranici).

U čvor 11 priključena su dva štapa ($\{3, 11\}$ i $\{10, 11\}$) za koje znamo da su vrijednosti sila u njima različite od nule i jedan štap ($\{11, 12\}$) sa silom vrijednosti jednake nuli. Rezultanta sila u štapovima $\{3, 11\}$ i $\{10, 11\}$ u općem slučaju ne leži ni u jednoj ravnini koje razapinju parovi osi preostalih triju štapova, pa su prema postavci 2. vrijednosti sila u ta tri štapa ($\{11, 18\}$, $\{11, 19\}$, $\{11, 20\}$) različite od nule (ponovno crtež d.).

Vrijednosti sila u štapovima $\{5, 13\}$ i $\{12, 13\}$ jednake su nuli, dok je vrijednost sile u štapu $\{13, 14\}$ različita od nule. Njegova je os u ravnini koju razapinju osi štapova $\{13, 21\}$ i $\{13, 22\}$. Os štapa $\{13, 20\}$ izlazi iz te ravnine. Primijenimo li postavku 3. i(li) postavku 5. na čvor 13,



d.

zaključit ćemo da su vrijednosti sile u štapovima $\{13, 21\}$ i $\{13, 22\}$ različite od nula, a da je vrijednost sile u štapu $\{13, 20\}$ jednaka nuli (crtež d. posljednji put).