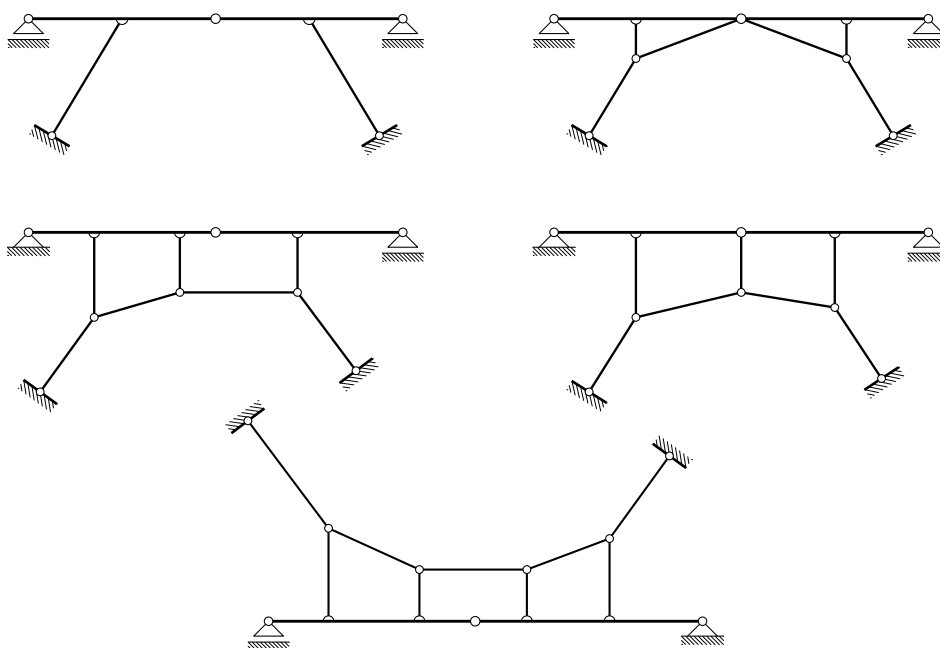


# Poduprte i obješene grede

## 1. Grafički i analitički postupak

Kao što je kod ojačanih greda svejedno nalazi li se sklop štapova ojačanja s gornje ili s donje strane grede, poduprte i obješene grede pripadaju jednoj grupi, jer je statički tretman jednih i drugih isti. Razlika je samo u predznaku vrijednosti sila u zglobnim štapovima potpornoga, odnosno visećega sklopa.

Ipak se ti nosači mogu podijeliti u dvije skupine. U prvoj je skupini potporni/viseći sklop razdvojen zglobovom grede tako da ispod/iznad toga zgloba nema štapa (prva dva sistema na slici 1.), dok u drugoj skupini taj štap postoji, pa je potporni/viseći sklop cjelovit (preostala tri sistema). K tomu su još u nosačima prve skupine oba „gredna” zglobna ležaja pomična, dok je u nosačima druge skupine jedan pomičan, a drugi nepomičan.

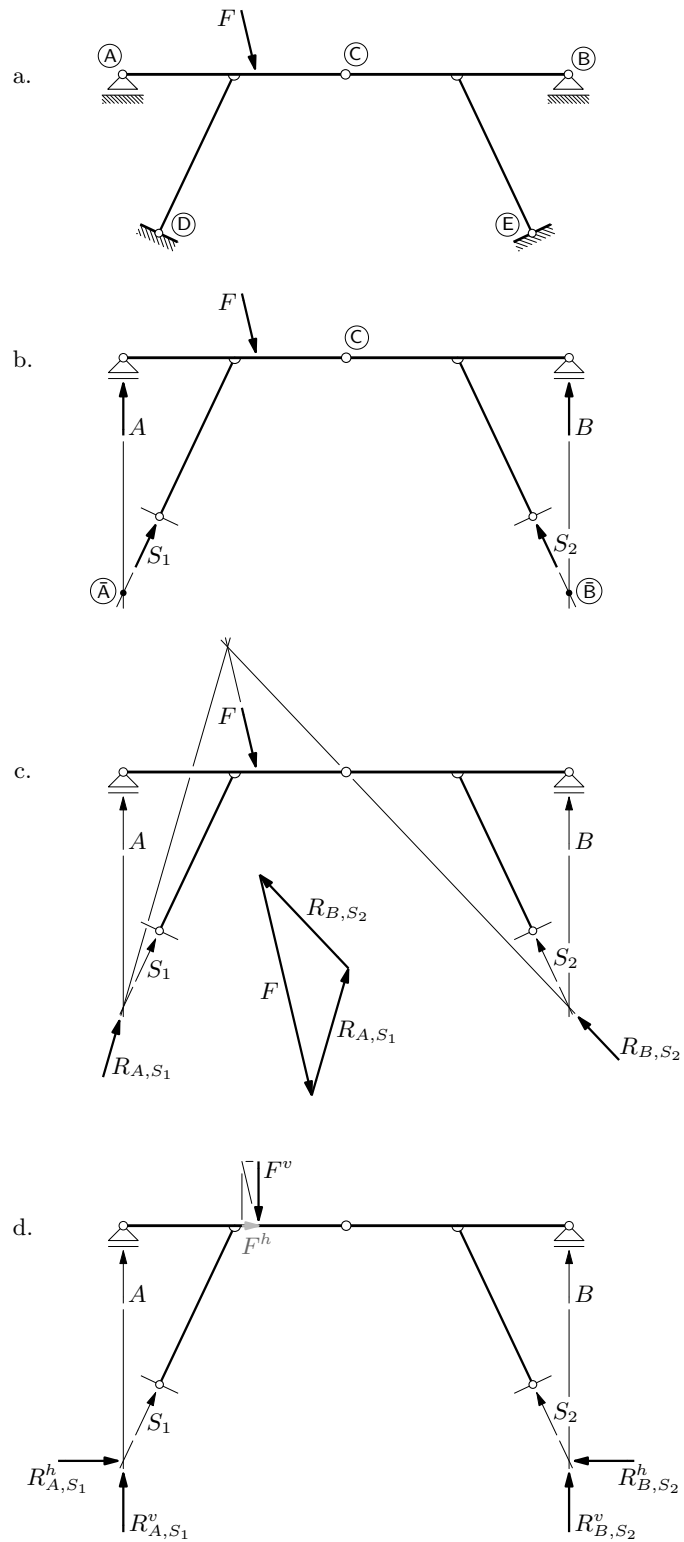


Slika 1.

### 1.1. Nosači prve skupine

Primjer nosača prve skupine, razupora, prikazan je na slici 2.a. Potporni štapovi (ako nisu opterećeni) zglobni su štapovi, tako da reakcije  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$  u ležajevima D i E, jednake uzdužnim silama u štapovima, djeluju na pravcima njihovih osi. Ležajevi pak A i B pomični su zglobni ležajevi, pa su reakcije  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  vertikalne, okomite na pravac pomaka koje ležajevi dopuštaju (slika 2.b.).

Te ćemo četiri sile, nepoznatih vrijednosti, ali poznatih pravaca djelovanja, zamijeniti dvjema silama, nepoznatih vrijednosti, na nepoznatim pravcima djelovanja. Ipak, o pravcima djelovanja tih dviju sila nešto ćemo znati — znat ćemo točke kojima prolaze. Prva će sila, naime, biti



Slika 2.

rezultanta  $\vec{R}_{A,S_1}$  sila  $\vec{A}$  i  $\vec{S}_1$ , pa pravac njezina djelovanja mora proći sjecištem  $\bar{A}$  pravaca djelovanja sila  $\vec{A}$  i  $\vec{S}_1$ . Slično tome, pravac djelovanja druge sile, rezultante  $\vec{R}_{B,S_2}$  sila  $\vec{B}$  i  $\vec{S}_2$ , mora proći sjecištem  $\bar{B}$  pravaca njihova djelovanja (slika 2.b.).

Time smo uspostavili analogiju između poduprtih nosača prve skupine i trozglobnih nosača, pa poduprti nosač možemo riješiti kao trozglobni kojemu su točke  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  ležajevi, a zglob C, naravno, zglob. Nakon što odredimo rezultante  $\vec{R}_{A,S_1}$  i  $\vec{R}_{B,S_2}$  na znani način, kao reakcije trozglobnoga nosača (slika 2.c.), prvu treba još rastaviti u sile  $\vec{A}$  i  $\vec{S}_1$ , a drugu u sile  $\vec{B}$  i  $\vec{S}_2$ .

Istu analogiju upotrebljavamo i u analitičkom postupku, u izračunavanju vrijednosti reakcija (slika 2.d.). Jednadžba ravnoteže momenata oko točke  $\bar{B}$  za cijeli nosač i jednadžba ravnoteže momenata oko točke C za lijevi dio nosača (pri presjeku kroz zglob) daju sustav dviju jednadžbi za izračunavanje vrijednosti horizontalne i vertikalne komponente rezultante  $\vec{R}_{A,S_1}$ , a jednadžba ravnoteže momenata oko točke  $\bar{A}$  za cijeli nosač i jednadžba ravnoteže momenata oko točke C za njegov desni dio sustav za vrijednosti komponenata rezultante  $\vec{R}_{B,S_2}$ .

Uz poznate reakcije, sile u bilo kojemu presjeku mogu se odrediti metodom jednostavnih presjeka, grafički ili analitički.

## 1.2. Nosači druge skupine

Pravci djelovanja reakcije u pomičnom zglobnom ležaju i reakcija u ležajevima potpornih štapovi poznati su, ali je pravac djelovanja reakcije u nepomičnom zglobnom ležaju nepoznat, tako da sada ne možemo naći točku u kojoj se sijeku pravci djelovanja reakcije u nepomičnom zglobnom ležaju i reakcije u ležaju potpornoga štapa.

Opterećenja koja djeluju na gredu rastavit ćemo stoga čak i u grafičkom postupku u horizontalne i vertikalne komponente (slika 3.b.).

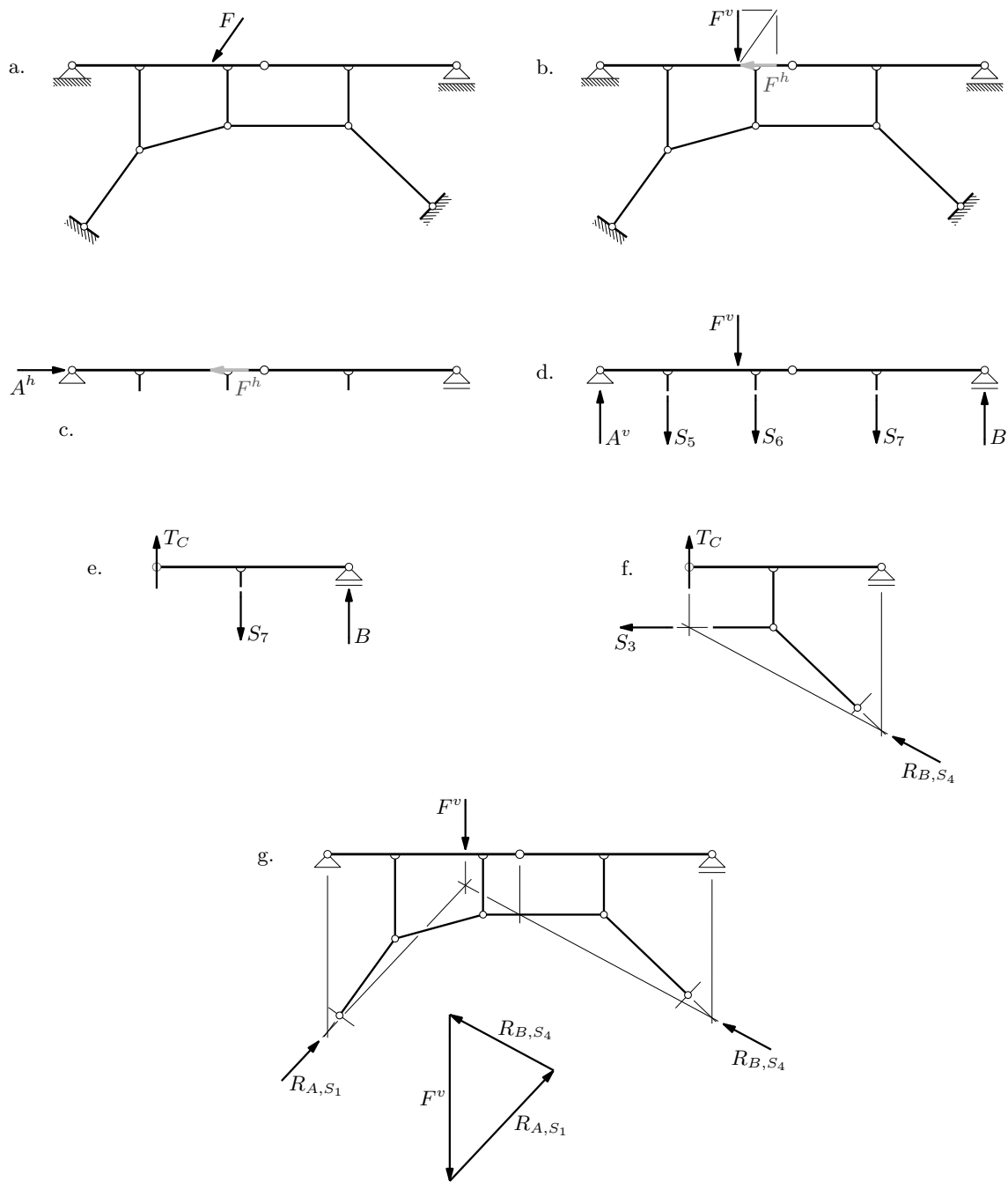
Ograničit ćemo se na nosače u kojima su svi „unutarnji” štapovi potpornoga/visećega sklopa (štapovi koji povezuju potporni/viseći „lanac” i gredu) vertikalni. U takvim sistemima sve horizontalne komponente opterećenja uravnotežuje horizontalna komponenta reakcije u nepomičnom zglobnom ležaju, jer jedino on može preuzeti horizontalne sile (slika 3.c.). Naime, u zglobnim štapovima potpornoga sklopa mogu postojati samo uzdužne sile, a one su vertikalne. Dakle, vrijednost  $A^h$  horizontalne reakcije  $\vec{A}^h$  lako je izračunati.

Budući da je reakcija u pomičnom zglobnom ležaju vertikalna i da su sile u svim (unutarnjim) štapovima potpornoga sklopa vertikalne, za vertikalno opterećenje mora i reakcija u nepomičnom zglobnom ležaju biti vertikalna (slika 3.d.).

Sada možemo, ali samo za vertikalno opterećenje, upotrijebiti analogiju s trozglobnim nosačem. Točke  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$ , kojima prolaze rezultante  $\vec{R}_{A,S_1}$  i  $\vec{R}_{B,S_2}$ , nalazimo na isti način kao u slučaju nosača prve skupine (slika 3.g.).

Zglob, međutim, nije zglob (ne igra ulogu zgloba). Prisjetite se, pri grafičkom nalaženju reakcija trozglobnoga nosača znamo da pravac djelovanja reakcije u ležaju neopterećenoga dijela mora proći kroz zglob zato što na taj dio djeluju samo dvije sile — reakcija i sila u zglobu — koje moraju biti u ravnoteži, pa stoga djelovati na istom pravcu.

Da izdvojimo (neopterećeni) dio poduprte/obješene grede druge skupine, osim grede kroz zglob presjeći treba i štap potpornoga/visećega sklopa ispod/iznad zgloba, pa će se pojaviti i treća sila, sila u presječenom štapu (slika 3.f.). Kako na gredu djeluju samo vertikalne sile (slika 3.e.), u njoj, i u zglobu, postoji samo poprečna sila, pa možemo naći točku kojom prolazi pravac djelovanja rezultante sile u štapu i sile u zglobu: to je sjecište osi štapa i okomice na



Slika 3.

os grede, odnosno vertikalnoga pravca, kroz zglob (slika f.). Ta točka preuzima ulogu zgloba u grafičkom (slika g.), analitičkom i superpozicijskom postupku.

O analitičkom postupku nalaženja vrijednosti komponenta rezultanata reakcija (u našem primjeru  $\vec{R}_{A,S_1}$  i  $\vec{R}_{B,S_4}$ ) u točkama koje imaju ulogu ležajeva trozglobnoga nosača teško da se može nešto dodati. Kada su vrijednosti komponenta rezultanata poznate, mogu se izračunati i vrijednosti sila  $\vec{A}$  i  $\vec{S}_1$  te  $\vec{B}$  i  $\vec{S}_4$ .

Vrijednosti sile u ostalim štapovima mogu se redom izračunati iz jednadžbi ravnoteže čvora potpornoga sklopa (vrijednosti sile u drugom štapu potpornoga „lanca” i sile u prvom vertikalnom štapu iz jednadžbi ravnoteže prvoga čvora, vrijednosti sile u trećem štapu „lanca” i sile u drugom vertikalnom štapu iz jednadžbi ravnoteže drugoga čvora te vrijednost sile u trećem vertikalnom štapu iz jednadžbi ravnoteže trećega čvora). Zapravo, može se odmah vidjeti da će vrijednosti horizontalnih komponenata sile u svim štapovima potpornoga „lanca” biti međusobno jednake i jednake vrijednostima horizontalnih komponenata sile  $\vec{R}_{A,S_1}$  i  $\vec{R}_{B,S_4}$ .

## 2. Superpozicijski postupak

Započet ćemo prikazom postupka na nosačima druge skupine. Kao jednostavan primjer uzet ćemo obješenu gredu prikazanu na slici 4.a.

Prema slici 4.b. izraz je za vrijednost momenta savijanja u nekom presjeku  $x$

$$\begin{aligned} M(x) &= M^0(x) - z_1(x) \cdot H + z_2(x) \cdot S_2 = M^0(x) - z_1(x) \cdot H + z_2(x) \cdot H \\ &= M^0(x) - (z_1(x) - z_2(x)) \cdot H = M^0(x) - z(x) \cdot H. \end{aligned} \quad (1)$$

Iako i sada izračunavamo vrijednosti momenata u težištima poprečnih presjeka (u točkama osi grede), posljednji podizraz pokazuje da nećemo preslikavati os grede, nego „lanac” visećih štapova, uključujući, ako treba, produljenja i(li) skraćivanja prvoga i(li) posljednjega štapa do točaka  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  (konturu visećega sklopa, osjenčanu na slici c.). Od dijagrama momenata u jednostavnoj oslonjenoj gredi oduzimamo, naime, dijagram momenata sprega horizontalnih sila od kojih je jedna horizontalna komponenta sile koja djeluje na spojnici točaka  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  (u našem je primjeru ta spojnica horizontalna), a druga je horizontalna komponenta sile u štapu „lanca” visećih ili potpornih štapova (na slici b. presječeni je štap horizontalan, ali prvi i treći štap nisu).

Budući da moment sprega izračunavamo kao umnožak vrijednosti horizontalne komponente sile na spojnici točaka  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  i duljine odjeka na vertikalnom pravcu kroz težište presjeka između točke na toj spojnici i točke na štapu, os će afinosti biti spojnica točaka  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$ .

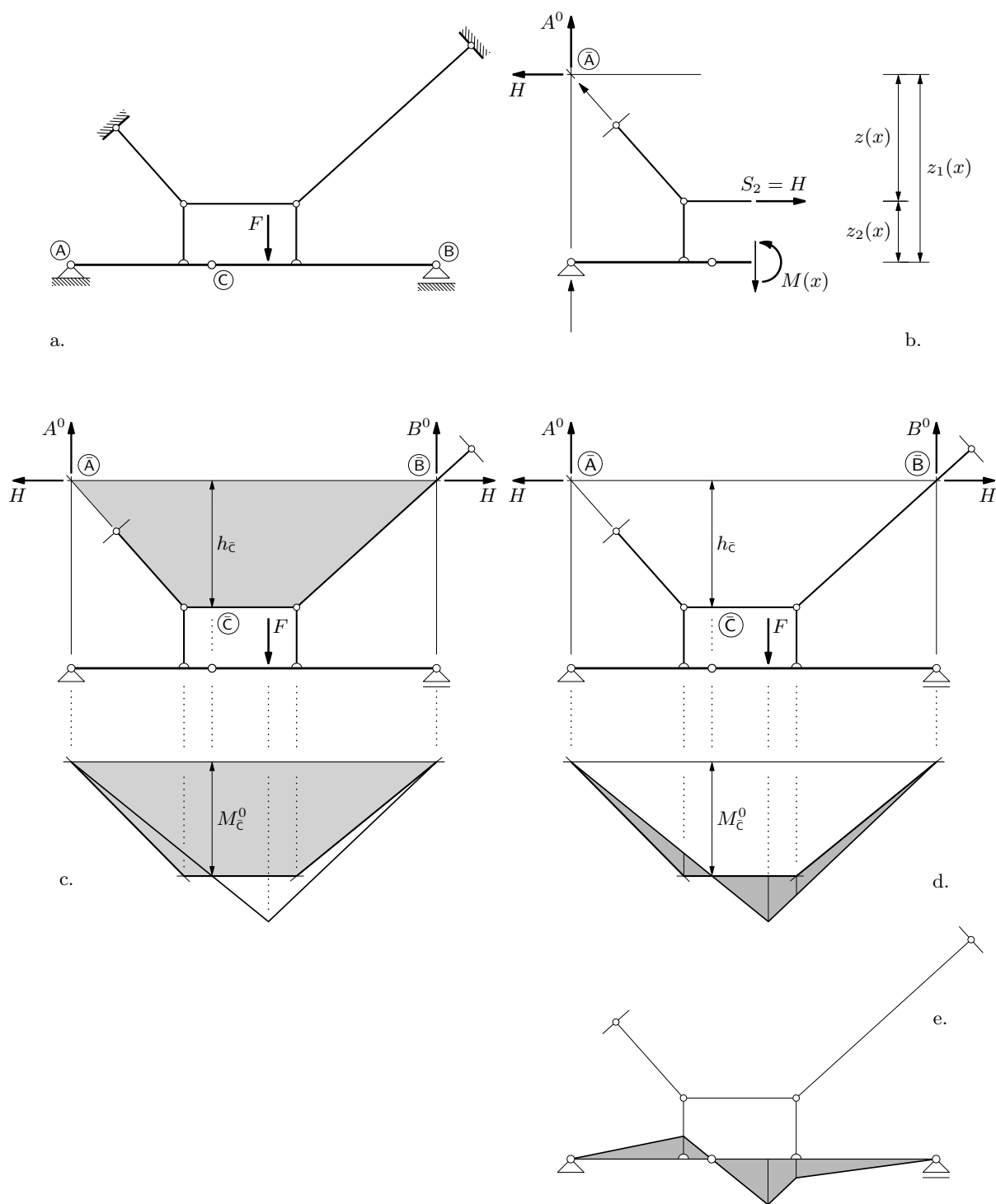
Kao što je u opisu grafičkoga postupka objašnjeno, u analogiji između poduprtih/obješenih greda druge skupine i trozglobnih nosača srednjemu zgloba trozglobnoga nosača odgovara točka  $\bar{C}$  u kojoj vertikalna kroz zglob siječe os štapa ispod/iznad njega. Stoga par pridruženih točaka kojima je preslikavanje zadano čine točka  $\bar{C}$  i točka  $M_C^0 = M_C^0$  na dijagramu  $M^0$  (slika 4.c.). Na slici d. osjenčana je „razlika” dijagrama, a na slici e. konačni je dijagram nacrtan na osi grede.

Na sličan se način superpozicijskim postupkom crtaju momentni dijagrami na nosačima prve skupine (slika 5.). Razlika je u tome što su sada pridružene točke kojima je preslikavanje zadano zglob C i točka  $M_C^0$  dijagrama  $M^0$ .

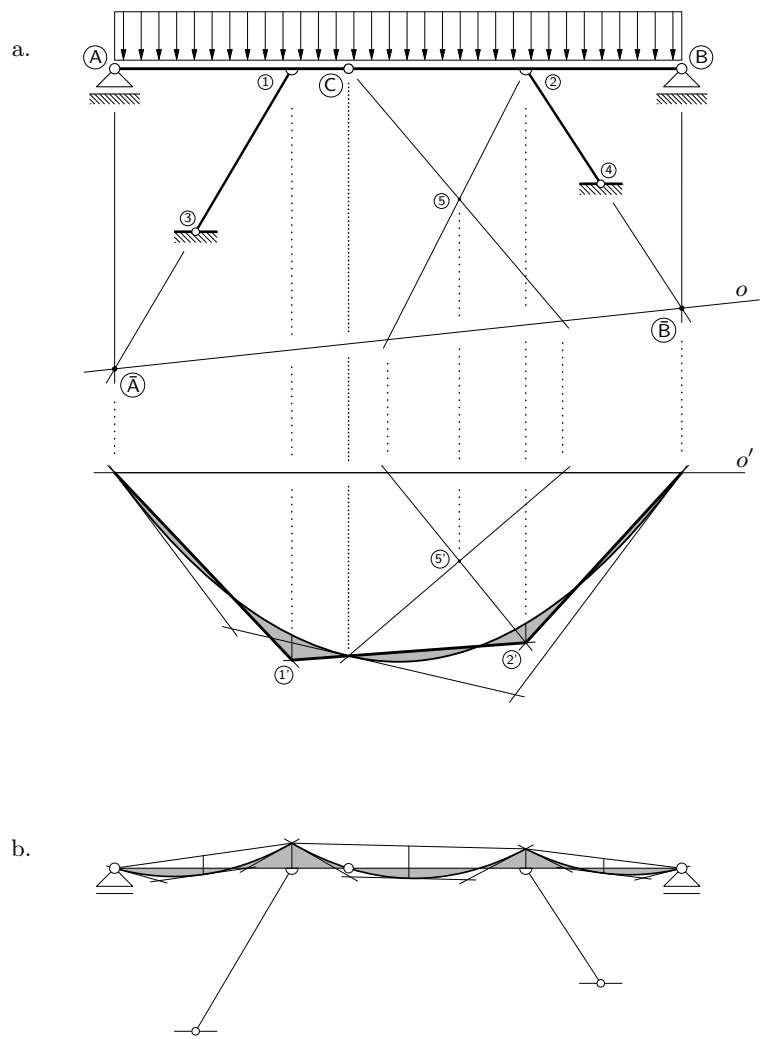
Uz to, dio grede može biti dio lika koji se preslikava. (Može biti, ali ne mora: u primjeru drugoga nosača na slici 1. preslikavaju se samo štapovi potpornoga „lanca”.)

U našem se primjeru preslikava dio 1–2 grede. Momente u točkama toga dijela uzrokuje samo sila na spojnici točaka  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$ . U dijelu pak A–1 momente uzrokuje spreg horizontalne komponente sile u toj spojnici i horizontalne komponente sile u štapu 3–1, a u dijelu 2–B spreg horizontalnih komponenata sile u spojnici i u štapu 2–4.

(Napomenut ćemo na kraju još da je slika osi grede, koja os afinosti siječe izvan crteža, određena pomoću točke 5, kako je to opisano u dijelu o afinom preslikavanju u poglavlju o trozglobnim nosačima.)



Slika 4.



Slika 5.