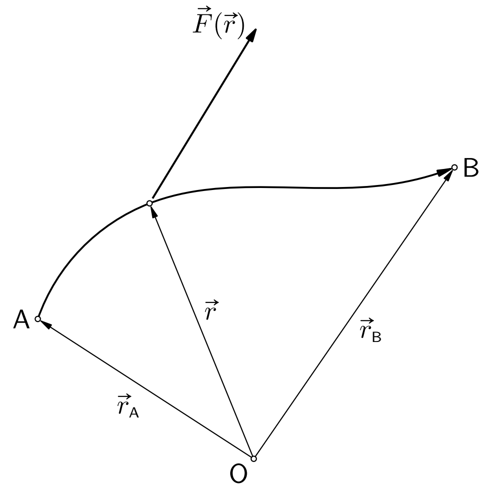
Građevna statika 1.

Rad, virtualni pomaci i virtualni rad

Pojam rada



$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$x : s \mapsto x(s) \quad \text{\&td.}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(\vec{r})\,\vec{\imath} + F_y(\vec{r})\,\vec{\jmath} + F_z(\vec{r})\,\vec{k}$$

$$F_x : \vec{r} \mapsto F_x(\vec{r}) = F_x(x, y, z) \quad \text{\&td.}$$

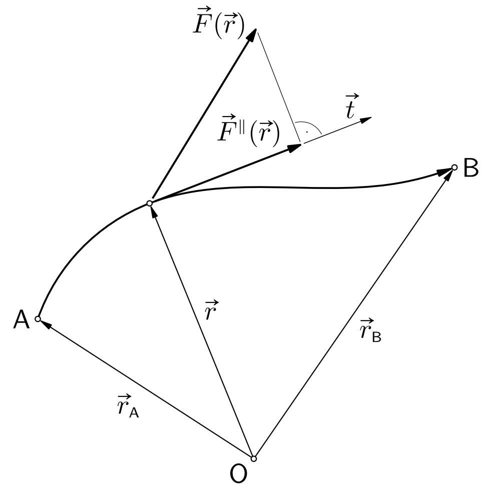
Za silu koja djeluje na nekom putu kažemo da radi.

Put na kojem sila djeluje opisujemo vektorskom funkcijom $\vec{r}$. Njezine su skalarne komponente skalarne parametarske funkcije

$$x : s \mapsto x(s) \quad \text{\&td.}$$

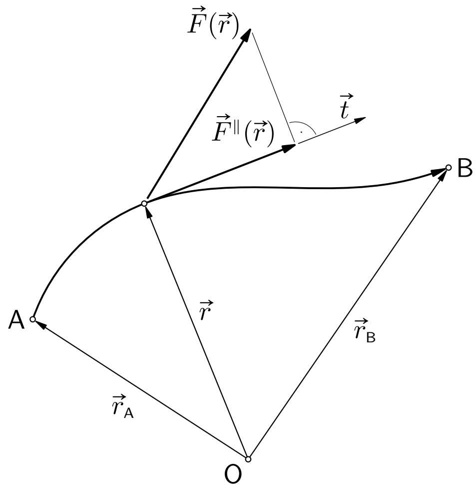
Budući da sila može uzduž puta mijenjati i intenzitet i pravac djelovanja i orijentaciju na njemu, prikazujemo je vektorskom funkcijom položaja

$$\vec{F} : \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z).$$



I sila i put bitne su odrednice pojma rada — nepomična sila, ma kako velika bila, ne radi; da bi radila, sila mora „putovati”. Ali, ni sâmo „putovanje” sile nije dovoljno: radi sȁmo ona komponenta sile koja zaista pomiče tijelo ili se tom pomicanju odupire — rastavi li se sila $\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}})$ u dvije međusobno okomite komponente, komponentu $\vec{\mathrm{F}}^{\parallel}(\vec{\mathrm{r}})$ na tangenti na zakrivljenu putanju i komponentu okomitu na nju, radi sȁmo tangencijalna komponenta.

U najjednostavnijem slučaju (put je pravocrtan, a sila konstantna po vrijednosti i djeluje na pravcu puta) rad je jednak umnošku vrijednosti sile i orijentirane duljine prevaljena puta (osnovnoškolska definicija: rad je sila puta put). Ako sila nešto gura ili vuče (ako sila i put imaju istu orijentaciju), rad joj je pozitivan, a ako se pomicanju odupire, rad je negativan.

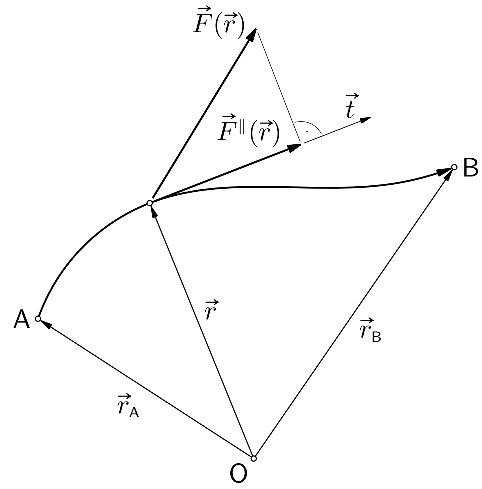


$$\vec{\mathsf{t}} \;=\; \frac{\mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}}{\|\mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}\|}$$

$$\overrightarrow{\mathsf{F}}(\vec{\mathsf{r}}) \cdot \vec{\mathsf{t}} \;=\; \overrightarrow{\mathsf{F}}(\vec{\mathsf{r}}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}}{\|\mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}\|}$$

Ako sila $\overrightarrow{\mathsf{F}}(\vec{\mathsf{r}})$ ne djeluje na pravcu puta, komponenta $\overrightarrow{\mathsf{F}}^{\parallel}(\vec{\mathsf{r}})$ jednaka je ortogonalnoj projekciji sile na pravac puta. Vrijednost te projekcije jednaka je skalarnom produktu vektora sile i jediničnoga vektora $\vec{\mathsf{t}}$ na pravcu puta.

Ako je put zakrivljen, $\vec{\mathsf{t}}$ je jedinični vektor tangente na krivulju puta u točki $\vec{\mathsf{r}}$, $\vec{\mathsf{t}} = \mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}/\|\mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}\|$, pa je vrijednost projekcije $\overrightarrow{\mathsf{F}}(\vec{\mathsf{r}}) \cdot \vec{\mathsf{t}} = \overrightarrow{\mathsf{F}}(\vec{\mathsf{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}/\|\mathrm{d}\vec{\mathsf{r}}\|$.

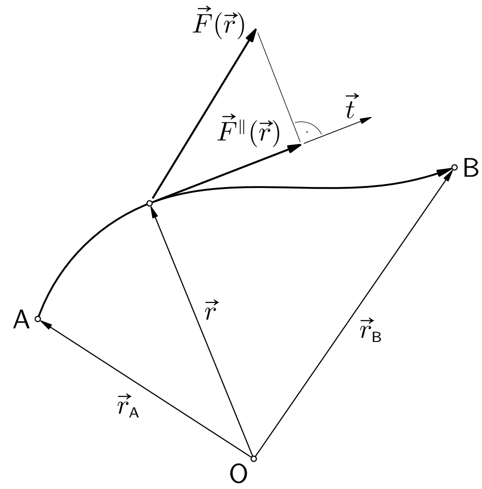


$$
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{d}\mathfrak{W}}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}) \;&=\; \mathsf{F}^{\parallel}(\vec{\mathrm{r}})\,\|\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\| \;=\; \left[\vec{\mathsf{F}}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\|\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\|}\right]\|\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\| \\
&=\; \vec{\mathsf{F}}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} \;=\; \mathsf{F}_x(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}x + \mathsf{F}_y(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}y + \mathsf{F}_z(\vec{\mathrm{r}})\,\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Ako je put zakrivljen, osnovnoškolsku definiciju rada možemo primijeniti samo za infinitezimalni rad $\overline{\mathrm{d}\mathfrak{W}}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}})$ pri neizmjerno malom pomaku $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$ po tangenti.

Infinitezimalni je rad tada jednak umnošku vrijednosti komponente sile $\mathsf{F}^{\parallel}(\vec{\mathrm{r}})$ koja djeluje na tangenti na krivulju puta i duljine $\|\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\|$ neizmjerno maloga pomaka $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$ po tangenti.

Taj se rad, kao što „izvod" pokazuje, može izračunati i kao skalarni umnožak vektora sile $\vec{\mathsf{F}}(\vec{\mathrm{r}})$ i vektora neizmjerno maloga pomaka $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$.



$$
\begin{aligned}
\mathfrak{W}_{\widetilde{AB}} &= \int_{\widetilde{AB}} \overline{d\mathfrak{W}}(\vec{r}, d\vec{r}) = \int_{\widetilde{AB}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= \int_{\widetilde{AB}} \left[F_x(\vec{r})\, dx + F_y(\vec{r})\, dy + F_z(\vec{r})\, dz \right]
\end{aligned}
$$

Ukupan rad sile $\vec{F}$ na zakrivljenom putu $\widetilde{AB}$, od točke A do točke B, jednak je vrijednosti krivuljnoga integrala (druge vrste).

rad vanjskih i unutarnjih sila:

$\mathfrak{W}$	$\cdots$	rad
$\mathfrak{V}$	$\cdots$	rad vanjskih sila
$\mathfrak{U}$	$\cdots$	rad unutarnjih sila

Rad općenito označavat ćemo s $\mathfrak{W}$, rad vanjskih sila s $\mathfrak{V}$, a rad unutarnjih s $\mathfrak{U}$.

rad (stvarne) sile na virtualnom pomaku:

$$\delta\mathfrak{W} = \vec{F} \cdot \delta\vec{u} = F_x\,\delta u_x + F_y\,\delta u_y + F_z\,\delta u_z$$

Matematički je model idealizirana slika dijela stvarnosti. Model nije stvarnost; za neke njegove elemente i za neke postupke u njemu ne moraju postojati izvornici u stvarnosti. Elemente modela i odnose u njemu možemo zamisliti gotovo po volji, tako da pojednostavnimo matematičku obradu.

Posebno, zanimat će nas samo položaji sile na početku i na kraju njezina „putovanja" (iako u stvarnosti postoje sile čiji rad ovisi o cijelom putu, pa je različit na različitim putevima između istih točaka). Ravna je spojnica početne i konačne točke „putovanja" pomak. Uzet ćemo uz to da je pravac djelovanja sile u konačnom položaju usporedan s pravcem na kojemu je djelovala prije „putovanja".

Pomak koji zamišljamo nazivamo *virtualnim pomakom*, a rad sile na njemu *virtualnim radom*. Oznaka je virtualnosti δ: $\delta\vec{u}$, $\delta\mathfrak{W}$.

Pomake ćemo zamišljati tako da ne naruše geometrijske odnose u nosaču. Najčešće će to značiti da su pomaci mali (u smislu teorije „malih" pomaka).

Uvedene pretpostavke omogućuju nam povratak na jednostavnu osnovnoškolsku deficiju rada: sila puta pomak . . .

. . . zapravo, malo složeniju, jer se pravac djelovanja sile ne mora poklapati s pravcem pomaka, tako da rad izračunavamo primjenom skalarnoga umnoška vektora sile i vektora pomaka.

rad (stvarne) sile na virtualnom pomaku:

$$\delta\mathfrak{W} = \vec{F} \cdot \delta\vec{u} = F_x\,\delta u_x + F_y\,\delta u_y + F_z\,\delta u_z$$

$$= F^{\parallel}\,\delta u = F\,\delta u^{\parallel}$$

. . . rad izračunavamo primjenom skalarnoga umnoška vektora sile i vektora pomaka.

Taj je skalarni umnožak jednak umnošku vrijednosti $F^{\parallel}$ ortogonalne projekcije sile $\vec{F}$ na pravac pomaka i duljine δu pomaka $\delta\vec{u}$.

Često ćemo, međutim, govoriti o „pomaku po pravcu djelovanja sile”. Pomak po pravcu djelovanja sile definiramo kao ortogonalnu projekciju vektora pomaka na pravac djelovanja sile. Kako je skalarno množenje komutativna operacija, skalarni je umnožak vektora sile i vektora pomaka jednak i umnošku vrijednosti F sile $\vec{F}$ i duljine $\delta u^{\parallel}$ pomaka po pravcu njezina djelovanja.

Teorem o virtualnim pomacima

za deformabilne sisteme

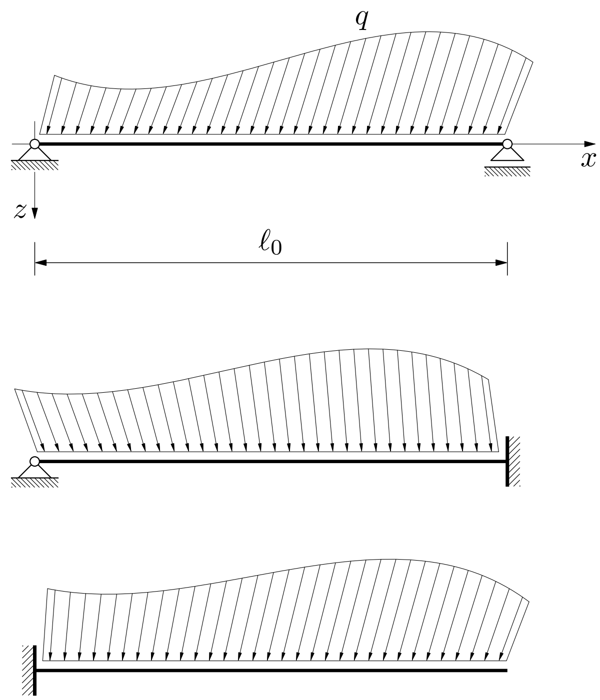
mogućе stanje pomakā sistema (dopustivo stanje pomakā sistema)

stvarno ravnotežno stanje sistema

Iako virtualne pomake točaka konstrukcije samo zamišljamo, prirodno je zahtijevati da u stanovitom smislu odgovaraju stvarnim pomacima; ponajprije, da nosač pritom ostane cjelovit — osim hvatištā sila pomicat će se i susjedne točke, tako da promijenjeni oblik osī dijelova nosača treba prikazati neprekinutim, dovoljno glatkim krivuljama. Za Bernoulli–Eulerovu gredu, primjerice, to znači da progibna linija ne smije imati ni lomove ni skokove. K tome još progibna linija mora prolaziti ležajnim točkama.

Polje pomakā koje zadovoljava uvjete neprekinutosti i geometrijske rubne uvjete nazivamo *mogućim* ili *dopustivim stanjem pomakā sistema*.

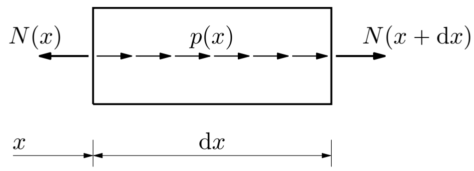
Unutarnje sile i reakcije izračunane iz polja pomakā po volji odabranoga mogućeg stanja pomakā ne moraju i najčešće neće biti u ravnoteži sa zadanim silama. No, jedno je od mogućih stanja pomakā *stvarno ravnotežno stanje sistema* — konfiguracija nosača u kojoj su vanjske i unutarnje sile u ravnoteži.

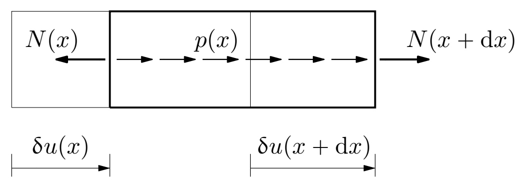


Teorem ćemo dokazati za ravnu gredu u ravnini xz.

Os x koordinatnoga sustava poklapa se s osi grede. Jedan je kraj grede u ishodištu, a drugi u točki ℓ_0. Greda može biti statički određena ili neodređena, ali mora biti geometrijski nepromjenjiva. Ležajevi su u krajnjim točkama, ali jedan kraj može biti i slobodan.

Budući da će se u dokazu pojaviti diferencijalne jednadžbe ravnoteže, uzet ćemo da na gredu (osim na krajevima) djeluju samo distribuirane sile opisane neprekidnim funkcijama.





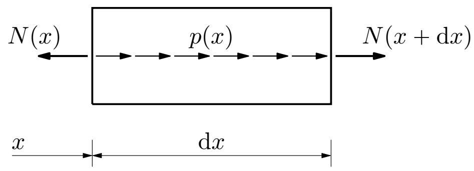
Više smo već puta rekli, pa i pokazali/dokazali, da su u okvirima linearne teorije sve posljedice uzdužnih i poprečnih djelovanja na ravnu gredu međusobno neovisne, pa ćemo ih i sada razdvojiti.

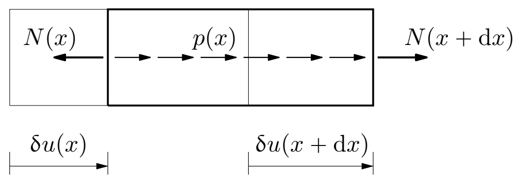
Počet ćemo s uzdužnim smjerom, jer je jednostavniji: od unutarnjih sila postoji samo uzdužna. U poprečnom pak smjeru su-djeluju poprečna sila i moment savijanja.

Na infinitezimalni odsječak između poprečnih presjeka kroz točke x i $x + \mathrm{d}x$ na pravcu osi grede djeluju distribuirana sila $\vec{p}$, uzdužna sila $-\vec{N}(x)$ u presjeku x i uzdužna sila $\vec{N}(x + \mathrm{d}x)$ u presjeku $x + \mathrm{d}x$ (gornja slika).

Vrijednost je rezultirajuće sile distribuirane sile $\vec{p}$ na odsječku $p(x)\,\mathrm{d}x$ (uzimamo da se vrijednost distribuirane sile $\vec{p}$ ne mijenja uzduž odsječka i da je jednaka vrijednosti $p(x)$ u točki x; naime, budući da je funkcija p neprekidna, njezin je prirast na odsječku neizmjerno malen, pa je doprinos toga prirasta rezultanti, $\alpha\, p'(x)\,\mathrm{d}x^2$ za neki $\alpha \in [0, 1\rangle$, kao neizmjerno mala veličina drugoga reda, zanemariv).

Virtualni su pomaci krajeva u smjeru osi $\delta\vec{u}(x)$ i $\delta\vec{u}(x + \mathrm{d}x)$, a njihove su orijentirane duljine $\delta u(x)$ i $\delta u(x + \mathrm{d}x)$ (donja slika).





$$-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)$$

Uzmemo li da rezultantirajuća sila $p(x)\,\mathrm{d}x$ djeluje u točki x, njezin je infinitezimalan virtualni rad

$$[p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x).$$

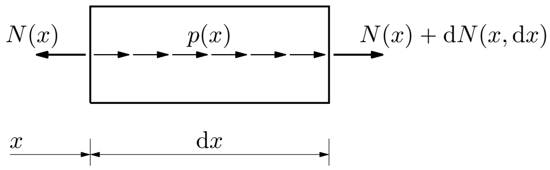
(Djeluje li sila $p(x)\,\mathrm{d}x$ u bilo kojoj drugoj točki između točaka x i $x+\mathrm{d}x$, vrijednost njezina rada razlikuje se od navedene za zanemarivu vrijednost $\alpha\,p(x)\,\delta u'(x)\,\mathrm{d}x^2$ za neki $\alpha \in [0,1\rangle$.)

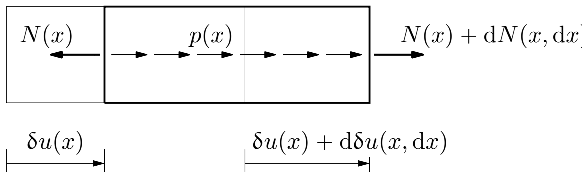
Radovi su uzdužnih sila na virtualnim pomacima krajeva odsječka

$$-N(x)\,\delta u(x) \quad \text{i} \quad N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x).$$

(Izraz za rad na lijevome kraju ima predznak „$-$", jer se, prema slici, pozitivno orijentirana sila „suprotstavlja" pozitivnomu pomaku.)

Ukupan je virtualni rad sila koje djeluju na odsječak zbroj rada rezultirajuće sile distribuirane sile i radova uzdužnih sila na njegovim krajevima.





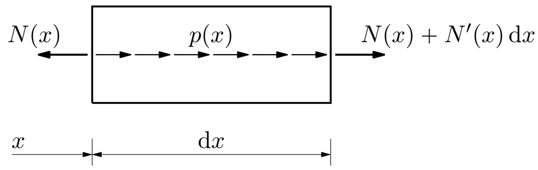
$$
\begin{aligned}
&-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) \\
&\qquad = \;-N(x)\,\delta u(x) \;+\; [N(x)+\mathrm{d}N(x,\mathrm{d}x)]\,[\delta u(x)+\mathrm{d}\delta u(x,\mathrm{d}x)] \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)
\end{aligned}
$$

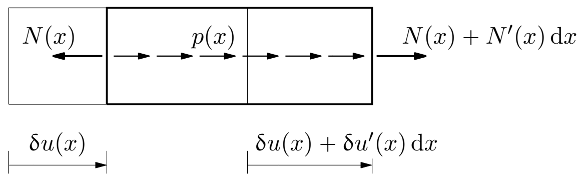
Infinitezimalne priraste funkcija N i δu zamijenili smo diferencijalima $\mathrm{d}N$ i $\mathrm{d}\delta u$,

$$N(x+\mathrm{d}x) \backsimeq N(x) \;+\; \mathrm{d}N(x,\mathrm{d}x)$$

i

$$\delta u(x+\mathrm{d}x) \backsimeq \delta u(x) \;+\; \mathrm{d}\delta u(x,\mathrm{d}x)\,,\;\ldots$$





$$
\begin{aligned}
&-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) \\
&\quad = \;-N(x)\,\delta u(x) \;+\; [N(x)+N'(x)\,\mathrm{d}x]\,[\delta u(x)+\delta u'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)
\end{aligned}
$$

... i potom uvrstili definicije diferencijala:

$$\mathrm{d}N(x,\mathrm{d}x) \;=\; N'(x)\,\mathrm{d}x$$

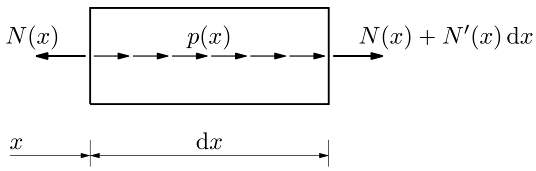
i

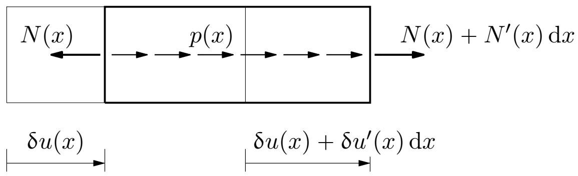
$$\mathrm{d}\delta u(x,\mathrm{d}x) \;=\; \delta u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množenjem binomā

$$N(x) + N'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{i} \quad \delta u(x) + \delta u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

s desne strane znaka jednakosti dobivamo ... (sljedeća stranica)

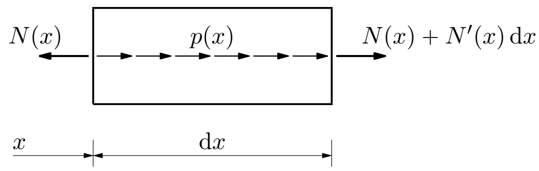


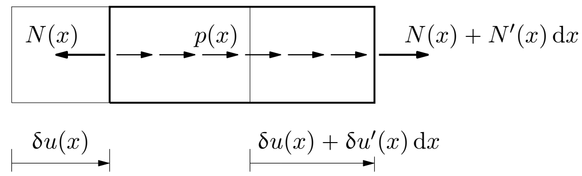


$$
\begin{aligned}
&-N(x)\,\delta u(x) + N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) + [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)\\
&\quad = \cancel{-N(x)\,\delta u(x)} + \cancel{N(x)\,\delta u(x)} + N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x]\\
&\qquad + [N'(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) + \cancel{N'(x)\,\delta u'(x)\,\mathrm{d}x^2} + [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)
\end{aligned}
$$

Prva dva pribrojnika s desne strane po apsolutnoj su vrijednosti jednaka, ali suprotnih predznaka, pa se poništavaju, dok je pribrojnik $N'(x)\,\delta u'(x)\,\mathrm{d}x^2$ zanemariv kao neizmjerno mala veličina drugoga reda.

(Podizraz s lijeve strane znaka jednakosti ne mijenjamo; provući ćemo ga gotovo do kraja dokaza.)

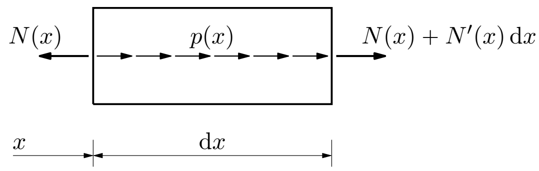


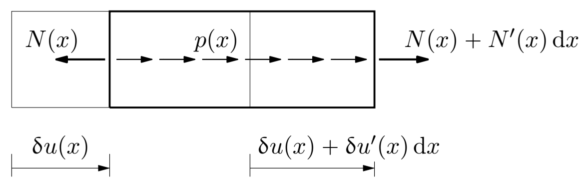


$$-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)$$

$$=\; N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; [N'(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)$$

Zadnja dva pribrojnika na desnoj strani sadrže $\mathrm{d}x\,\delta u(x), \ldots$





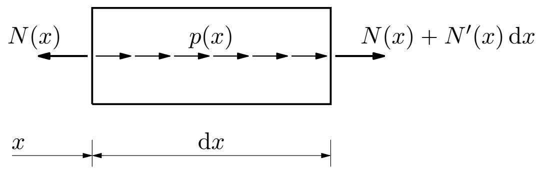
$$-N(x)\,\delta u(x) + N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) + [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)$$

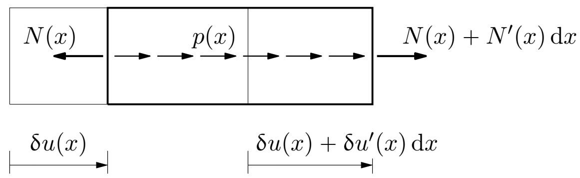
$$= N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x] + [N'(x) + p(x)]\,\mathrm{d}x\,\delta u(x)$$

... pa se $\mathrm{d}x\,\delta u(x)$ može izlučiti.

Ako je prije virtualnoga pomicanja odsječak bio u ravnoteži, sile koje djeluju na njega zadovoljavale su diferencijalnu jednadžbu ravnoteže

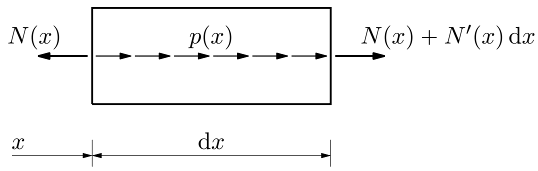
$$N'(x) + p(x) = 0.$$

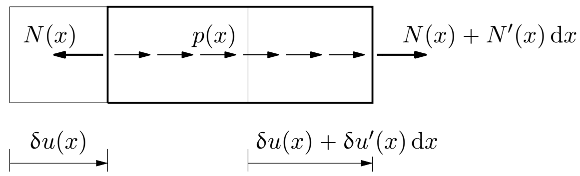




$$
\begin{aligned}
-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) \\
= \; N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; \underbrace{[N'(x) \;+\; p(x)]}_{0}\,\mathrm{d}x\,\delta u(x)
\end{aligned}
$$

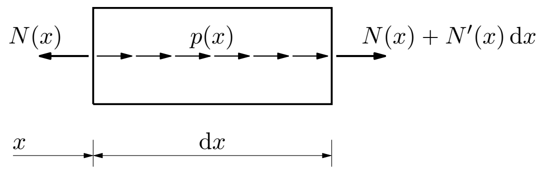
Kako se, prema našim pretpostavkama, ni sile ni njihovi geometrijski odnosi pomicanjem nisu promijenili, sile ostaju u ravnoteži, pa podizraz u uglatim zagradama u drugom pribrojniku na desnoj strani iščezava, . . .

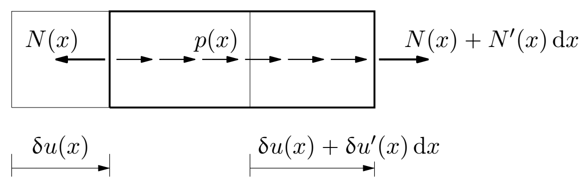




$$
\begin{aligned}
&-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) \\
&\qquad = \; N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; \cancel{[N'(x) + p(x)]\,\mathrm{d}x\,\delta u(x)}
\end{aligned}
$$

... a to znači da iščezava drugi pribrojnik ...





$$
\begin{aligned}
-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \;+\; [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)& \\
=\; N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x]&
\end{aligned}
$$

. . . te ostaje samo jedan, prvi pribrojnik . . .

infinitezimalni rad uzdužne sile na infinitezimalnome prirastu polja uzdužnih virtualnih pomaka:

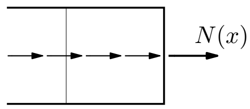
$$\mathrm{d}\delta\mathfrak{U}_N(x,\mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x]$$

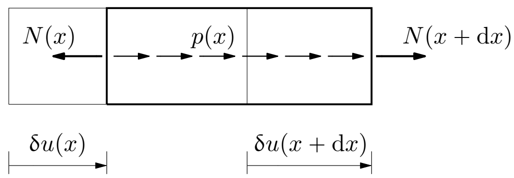
$$\delta u' = \delta\varepsilon$$

$$\boxed{\mathrm{d}\delta\mathfrak{U}_N(x,\mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} N(x)\,[\delta\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x]}$$

... kojim je definiran *infinitezimalni rad uzdužne sile na infinitezimalnome prirastu polja uzdužnih virtualnih pomaka*.

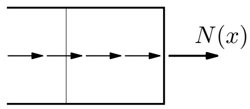
Drugu, uokvirenu definiciju omogućila je kinematička veza $\delta u' = \delta\varepsilon$, analogna vezi $u' = \varepsilon$ između stvarnih polja pomakā i deformacija.

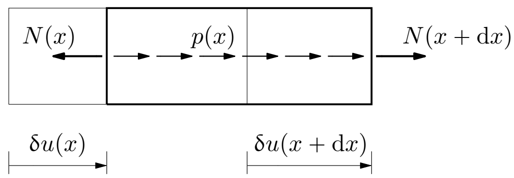




$$
\begin{aligned}
-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) + [p(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x)& \\
= \; N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x]&
\end{aligned}
$$

Greda je sastavljena od bezbroj infinitezimalnih odsječaka. Za svaki od njih možemo napisati jednakost analognu izvedenoj (i ponovno napisanoj).



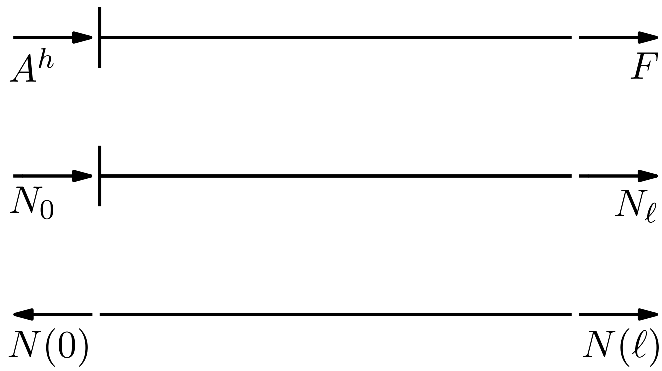


$$-N(0)\,\delta u(0) \;+\; N(\ell)\,\delta u(\ell) \;+ \int_0^\ell p(x)\,\delta u(x)\,dx$$
$$= \int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,\mathrm{d}x$$

desni kraj prethodnoga odsječka: $N(x)\,\delta u(x)$

lijevi kraj promatranoga odsječka: $-N(x)\,\delta u(x)$

„Zbrojimo" li svih tih bezbroj jednakosti, dobit ćemo prikazani izraz; podizrazi za rad uzdužnih sila na dodirnim ravninama susjednih odsječaka — prvi pribrojnik u jednakosti napisanoj za neki, bilo koji odsječak, $-N(x)\,\delta u(x)$, i drugi pribrojnik u jednakosti za prethodni, $N(x)\,\delta u(x)$ — međusobno se poništavaju, jer je riječ o istom poprečnom presjeku, pa, dakle, i o istom pomaku te o silama istoga intenziteta, ali suprotne orijentacije (slika), tako da u „zbroju" na lijevoj strani znaka jednakosti preostaju samo podizrazi za radove sila u ravninama krajnjih presjeka (lijevo od najljevije točke ne postoji $N(0)\,\delta u(0)$, desno od najdesnije točke ne postoji $-N(\ell)\,\delta u(\ell)$).



$$\mathsf{N}(0) = -\mathsf{N}_0 \qquad \mathsf{N}(\ell) = \mathsf{N}_\ell$$

Na lijevome kraju prvoga i na desnome kraju zadnjega odsječka djeluju vanjske sile; označit ćemo ih s $\vec{\mathsf{N}}_0$ i $\vec{\mathsf{N}}_\ell$ (srednja slika). Na lijevom su kraju „dogovorene" pozitivne orijentacije vanjskih i unutarnjih sila različite (srednja i donja slika), pa se mijenja predznak vrijednosti.

Vanjske sile na krajevima mogu biti reakcije ili sile zadane kao opterećenje (primjer na gornjoj slici).

$$N_0\,\delta u(0) + N_\ell\,\delta u(\ell) + \int_0^\ell p(x)\,\delta u(x)\,dx$$

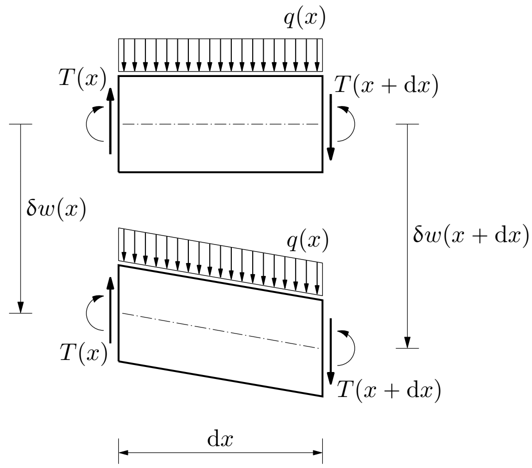
$$= \int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,dx$$

Uvođenjem vrijednostī vanjskih sila na krajevima jednadžba izriče jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila. Svi pribrojnici s lijeve strane znaka jednakosti izražavaju radove vanjskih sila, a integralom na desnoj strani . . .

virtualni rad uzdužnih sila:

$$\boxed{\delta\mathfrak{U}_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\ell N(x)\,\delta\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x}$$

... a integralom na desnoj strani definiran je *rad uzdužnih sila na infinitezimalnim prirastima polja uzdužnih virtualnih pomaka* ili, kraće, *virtualni rad uzdužnih sila*.



$$-T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+\mathrm{d}x)\,\delta w(x+\mathrm{d}x) \;+\; [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x)$$

$$= \; -T(x)\,\delta w(x) \;+\; [T(x)+T'(x)\,\mathrm{d}x]\,[\delta w(x)+\delta w'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x)$$

Za poprečni smjer priču možemo većim dijelom ponoviti, s drugim silama i drugim virtualnim pomacima (i, jasno, s drugim oznakama, pa nakon *copy–paste*a zamjene treba pažljivo provesti):

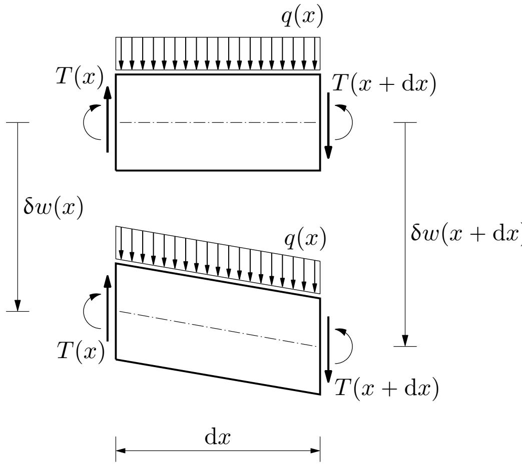
Na infinitezimalni odsječak između poprečnih presjeka kroz točke x i $x + \mathrm{d}x$ okomito na os grede djeluju distribuirana sila $\vec{q}$, poprečna sila $-\vec{T}(x)$ u presjeku x i poprečna sila $\vec{T}(x + \mathrm{d}x)$ u presjeku $x + \mathrm{d}x$ (gornja slika). Vrijednost je rezultirajuće sile distribuirane sile na odsječku $q(x)\,\mathrm{d}x$.

Virtualni su pomaci krajeva po pravcima okomitima na os grede $\delta\vec{w}(x)$ i $\delta\vec{w}(x + \mathrm{d}x)$, a njihove su orijentirane duljine $\delta w(x)$ i $\delta w(x + \mathrm{d}x)$ (donja slika).

Ukupan je virtualni rad sila koje djeluju na odsječak zbroj rada rezultirajuće sile distribuirane sile i radova poprečnih sila na njegovim krajevima (lijeva strana jednakosti).

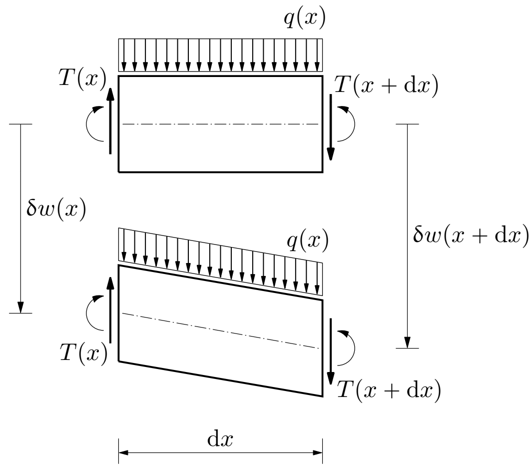
Infinitezimalne priraste funkcija T i δw zamijenili smo diferencijalima $\mathrm{d}T$ i $\mathrm{d}\delta w$ i uvrstili definicije diferencijala (desna strana jednakosti).

Množenjem binomā s desne strane znaka jednakosti dobivamo ... (sljedeća stranica)



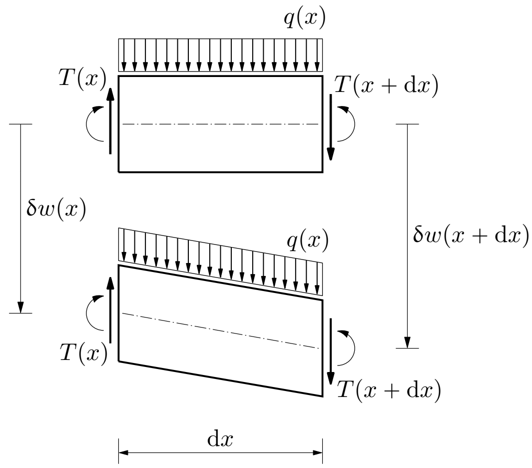
$$
\begin{aligned}
&-T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+\mathrm{d}x)\,\delta w(x+\mathrm{d}x) \;+\; [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x) \\
&\qquad = \cancel{-T(x)\,\delta w(x)} \;+\; \cancel{T(x)\,\delta w(x)} \;+\; T(x)\,[\delta w'(x)\,\mathrm{d}x] \\
&\qquad\qquad + [T'(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x) \;+\; \cancel{T'(x)\,\delta W'(x)\,\mathrm{d}x^2} \;+\; [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x)
\end{aligned}
$$

Prva dva pribrojnika s desne strane po apsolutnoj su vrijednosti jednaka, ali suprotnih predznaka, pa se poništavaju, dok je pribrojnik koji sadrži $\mathrm{d}x^2$ zanemariv.



$$
\begin{aligned}
&-T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+\mathrm{d}x)\,\delta w(x+\mathrm{d}x) \;+\; [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x)\\
&\qquad\qquad = \; T(x)\,[\delta w'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; {\color{red}[T'(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x) + [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x)}
\end{aligned}
$$

Zadnja dva pribrojnika na desnoj strani sadrže $\mathrm{d}x\,\delta w(x)$, . . .



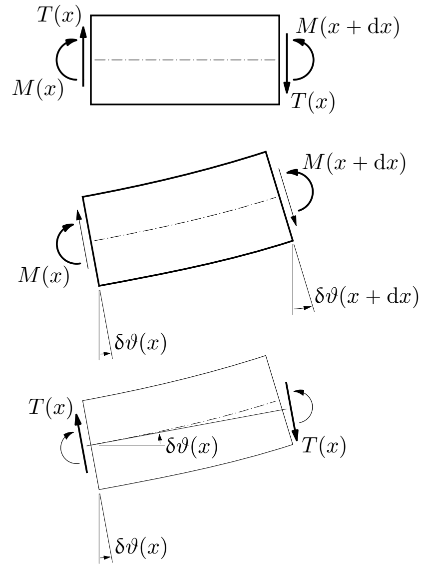
$$
\begin{aligned}
&-\mathsf{T}(x)\,\delta w(x) \;+\; \mathsf{T}(x+\mathrm{d}x)\,\delta w(x+\mathrm{d}x) \;+\; [q(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta w(x) \\
&\qquad\qquad = \;\mathsf{T}(x)\,[\delta w'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; \underbrace{[\mathsf{T}'(x) \;+\; q(x)]}_{0}\,\mathrm{d}x\,\delta w(x)
\end{aligned}
$$

... pa se $\mathrm{d}x\,\delta u(x)$ može izlučiti.

Ako je prije virtualnoga pomicanja odsječak bio u ravnoteži, sile koje djeluju na njega zadovoljavale su diferencijalnu jednadžbu ravnoteže

$$\mathsf{T}'(x) \;+\; q(x) \;=\; 0.$$

Kako se, prema našim pretpostavkama, ni sile ni njihovi geometrijski odnosi pomicanjem nisu promijenili, sile ostaju u ravnoteži, pa podizraz u uglatim zagradama u drugom pribrojniku na desnoj strani iščezava, te ostaje samo jedan, prvi pribrojnik.



$$-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+\mathrm{d}x)\,\delta\vartheta(x+\mathrm{d}x) \;-\; [T(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta\vartheta(x)$$

Priča se sada malo zapliče, jer u poprečnom smjeru još dva lika ulaze na scenu — moment savijanja i moment sprega poprečnih sila.

Pri izvođenju diferencijalne jednadžbe

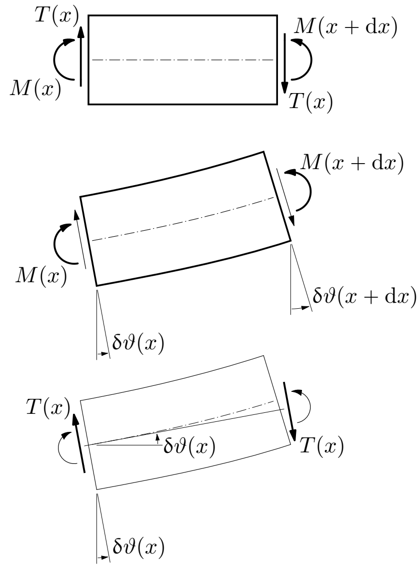
$$M'(x) - T(x) = 0$$

pokazali smo da su utjecaji distribuirane sile i prirasta poprečne sile na momentnu ravnotežu odsječka zanemarivi. Na odsječak nanosimo stoga (samo) moment $-\vec{M}(x)$ i silu $-\vec{T}(x)$ u presjeku x te moment $\vec{M}(x+\mathrm{d}x)$ i silu $\vec{T}(x)$ u presjeku $x+\mathrm{d}x$.

Momenti $-\vec{M}(x)$ i $\vec{M}(x+\mathrm{d}x)$ rade na zaokretima ravnina poprečnih presjeka kutovi kojih su $\delta\vartheta(x)$ i $\delta\vartheta(x+\mathrm{d}x)$. Zanemarimo li infinitezimalni prirast kuta $\delta\vartheta(x+\mathrm{d}x) - \delta\vartheta(x)$, par sila $-\vec{T}(x)$ i $\vec{T}(x)$ tvori spreg moment kojega ima intenzitet $|T(x)|\,\mathrm{d}x$ i negativan smisao vrtnje. Moment sprega radi na zaokretu spojnice hvatištā sila sprega:

$$-[T(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta\vartheta(x) \;=\; -T(x)\,\delta\vartheta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ukupan je virtualni rad momenata koje djeluju na odsječak zbroj radova momenata savijanja na njegovim krajevima i rada sprega poprečnih sila.



$$
\begin{aligned}
-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+\mathrm{d}x)\,\delta\vartheta(x+\mathrm{d}x) \;-\; [T(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta\vartheta(x) \\
= \; M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; \underbrace{[M'(x) - T(x)]}_{0}\,\mathrm{d}x\,\delta\vartheta(x)
\end{aligned}
$$

Nakon već poznatih zamjena, poništavanja, kraćenja i sređivanja, dobivamo jednakost u kojoj se kao podizraz pojavljuje lijeva strana diferencijalne jednadžbe ravnoteže

$$M'(x) \;-\; T(x) \;=\; 0.$$

Zadovoljavaju li momenti savijanja i poprečna sila tu jednadžbu, na desnoj strani jednakosti radova ostaje samo prvi pribrojnik.

$$-T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+\mathrm{d}x)\,\delta w(x+\mathrm{d}x) + q(x)\,\delta w(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \; T(x)\;[\delta w'(x)\,\mathrm{d}x]$$

$$-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+\mathrm{d}x)\,\delta\vartheta(x+\mathrm{d}x) - [T(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta\vartheta(x)$$
$$= \; M(x)\;[\delta\vartheta'(x)\,\mathrm{d}x]$$

$$-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+\mathrm{d}x)\,\delta\vartheta(x+\mathrm{d}x) - [T(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta\vartheta(x)$$
$$-\,T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+\mathrm{d}x)\,\delta w(x+\mathrm{d}x) \;+\; q(x)\,\delta w(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \; M(x)\;[\delta\vartheta'(x)\,\mathrm{d}x] \;+\; T(x)\;[\delta w'(x)\,\mathrm{d}x]$$

Iako i sile i momente prikazujemo vektorima, silu ne možemo pribrojiti momentu. No, rad sile i rad momenta „obični” su brojevi (u kontekstu linearne algebre nazivamo ih skalarima), pa ih možemo zbrojiti.

Izrazu za rad momenata (drugi izraz) pribrojili smo izraz za rad sila u poprečnom smjeru (prvi izraz).

$$-M(x)\,\delta\vartheta(x) + M(x+dx)\,\delta\vartheta(x+dx) - [T(x)\,dx]\,\delta\vartheta(x)$$
$$-T(x)\,\delta w(x) + T(x+dx)\,\delta w(x+dx) + q(x)\,\delta w(x)\,dx$$
$$= M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,dx] + T(x)\,[\delta w'(x)\,dx]$$

$$-M(x)\,\delta\vartheta(x) + M(x+dx)\,\delta\vartheta(x+dx)$$
$$-T(x)\,\delta w(x) + T(x+dx)\,\delta w(x+dx) + q(x)\,\delta w(x)\,dx$$
$$= M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,dx] + T(x)\,\delta\vartheta(x)\,dx + T(x)\,\delta w'(x)\,dx$$

U dobivenom smo izrazu pribrojnik $-T(x)\,\delta\vartheta(x)\,dx$ prebacili na desnu stranu znaka jednakosti.

$$
\begin{aligned}
&-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+dx)\,\delta\vartheta(x+dx) \\
&\qquad -T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+dx)\,\delta w(x+dx) \;+\; q(x)\,\delta w(x)\,dx \\
&\qquad\qquad = \; M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,dx] \;+\; T(x)\,\delta\vartheta(x)\,dx \;+\; T(x)\,\delta w'(x)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+dx)\,\delta\vartheta(x+dx) \\
&\qquad -T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+dx)\,\delta w(x+dx) \;+\; q(x)\,\delta w(x)\,dx \\
&\qquad\qquad = \; M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,dx] \;+\; T(x)\,\big([\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)]\,dx\big)
\end{aligned}
$$

Dva pribrojnika na desnoj strani sada sadrže podizraz $T(x)\,dx$, pa smo ga izlučili.

Prvim pribrojnikom iza znaka jednakosti definiran je . . . , dok je drugim pribrojnikom definiran . . . (sljedeća stranica i ona iza nje).

infinitezimalni rad momenta savijanja na infinitezimalnome prirastu polja virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka:

$$\mathrm{d}\delta\mathfrak{U}_M(x, \mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,\mathrm{d}x]$$

Bernoulli–Eulerova greda:

$$\delta\vartheta = \delta\varphi = -\delta w' \qquad \Rightarrow \qquad \delta\vartheta' = \delta\varphi' = -\delta w'' = \delta\kappa$$

$$\mathrm{d}\delta\mathfrak{U}_M(x, \mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} M(x)\,[\delta\kappa(x)\,\mathrm{d}x]$$

$$\delta\vartheta = -\delta w' \qquad \Rightarrow \qquad T(x)\,\big([\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)]\,\mathrm{d}x\big) = 0$$

Prvim pribrojnikom iza znaka jednakosti definiran je *infinitezimalni rad momenta savijanja na infinitezimalnome prirastu polja virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka*.

Na prošlom smo predavanju naveli da su u Bernoulli–Eulerovoj teoriji kutovi zaokretā ravnina poprečnih presjeka jednaki kutovima koje tangente na deformiranu os grede zatvaraju s osi x, $\delta\vartheta = \delta\varphi = -\delta w'$, pa infinitezimalni rad momenta savijanja možemo zapisati i u obliku

$$\mathrm{d}\delta\mathfrak{U}_M(x, \mathrm{d}x) = M(x)\,[\delta\kappa(x)\,\mathrm{d}x].$$

Iz $\delta\vartheta = -\delta w'$ uz to slijedi $\delta\vartheta(x) + \delta w'(x) = 0$, pa drugi pribrojnik iza znaka jednakosti iščezava — poprečna sila u Bernoulli–Eulerovoj teoriji ne radi.

Timošenkova greda:

$$\delta\vartheta \;=\; \delta\varphi + \delta\gamma \;=\; -\delta w' + \delta\gamma \qquad \Rightarrow \qquad \delta\vartheta - \delta\varphi \;=\; \delta\vartheta + \delta w' \;=\; \delta\gamma$$

$$\mathsf{T}(x)\,\big([\delta\vartheta(x) + \delta w'(x)]\,\mathrm{d}x\big) \;=\; \mathsf{T}(x)\,[\delta\gamma(x)\,\mathrm{d}x]$$

infinitezimalni rad poprečne sile na infinitezimalnome prirastu polja virtualnih „klizanja" ravnina poprečnih presjeka:

$$\mathrm{d}\delta\mathfrak{U}_{\mathsf{T}}(x, \mathrm{d}x) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \mathsf{T}(x)\,[\delta\gamma(x)\,\mathrm{d}x]$$

U Timošenkovoj je teoriji kut zaokreta normale na ravninu poprečnoga presjeka sastavljen od kuta zaokreta tangente na os grede i kuta zbog „klizanja" te ravnine.

Budući da je kut zaokreta normale na ravninu poprečnoga presjeka jednak kutu zaokreta te ravnine, slijedi da je u Timošenkovoj teoriji drugim pribrojnikom definiran *infinitezimalni rad poprečne sile na infinitezimalnom prirastu polja virtualnih „klizanja" ravnina poprečnih presjeka*.

Prvim je pribrojnikom i u Timošenkovoj teoriji definiran infinitezimalni rad momenta savijanja na infinitezimalnome prirastu polja virtualnih zaokreta ravnina poprečnih presjeka, ali sada taj prirast ne možemo zapisati kao $\delta\kappa = -\delta w''$.

Bernoulli–Eulerova greda:

$$
\begin{aligned}
-M(x)\,\delta\varphi(x) \;+\; M(x+dx)\,\delta\varphi(x+dx)& \\
-\;T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+dx)\,\delta w(x+dx) \;+\; q(x)\,\delta w(x)\,dx& \\
=\; M(x)\,[\delta\kappa(x)\,dx]&
\end{aligned}
$$

Timošenkova greda:

$$
\begin{aligned}
-M(x)\,\delta\vartheta(x) \;+\; M(x+dx)\,\delta\vartheta(x+dx)& \\
-\;T(x)\,\delta w(x) \;+\; T(x+dx)\,\delta w(x+dx) \;+\; q(x)\,\delta w(x)\,dx& \\
=\; M(x)\,[\delta\vartheta'(x)\,dx] \;+\; T(x)\,[\delta\gamma(x)\,dx]&
\end{aligned}
$$

Dakle, za virtualan rad momenata i sila u poprečnom smjeru na infinitezimalnom odsječku Bernoulli–Eulerove grede možemo napisati prvi, a za virtualan rad na infinitezimalnom odsječku Timošenkove grede drugi izraz.

Bernoulli–Eulerova greda:

$$M_0\,\delta\varphi(0) + M_\ell\,\delta\varphi(\ell) + T_0\,\delta w(0) + T_\ell\,\delta w(\ell) + \int_0^\ell q(x)\,\delta w(x)\,dx$$
$$= \int_0^\ell M(x)\,\delta\kappa(x)\,dx$$

virtualni rad momenata savijanja:

$$\boxed{\delta\mathfrak{U}_M \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\ell M(x)\,\delta\vartheta'(x)\,dx = \int_0^\ell M(x)\,\delta\varphi'(x)\,dx = \int_0^\ell M(x)\,\delta\kappa(x)\,dx}$$

Integriranjem izraza za infinitezimalni odsječak Bernoulli–Eulerove grede u granicama od 0 do ℓ i uvođenjem vrijednosti vanjskih sila na krajevima dobivamo jednadžbu koja izriče jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila. Svi pribrojnici s lijeve strane znaka jednakosti izražavaju radove vanjskih sila, integralom na desnoj strani definiran je *rad momenata savijanja na infinitezimalnim prirastima polja virtualnih zaokreta poprečnih presjeka* ili, kraće, *virtualni rad momenata savijanja*.

Timošenkova greda:

$$M_0\,\delta\vartheta(0) + M_\ell\,\delta\vartheta(\ell) + T_0\,\delta w(0) + T_\ell\,\delta w(\ell) + \int_0^\ell q(x)\,\delta w(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\ell \big[M(x)\,\delta\vartheta'(x) + T(x)\,\delta\gamma(x)\big]\,\mathrm{d}x$$

virtualni rad momenata savijanja:

$$\boxed{\delta\mathfrak{U}_M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^\ell M(x)\,\delta\vartheta'(x)\,\mathrm{d}x}$$

virtualni rad poprečnih sila:

$$\boxed{\delta\mathfrak{U}_T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^\ell T(x)\,\delta\gamma(x)\,\mathrm{d}x}$$

Analogno, integriranjem od 0 do ℓ izraza za infinitezimalni odsječak Timošenkove grede i uvođenjem vrijednosti vanjskih sila na krajevima dobivamo jednadžbu koja izriče jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila.

Integral na desnoj strani može se zapisati kao zbroj dvaju integrala.

Prvim je integralom definiran virtualan rad momenata savijanja. Drugi je integral definicija *rada poprečnih sila na infinitezimalnim prirastima polja virtualnih „klizanja" ravnina poprečnih presjeka* ili, kraće, *virtualni rad poprečnih sila*. Virtualni rad poprečnih sila postoji samo u Timošenkovoj teoriji savijanja.

i na kraju, kad sve zbrojimo:

Bernoulli–Eulerova greda:

$$
\begin{aligned}
&N_0\,\delta u(0) + N_\ell\,\delta u(\ell) + T_0\,\delta w(0) + T_\ell\,\delta w(\ell) \\
&\qquad + M_0\,\delta\varphi(0) + M_\ell\,\delta\varphi(\ell) + \int_0^\ell \big[p(x)\,\delta u(x) + q(x)\,\delta w(x)\big]\,dx \\
&\qquad\qquad = \int_0^\ell \big[N(x)\,\delta\varepsilon(x) + M(x)\,\delta\kappa(x)\big]\,dx \\
&\qquad\qquad\qquad \forall\,\delta u \quad \& \quad \forall\,\delta w
\end{aligned}
$$

Ako na gredu djeluju distribuirane sile na pravcu njezine osi i okomito na os, . . .

i na kraju, kad sve zbrojimo:

Timošenkova greda:

$$
\begin{aligned}
N_0\,\delta u(0) &+ N_\ell\,\delta u(\ell) + T_0\,\delta w(0) + T_\ell\,\delta w(\ell) \\
&+ M_0\,\delta\vartheta(0) + M_\ell\,\delta\vartheta(\ell) + \int_0^\ell \big[p(x)\,\delta u(x) + q(x)\,\delta w(x)\big]\,dx \\
&= \int_0^\ell \big[N(x)\,\delta\varepsilon(x) + T(x)\,\delta\gamma(x) + M(x)\,\delta\vartheta'(x)\big]\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \forall\,\delta u \quad \& \quad \forall\,\delta w \quad \& \quad \forall\,\delta\vartheta
\end{aligned}
$$

Ako na gredu djeluju distribuirane sile na pravcu njezine osi i okomito na os, . . .

prvi dio teorema o virtualnim pomacima za deformabilne sisteme:

ako se konstrukcija pod zadanim opterećenjem nalazi u stanju ravnoteže, onda je rad stvarnih vanjskih sila na po volji odabranim poljima virtualnih pomaka (lijeve strane jednadžbi) *jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja* (desne strane jednadžbi)

sažeti izraz jednakosti virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila:

$$\boxed{\delta\mathfrak{V} = \delta\mathfrak{U} \qquad \forall\, \delta\mathfrak{u}}$$

Na prethodnim smo stranicama, s početkom na stranici 14., dokazali prvi dio teorema o virtualnim pomacima.

U Timošenkovoj teoriji odabiremo polja virtualnih translacijskih pomaka δu i δw te polje virtualnih zaokreta poprečnih presjeka koje opisujemo poljem kutova zaokreta $\delta\vartheta$. U Bernoulli–Eulerovoj teoriji kutovi zaokreta poprečnih presjeka jednaki su kutovima nagiba tangenata na progibnu liniju, $\delta\vartheta = \delta\varphi$, a te pak kutove određuje polje vrijednostī poprečnih pomaka izrazom $\delta\varphi = -\delta w'$, tako da je sada dovoljno odabrati polja virtualnih translacijskih pomaka δu i δw.

Loša je vijest da prvi dio teorema sa stajališta provedbe proračuna nije pretjerano koristan — ne daje nam neki novi, lakši, brži ili šire primjenjiv proračunski postupak. Uvjetna je postavka toga dijela ravnotežno stanje, dok je posljedična postavka jednakost virtualnih radova: ako znamo reakcije i unutarnje sile koje uravnotežuju zadano opterećenje i ako nàsumicē odaberemo polja virtualnih pomaka, pokazat će se da te sile i ta polja zadovoljavaju jednadžbu koja izražava jednakost radova. No, ako je ravnotežno stanje poznato, znači da smo jednadžbe ravnoteže na neki način već riješili.

drugi dio (obrat prvoga dijela) teorema o virtualnim pomacima:

ako je rad stvarnih vanjskih sila na svim poljima virtualnih pomaka jednak radu stvarnih unutarnjih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja, onda su vanjske i unutarnje sile u ravnoteži

---

Drugim riječima, uspijemo li za neki sistem vanjskih i unutarnjih sila pokazati da zadovoljavaju jednadžbu

$$\delta\mathfrak{V} = \delta\mathfrak{U}$$

na svim poljima virtualnih pomaka, znat ćemo da je uravnotežen.

Obrat prvoga dijela teorema (ili: drugi dio teorema) mnogo je zanimljiviji i svrsishodniji — to je teorijski temelj niza metoda, ponajviše približnih, numeričkih, poput metode konačnih elemenata, koje su primjenjive na znatno veći skup zadataka negoli analitičko rješavanje jednadžbi građevne statike i, općenitije, jednadžbi teorije elastičnosti.

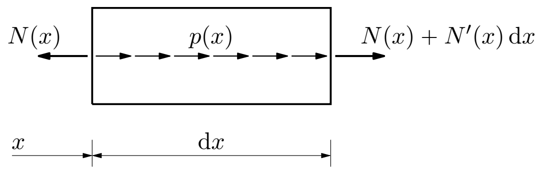
$$\delta\mathfrak{V}_N = \delta\mathfrak{U}_N$$

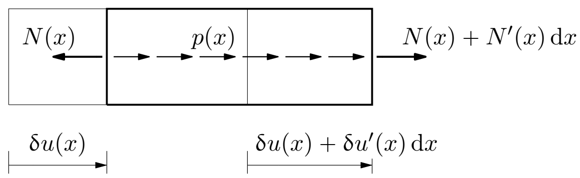
$$N_0\,\delta u(0) + N_\ell\,\delta u(\ell) + \int_0^\ell p(x)\,\delta u(x)\,dx$$
$$= \int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,dx \qquad \forall\,\delta u$$

Obrat ćemo dokazati samo za uzdužni smjer.

Pretpostavljamo, dakle, da je rad stvarnih vanjskih sila koje djeluju na osi nosača na svim poljima virtualnih pomaka po osi jednak radu stvarnih uzdužnih sila na infinitezimalnim prirastima tih polja. Treba pokazati da te vanjske i unutarnje sile zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu ravnoteže uzdužnih sila

$$N'(x) + p(x) = 0.$$





$$
\begin{aligned}
-N(x)\,\delta u(x) \;+\; & N(x+\mathrm{d}x)\,\delta u(x+\mathrm{d}x) \\
= \;& \cancel{-N(x)\,\delta u(x)} \;+\; \cancel{N(x)\,\delta u(x)} \;+\; N(x)\,[\delta u'(x)\,\mathrm{d}x] \\
& + [N'(x)\,\mathrm{d}x]\,\delta u(x) \;+\; \cancel{N'(x)\,\delta u'(x)\,\mathrm{d}x^2}
\end{aligned}
$$

Zamjenom infinitezimalnih prirasta funkcija N i δu diferencijalima virtualni ćemo rad uzdužnih sila na krajevima infinitezimalnoga odsječka (lijeva strana jednakosti) prikazati na drugi način (desna strana).

$$
\begin{aligned}
-N(x)\,\delta u(x) \;+\; N(x+dx)\,\delta u(x+dx) \\
&= \; N(x)\,[\delta u'(x)\,dx] \;+\; [N'(x)\,dx]\,\delta u(x)
\end{aligned}
$$

$$
-N(0)\,\delta u(0) \;+\; N(\ell)\,\delta u(\ell) \;=\; \int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,dx + \int_0^\ell N'(x)\,dx\,\delta u(x)
$$

Integriranjem dobivene (prve) jednakosti dobivamo drugu jednakost . . .

$$-N(0)\,\delta u(0) \,+\, N(\ell)\,\delta u(\ell) \,=\int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,dx + \int_0^\ell N'(x)\,dx\,\delta u(x)$$

$$\int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,dx \,=\, -N(0)\,\delta u(0) \,+\, N(\ell)\,\delta u(\ell) - \int_0^\ell N'(x)\,dx\,\delta u(x)$$

... pa virtualni rad uzdužnih sila (na cijeloj gredi) možemo pisati kao ...

$$N_0\,\delta u(0) \,+\, N_\ell\,\delta u(\ell) \,+ \int_0^\ell p(x)\,\delta u(x)\,dx$$
$$= \int_0^\ell N(x)\,\delta u'(x)\,dx \qquad \forall\,\delta u$$

$$N_0\,\delta u(0) + N_\ell\,\delta u(\ell) \,+ \int_0^\ell p(x)\,\delta u(x)\,dx$$
$$= \,-N(0)\,\delta u(0) \,+\, N(\ell)\,\delta u(\ell) \,- \int_0^\ell N'(x)\,\delta u(x)\,dx \qquad \forall\,\delta u$$

Dobiveni izraz za virtualni rad uzdužnih sila uvrstili smo u jednadžbu koja izriče jednakost virtualnih radova vanjskih i unutarnjih sila . . .

$$[N(0) + N_0]\, \delta u(0) \; + \; [-N(\ell) + N_\ell]\, \delta u(\ell)$$

$$+ \int_0^\ell [N'(x) + p(x)]\, \delta u(x)\, dx \; = \; 0 \qquad \forall\, \delta u$$

... te preuredili dobivenu jednadžbu povezivanjem pribrojnika kojima su izraženi radovi na pomacima istih točaka.

$$[N(0) + N_0]\,\delta u(0) \;+\; [-N(\ell) + N_\ell]\,\delta u(\ell)$$

$$+ \int_0^\ell [N'(x) + p(x)]\,\delta u(x)\,dx \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u$$

$$[N(0) + N_0]\,\delta u(0) \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u(0)$$

$$[-N(\ell) + N_\ell]\,\delta u(\ell) \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u(\ell)$$

$$\int_0^\ell [N'(x) + p(x)]\,\delta u(x)\,dx \;=\; 0 \qquad \forall\,\delta u$$

Budući da se vrijednosti pojedinih pribrojnika u dobivenoj jednadžbi mogu neovisno mijenjati, svaki od njih mora biti jednak nuli, i to za bilo virtualni pomak.

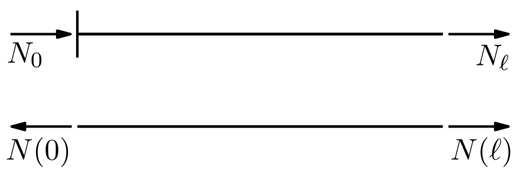
$$[N(0) + N_0]\, \delta u(0) \;=\; 0 \qquad \forall\, \delta u(0)$$

$$[-N(\ell) + N_\ell]\, \delta u(\ell) \;=\; 0 \qquad \forall\, \delta u(\ell)$$

$$[(b+c)\,x = 0] \qquad a\,x = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \qquad [b+c=0]$$

$$N(0) + N_0 \;=\; 0 \qquad\qquad N(0) \;=\; -N_0$$

$$-N(\ell) + N_\ell \;=\; 0 \qquad\qquad N(\ell) \;=\; N_\ell$$



Za prva dva pribrojnika to znači:

$N(0)$, $N(\ell)$, N_0, N_ℓ, $\delta u(0)$ i $\delta u(\ell)$ su brojevi, pa su ta dva uvjeta oblika

$(b+c)\,x = 0$ odnosno $a\,x = 0$ *za bilo koji* x,

a to je moguće samo ako je $a = 0$, odnosno $b + c = 0$, odnosno $b = -c$.

Dobiveni izrazi nazivaju se *prirodnim rubnim uvjetima*, a izražavaju vrijednostī unutarnjih sila na krajevima grede pomoću vrijednostī vanjskih sila u tim točkama.

$$\int_0^\ell [N'(x) + p(x)]\, \delta u(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, \delta u$$

osnovna lema varijacijskoga računa:

ako neprekidna funkcija f *zadovoljava jednadžbu*

$$\int_a^b f(x)\, \delta(x)\, dx = 0$$

za sve funkcije δ*, onda je* $f = 0$ *na* $\langle a, b \rangle$

$$N'(x) + p(x) = 0 \qquad \text{za} \quad x \in \langle 0, \ell \rangle$$

Tvrdnja da iz

$$\int_0^\ell [N'(x) + p(x)]\, \delta u(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, \delta u$$

slijedi

$$N'(x) + p(x) = 0 \qquad \text{za} \quad x \in \langle 0, \ell \rangle$$

nije tako očigledna. (Uz površni bismo pogled rekli da znamo da određeni integral može biti jednak nuli iako podintegralna nije nulfunkcija; primjerice, $\int_0^{2\pi} \sin x = 0$. No, u našem je slučaju podintegralna funkcija umnožak dviju funkcija, pa je priča malo složenija.)

Zato se u grani matematike zvanoj *varijacijski račun* dokazuje navedena *osnovna lema* (lema je pomoćni teorem čiji se rezultat upotrebljava pri dokazivanju važnijega teorema, često i niza teorema).

Lemu nećemo ovdje dokazivati (radoznali mogu razmjerno kratak dokaz naći u skriptama na stranici 205). No, prihvatimo li da osnovna lema varijacijskoga računa vrijedi, traženi zaključak neposredno slijedi.

Time smo dokazali obrat teorema o virtualnim pomacima za deformabilne sisteme.