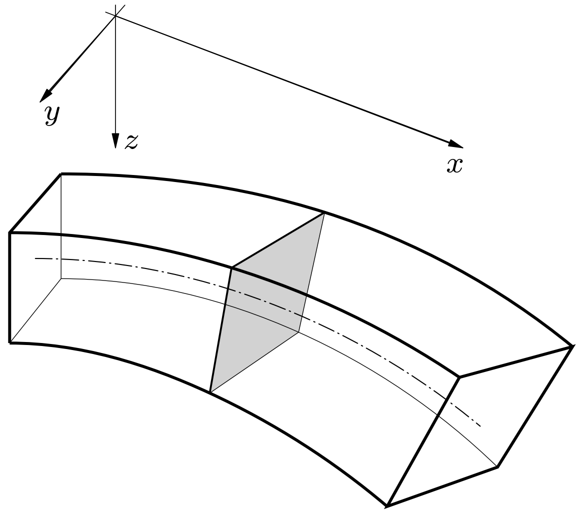
Građevna statika 1.

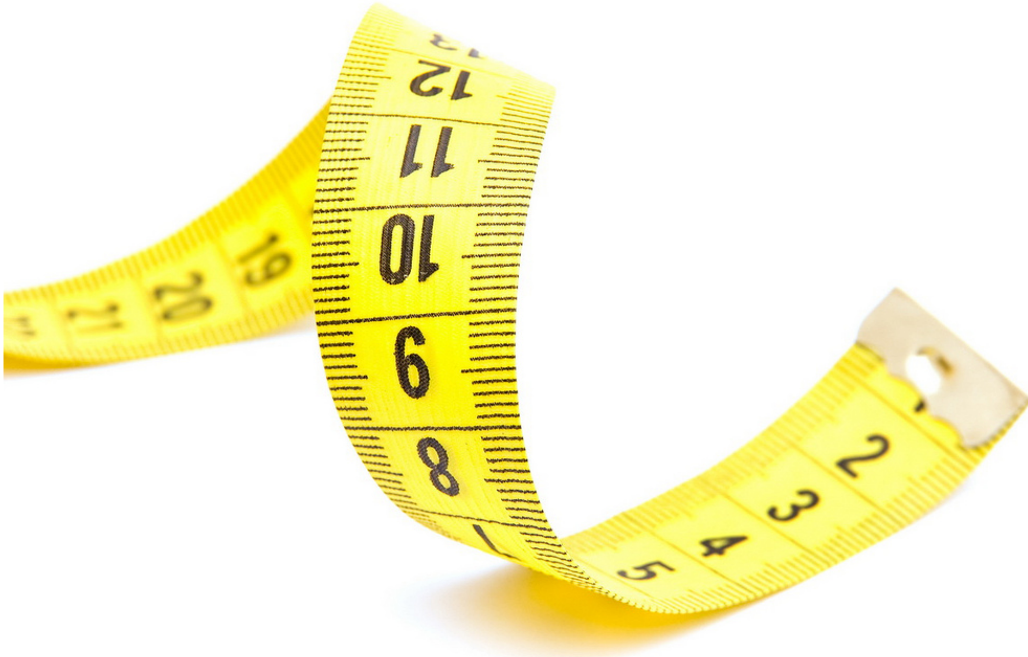
Pomaci (i zaokreti)

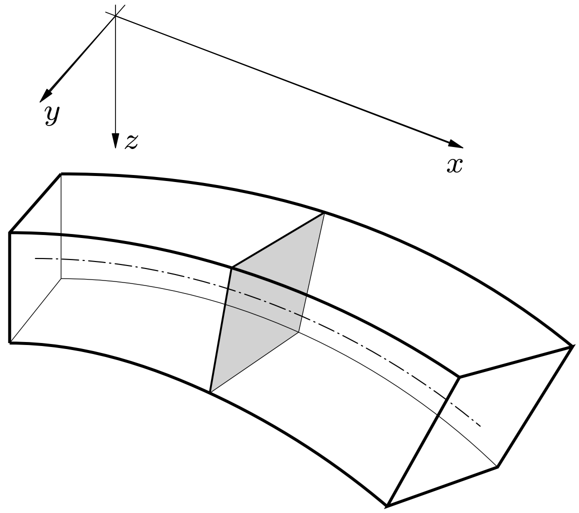


$$\vec{r}_0 \;:\; s \;\mapsto\; \vec{r}_0(s) \;=\; x_0(s)\,\vec{\imath} + y_0(s)\,\vec{\jmath} + z_0(s)\,\vec{k}, \qquad s \in [0, \ell_0]$$

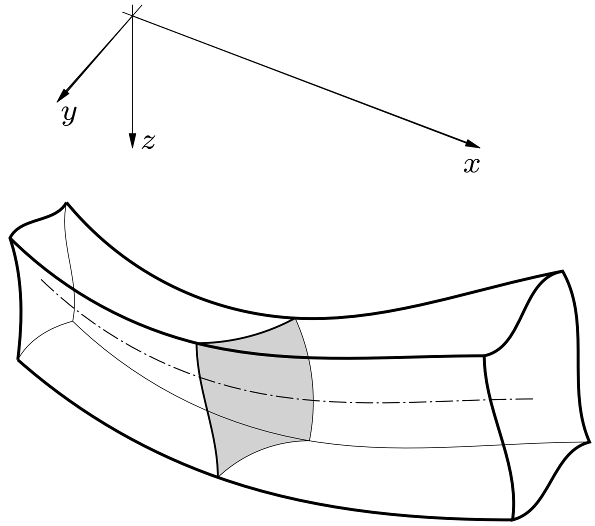
Štap je razmjerno vitko tijelo koje u analizi ponašanja pod raznim djelovanjima opisujemo s pomoću osi i niza poprečnih presjeka.

Os nedeformiranoga zakrivljenog štapa u općem je slučaju ograničena parametarska krivulja $\vec{r}_0$. Za parametar s uzimamo duljinu luka osi. Poprečni presjeci nastaju presijecanjem štapa ravninama okomitima na os; poprečni su presjeci, prema tome, ravninski likovi.





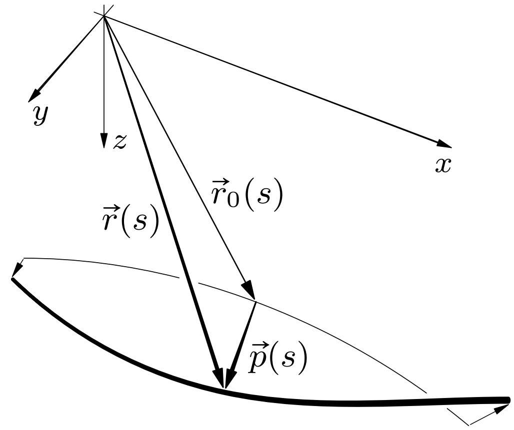
$$\vec{r}_0 \,:\, s \,\mapsto\, \vec{r}_0(s) \,=\, x_0(s)\,\vec{\imath} + y_0(s)\,\vec{\jmath} + z_0(s)\,\vec{k}, \qquad s \in [0, \ell_0]$$



$$\vec{r} \,:\, s \;\mapsto\; \vec{r}(s) \;=\; x(s)\,\vec{\imath} + y(s)\,\vec{\jmath} + z(s)\,\vec{k}, \qquad s \in [0, \ell_0]$$

Pod opterećenjem i pri nekim drugim djelovanjima, kao što su promjene temperature i vlage ili prisilni pomaci, štap se pomiče i mijenja oblik. Pomaknutu i deformiranu os štapa u ravnotežnom stanju opisujemo parametarskom krivuljom $\vec{r}$.

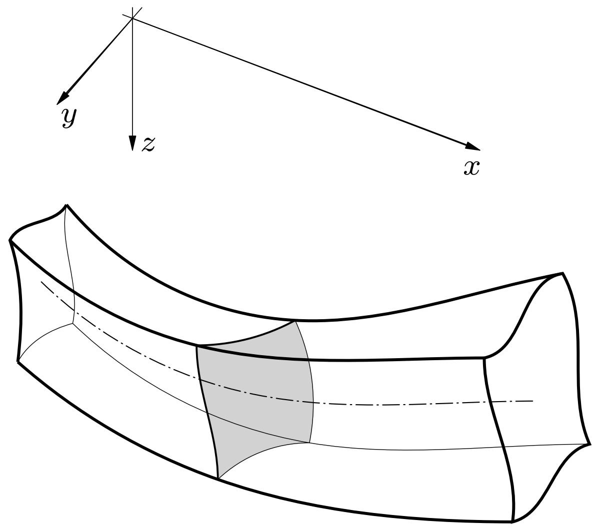
I poprečni se presjeci deformiraju: ravninski se likovi „iskrivljuju" i „izlaze iz svojih ravnina" te postaju likovima na plohama. Zbog toga bi trebalo pratiti pomak svake točke poprečnoga presjeka, što traži primjenu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.



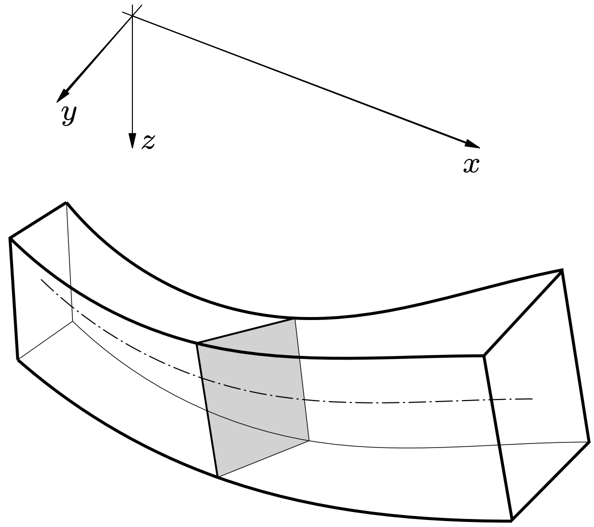
$$
\begin{aligned}
\vec{p}(s) &= \vec{r}(s) - \vec{r}_0(s) \\
&= [x(s) - x_0(s)]\,\vec{\imath} + [y(s) - y_0(s)]\,\vec{\jmath} + [z(s) - z_0(s)]\,\vec{k} \\
&= u(s)\,\vec{\imath} + v(s)\,\vec{\jmath} + w(s)\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Ipak, zbog vitkosti štapa krivulja $\vec{r}$ daje dovoljno točnu sliku njegova položaja i oblika, pa se uz dodatne pretpostavke možemo vratiti na funkciju jedne varijable, graf koje je os štapa, i obične diferencijalne jednadžbe (kao u slučaju diferencijalnih jednadžbi ravnoteže).

Pomak točke s osi štapa opisujemo vektorom pomaka $\vec{p}(s)$.

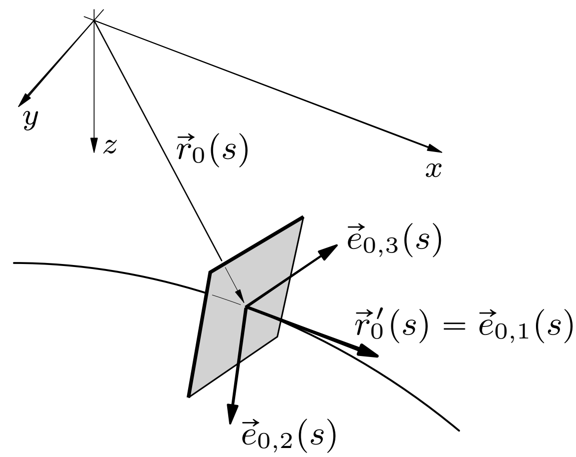


y
z
x



Osnovna pretpostavka dviju teorija štapova koje ćemo opisati pretpostavka je da poprečni presjeci i nakon pomicanja i deformiranja štapa ostaju ravni te da ni u svojoj ravnini ne mijenjaju oblik, odnosno da se poprečni presjeci tijekom pomicanja i deformiranja štapa ponašaju kao krute tanke ploče. [Usporedite prikaze deformiranih presjeka na ovoj (pretpostavka) i prethodnoj („stvarno stanje") stranici!]

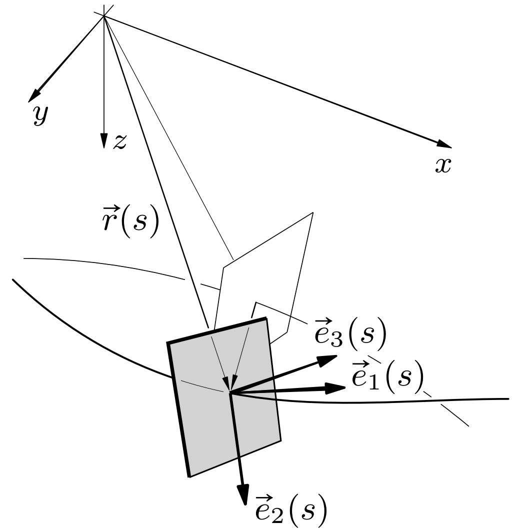
Teorije se razlikuju po tome pretpostavljamo li da su ravninski likovi, u koje izvorni poprečni presjeci prelaze pomicanjem, poprečni presjeci deformiranoga štapa ili ne — drugim riječima, jesu li okomiti na deformiranu os ili ne.



U svakoj točki $\vec{r}_0(s)$ osi $\vec{r}_0$ uvodimo lokalni koordinatni sustav $\big(\xi_0, \eta_0, \zeta_0\big)(s)$.

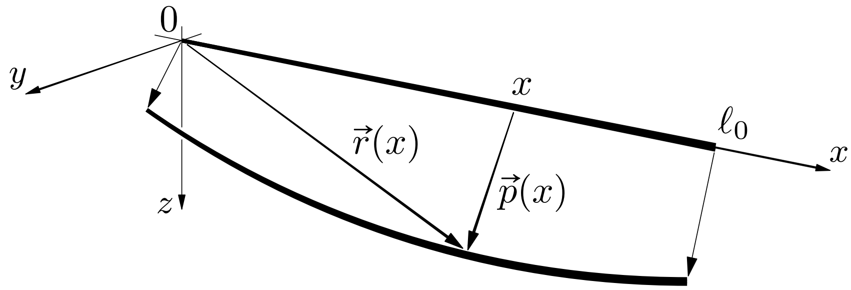
Prva je koordinatna os na pravcu tangente na os $\vec{r}_0$ u promatranoj točki, a određena je vektorom $\vec{t}_0(s) = \vec{r}_0{}'(s)$; može se pokazati da je $\vec{r}_0{}'(s)$ jedinični vektor. Za pozitivan smisao osi $\xi_0(s)$ uzimamo smisao vektora $\vec{t}_0(s)$, tako da je taj vektor prvi vektor ortonormirane baze lokalnoga koordinatnog sustava: $\vec{e}_{0,1}(s) = \vec{t}_0(s)$.

Budući da je ravnina $\varpi_0(s)$ poprečnoga presjeka kroz točku $\vec{r}_0(s)$ okomita na tangentu $\vec{t}_0(s)$, osi $\eta_0(s)$ i $\zeta_0(s)$ leže u toj ravnini. Uzet ćemo da se poklapaju s glavnim osima tromosti poprečnoga presjeka, a orijentirat ćemo ih tako da vektori $\vec{e}_{0,1}(s)$, $\vec{e}_{0,2}(s)$ na $\eta_0(s)$ i $\vec{e}_{0,3}(s)$ na $\zeta_0(s)$ tvore desnu ortonormiranu bazu.



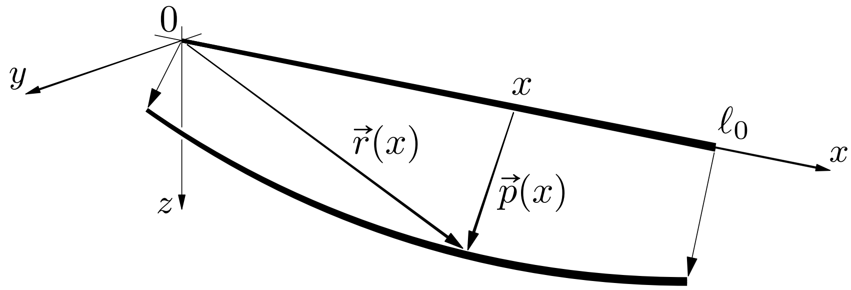
Vektori $\vec{e}_{0,1}(s)$, $\vec{e}_{0,2}(s)$, $\vec{e}_{0,3}(s)$ pri pomicanju i deformiranju štapa prelaze u vektore $\vec{e}_1(s)$, $\vec{e}_2(s)$, $\vec{e}_3(s)$. Prema pretpostavci se ravnina poprečnoga presjeka ne deformira, pa su i vektori $\vec{e}_2(s)$ i $\vec{e}_3(s)$ jedinični i međusobno okomiti, a razapinju ravninu $\varpi(s)$ u koju je poprečni presjek prenesen iz ravnine $\varpi_0(s)$.

Vektor $\vec{e}_{0,1}(s)$ normala je ravnine poprečnoga presjeka, pa je i vektor $\vec{e}_1(s)$ okomit na ravninu u koju je taj presjek prenesen te vrijedi $\vec{e}_1(s) = \vec{e}_2(s) \times \vec{e}_3(s)$, ali ta ravnina ne mora biti okomita na os $\vec{r}$, tako da se $\vec{e}_1(s)$ ne mora poklapati s jediničnim vektorom $\vec{t}(s)$ kojim je određena tangenta na krivulju $\vec{r}$ u točki $\vec{r}(s)$.



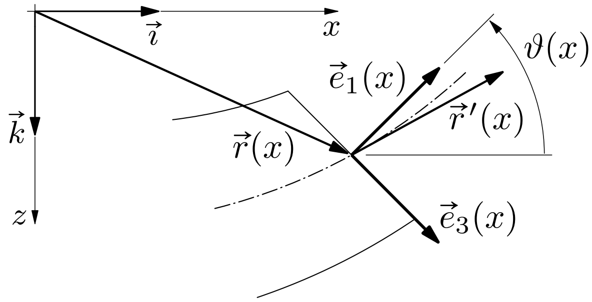
U nastavku ćemo se baviti ravnim štapovima.

Neopterećeni ravni štap duljine ℓ_0 smjestit ćemo u koordinatni sustav tako da se segment $[0, \ell_0]$ na osi x poklapa s osi štapa i parametar s zamijenili apscisom x, tako da je početni položaj točke $\vec{r}_0(s)$ opisan radijus–vektorom $\vec{r}_0(x) = x\,\vec{\imath}$.



$$\begin{aligned}\vec{r}(x) &= \vec{r}_0(x) + \vec{p}(x) = x\,\vec{\imath} + \vec{p}(x)\\ &= x\,\vec{\imath} + u(x)\,\vec{\imath} + v(x)\,\vec{\jmath} + w(x)\,\vec{k}\\ &= \big[x + u(x)\big]\,\vec{\imath} + v(x)\,\vec{\jmath} + w(x)\,\vec{k}\end{aligned}$$

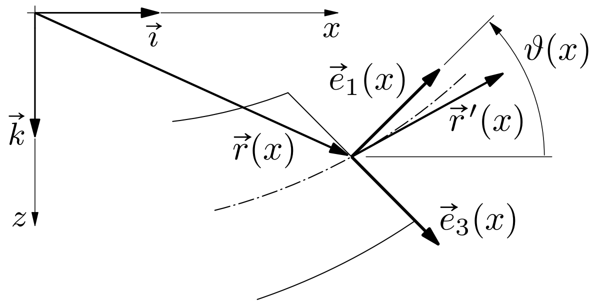
$\vec{r}(x)$ je „novi" položaj točke $\vec{r}_0(x)$, opisan radijus–vektorom $\vec{r}(x)$. Točka $\vec{r}_0(x)$ u položaj $\vec{r}(x)$ dolazi pomakom za vektor $\vec{p}(x)$.



Ako su svi poprečni presjeci simetrični u odnosu na ravninu xz i ako su pravci djelovanja svih vanjskih sila u toj ravnini, a vektori svih vanjskih momenata okomiti na nju, onda su, znamo, i unutarnje sile u toj ravnini, dok su vektori unutarnjih momenata okomiti na nju.

Točke štapa koje su u ravnini xz pomiču se u njoj, pa u njoj ostaje i deformirana os štapa. Točke štapa koje leže na pravcu okomitom na ravninu xz imaju jednake pomake, pa ravnine poprečnih presjeka ostaju okomite na nju.

Ponašanje presjeka štapa s ravninom xz daje stoga potpunu sliku ponašanja štapa.



$$
\begin{aligned}
\vec{r}(x) &= \vec{r}_0(x) + \vec{p}(x) \\
&= x\,\vec{\imath} + u(x)\,\vec{\imath} + w(x)\,\vec{k} \\
&= [x + u(x)]\,\vec{\imath} + w(x)\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

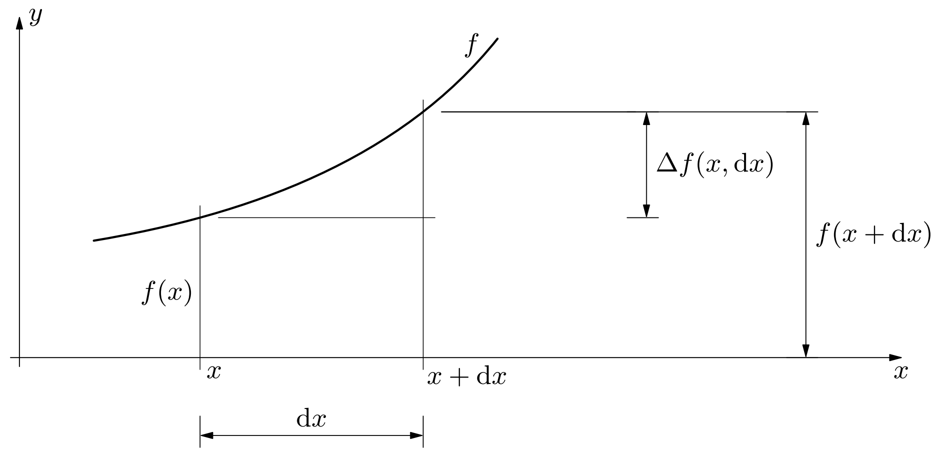
$$
\vec{r}\,'(x) = \big[1 + u'(x)\big]\,\vec{\imath} + w'(x)\,\vec{k}
$$

Sada se $\vec{r}(x)$ i $\vec{r}\,'(x)$ vektori u ravnini xz.

Uzdužni je pomak $u(x)\,\vec{\imath}$, a njegova je orijentirana duljina $u(x)$. Poprečni je pomak $w(x)\,\vec{k}$, dok je $w(x)$ njegova orijentirana duljina.

Vektor $\vec{r}\,'(x)$ je, rekli smo, vektor kojim je određena tangenta na deformiranu os u točki $\vec{r}(x)$. Pomoću njega ćemo deformacije štapa matematički opisati.

podsjetnik: geometrijska interpretacija derivacije funkcije



$$f(x + \mathrm{d}x) \; = \; f(x) \; + \; \Delta f(x, \mathrm{d}x)$$

Graf funkcije

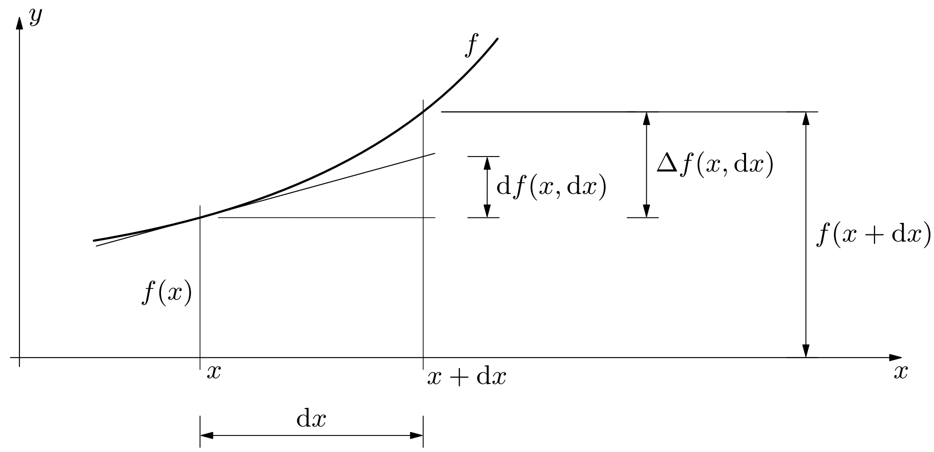
$$f \, : \, \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f \, : \, x \mapsto f(x).$$

ravninska je krivulja.

Ako se varijabla x poveća za neizmjerno malu (infinitezimalnu) vrijednost $\mathrm{d}x$, vrijednost funkcije f promijenit će se za *neizmjerno mali (infinitezimalni) prirast*

$$\Delta f(x, \mathrm{d}x) \; = \; f(x + \mathrm{d}x) \; - \; f(x).$$

 geometrijska interpretacija derivacije funkcije



$$f(x + \mathrm{d}x) \;=\; f(x) + \Delta f(x, \mathrm{d}x) \simeq f(x) + \mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)$$

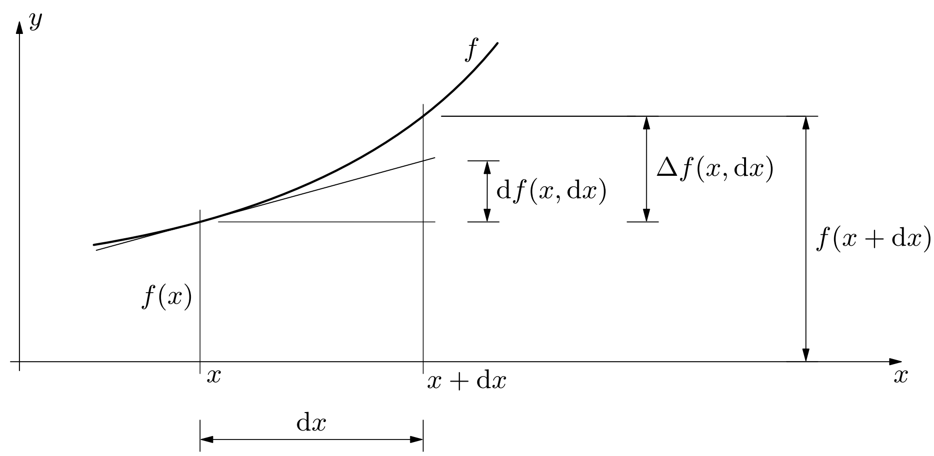
Infinitezimalni prirast $\Delta f(x, \mathrm{d}x)$ zamjenjujemo/aproksimirano diferencijalom $\mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)$.

Diferencijal $\mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)$ funkcije f je infinitezimalni prirast funkcije kojom je opisana tangenta na graf funkcije f u točki $\big(x, f(x)\big)$ ako se x poveća za $\mathrm{d}x$.

Razlika $|\Delta f(x, \mathrm{d}x) - \mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)|$ infinitezimalnoga prirasta i diferencijala zanemariva je; formalno $|\Delta f(x, \mathrm{d}x) - \mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)|/|\Delta f(x, \mathrm{d}x)| \simeq 0$.

(Naš je crtež tek karikatura. U neizmjerno malom okolišu točke $\big(x, f(x)\big)$ tangenta potpuno „prianja" uz krivulju. Uvećamo li, kao na crtežu, taj okoliš bezbroj puta, tako da postane vidljiv, odstupanje tangente od krivulje nećemo vidjeti. Tek kada taj, uvećani, prikaz ponovno povećamo bezbroj puta, uočit ćemo odstupanje; no, pritom duljine prikazā luka krivulje i odsječka tangente postaju neizmjerno velike (i ne „stanu" na list papira). Drugim riječima, i najveća je udaljenost između krivulje i tangente neizmjerno mala u odnosu na duljinu luka — ta je duljina, dakle, broj bezbroj puta manji od neizmjerno maloga broja, pa kažemo da je to neizmjerno mali broj drugoga reda.)

 geometrijska interpretacija derivacije funkcije



$$\mathsf{f}(\mathsf{x}+\mathrm{d}\mathsf{x}) \;=\; \mathsf{f}(\mathsf{x}) + \Delta\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathrm{d}\mathsf{x}) \;\backsimeq\; \mathsf{f}(\mathsf{x}) + \mathrm{d}\mathsf{f}(\mathsf{x}, \mathrm{d}\mathsf{x})$$
$$= \mathsf{f}(\mathsf{x}) + \mathsf{f}'(\mathsf{x})\,\mathrm{d}\mathsf{x}$$

Diferencijal $\mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)$ se izražava pomoću derivacije f' funkcije f u točki* x:

$$\mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x) \;=\; f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Kao broj, derivacija funkcije u x jednaka je nagibu tangente u točki $\big(x, f(x)\big)$ na graf funkcije, odnosno tangensu kuta koji tangenta zatvara s osi x.

* Pojam točke upotrebljavamo s dva donekle različita značenja: „točka (x, y)" točka je u ravnini xy u kojoj crtamo graf funkcije (u dvodimenzionalnome prostoru), dok je „točka x" točka na osi x (u jednodimenzionalnome prostoru, domeni funkcije), dakle točka $(x, 0)$ u ravnini grafa.

koeficijent (ra)stezanja:

$$\lambda(x) = \frac{\|\Delta\widehat{\mathbf{r}}(x, \mathrm{d}x)\|}{\|\Delta\bar{\mathbf{r}}_0(x, \mathrm{d}x)\|}$$

$$= \frac{\|\mathrm{d}\vec{r}(x, \mathrm{d}x)\|}{\mathrm{d}x} = \frac{\|\vec{r}\,'(x)\|\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \|\vec{r}\,'(x)\|$$

$\lambda(x) > 1$ ... rastezanje

$\lambda(x) < 1$ ... stezanje

Koeficijent (ra)stezanja u infinitezimalnom okolišu točke x omjer je duljine infinitezimalnoga luka deformirane osi i duljine izvornoga infinitezimalnog odsječka nedeformirane osi.

Duljinu $\|\Delta\widehat{\mathbf{r}}(x, \mathrm{d}x)\|$ infinitezimalnoga luka deformirane osi možemo aproksimirati diferencijalom luka $\|\mathrm{d}\vec{r}(x, \mathrm{d}x)\|$, koji se definira pomoću derivacije $(\mathrm{d}\vec{r}(x, \mathrm{d}x) = \vec{r}\,'(x)\,\mathrm{d}x)$. Kako je nedeformirana os štapa na osi x, duljina izvornoga infinitezimalnog odsječka jednaka je infinitezimalnom prirastu $\mathrm{d}x$. Slijedi da je (za ravan štap) koeficijent rastezanja $\lambda(x)$ jednak duljini (euklidskoj normi) $\|\vec{r}\,'(x)\|$ vektora $\vec{r}\,'(x)$.

Ako je koeficijent (ra)stezanja veći od 1, deformirani je odsječak dulji od nedeformiranoga. Ako je pak koeficijent (ra)stezanja manji od 1, deformirani je odsječak kraći od nedeformiranoga.

[Može li koeficijent (ra)stezanja biti jednak nuli? Što bi to značilo fizički? Može li koeficijent (ra)stezanja biti negativan?]

produljenje ili skraćenje:

$$\|\Delta\widehat{\mathbf{r}}(x, \mathrm{d}x)\| - \|\Delta\bar{\mathbf{r}}_0(x, \mathrm{d}x)\| = \|\vec{\mathrm{r}}\,'(x)\|\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}x$$

Produljenje ili skraćenje osi štapa u infinitezimalnom okolišu točke x razlika je duljina infinitezimalnoga luka deformirane osi i izvornoga infinitezimalnog odsječka nedeformirane osi.

inženjerska uzdužna deformacija:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x) &= \frac{\|\Delta\hat{\mathbf{r}}(x, \mathrm{d}x)\| - \|\Delta\bar{\mathbf{r}}_0(x, \mathrm{d}x)\|}{\|\Delta\bar{\mathbf{r}}_0(x, \mathrm{d}x)\|} \\
&= \frac{\|\vec{r}\,'(x)\|\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\|\vec{r}\,'(x)\|\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \\
&= \|\vec{r}\,'(x)\| - 1
\end{aligned}$$

$$\varepsilon(x) = \lambda(x) - 1$$

$$\lambda(x) = 1 + \varepsilon(x)$$

Inženjerska uzdužna deformacija u infinitezimalnom okolišu točke x omjer je produljenja ili skraćenja i duljine izvornoga infinitezimalnog odsječka nedeformirane osi.

Inženjerska se uzdužna deformacija može izraziti pomoću koeficijenta (ra)stezanja i obratno.

inženjerska uzdužna deformacija:

$$\varepsilon(x) = \lambda(x) - 1 = \|\vec{r}\,'(x)\| - 1$$

$$\|\vec{r}\,'(x)\| = \lambda(x) = 1 + \varepsilon(x)$$

$$\|\vec{r}\,'(x)\| = \sqrt{\bigl[1 + u'(x)\bigr]^2 + \bigl[w'(x)\bigr]^2}$$

No, korak unazad: koeficijent (ra)stezanja jednak je duljini vektora $\vec{r}\,'(x)$, pa se i inženjerska uzdužna deformacija može izraziti pomoću te duljine (i obratno).

Duljinu vektora $\vec{r}\,'(x)$ izračunavamo pomoću derivacija orijentiranih duljina komponenata pomaka.

„mali" pomaci: $\quad |u(x)| \ll \ell_0 \quad \& \quad |w(x)| \ll \ell_0$

„male" deformacije

„male" deformacijske veličine:

$$|w'(x)| \ll 1$$

Kao i sve dósada, cijela je ova priča u okvirima teorije „malih" pomaka.

„Mali" pomaci su, znamo, pomaci koji su mnogo manji od duljine štapa. Osim „malih" pomaka uvodimo i pojam „malih" deformacija ili, općenitije, deformacijskih veličina. U teoriji savijanja štapova jedna je od deformacijska veličina funkcija w'. Kako je s geometrijskoga gledišta w' nagib tangente na graf funkcije w, izraz $|w'(x)| \ll 1$ kaže da je riječ o kutovima apsolutna vrijednost tangensa kojih je mnogo manja od 1 (tangens kuta od 45° je 1).

$$\sqrt{\left[1+u'(x)\right]^2 + \left[w'(x)\right]^2}$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2 + 0{,}1^2} = 1{,}005\,982\,604$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2 + 0{,}01^2} = 1{,}001\,049\,949$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2 + 0{,}001^2} = 1{,}001\,000\,500$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2 + 0{,}000\,1^2} = 1{,}001\,000\,005$$

Ako je $|w'(x)| \ll 1$, možemo/smijemo reći da je $1 + [w'(x)]^2$ približno/gotovo jednako 1, odnosno da je $[w'(x)]^2$ zanemarivo (u odnosu na 1 (ili 1 plus nešto)), ...

$$\sqrt{\left[1+u'(x)\right]^2 + \left[w'(x)\right]^2}$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2+0{,}1^2} = 1{,}005\,982\,604$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2+0{,}01^2} = 1{,}001\,049\,949$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2+0{,}001^2} = 1{,}001\,000\,500$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2+0{,}000\,1^2} = 1{,}001\,000\,005$$

$$\sqrt{[1+0{,}1]^2+0{,}001^2} = 1{,}100\,000\,455$$

$$\sqrt{[1+0{,}01]^2+0{,}001^2} = 1{,}010\,000\,495$$

$$\sqrt{[1+0{,}001]^2+0{,}001^2} = 1{,}001\,000\,500$$

$$\sqrt{[1+0{,}000\,1]^2+0{,}001^2} = 1{,}000\,100\,500$$

. . . no, napomenuti treba da to nije isto što i reći da je $[1+u'(x)]^2$ približno jednako 1, čak i ako je $|u'(x)| \ll 1$ (što ne slijedi iz $|u(x)| \ll \ell_0$), jer je $[1+u'(x)]^2 = 1 + 2\,u'(x) + [u'(x)]^2$.

$$\|\vec{r}\,'(x)\| = \sqrt{\big[1 + u'(x)\big]^2 + \big[w'(x)\big]^2}$$

$$|w'(x)| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \big[w'(x)\big]^2 \backsimeq 1$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{r}\,'(x)\| = \sqrt{\big[1 + u'(x)\big]^2} = 1 + u'(x)$$

$$\varepsilon(x) = \|\vec{r}\,'(x)\| - 1 = 1 + u'(x) - 1$$

$$\varepsilon(x) = u'(x) \qquad \ldots \text{ kinematička jednadžba}$$

Iz dosadašnjih izvoda slijedi da možemo, zanemarimo li duljinu poprečnoga pomaka, uzeti da duljina $\|\vec{r}\,'(x)\|$ vektora $\vec{r}\,'(x)$ ovisi samo o orijentiranoj duljini $u(x)$ uzdužnoga pomaka, odnosno o njezinoj derivaciji $u'(x)$, a iz toga pak slijedi da je inženjerska uzdužna deformacija jednaka derivaciji orijentirane duljine uzdužnoga pomaka.

Tu vezu nazivamo kinematičkom jednadžbom. Kinematičke jednadžbe povezuju pomake i deformacije (općenitije, deformacijske veličine) pomoću operacije deriviranja.

konstitucijska jednadžba (Hookeov zakon):

$$N(x) = E\,A(x)\,\varepsilon(x) = E\,A(x)\,u'(x)$$

Vezu između unutarnjih sila ili naprezanja i pomaka ili deformacija (ili deformacijskih veličina) opisuju konstitucijske jednadžbe. U našem slučaju to je veza između uzdužne sile i uzdužne deformacije, koju je pogodno izraziti kao derivaciju orijentirane duljine pomaka.

Najjednostavnija je konstitucijska jednadžba linearna, poznati Hookeov zakon: uzdužna je sila proporcionalna uzdužnoj deformaciji, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti umnožak modula elastičnosti (kojega uzimamo konstantnim po duljini štapa, stoga samo E) i ploštine poprečnoga presjeka (koja se uzduž štapa može mijenjati, stoga $A(x)$).

konstitucijska jednadžba kao diferencijalna jednadžba:

$$E\,A(x)\,u'(x) - N(x) = 0$$

Konstitucijska jednadžba može se shvatiti kao diferencijalna jednadžba za funkciju u, koja opisuje uzdužne pomake točaka osi štapa, ako je poznata funkcija N razdiobe uzdužnih sila.

diferencijalna jednadžba ravnoteže:

$$N'(x) + p(x) = 0$$

$$\big[E\,A(x)\,u'(x)\big]' + p(x) = 0$$

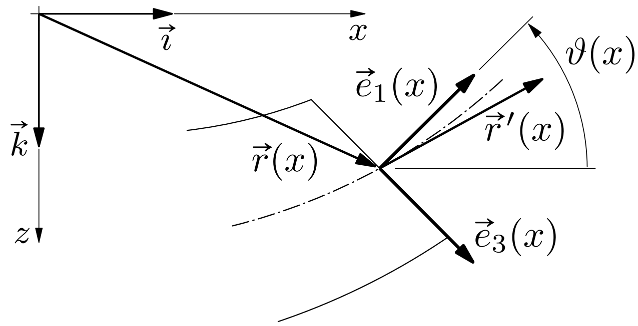
$$E\,A\,u''(x) + p(x) = 0$$

Konstitucijske jednadžbe daju vezu između unutarnjih sila i deformacijskih veličina. Diferencijalne jednadžbe ravnoteže (u obliku u kojem smo ih izveli) daju vezu između unutarnjih i vanjskih distribuiranih sila. Kinematičke jednadžbe daju vezu pomaka i deformacija.

Uvrstimo li konstitucijsku jednadžbu u diferencijalnu jednadžbu ravnoteže, dobivamo neposrednu vezu između vanjskih distribuiranih sila i pomaka. Dobivena jednadžba je, naravno, također jednadžba ravnoteže (iako je u njoj unutarnja sila „skrivena", „maskirana" u pomak).

Zadnja jednadžba, koju ćemo gotovo uvijek upotrebljavati, dobivena je uz pretpostavku da je štap konstantnoga poprečnog presjeka, to jest da je ploština A konstantna po duljini, pa je i umnožak $E\,A$ konstantan:

$$[E\,A\,u'(x)]' = (E\,A)'\,u'(x) + (E\,A)\,u''(x) = 0 \cdot u'(x) + (E\,A)\,u''(x) = E\,A\,u''(x).$$



$$\vec{r}(x) = \big[x + u(x)\big]\,\vec{\imath} + w(x)\,\vec{k} \qquad \& \qquad \vec{e}_1(x)$$

$$\vec{r}(x) = x\,\vec{\imath} + w(x)\,\vec{k} \qquad \& \qquad \vec{e}_1(x)$$

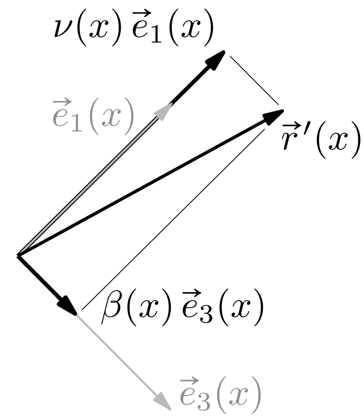
U linearnoj se teoriji ravnih štapova, znamo, uzdužni i poprečni smjer mogu analizirati neovisno. Nakon što smo „riješili" uzdužni smjer, možemo se posvetiti poprečnomu, teorijama savijanja.

Konfiguraciju štapa u ravnotežnom stanju možemo sada opisati dvjema vektorskim funkcijama varijable x, $\vec{r}$ i $\vec{e}_1$.

Funkcija $\vec{r}$ opisuje položaj i oblik osi štapa, a njezina derivacija, funkcija $\vec{r}\,'$, tangente na deformiranu os („nagibe" osi).

Funkcija pak $\vec{e}_1$ opisuje „nagibe" ravnina poprečnih presjeka. Vektor $\vec{e}_1(x)$ vanjska je normala ravnine pomaknutoga poprečnog presjeka u točki x.

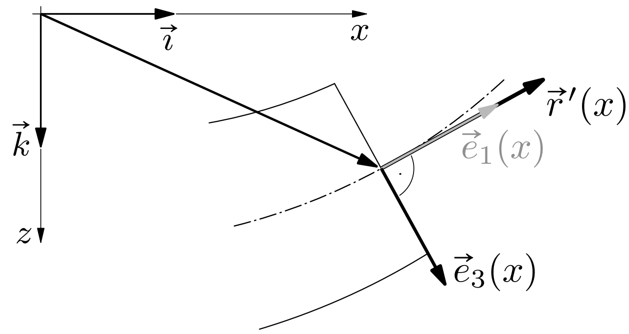
Vektorom $\vec{e}_1(x)$ određen je i vektor $\vec{e}_3(x)$ koji leži na pravcu u kojemu se sijeku ravnina pomaknutoga poprečnog presjeka i ravnina xz, jer oba leže u ravnini xz i međusobno su okomiti.



$$\vec{r}\,'(x) \;=\; \vec{\imath} + w'(x)\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,'(x) \;=\; \nu(x)\,\vec{e}_1(x) \;+\; \beta(x)\,\vec{e}_3(x)$$

Vektori $\vec{e}_1(x)$ i $\vec{e}_3(x)$ čine lokalnu ortonormiranu bazu ravninskoga vektorskog prostora u točki $\vec{r}(x)$, pa se vektor $\vec{r}\,'(x)$ može u ortogonalne komponente rastaviti i u toj bazi.



$$\beta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}\,'(x) = \nu(x)\,\vec{e}_1(x)$$

$$\|\vec{r}\,'(x)\| = \nu(x)$$

$$\lambda(x) = \|\vec{r}\,'(x)\| = \nu(x)$$

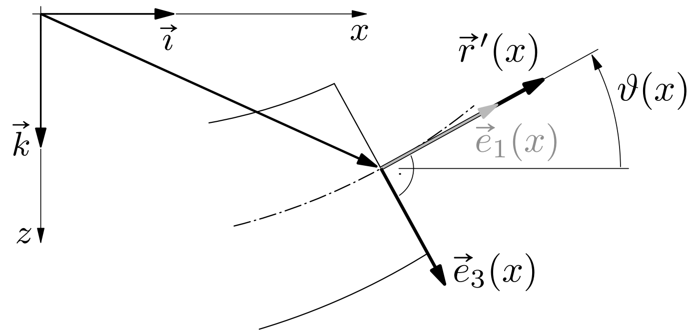
Bernoulli–Eulerova teorija savijanja

Ako je koeficijent $\beta(x)$ uz vektor $\vec{e}_3(x)$ jednak nuli, onda je vektor $\vec{r}\,'(x)$ kolinearan s normalom $\vec{e}_1(x)$ ravnine u koju je prešao poprečni presjek, što znači da je ta ravnina okomita na tangentu na deformiranu os.

Duljina vektora $\vec{r}\,'(x)$ tada je jednaka vrijednosti koeficijenta $\nu(x)$ uz vektor $\vec{e}_1(x)$; drugim riječima, koeficijent $\nu(x)$ duljina je vektora $\vec{r}\,'(x)$.

Kako je, s druge strane, koeficijent (ra)stezanja $\lambda(x)$ po vrijednosti jednak duljini vektora $\vec{r}\,'(x)$, koeficijenti $\nu(x)$ i $\lambda(x)$ jednaki su.

Teorija savijanja štapova u kojoj je (druga) temeljna pretpostavka da ravnine poprečnih presjeka ostaju okomite na deformiranu os naziva se **Bernoulli–Eulerovom teorijom**.



$$\vec{e}_1(x) \;=\; \cos\vartheta(x)\,\vec{\imath} - \sin\vartheta(x)\,\vec{k}$$

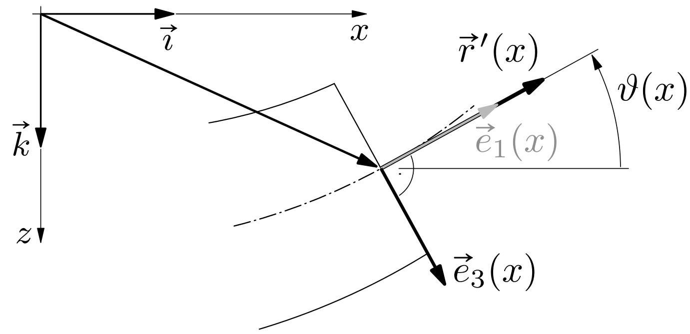
„mali” kut $\vartheta(x)$: $\quad |\vartheta(x)| \ll 1, \quad \cos\vartheta(x) = 1, \quad \sin\vartheta(x) = \vartheta(x)$

$$\vec{e}_1(x) \;=\; \vec{\imath} - \vartheta(x)\,\vec{k}$$

$\vartheta(x)$ je kut između osi x i vektora $\vec{e}_1(x)$, odnosno kut između između osi x i tangente na deformiranu os.

Kako je $\vec{e}_1(x)$ jedinični vektor, može se prikazati prvim izrazom, a u okviru teorije „malih” pomaka, u kojoj su i kutovi „mali”, taj izraz prelazi u treći izraz.

Treći izraz može izgledati proturječno: budući da je $\vec{\imath}$ jedinični vektor, duljina vektora $\vec{e}_1(x)$, $\|\vec{e}_1\| \;=\; \sqrt{1^2 + \big[\vartheta(x)\big]^2}$, ne može biti 1, pa $\vec{e}_1(x)$ nije jediničan. No, $\vartheta(x)$ je „mali” kut, pa je $1 + \big[\vartheta(x)\big]^2 \backsimeq 1$, tako da je $\|\vec{e}_1\| \backsimeq 1$, odnosno, bez grižnje savjesti, $\|\vec{e}_1\| = 1$, odnosno $\vec{e}_1(x)$ jest jedinični vektor.



$$\vec{\mathrm{r}}\,'(x) \;=\; \vec{\imath} + w'(x)\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{\mathrm{e}}_1(x) \;=\; \vec{\imath} - \vartheta(x)\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{\mathrm{r}}\,'(x) \;=\; \vec{\mathrm{e}}_1(x) \qquad \left[\,\vec{\mathrm{r}}\,'(x) \;=\; \nu(x)\,\vec{\mathrm{e}}_1(x),\;\; \nu(x) \;=\; \lambda(x) \;=\; 1\,\right]$$

$$\vartheta(x) \;=\; -w'(x) \;=\; \varphi(x)$$

Vektor $\vec{\mathrm{r}}\,'(x)$ je jediničan $(|w'(x)| \ll 1,$ pa je $1+\left[w'(x)\right]^2 \backsimeq 1,$ pa je $\|\vec{\mathrm{r}}\,'(x)\| = 1)$. Budući da su vektori $\vec{\mathrm{r}}\,'(x)$ i $\vec{\mathrm{e}}_1(x)$ uz to kolinearni, $\vec{\mathrm{r}}\,'(x) = \nu(x)\,\vec{\mathrm{e}}_1(x),$ slijedi $\vec{\mathrm{r}}\,'(x) = \vec{\mathrm{e}}_1(x)$ i $\nu(x) = 1$. Kako je $\lambda(x) = \nu(x),$ štap je nerastezljiv — no, to je samo posljedica činjenice da poprečni smjer analiziramo neovisno o uzdužnome (gotovo *circulus vitiosus*).

Uz to, iz $\vec{\imath}+w'(x)\,\vec{\mathrm{k}} = \vec{\imath}-\vartheta(x)\,\vec{\mathrm{k}}$ slijedi $\vartheta(x) = -w'(x)$. Graf funkcije w nazivamo progibnom linijom. Kut nagiba tangenta na progibnu liniju u točki x obično označavamo s φ, pa je $\varphi(x) = -w'(x)$.

konstitucijska jednadžba:

$$M(x) \;=\; f_{\text{konstit.}}\big(\kappa(x)\big)$$

$$\kappa(x) \;=\; -\frac{w''(x)}{\sqrt{\Big[1 \,+\, \big(w'(x)\big)^2\Big]^3}}$$

$$|w'(x)| \;\ll\; 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \,+\, \big(w'(x)\big)^2 \;\backsimeq\; 1$$

$$\Rightarrow \qquad \kappa(x) \;=\; -w''(x) \;=\; \vartheta'(x) \;=\; \varphi'(x)$$

Deformacijska veličina koja se u Bernoulli–Eulerovoj teoriji savijanja konstitucijskom jednadžbom povezuje s momentom savijanja zakrivljenost je osi štapa κ.

U diferencijalnoj se geometriji zakrivljenost krivulje u točki x definira razmjerno složenim izrazom. No, u okviru teorije „malih” pomaka izraz za zakrivljenost bitno se pojednostavnjuje: $\kappa(x) = -w''(x)/\sqrt{1^3} = -w''(x)$.

konstitucijska jednadžba:

$$M(x) \;=\; E\,I(x)\,\kappa(x) \;=\; -E\,I(x)\,w''(x)$$

konstitucijska jednadžba kao diferencijalna jednadžba:

$$E\,I(x)\,w''(x) \;+\; M(x) \;=\; 0$$

I za savijanje uzimamo najjednostavniju, linearnu konstitucijsku jednadžbu: moment savijanja proporcionalan je zakrivljenosti, koja je jednaka (negativnoj) drugoj derivaciji funkcije koja opisuje progibnu liniju, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti umnožak modula elastičnosti i momenta tromosti poprečnoga presjeka.

Konstitucijska jednadžba može se shvatiti i kao diferencijalna jednadžba za funkciju w, koja opisuje progibnu liniju štapa, ako je poznata funkcija M razdiobe momenata savijanja.

diferencijalna jednadžba ravnoteže:

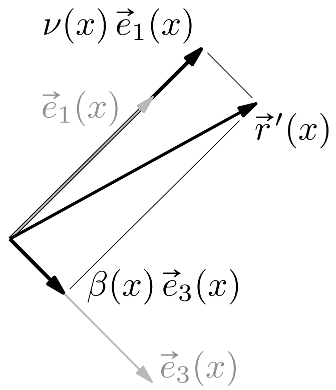
$$M''(x) + q(x) = 0$$

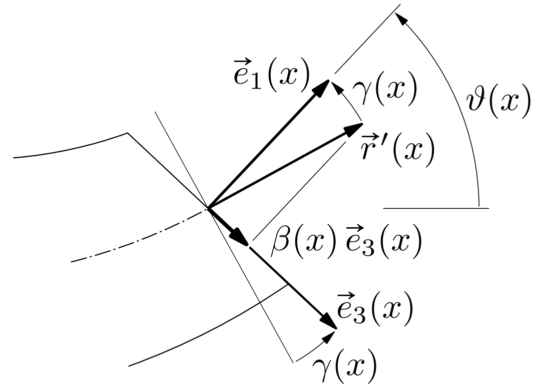
$$\bigl[E\,I(x)\,w''(x)\bigr]'' - q(x) = 0$$

$$E\,I\,w^{\mathrm{IV}}(x) - q(x) = 0$$

Uvrštavanjem konstitucijske jednadžbe u jednadžbu ravnoteže dobivamo neposrednu vezu između poprečnoga distribuiranog opterećenja i progibne linije.

I sada je zadnja jednadžba dobivena uz pretpostavku da je štap konstantnoga presjeka.





$$\beta \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{r}\,'(x) \;=\; \nu(x)\,\vec{e}_1(x) \;+\; \beta(x)\,\vec{e}_3(x)$$

$$\|\vec{r}\,'\| \;=\; 1: \qquad \sin\gamma(x) \;=\; \beta(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(x) \;=\; \arcsin\beta(x)$$

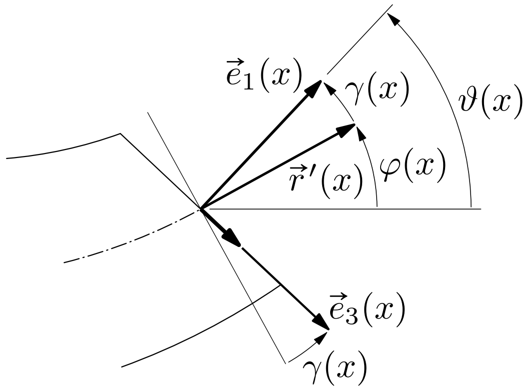
Timošenkova teorija savijanja

Ako $\beta(x) \neq 0$, vektor $\vec{r}\,'(x)$ nije okomit na ravninu $\varpi(x)$ u koju prelazi ravnina poprečnoga presjeka $\varpi_0(x)$.

Uzet ćemo prvo da je vrijednost $\nu(x)$ takva da je $\|\vec{r}\,'(x)\| = \sqrt{\left[\nu(x)\right]^2 + \left[\beta(x)\right]^2} = 1$. Geometrijsko je značenje koeficijenta $\beta(x)$ tada razmjerno lako predočiti: vektor $\vec{r}\,'(x)$ prelazi u vektor $\vec{e}_1(x)$ zaokretanjem oko osi određene vektorom $\vec{e}_2(x)$ za kut $\gamma(x)$ za koji je $\sin\gamma(x) = \beta(x)$; $\gamma(x)$ je, dakle, posmični kut za koji se promijenio pravi kut između ravnine u koju je prešao poprečni presjek i tangente na os štapa.

Za $\|\vec{r}\,'(x)\| \neq 1$ izraz je za posmični kut složeniji: $\gamma(x) \;=\; \arcsin \dfrac{\beta(x)}{\|\vec{r}\,'(x)\|}$.

Teorija savijanja greda u kojoj nema pretpostavke da ravnine poprečnih presjeka ostaju okomite na deformiranu os naziva se **Timošenkovom teorijom**.



$$\vartheta(x) = \varphi(x) + \gamma(x) = -w'(x) + \gamma(x)$$

$$\varphi(x) = -w'(x) = \vartheta(x) - \gamma(x)$$

$$\gamma(x) = \vartheta(x) - \varphi(x) = \vartheta(x) - \big(-w'(x)\big) = \vartheta(x) + w'(x)$$

Za razliku od Bernoulli–Eulerove teorije, sada se u opisu ravnotežne konfiguracije pojavljuju tri karakteristična kuta:

- ϑ — kut između osi x i vektora $\vec{e}_1(x)$;
- φ — kut između osi x i vektora $\vec{r}\,'(x)$; i sada je $\varphi(x) = -w'(x)$;
- γ — posmični kut; $\gamma(x) = \arcsin \beta(x)$.

Dva su neovisna, a treći se može izraziti pomoću njih. Očito je da se bilo koja dva kuta mogu uzeti za neovisne.

konstitucijske jednadžbe:

$$k\,T(x) \;=\; G\,A(x)\,\gamma(x)$$

$$k\,T(x) \;=\; G\,A(x)\big[\vartheta(x) + w'(x)\big]$$

$$M(x) \;=\; E\,I(x)\,\vartheta'(x)$$

Za opis savijanja sada su potrebne dvije funkcije: dok su u Bernoulli–Eulerovoj teoriji funkcije ϑ i $\varphi = -w'$ opisivale isti kut (pa je za opis savijanja dovoljna funkcija w), sada su to dva različita kuta. Uobičajeno je uzeti funkcije w i ϑ.

Kutovi $\vartheta(x)$ i $-w'(x)$ razlikuju se za posmični kut $\gamma(x)$ (izrazi na prethodnoj stranici). Taj se kut konstitucijskom jednadžbom $k\,T(x) \;=\; G\,A(x)\,\gamma(x)$ povezuje s poprečnom silom (G je modul posmika, a konstantom k uzima se u obzir nejednolika razdioba posmičnoga naprezanja po površini poprečnoga presjeka).

Druga konstitucijska jednadžba povezuje moment savijanje i derivaciju kuta $\vartheta(x)$.

konstitucijske jednadžbe kao diferencijalne jednadžbe:

$$E\,I(x)\,\vartheta'(x) - M(x) = 0$$

$$G\,A(x)\big[\vartheta(x) + w'(x)\big] - k\,T(x) = 0$$

Konstitucijske jednadžne mogu se shvatiti i kao sustav dviju diferencijalnih jednadžbi za funkcije w i ϑ uz poznate funkcije razdioba momenata savijanja i poprečnih sila.