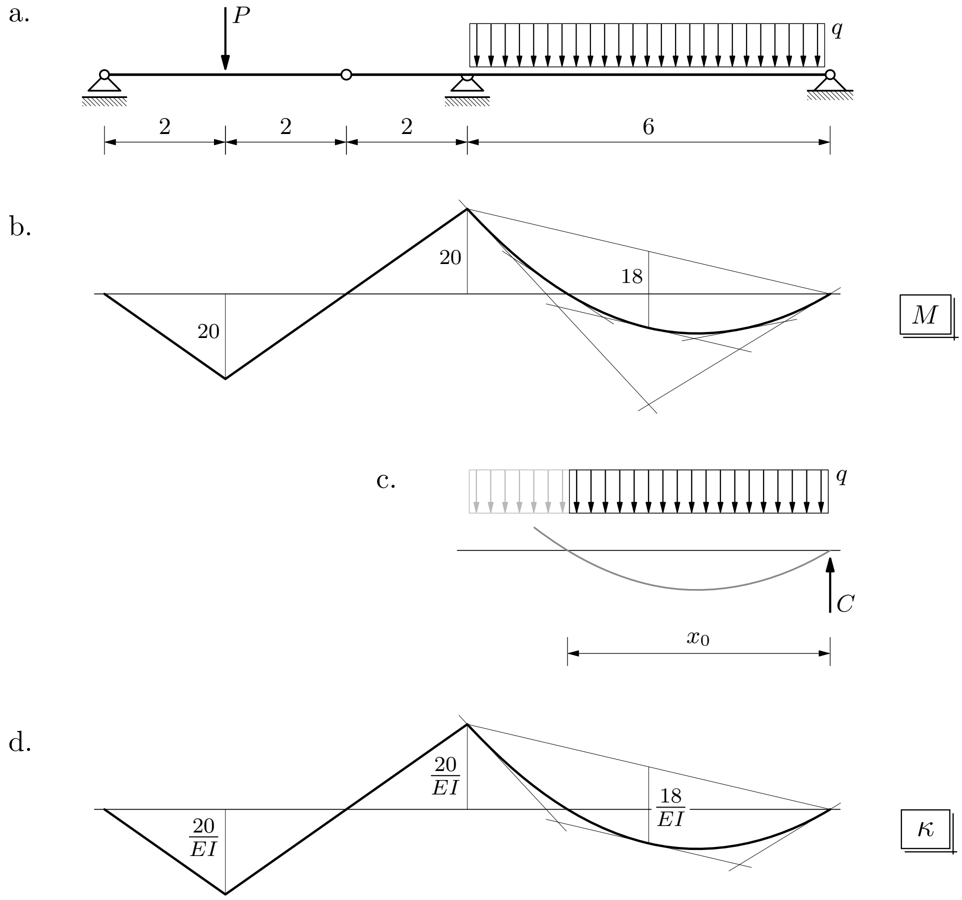
Skiciranje progibnih linija (2)

Nacrtat ćemo progibnu liniju Gerberovoga nosača prikazanog na slici 1.a.

Intenzitet je koncentrirane sile $P = 20\,\mathrm{kN}$, dok je intenzitet distribuiranoga opterećenja $q = 4\,\mathrm{kN/m}$.

Poprečni je presjek grede $^{b}/_{h} = {}^{20}/_{50}$ [cm], pa je $I = 0{,}002\,\mathrm{m}^4 = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^4$. Ako je modul elastičnosti $E = 3 \cdot 10^7\,\mathrm{kN/m}^2$, bit će $EI = 6 \cdot 10^4\,\mathrm{kNm}^2 = 60\,000\,\mathrm{kNm}^2$.



Slika 1.

Sila $\vec{P}$ na dio nosača lijevo od zgloba djeluje u njegovu polovištu, pa će vrijednosti reakcije u lijevome ležaju i spojne sile u zglobu biti $^{P}/_{2}$, a vrijednost će momenta savijanja u tom polovištu biti $2 \cdot {}^{P}/_{2} = 20$ kNm. Spojna sila u zglobu, koja dio sile $\vec{P}$ „prenosi” na dio nosača desno od zgloba, nad srednjim će ležajem uzrokovati moment savijanja vrijednosti $-2 \cdot {}^{P}/_{2} = -20$ kNm (ili: budući da u zglobu nema vanjskih djelovanja, odječak pravca u momentnom dijagramu mora kroz zglob proći bez loma, pa iz sličnosti (u stvari, iz jednakosti) trokutā slijedi… &td. — slika 1.b.).

Uz poznate vrijednosti momenata nad srednjim i nad desnim ležajem dio dijagrama momenata u desnom polju — luk parabole — nacrtat ćemo tako da u polovištu spojnice točaka koje daju vrijednosti nad ležajima „objesimo” vrijednost $q \cdot {}^{6^2}/_{8} = 18$ (slika 1.b.).

Kako se EI uzduž osi grede ne mijenja, dijagram zakrivljenosti $\kappa = {}^{M}\!/_{EI}$ po obliku će biti isti kao dijagram M, ali će ordinale u njemu prikazivati, dakako, druge vrijednosti koje se izražavaju u drugim jedinicama (slika 1.d.). Za crtanje tangentnoga poligona progibne linije površine likova između dijagrama i apscisne osi treba zamijeniti vektorima kutova. U lijevom su polju te površine površine trokuta, pa su intenziteti vektorā kutova jednaki ploštinama trokutā,

$$\varphi_1 \;=\; \varphi_2 \;=\; \varphi_3 \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{EI}\cdot 2 \;=\; \frac{20}{EI} \;=\; 0{,}000\dot{3};$$

poznato je i da vertikalni pravci kroz težišta trokutā, na kojima su vektori kutova, prolaze trećinskim ili dvotrećinskim točkama horizontalnih kateta (slika 3.b. na stranici 5).

U desnom su polju površine ispod/iznad dijagrama dijelom omeđene lukom parabole, pa će izračunavanja biti složenija. Prvo ćemo izračunati apscisu nultočke dijagrama M (a time i dijagrama κ) u desnome polju. Izdvojimo li dio grede između točke osi u kojoj je vrijednost momenta savijanja jednaka nuli i desnoga ležaja (slika 1.c.), jednadžba je ravnoteže momenata u odnosu na tu točku

$$x_0\,C \;-\; \frac{x_0}{2}\,(q\,x_0) \;=\; 0,$$

odnosno

$$x_0\left(C \;-\; q\,\frac{x_0}{2}\right) \;=\; 0. \qquad (\spadesuit)$$

Budući da je vrijednost momenta savijanja iznad srednjega ležaja poznata (-20 kNm), vrijednost C reakcije u desnome ležaju možemo izračunati iz jednadžbe ravnoteže momenata u odnosu na srednji ležaj za dio nosača između srednjega i desnoga ležaja [skicirajte!]: iz

$$20 \;-\; 3\cdot(q\cdot 6) \;+\; 6\cdot C \;=\; 0$$

slijedi

$$C \;=\; \frac{1}{6}\cdot\big[3\cdot(q\cdot 6) \;-\; 20\big] \;=\; 8{,}667\,\mathrm{kN}.$$

(Vrijednost C možemo izračunati i „geometrijski” (slika 1.b.): jednaka je (uz promjenu predznaka [zašto?]) nagibu tangente na krivulju dijagrama nad desnim ležajem,

$$C \;=\; -\left(-\frac{2\cdot 18 \;-\; \frac{20}{2}}{6}\right) \;=\; 8{,}667.)$$

Jednadžba ($\spadesuit$) će biti zadovoljena ako su

$$x_0 \;=\; 0 \qquad \text{i(li)} \qquad C \;-\; q\,\frac{x_0}{2} \;=\; 0;$$

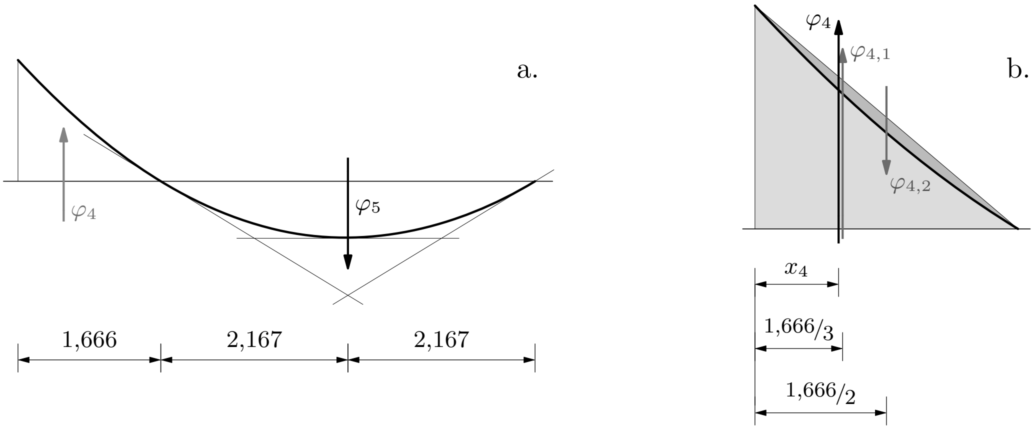
iz druge je jednadžbe

$$x_0 \;=\; \frac{2C}{q} \;=\; \frac{2\cdot 8{,}667}{4} \;=\; 4{,}334,$$

a prva izražava očitu činjenicu da moment i nad desnim ležajem iščezava.

Os parabole u dijagramima M i κ vertikalni je pravac kroz polovište odsječka na apscisnoj osi između nultočaka u polju i nad desnim ležajem, a tjeme je parabole u točki na njezinoj osi (slika 2.a.). Vrijednost je momenta tjemenu

$$\frac{q\,x_0^2}{8} \;=\; \frac{4\cdot 4{,}334^2}{8} \;=\; 9{,}392\,\mathrm{kNm},$$



Slika 2.

a zakrivljenost je ${}^{9{,}392}/_{EI}$. (Tjeme je parabole točka maksimalnoga momenta. U koordinatnom sustavu u kojem je os apscisa orijentirana zdesna ulijevo, s ishodištem u desnom ležaju, parabola je opisana funkcijskim izrazom

$$f(x) \; = \; x\,C \; - \; q\,\frac{x^2}{2}.$$

Izjednačimo li njegovu derivaciju

$$f'(x) \; = \; C \; - \; q\,x$$

s nulom, dobit ćemo $x_{\max} = {}^{C}/_{q} = 2{,}167 = {}^{x_0}/_{2},$ pa uvrštavanje u izraz za f daje

$$2{,}167 \cdot 8{,}667 \; - \; 4 \cdot \frac{2{,}167^2}{2} \; = \; 9{,}390$$

(razlika u posljednjoj decimali u odnosu na prethodnodobivenu vrijednost momenta u tjemenu posljedica je pogrešaka zaokruživanja).) Intenzitet je vektora kuta kojim zamjenjujemo površinu iznad dijagrama zakrivljenosti omeđenu lukom parabole i odsječkom apscisne osi između nultočke u polju i desnoga ležaja jednak ploštini te površine,

$$\varphi_5 \; = \; \frac{2}{3} \cdot \frac{9{,}392}{EI} \cdot 4{,}334 \; = \; \frac{27{,}14}{EI} \; = \; 0{,}000\,45;$$

vektor je kuta na pravcu koji prolazi polovištem odsječka između nultočke i ležaja.

Ploštinu površine omeđene lukom parabole lijevo od nultočke, apscisnom osi i vertikalnim pravcem kroz srednji ležaj (svjetlosiva površina na slici 2.b.) izračunat ćemo tako da od površine trokuta s katetama na vertikali i na osi apscisa oduzmemo površinu omeđenu lukom parabole i hipotenuzom trokuta (tamnosiva površina na slici). Duljina je odsječka apscisne osi između srednjega ležaja i nultočke $6 - x_0 = 1{,}666,$ pa je ploština trokuta (i intenzitet vektora kuta kojim taj trokut zamjenjujemo)

$$\varphi_{4,1} \; = \; \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{EI} \cdot 1{,}666 \; = \; \frac{16{,}66}{EI}.$$

Kako je duljina odsječka vertikalnoga pravca između polovišta hipotenuze trokuta i njegovoga sjecišta s lukom parabole

$$\frac{q\,(6 - x_0)^2}{8} \; = \; \frac{4 \cdot 1{,}666^2}{8} \; = \; 1{,}388,$$

ploština je tamnosive površine

$$\varphi_{4,2} \;=\; \frac{2}{3}\cdot\frac{1{,}388}{EI}\cdot 1{,}666 \;=\; \frac{1{,}542}{EI},$$

dok je tražena ploština svjetlosive površine, omeđene lukom parabole i katetama trokuta,

$$\varphi_4 \;=\; \varphi_{4,1} - \varphi_{4,2} \;=\; \frac{15{,}12}{EI} \;=\; 0{,}000\,25.$$

Vertikalni pravac na kojem je vektor kuta kojim tu površinu zamjenjujemo prolazi njezinim težištem. Apscisu x_4 težišta (u koordinatnom sustavu s ishodištem u srednjem ležaju) izračunavamo iz uvjeta da je „moment” vektora kuta $\vec{\varphi}_4$ u odnosu na srednji ležaj jednak zbroju „momenata” vektorā kutova $\vec{\varphi}_{4,1}$ i $\vec{\varphi}_{4,2}$ u odnosu na istu točku:

$$x_4\,\varphi_4 \;=\; \frac{1{,}666}{3}\,\varphi_{4,1} - \frac{1{,}666}{2}\,\varphi_{4,2} \qquad\Rightarrow\qquad x_4 \;=\; 0{,}527.$$

Za crtež progibne linije ćemo za mjerilo duljina odabrati

$$1\;:\;125 \qquad \text{ili} \qquad 1\ \text{cm} \;::\; 1{,}25\ \text{m}.$$

Slike 3.a.–d. crtane su (u smjeru apscise) u tome mjerilu, pa je na njima duljina jednoga raspona 4,8 cm, dok su $\bar{x}_0 = 3{,}47$ cm i $\bar{x}_4 = 0{,}42$ cm.

Poligon kutova na slici 3.e. nacrtan je u mjerilu kutova

$$1\ \text{cm} \;::\; \frac{10}{EI} \;=\; 0{,}000\,1\dot{6}.$$

U tome su mjerilu duljine prikazā vektora kutova

$$\overline{\varphi}_1 \;=\; \overline{\varphi}_2 \;=\; \overline{\varphi}_3 \;=\; 2{,}0\ \text{cm},$$

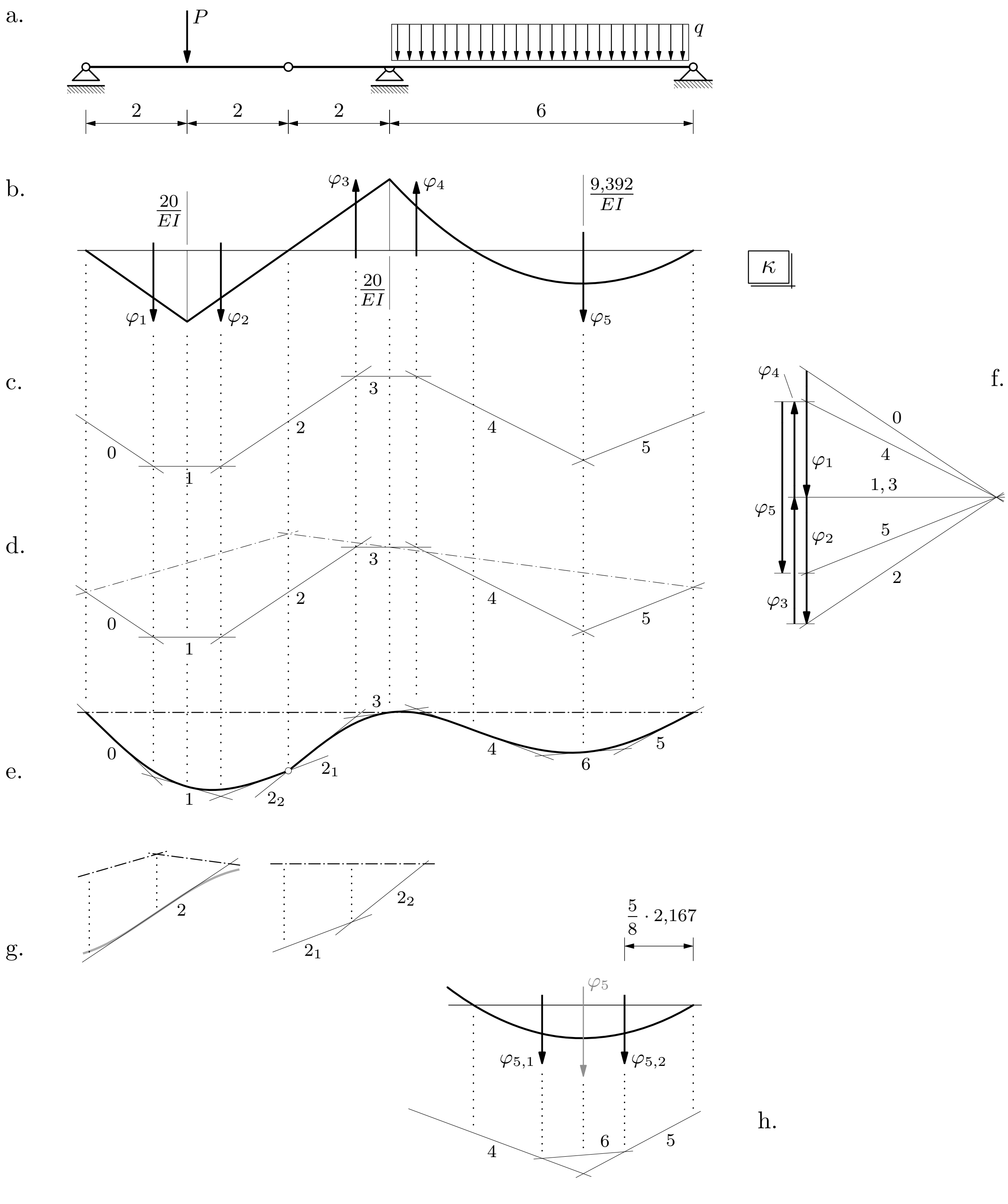
$$\overline{\varphi}_4 \;=\; 1{,}51\ \text{cm},$$

$$\overline{\varphi}_5 \;=\; 2{,}71\ \text{cm}.$$

Duljina prikaza jediničnoga vektora kuta $(1 = {}^{EI}/_{EI})$ bila bi ${}^{EI}/_{10} = 6\,000$ cm, pa smo za polnu udaljenost odabrali $\chi = {}^{1}/_{2\,000}$ s prikazom duljine $\overline{\chi} = 3$ cm.

Tangentni poligon sa stranicama koje su usporedne zrakama poligona kutova prikazan je na slici 3.c. Nulta linija mora zadovoljiti geometrijske rubne uvjete: duljine su pomaka ležajnih točaka (okomito na os grede) jednake nuli, a kako su stranice 0, 3 i 5 tangente na progibnu liniju u ležajnim točkama*, nulta ih linija mora sjeći u tim točkama. Očito je da jedan odsječak pravca ne može zadovoljiti sva tri rubna uvjeta. No, u ovom se koraku crtanja progibne linije njezina nulta linija mora „slomiti” iznad zgloba. Zglobom, naime, sada prolazi stranica 2 tangentnoga poligona; ona je tangenta na progibnu liniju u zglobu, te je progibna linija u njegovoj okolini glatka krivulja (lijevi crtež na slici g.) iako bi se morala slomiti. Ako se progibna linija u zglobu lomi, tangente na nju u točkama neposredno lijevo i neposredno desno od zgloba različiti su pravci (a u zglobu tangente nema). Tangentu 2 (isti crtež) treba stoga u zglobu slomiti i jedan njezin dio zaokrenuti

* Susjedne stranice verižnoga poligona tangente su verižne krivulje u krajnjim točkama odsječka osi grede na kojem djeluje dio distribuirane sile rezultanta kojega prolazi sjecištem tih stranica. Isto, dakako, vrijedi za tangentni poligon progibne linije, vektore kutova i dijagram zakrivljenosti.



Slika 3.

u odnosu na drugi (desni crtež). Da bi nulta linija nakon zaokretanja tangenata iznad zgloba prolazila bez loma (desni crtež), lom mora postojati prije zaokretanja (lijevi crtež), jer se ordinate točaka progibne linije (udaljenosti tih točaka od nulte linije, mjerene po pravcima okomitima na os grede) ne mogu promijeniti.

Nad desnim je poljem nulta linija jedan odsječak pravca, jer preko tog polja mora proći bez loma. Pritom će taj odsječak sjeći stranice 3 i 5 tangentnoga poligona u srednjoj i desnoj ležajnoj točki (slika 3.d.). Budući da se nulta linija lomi tek iznad zgloba u lijevom polju, odsječak treba produljiti do točke loma. Sada su poznate dvije točke kojima mora proći lijevi odsječak nulte linije: lijeva ležajna točka i točka loma (ista slika).

Na slici 3.e. nulta je linija izravnana i dovedena u horizontalni položaj, pri čemu se stranica 2 tangentnoga poligona u zglobu slomila. Lijevi je njezin dio tangenta na progibnu liniju u točki neposredno lijevo, a desni u točki neposredno desno od zgloba. Stranice 0 i 5 tangentnoga poligona tangente su na progibnu liniju u lijevoj i u desnoj ležajnoj točki, odnosno u početnoj točki odsječka osi ispod kojega je dio površine između osi i dijagrama κ zamijenjen vektorom kuta $\vec{\varphi}_1$ i u krajnjoj točki odsječka osi ispod kojega je dio površine zamijenjen vektorom $\vec{\varphi}_5$, dok su stranice 1, 3 i 4 tangente u točkama u kojima se dodiruju odsječci osi ispod/iznad kojih su dijelovi površine zamijenjeni vektorima $\vec{\varphi}_1$ i $\vec{\varphi}_2$, $\vec{\varphi}_3$ i $\vec{\varphi}_4$ te $\vec{\varphi}_4$ i $\vec{\varphi}_5$.

Dirалište na tangenti 4 točka je infleksije progibne linije: zakrivljenost je progibne linije u diralištu jednaka nuli (dijagram κ u točki s istom apscisom siječe apscisnu os; slike 3.e. i c.), a progibna linija siječe tangentu; lijevo od dirališta zakrivljenost je progibne linije negativna (dijagram κ iznad je osi), pa je središte zakrivljenosti ispod progibne linije, a progibna je linija ispod tangente, dok je desno od dirališta zakrivljenost pozitivna (dijagram κ ispod je osi), središte je zakrivljenosti iznad progibne linije, a progibna je linija iznad tangente. Zakrivljenost mijenja predznak i „u” zglobu[†] (dijagram κ siječe apscisnu os i u pripadnoj točki): lijevo od zgloba središte je zakrivljenosti iznad, a desno od zgloba ispod progibne linije.

Točnijega prikaza (i „ljepote” crteža) radi dodana je tangenta 6 progibne linije kojoj je diralište na pravcu na kojem je vektor kuta $\vec{\varphi}_5$. Geometrijska je konstrukcija te tangente analogna poznatoj konstrukciji u crtanju verižne krivulje (slika 3.h.): pravac na kojem je vektor $\vec{\varphi}_5$ dijeli površinu zamijenjenu tim vektorom u dvije površine; zamijenimo li te dijelove vektorima $\vec{\varphi}_{5,1}$ i $\vec{\varphi}_{5,2}$, sjecišta će njihovih pravaca i tangenata 4 i 5[‡] biti točke kojima je određena tangenta 6. Točka u kojoj pravac vektora $\vec{\varphi}_5$ siječe tu tangentu njezino je diralište.

[†] Progibna linija u zglobu ima šiljak, što znači da je zakrivljenost u zglobu neizmjerna (jer je radijus zakrivljenosti jednak nuli: $\kappa_{\mathrm{z}} = {}^{1}/_{r_{\mathrm{z}}} = {}^{1}/_{0} = \infty$), ali je neposredno lijevo i neposredno desno od zgloba jednaka nuli.

[‡] ... općenitije, tangenata u početnoj i krajnjoj točki odsječka osi ispod/iznad kojega je podijeljena površina...