Skiciranje progibnih linija

Funkcijski izraz za progibnu liniju Bernoulli–Eulerove nije uvijek lako analitičkim rješavanjem diferencijalne jednadžbe

$$w''(x) \;=\; -\frac{M(x)}{EI}$$

izvesti u zatvorenu obliku. Češće ćemo, nakon što nacrtamo dijagram momenata savijanja, progibnu liniju crtati postupkom utemeljenim na *Mohrovoj analogiji.*

Otto Mohr je oko godine 1868. uočio da diferencijalna jednadžba ravnotežne konfiguracije niti

$$w''(x) \;=\; -\frac{q(x)}{H}\,,$$

u kojoj su funkcijom q zadane vrijednosti vertikalne distribuirane sile, a H je vrijednost napetosti niti, ima istu strukturu (druga derivacija nepoznate funkcije jednaka je poznatoj funkciji) kao diferencijalna jednadžba progibne linije. Kako se ravnotežna konfiguracija niti, koju nazivamo i *verižnom krivuljom*, može smatrati afinom slikom dijagrama momenata savijanja u gredi istoga raspona i pod istom distribuiranom silom, jer je diferencijalna jednadžba ravnoteže

$$M''(x) \;=\; -q(x)$$

treća jednadžba iste strukture, Mohr je zaključio da se progibna linija grede može nacrtati kao dijagram momenata izazvanih zamišljenom „distribuiranom silom” čije su vrijednosti opisane funkcijom $\kappa(x) = {}^{M(x)}/_{EI}$.

Dijagram momenata savijanja na konzoli sa slike 1.a., opterećenoj koncentriranom silom na slobodnom kraju, prikazan je na slici b., a dijagram zamišljene „distribuirane sile” na slici c. Iako je dijagram M samo jedan odječak pravca, dijagram κ sastavljen je od dva odsječka, jer se u jednoj točki osi konzole moment tromosti poprečnih presjeka skokovito mijenja.

Želimo li na crtežu očitavati duljine pomakâ, moramo definirati neka mjerila. Za mjerilo duljina uzeli smo $1 : 100$, odnosno $1\,\text{cm} :: 100\,\text{cm}$; općenitije ćemo za mjerilo duljina pisati $1 : m$.

Verižnu krivulju za zadanu distribuiranu silu crtamo tako da je „upišemo” u njezin tangentni poligon — verižni poligon za sustav koncentriranih sila koji je statički ekvivalentan distribuiranoj sili: dijelove površine između grafa distribuirane sile i njegove apscisne osi, između dviju ordinala, zamjenjujemo koncentriranim silama čije su vrijednosti jednake orijentiranim ploštinama tih dijelova, a pravci djelovanje prolaze njihovim težištima.

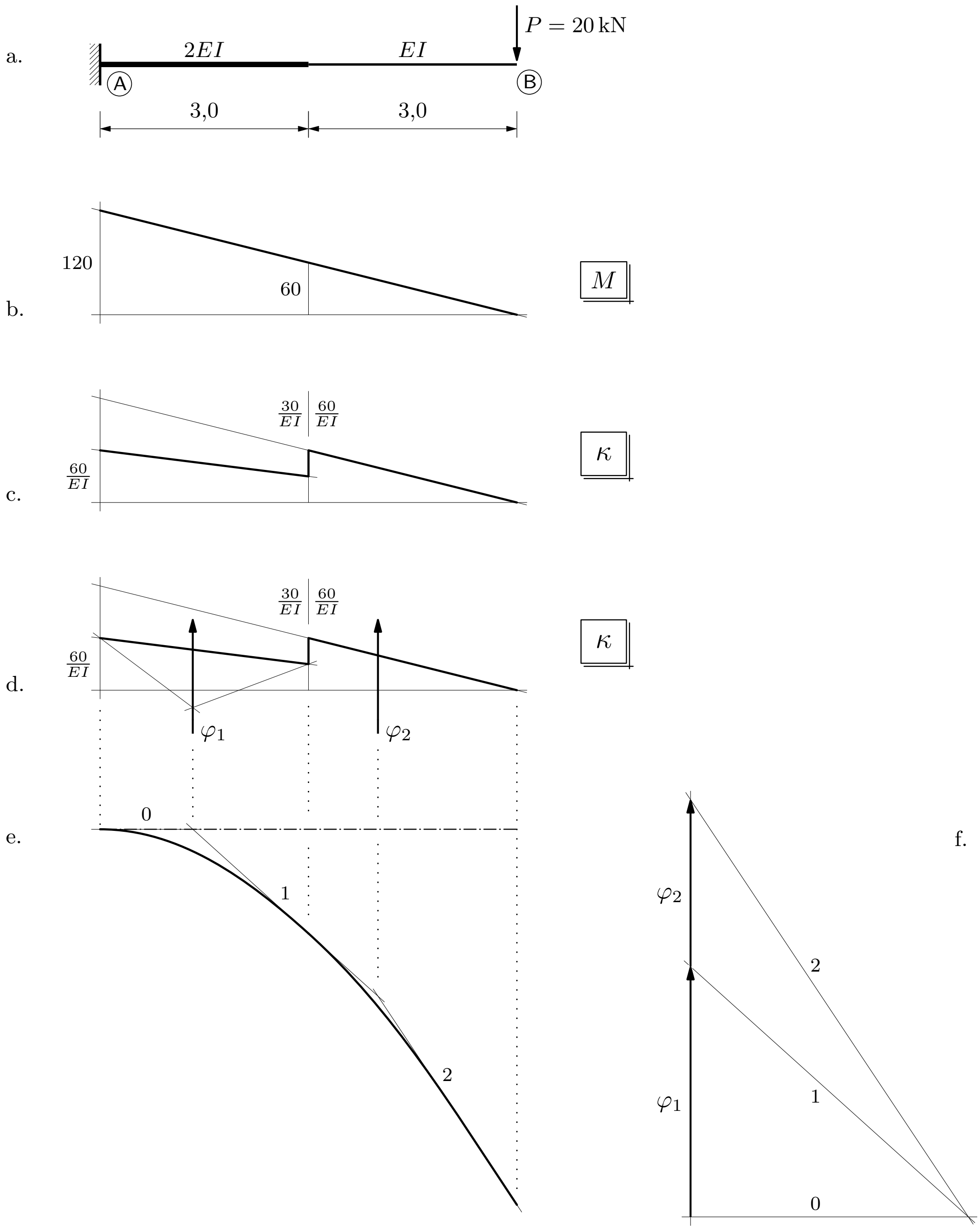
No, κ je po kinematičkomu značenju funkcija koja opisuje zakrivljenost osi grede: $\kappa = -w''$. Orijentirana ploština površine između njezina grafa i osi x, između dviju ordinala, jednaka je stoga, kao vrijednost određenoga integrala, kutu φ koji zatvaraju tangente na progibnu liniju u točkama s pripadnim apscisama. Dakle, zamišljene „koncentrirane sile” za koje crtamo verižni poligon s kinematičkoga su gledišta vektori čije su vrijednosti jednake kutovima između tangenata na progibnu liniju.

U našemu ćemo primjeru umjesto distribuirane zakrivljenosti κ uvesti vektore kutova $\vec{\varphi}_1$ i $\vec{\varphi}_2$ u težištima trapeza i trokuta od kojih je sastavljen njezin dijagram (slika 1.d.). Intenziteti tih vektora jednaki su ploštinama trapeza i trokuta:

$$\varphi_1 \;=\; \frac{1}{EI}\cdot\frac{60+30}{2}\cdot 3 \;=\; \frac{135}{1,5\cdot 10^5} \;=\; 0{,}0009,$$

$$\varphi_2 \;=\; \frac{1}{EI}\cdot\frac{60}{2}\cdot 3 \;=\; \frac{90}{1,5\cdot 10^5} \;=\; 0{,}0006$$

(uzeli smo $EI = 1{,}5\cdot 10^5\ \text{kNm}^2$).



Slika 1.

Pri konstruiranju tangentnoga poligona s vektorima kutova postupamo kao s koncentriranim silama pri konstruiranju verižnoga poligona. Za crtež poligona vektorâ kutova (slika 1.f.) odabrat ćemo mjerilo kutova 1 cm :: 0,00025. U tom će mjerilu duljine nacrtanih vektorâ kutova biti $\overline{\varphi}_1 = 3{,}6\,\mathrm{cm}$ i $\overline{\varphi}_2 = 2{,}4\,\mathrm{cm}$.

Uz to, odabrati treba i udaljenost χ pola od pravca na kojemu leže vektori kutova (χ je također, kinematički, kut) i položaj pola na paraleli s tim pravcem.

O udaljenosti χ ovisi mjerilo u kojemu očitavamo duljine pomakâ. Ako je $\chi = 1$, kutovi koje zatvaraju zrake poligona vektorâ kutova, a time i kutovi koje zatvaraju stranice nacrtanoga tangentnog poligona, jednaki su kutovima između tangenata na progibnu liniju; riječ je, naime, o malim kutovima, pa je

$$\alpha_i \backsimeq \operatorname{tg}\alpha_i = \frac{\varphi_i}{\chi} = \frac{\varphi_i}{1} = \varphi_i.$$

U tom će slučaju duljine odsječaka na ordinalama između zaključne linije i verižne krivulje biti jednake duljinama progibâ u mjerilu duljina. Uzmemo li pak da je $\chi = {}^1/_n$, kutovi između zrakâ povećat će se n puta, pa će i duljine odsječaka na ordinalama biti n puta veće. Ako je $\overline{w}(x)$ izmjerena duljina odsječka, stvarna će duljina pomaka biti

$$w(x) = \frac{m}{n} \cdot \overline{w}(x).$$

U odabranom bi mjerilu kutova $\chi = 1$ na crtežu bio $\overline{\chi} = 40$ m. Uzet ćemo $n = 1000$, tako da su $\chi = {}^1/_{1000} = 0{,}001$ i $\overline{\chi} = 4$ cm.

Pol ćemo postaviti tako da početna, nulta zraka bude paralelna s osi grede, što znači da će i stranica 0 tangentnoga poligona biti paralelna s osi grede i, stoga, horizontalna. Budući da su u lijevome ležaju spriječeni i pomak i zaokret osi, zaključna linija tangentnoga poligona progibne linije (linija od koje mjerimo pomake) mora se poklopiti s nultom stranicom — našim smo izborom položaja pola, prema tome, odmah dobili horizontalnu zaključnu liniju (slika 1.e.).

Tangentni poligon progibne linije crtamo na isti način kao i verižni poligon. U tangentni poligon ucrtavamo potom progibnu krivulju. Stranice poligona tangente su na progibnu krivulju u točkama „ispod" krajnjih točaka dijelova dijagrama κ koje smo zamijenili vektorima kutova: stranica 0 ispod lijevoga kraja trapeza, stranica 1 ispod desnoga kraja trapeza / lijevoga kraja trokuta, stranica 2 ispod desnoga kraja trokuta.

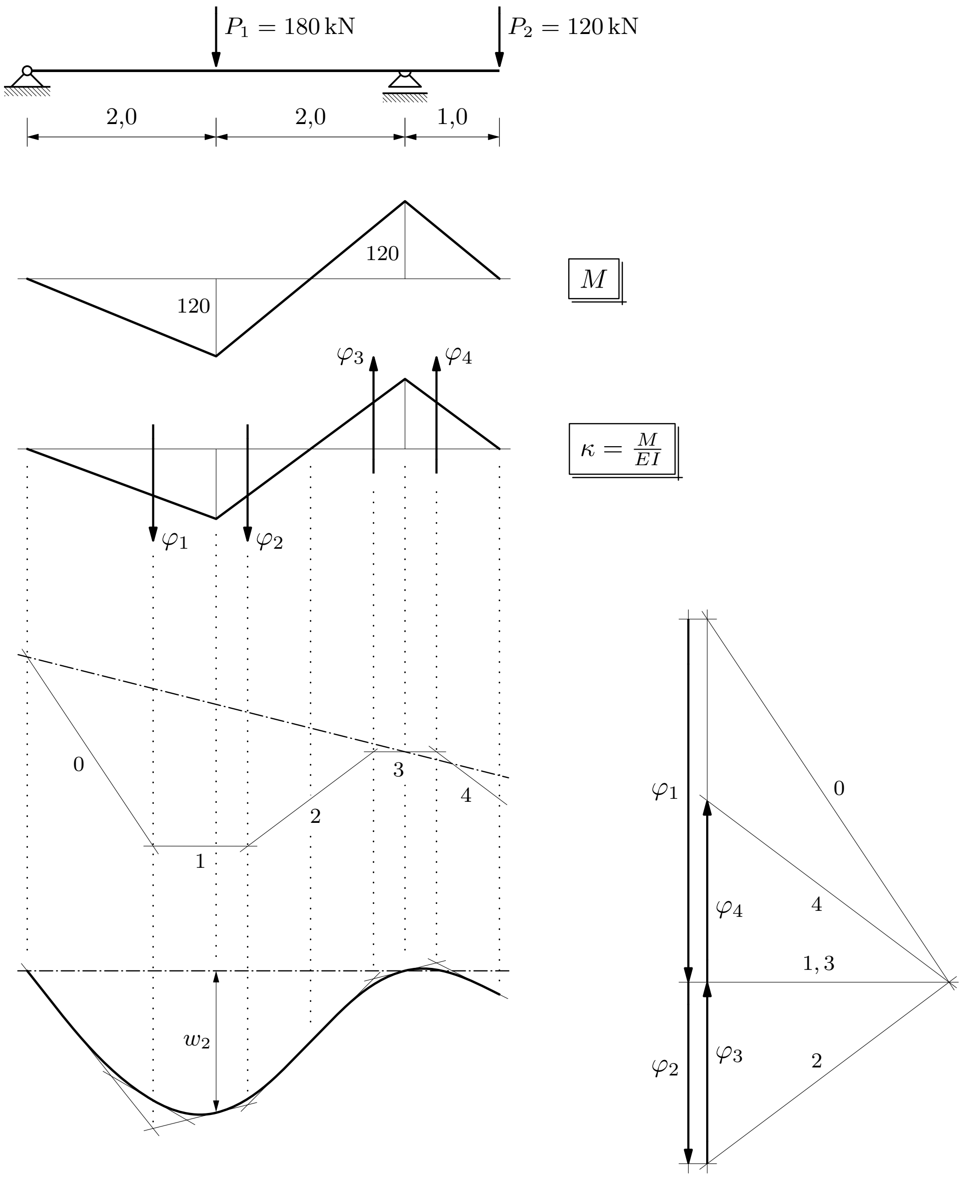
Između $w(x)$ i $\overline{w}(x)$ veza je

$$w(x) = \frac{100}{1000} \cdot \overline{w}(x) = \frac{\overline{w}(x)}{10}.$$

Na crtežu smo na kraju konzole izmjerili $\overline{w}_{\mathsf{B}} = 5{,}4$ cm, pa je pomak slobodnoga kraja konzole

$$w_{\mathsf{B}} = \frac{\overline{w}_{\mathsf{B}}}{10} = \frac{5{,}4}{10} = 0{,}54 \text{ cm}.$$

Još jedan primjer crtanja progibne linije prikazan je na sljedećoj stranici. Priču složite sami.



mjerilo duljina: 1 : 80

1 cm :: 80 cm

1,25 cm :: 1 m

$m = 80$

$EI \;=\; 10\,000\ \mathrm{kNm}^2$

$\sum M_{/\mathsf{B}} \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; A^v \;=\; 60\ \mathrm{kN}$

$M_2 \;=\; A^v \cdot 2 \;=\; 120\ \mathrm{kNm}$

$M_{\mathsf{B}} \;=\; -P_2 \cdot 1 \;=\; -120\ \mathrm{kNm}$

$$\varphi_1 \;=\; \frac{120}{2\,EI} \cdot 2 \;=\; 0{,}012$$

$$\varphi_2 \;=\; \varphi_4 \;=\; \varphi_4 \;=\; \frac{120}{2\,EI} \cdot 1 \;=\; 0{,}006$$

mjerilo kutova: 1 cm :: 0,0025

$\overline{\varphi}_1 \;=\; 4{,}8\,\mathrm{cm}, \quad \overline{\varphi}_2 \;=\; \overline{\varphi}_3 \;=\; \overline{\varphi}_4 \;=\; 2{,}4\,\mathrm{cm}$

$n \;=\; 125 \;\Longrightarrow\; \chi \;=\; 0{,}008 \;\Longrightarrow\; \overline{\chi} \;=\; 3{,}2\,\mathrm{cm}$

$$\overline{w}_2 \;=\; 1{,}85\,\mathrm{cm} \;\Longrightarrow\; w_2 \;=\; \frac{80}{125} \cdot 1{,}85 \;=\; 1{,}18\,\mathrm{cm}$$