

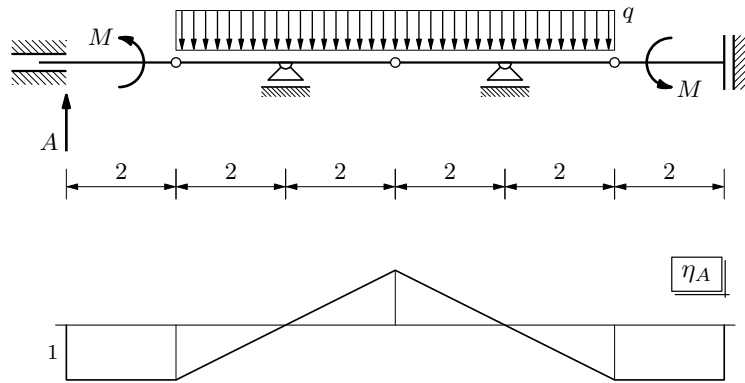
GS 1. — 6. rujna 2024.

Zadatak 1.

Pomoću prikazane utjecajne linije izračunajte vrijednost A reakcije \vec{A} u lijevome ležaju!

$$q = 25 \text{ kN/m}$$

$$M = 75 \text{ kNm}$$



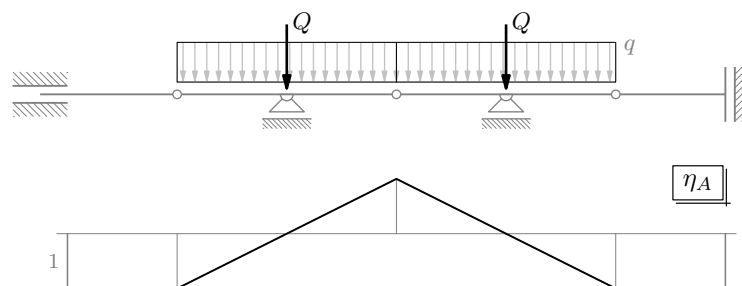
U primjeni utjecajnih linija utjecaj se koncentriranoga momenta izračunava prema izrazu

$$A(M) = -M \operatorname{tg} \alpha_M,$$

gdje je α_M kut koji odsječak utjecajne linije (ili, za nelinearne utjecajne linije, tangenta na utjecajnu liniju) u točki koja odgovara hvatištu momenta zatvara s osi x [skripta (<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/gs1.pdf>), str. 322]. Budući da su oba odsječka linije η_A za dijelove nosača na kojima djeluju momenti \vec{M} horizontalna, bit će

$$A(M, M) = -M \operatorname{tg} 0 + (-M \operatorname{tg} 0) = 0 + 0 = 0.$$

Distribuirano se opterećenje može na dijelu nosača za koji je utjecajna linija odsječak pravca zamijeniti rezultantom [skripta, str. 320]. Dio linije η_A koji odgovara dijelu nosača na koji djeluje opterećenje \vec{q} sastavljen je od dva odsječka pravca, pa opterećenje treba zamijeniti dvjema rezultatama:



Vrijednosti su utjecajne funkcije u točkama koje odgovaraju rezultatima nule, pa je

$$A(q) = A(Q, Q) = Q \cdot 0 + Q \cdot 0 = 0.$$

I na kraju,

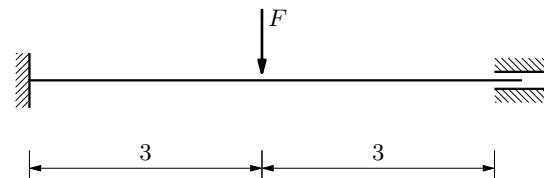
$$A = A(M, M, q) = 0.$$

Zadatak 2.

- a. Za odabrani osnovni sistem izračunajte komponente matrice popustljivosti (koeficijente popustljivosti) zadanoga sistema!
- b. Pomoću matrice popustljivosti izračunajte potrebne vrijednosti i nacrtajte dijagrame unutarnjih sila!

$$F = 125 \text{ kN}$$

$$EI = \text{const.}$$



- a. U odjeljku 11.7. *Matrice popustljivosti ravnoga štapa* poglavlja 11. *Metoda sila* u skriptama [<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/gs1.pdf>] izvedeni su opći izrazi za komponente matrice popustljivosti (to jest za koeficijente popustljivosti ili fleksibilnosti) obostrano upete grede za jednostavno oslonjenu gredu (na stranicama 257 do 259) i za konzolu (na stranicama 263 do 265) kao osnovne sisteme.

Za sisteme kojima je os na pravcu uzdužni su i poprečni smjer neovisni. Zadana se greda pod opterećenjima okomitima na os ponaša kao obostrano upeta greda, dok je za opterećenja u smjeru osi statički određena, pa je tražena matrica \mathbf{D} zadane grede jednaka podmatrici \mathbf{D}_\perp matrice \mathbf{D} obostrano upete grede.

Za zadani sistem odgovarajući su osnovni sistemi



Lijevi crtež usporedite sa slikom 153.b. na stranici 257, a desni sa slikom 156.b. na stranici 264.

Nema smisla iz skriptata precrtavati dijagrame za neodređene sile jediničnih vrijednosti (slike 153.f. *ℓ* h. i 156.g. *ℓ* h.) ni prepisivati izvode izrazā za koeficijente popustljivosti (stranice 258 i 259 te 264 i 265, uz prilagodbu indeksā: 1 ispada iz igre, 2 postaje 1, a 3 se pretvara u 2), čak ni s brojem 6 umjesto ℓ . Upotrijebit ćemo izvedene izraze (a i vi ste to mogli napraviti, da ste pronašli traženo):

Za jednostavno oslonjenu gredu kao osnovni sistem matrica je fleksibilnosti zadane grede, prema izrazu (285) na stranici 259 skriptata,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{3EI} & -\frac{\ell}{6EI} \\ -\frac{\ell}{6EI} & \frac{\ell}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Uvrstimo li $\ell = 6$, dobit ćemo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{6}{3EI} & -\frac{6}{6EI} \\ -\frac{6}{6EI} & \frac{6}{3EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{EI} & -\frac{1}{EI} \\ -\frac{1}{EI} & \frac{2}{EI} \end{bmatrix}.$$

Za konzolu pak kao osnovni sistem matrica je fleksibilnosti, prema izrazu (290) na stranici 265,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ell^3}{3EI} & -\frac{\ell^2}{2EI} \\ -\frac{\ell^2}{2EI} & \frac{\ell}{EI} \end{bmatrix},$$

odnosno, za $\ell = 6$,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{6^3}{3EI} & -\frac{6^2}{2EI} \\ -\frac{6^2}{2EI} & \frac{6}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{72}{EI} & -\frac{18}{EI} \\ -\frac{18}{EI} & \frac{6}{EI} \end{bmatrix}.$$

b. Za opterećenje koncentriranom silom su pomoću koeficijenata popustljivosti za konzolu kao osnovni sistem izvedeni opći izrazi za vrijednosti unutarnjih sila u karakterističnim točkama (na stranicama 265 do 267) i nacrtani dijagrami unutarnjih sila (slika 158.). Ni te izvode naćemo prepisivati.

Kako je $a = b = \ell/2$, bit će prema spomenutim izrazima

$$T(0^+) = \frac{F b^2 (3a + b)}{\ell^2} = \frac{F (\ell/2)^2 (3\ell/2 + \ell/2)}{\ell^2} = \frac{F}{2} = 62,5 \text{ kN},$$

$$T(\ell^-) = -\frac{F a^2 (a + 3b)}{\ell^2} = -\frac{F (\ell/2)^2 (\ell/2 + 3\ell/2)}{\ell^2} = -\frac{F}{2} = -62,5 \text{ kN},$$

$$M(0) = -\frac{F a b^2}{\ell^2} = -\frac{F \ell/2 (\ell/2)^2}{\ell^2} = -\frac{F \ell}{8} = -93,75 \text{ kNm},$$

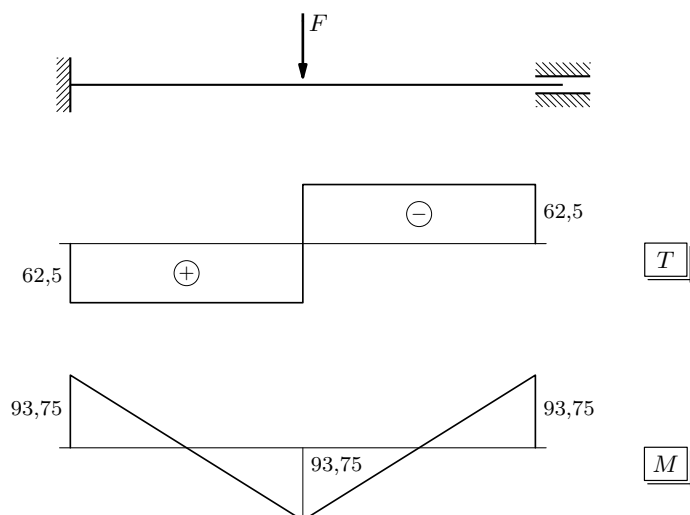
$$M(\ell/2) = \frac{2 F a^2 b^2}{\ell^3} = \frac{2 F (\ell/2)^2 (\ell/2)^2}{\ell^3} = \frac{F \ell}{8} = 93,75 \text{ kNm},$$

$$M(\ell) = -\frac{F a^2 b}{\ell^2} = -\frac{F (\ell/2)^2 \ell/2}{\ell^2} = -\frac{F \ell}{8} = -93,75 \text{ kNm};$$

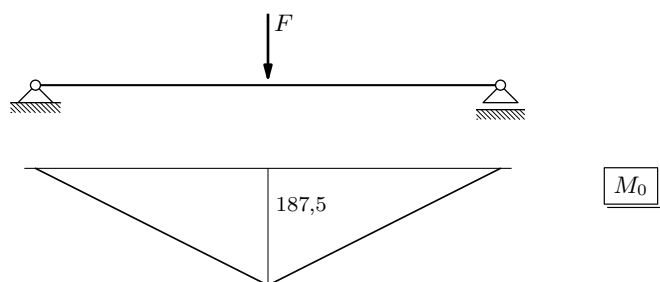
jasno je da uzdužnih sila nema.

Dijagrami poprečnih sila i momenata savijanja prikazani su na slici na vrhu sljedeće stranice.

Vrijednosti momenata savijanja i poprečnih sila u karakterističnim točkama izračunat ćemo i pomoću koeficijenata popustljivosti za jednostavno oslonjenu gredu kao osnovni sistem (ponavljanje s varijacijama je majka razumijevanja i učenja).



Za izračunavanje „slobodnih” članova $\delta_{1,0}$ i δ_2 u jednadžbama kompatibilnosti treba nam osim dijagrama m_1 i m_2 (koji su na slikama 153.f. & h. na stranici 257 skripata označeni s m_2 i m_3 (rekli smo da treba prilagoditi indekse)) i dijagram M_0 :



(vrijednost momenta u polovini raspona dobivena je uvrštavanjem u izraz $F\ell/4$).

„Slobodni” su članovi jednadžbi

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 3 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) (-1) + \left(\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 3 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) (-1) \right]$$

$$= -\frac{281,25}{EI},$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 3 \right) \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 3 \right) \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] = \frac{281,25}{EI};$$

dijagram M_0 podijelili smo u dva trokuta, dijagram m_1 kao na sljedećoj slici,



a na analogan način i dijagram m_2 .

Za primjenu Vereščaginova teorema

$$\mathcal{J}_{1,2} = \int_a^b g_1(x) g_2(x) dx = \mathcal{G}_1 g_2(x_{T(\mathcal{G}_1)})$$

funkcija g_2 , vrijednost koje izračunavamo u težištu lika \mathcal{G}_1 „ispod” funkcije g_1 , mora biti linearna (ili konstantna), ali za funkciju g_1 ne postoje nikakva ograničenja — ona ne mora biti glatka, pa čak ni neprekidna.

Budući da je dijagram M_0 osnosimetričan u odnosu na ordinalu kroz polovište raspona, očito je da je težište lika \mathcal{M}_0 na toj ordinali, pa su „slobodni” članovi

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left[2 \left(\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 3 \right) \right] (0,5) (-1) = -\frac{281,25}{EI},$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left[2 \left(\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 3 \right) \right] (0,5) = \frac{281,25}{EI}.$$

Treba naglasiti/upozoriti: dijagram M_0 je osnosimetričan, pa je težište lika \mathcal{M}_0 na simetrali koja se poklapa s ordinalom u polovištu raspona koja se poklapa s ordinalom kroz šiljak dijagrama, ali ovo je poseban slučaj. Ako dijagram nije osnosimetričan, težište nije ni na ordinali u polovištu raspona ni na ordinali kroz šiljak dijagrama, te je jednostavnije podijeliti dijagram negoli tražiti težište cijeloga lika.

Sustav je jednadžbi kontinuiteta u matricnom obliku

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{EI} & -\frac{1}{EI} \\ -\frac{1}{EI} & \frac{2}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{281,25}{EI} \\ -\frac{281,25}{EI} \end{bmatrix}.$$

Inverz \mathbf{D}_\perp^{-1} podmatrice \mathbf{D}_\perp (koja je naša matrica \mathbf{D} , pa je $\mathbf{D}_\perp^{-1} = \mathbf{D}^{-1}$) dan je u izrazu (289) na stranici 261 skripata:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{\ell} & \frac{2EI}{\ell} \\ \frac{2EI}{\ell} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix};$$

za $\ell = 6$ je

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{6} & \frac{2EI}{6} \\ \frac{2EI}{6} & \frac{4EI}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{3} & \frac{EI}{3} \\ \frac{EI}{3} & \frac{2EI}{3} \end{bmatrix},$$

pa je

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{3} & \frac{EI}{3} \\ \frac{EI}{3} & \frac{2EI}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{281,25}{EI} \\ -\frac{281,25}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 93,75 \\ -93,75 \end{bmatrix},$$

i, na kraju,

$$M(0) = -X_1 = -93,75 \text{ kNm} \quad \& \quad M(\ell) = X_2 = -93,75 \text{ kNm}.$$

Vrijednost momenta u polovini raspona možemo izračunati tako da na spojnicu vrijednosti momenata na krajevima „objesimo” vrijednost $F\ell/4$

$$M(\ell/2) = -93,75 + 187,5 = 93,75 \text{ kNm}.$$

Vrijednosti poprečnih sila neposredno uz ležajeve na temelju su diferencijalnoga odnosa $T = M'$ jednake nagibu odsječaka pravaca koji su dijelovi grafa funkcije M :

$$T(0^+) = \frac{M(\ell/2) - M(0)}{\ell/2} = \frac{93,75 - (-93,75)}{3} = 62,5 \text{ kN},$$

$$T(\ell^-) = \frac{M(\ell) - M(\ell/2)}{\ell/2} = \frac{-93,75 - 93,75}{3} = -62,5 \text{ kN}.$$

Sustav jednadžbi kompatibilnosti može se lako riješiti i „ručno”, recimo Gaušovim eliminacijskim postupkom s uvrštavanjem unazad¹. Proširena je matrica sustava

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{2}{EI} & -\frac{1}{EI} & \frac{281,25}{EI} \\ -\frac{1}{EI} & \frac{2}{EI} & -\frac{281,25}{EI} \end{array} \right],$$

odnosno, nakon množenja s EI ,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 281,25 \\ -1 & 2 & -281,25 \end{array} \right].$$

Prvi ćemo redak podijeliti s 2,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{281,25}{2} \\ -1 & 2 & -281,25 \end{array} \right],$$

i pribrojiti drugome retku:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{281,25}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{281,25}{2} \end{array} \right].$$

Iz drugoga je retka

$$\frac{3}{2} X_2 = -\frac{281,25}{2},$$

pa je

$$X_2 = -\frac{281,25}{3} = -93,75.$$

¹ Gaušov eliminacijski postupak s uvrštavanjem unazad obrađen je na *Matematici 1.*, a detaljnije je opisan i u datoteci *Dualitet metode sila i opće metode pomakā — usporedni proračun* [<http://master.grad.hr/nastava/gs/gs1/pdn/dual.pdf>] u odsječcima 29 do 31 na stranicama 27 do 30.

Uvrštavanjem u jednadžbu koja odgovara prvome retku,

$$X_1 - \frac{1}{2}X_2 = \frac{281,25}{2} \quad \Rightarrow \quad X_1 - \frac{1}{2} \cdot (-93,75) = \frac{281,25}{2},$$

dobivamo

$$X_1 = \frac{281,25 - 93,75}{2} = 93,75.$$

Drugi je jednostavan način „ručnoga” rješavanja sustava jednadžbi primjena Cramerova pravila:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 281,25 & -1 \\ -281,25 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 281,25 - 281,25 = 281,25,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 281,25 \\ -1 & -281,25 \end{vmatrix} = -2 \cdot 281,25 + 281,25 = -281,25,$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{281,25}{3} = 93,75,$$

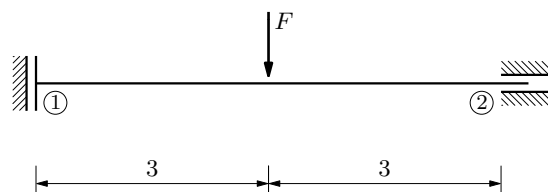
$$X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-281,25}{3} = -93,75.$$

Zadatak 3.

- Općom metodom pomakā izračunajte vrijednosti sila na krajevima štapa i nacrtajte dijagrame unutanjih sila!
- Nacrtajte progibnu liniju i očitajte duljinu pomaka lijevoga ležaja!
- Izračunajte orijentiranu duljinu pomaka lijevoga ležaja!

$$F = 125 \text{ kN}$$

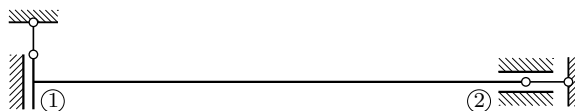
$$EI = 162\,000 \text{ kNm}^2$$



- Vrijednosti sila na krajevima i dijagrami unutanjih sila

nepoznanice: w_1 i u_2

osnovni sistem (za opću metodu pomakā):



veze pomakā krajeva štapa i pomakā čvorova: $w_{1,2} = w_1$ i $u_{2,1} = u_2$

aksijalna i fleksijska krutost štapa:

$$k_{\{1,2\}}^a = k^a = \frac{EA}{\ell} \quad \text{i} \quad k_{\{1,2\}}^f = k = \frac{EI}{\ell} = 27\,000 \text{ kNm}$$

opći izrazi za vrijednosti sila na krajevima štapa:

$$N_{i,j} = \bar{N}_{i,j} + n_{i,j}, \quad T_{i,j} = \bar{T}_{i,j} + t_{i,j} \quad \text{i} \quad M_{i,j} = \bar{M}_{i,j} + m_{i,j}$$

izrazi za vrijednosti sila u stanju sprječanih pomaka (vrijednosti sila upetosti):

$$\bar{N}_{1,2} = 0, \quad \bar{T}_{1,2} = -\frac{F}{2}, \quad \bar{M}_{1,2} = \frac{F\ell}{8},$$

$$\bar{N}_{2,1} = 0, \quad \bar{T}_{2,1} = -\frac{F}{2}, \quad \bar{M}_{2,1} = -\frac{F\ell}{8}$$

(ti se izrazi mogu naći u odjeljku 12.3.2. *Sile upetosti* poglavlja 12. *Opća metoda pomakā* na stranici 282 skripata [<http://master.grad.hr/nastava/gs/g1/g1.pdf>] ili u odsječku 15. na stranici 17 datoteke *Dualitet metode sila i opće metode pomakā — usporedni proračun* [<http://master.grad.hr/nastava/gs/g1/pdn/dual.pdf>] ili u prethodnom zadatku, na stranici 3 (uz prilagodbu predznaka))

izrazi za vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka:

$$n_{1,2} = -k^a u_2, \quad t_{1,2} = \frac{12k}{\ell^2} w_1, \quad m_{1,2} = -\frac{6k}{\ell} w_1,$$

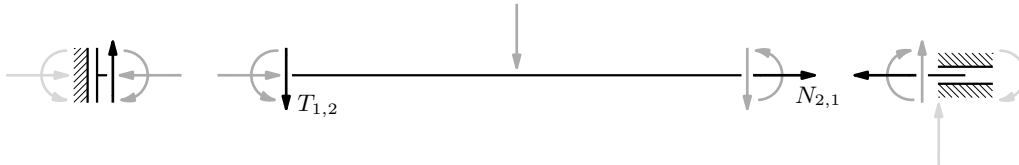
$$n_{2,1} = k^a u_2, \quad t_{2,1} = -\frac{12k}{\ell^2} w_1, \quad m_{2,1} = -\frac{6k}{\ell} w_1$$

(izrazi se izvode pomoću matrice krutosti navedene u odjeljku 12.3.3. *Odnos između sila na krajevima i pomakā krajeva* na stranici 285 skripata ili na stranici 18 datoteke *Dualitet...*; u spomenutom su odjeljku skripata izvedeni opći izrazi za sve koeficijente matrice krutosti)

izrazi za vrijednosti (ukupnih) sila na krajevima štapa:

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= -k^a u_2, & T_{1,2} &= -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} w_1, & M_{1,2} &= \frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1, \\ N_{2,1} &= k^a u_2, & T_{2,1} &= -\frac{F}{2} - \frac{12k}{\ell^2} w_1, & M_{2,1} &= -\frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1 \end{aligned}$$

jednadžbe ravnoteže čvorova:



♣ čvor 1:

- ♠ ravnoteža horizontalnih sila: nepoznanica je u_2 (u $N_{1,2} = -k^a u_2$), ali je nepoznata i vrijednost horizontalne reakcije (slobodni član jednadžbe)
- ♠ ravnoteža momenata: nepoznanica je w_1 (u izrazu za $M_{1,2}$), ali je nepoznata i vrijednost reaktivnoga momenta
- ♠ ravnoteža vertikalnih sila:

$$-T_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} w_1 = 0$$

♣ čvor 2:

- ♠ ravnoteža vertikalnih sila: nepoznanica je w_1 (u izrazu za $T_{2,1}$), ali je nepoznata i vrijednost vertikalne reakcije
- ♠ ravnoteža momenata: nepoznanica je w_1 (u izrazu za $M_{2,1}$), ali je nepoznata i vrijednost reaktivnoga momenta
- ♠ ravnoteža horizontalnih sila:

$$-N_{2,1} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{2,1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -k^a u_2 = 0$$

rješenja jednadžbi ravnoteže:

$$w_1 = \frac{F\ell^2}{24k} = 0,00694 \text{ m} \quad \mathcal{E} \quad u_2 = 0$$

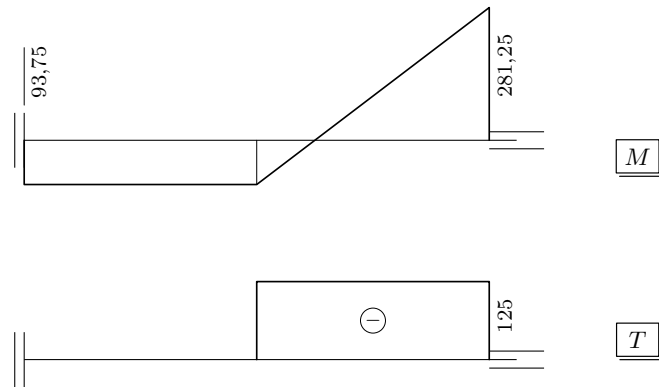
vrijednosti sila na krajevima štapa:

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= N_{2,1} = 0 \\ T_{1,2} &= -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} w_1 = -\frac{F}{2} + \frac{12k}{\ell^2} \frac{F\ell^2}{24k} = -\frac{F}{2} + \frac{F}{2} = 0 \\ T_{2,1} &= -\frac{F}{2} - \frac{12k}{\ell^2} w_1 = -\frac{F}{2} - \frac{12k}{\ell^2} \frac{F\ell^2}{24k} = -\frac{F}{2} - \frac{F}{2} = -F = -125 \text{ kN} \end{aligned}$$

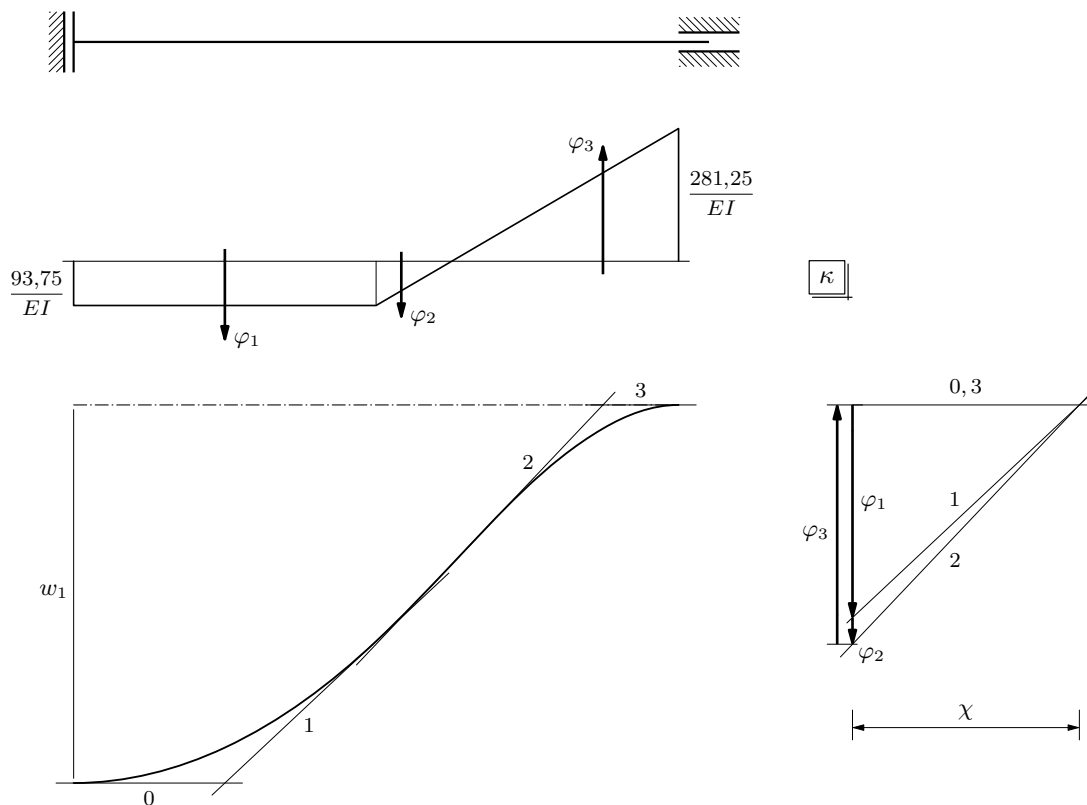
$$M_{1,2} = \frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1 = \frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} \frac{F\ell^2}{24k} = -\frac{F\ell}{8} = -93,75 \text{ kNm},$$

$$M_{2,1} = -\frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} w_1 = -\frac{F\ell}{8} - \frac{6k}{\ell} \frac{F\ell^2}{24k} = -\frac{3F\ell}{8} = -281,25 \text{ kNm}$$

dijagrami unutarnjih sila:



b. Progibna linija



mjerilo duljina: 1 cm :: 75 cm

(potrebna izračunavanja na sljedećoj stranici)

$$\varphi_1 = \frac{93,75}{EI} \cdot 3 = \frac{281,25}{EI}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{93,75}{EI} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 3\right) = \frac{35,16}{EI}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{281,25}{EI} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 3\right) = \frac{316,41}{EI}$$

mjerilo kutova: $1 \text{ cm} :: \frac{100}{EI}$

$$\chi = \frac{300}{EI} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{1}{\chi} = \frac{EI}{300} = \frac{162\,000}{300} = 540$$

duljina pomaka lijevoga ležaja:

očitano: $\tilde{w}_1 = 5 \text{ cm}$

$$w_1 = \frac{m}{n} \tilde{w}_1 = \frac{75}{540} \cdot 5 \simeq 0,7 \text{ cm} = 7 \text{ mm}$$

c. Orijehtirana duljina pomaka lijevoga ležaja

Lijevi je ležaj čvor 1. Orijehtirana duljina vertikalnoga pomaka čvora 1, w_1 , nepoznata je u metodi pomakā. Rješavanjem jednadžbe vertikalnih sila u čvoru 1 izračunali smo

$$w_1 = 0,00694 \text{ m} \simeq 7 \text{ mm}.$$

Horizontalnoga pomaka ležaja nema (spriječen je ležajnim spojem), pa je duljina pomaka lijevoga ležaja

$$|d| = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} = \sqrt{0 + w_1^2} = |w_1|.$$

Orijentaciju određuje predznak brojevne vrijednosti w_1 . Vrijednost je pozitivna, pa je pomak u smislu pozitivne orijentacije osi z , dakle prema dolje.