

# GS 1. — 17. lipnja 2024.

## Zadatak 1.

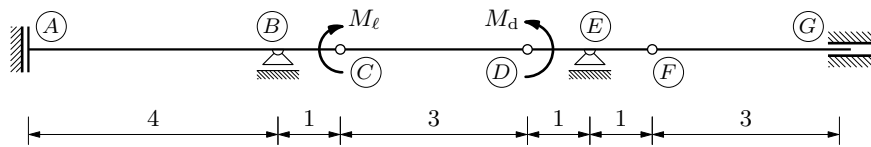
- a. Superpozicijskim postupkom nacrtajte momentni dijagram!
- b. Nacrtajte progibnu liniju! Očitajte duljinu vertikalnoga pomaka točke  $D$ !

$$M_\ell = 50 \text{ kN} \quad (\text{neposredno lijevo od zgloba } C)$$

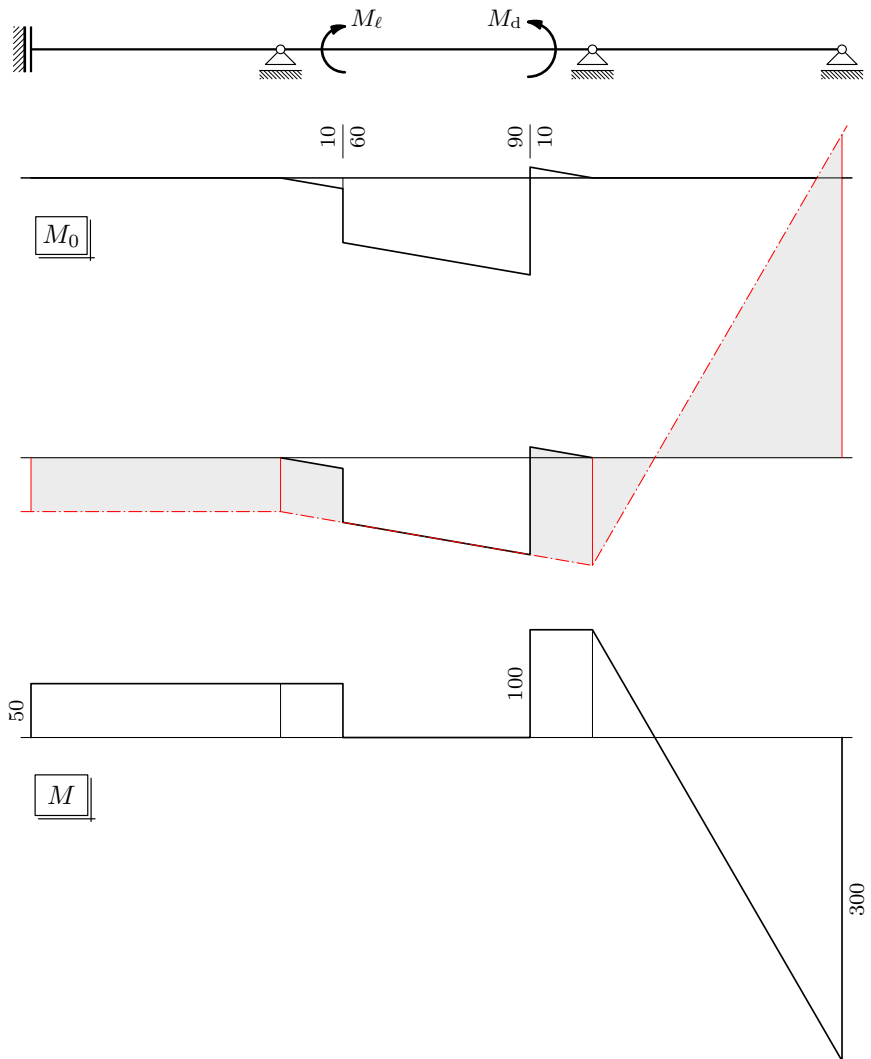
$$M_d = 100 \text{ kN} \quad (\text{neposredno desno od zgloba } D)$$

$$(EI)_{AF} = 20\,250 \text{ kNm}^2$$

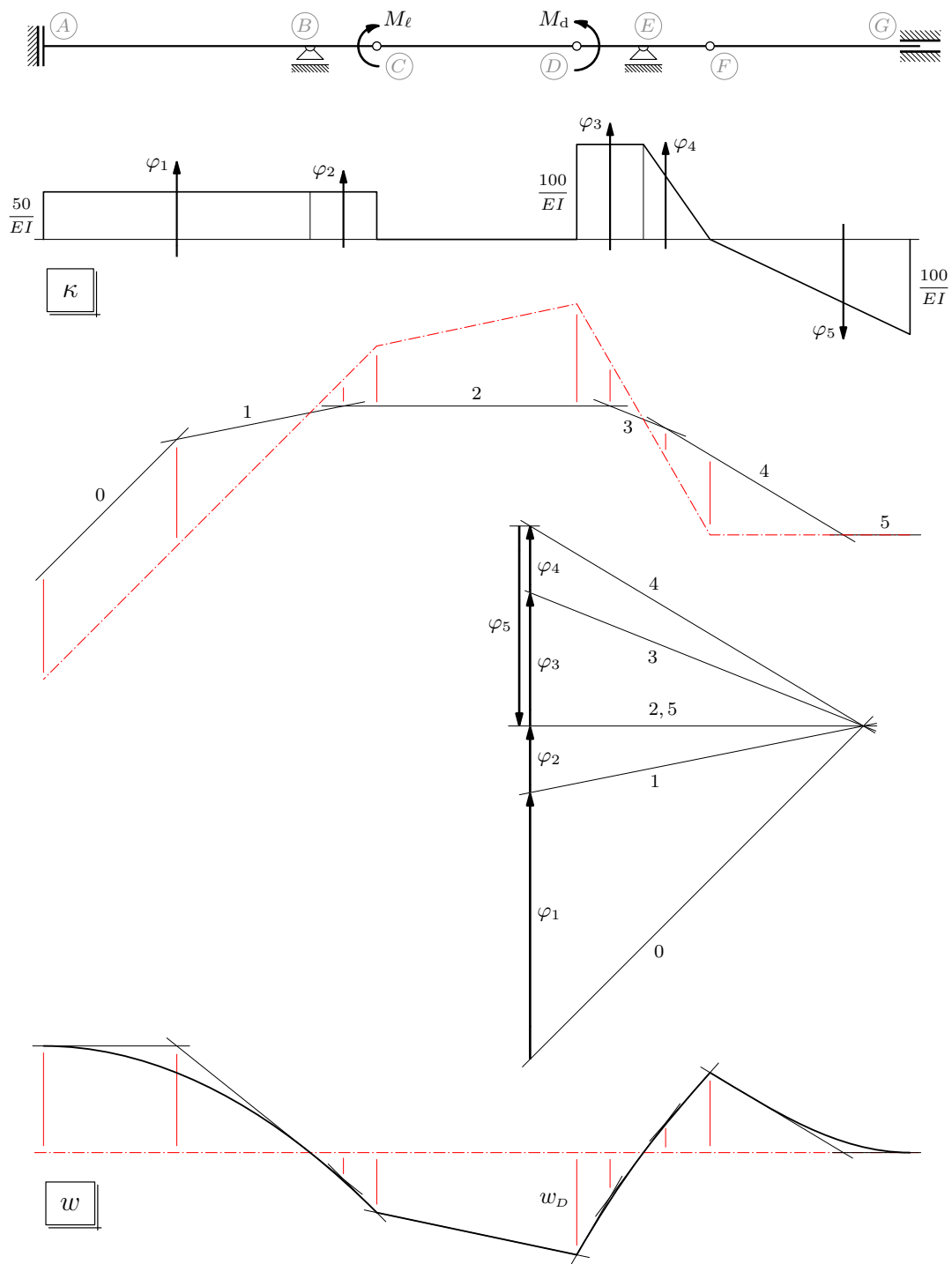
$$(EI)_{FG} = 3EI_{AF}$$



a.



b.



mjerilo duljina: 1 cm :: 100 cm

mjerilo kutova: 1 cm ::  $\frac{50}{EI}$   $[EI = (EI)_{AF}]$

$$\chi = \frac{50}{EI} \cdot 5$$

potrebna izračunavanja — na sljedećoj stranici

kutovi:

$$\varphi_1 = \frac{50}{EI} \cdot 4$$

$$\varphi_2 = \frac{50}{EI} \cdot 1$$

$$\varphi_3 = \frac{100}{EI} \cdot 1 = \frac{50}{EI} \cdot 2$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{EI} \cdot 1 = \frac{50}{EI} \cdot 1$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{EI} \cdot 3 = \frac{50}{EI} \cdot 3$$

duljine prikazā u poligonu kutovi:

$$\tilde{\varphi}_1 = 4 \text{ cm}$$

$$\tilde{\varphi}_2 = 1 \text{ cm}$$

$$\tilde{\varphi}_3 = 2 \text{ cm}$$

$$\tilde{\varphi}_4 = 1 \text{ cm}$$

$$\tilde{\varphi}_5 = 3 \text{ cm}$$

$$\tilde{\chi} = 5 \text{ cm} \quad \chi = \frac{50}{EI} \cdot 5$$

redosljed crtanja zaključne linije:

- ♠ zdesna: ležaj  $G$  do zgloba  $F$  — poklapanje sa stranicom 5 [zašto?]
- ♠ od zgloba  $F$  preko nultočke u ležaju  $E$  na stranici 3 do zgloba  $D$
- ♠ slijeva: kroz nultočku u ležaju  $B$  na stranici 3 usporedno sa stranicom 0 od ležaja  $A$  do zgloba  $C$  [zašto?]
- ♠ od zgloba  $C$  do zgloba  $D$

duljina pomaka točke  $D$ :

očitano:  $\tilde{w}_D = 15,25 \text{ mm}$  (četvrtina milimetra je procijenjena)

$$n = \frac{1}{\chi} = \frac{EI}{5 \cdot 50} = \frac{20250}{250} = 81$$

$$w_D = \frac{m}{n} \tilde{w}_D = \frac{100}{81} \cdot 15,25 = 18,8 \text{ mm} \simeq 19 \text{ mm}$$

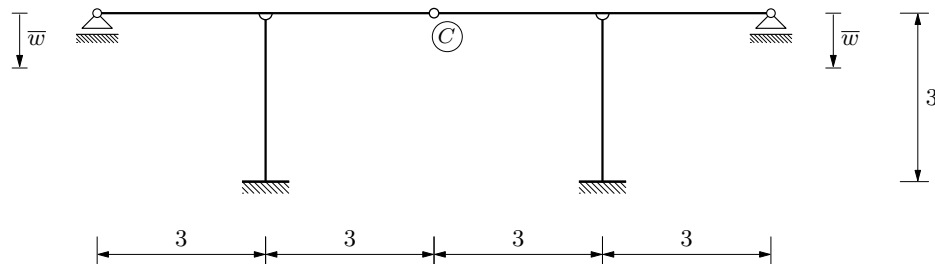
## Zadatak 2.

a. Metodom sila izračunajte potrebne vrijednosti i nacrtajte dijagrame unutarnjih sila!  
(Doslovno ponovljeni zadatak s popravnoga kolokvija)

b. Izračunajte orijentiranu duljinu pomaka točke  $C$ !

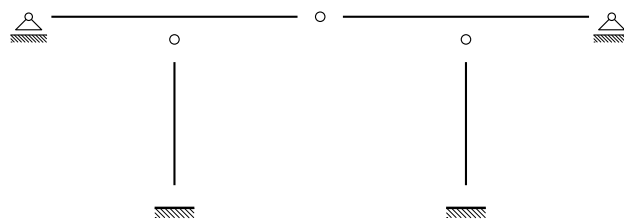
$$\bar{w} = 3,25 \text{ mm}$$

$$EI = 162000 \text{ kNm}^2$$



Korak prvi. Stupanj statičke neodređenosti  $\mathcal{E}$  osnovni sistem (za metodu sila).

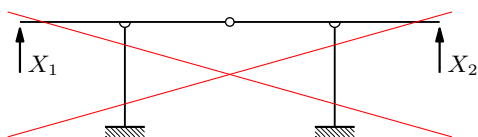
(podrobnije u odjeljku *Korak prvi primjera Metoda sila (Ispitni rok 6. rujna 2022., zadatak 3.)* (<http://master.grad.hr/nastava/gs/g1/isp/1-220906-3.pdf>) na stranici *Bilješke i skice s predavanja* (<http://master.grad.hr/nastava/gs/g1/>))



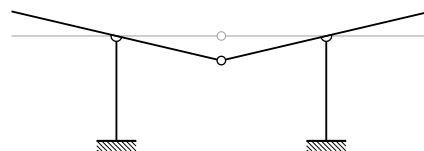
$$S_{\min} = 3t - 2z_1 - \ell = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = -2$$

nije osnovni sistem

(koliko god izgledao privlačno  
za zadane prisilne pomake):

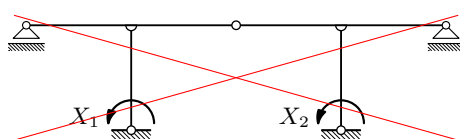


nego mehanizam:

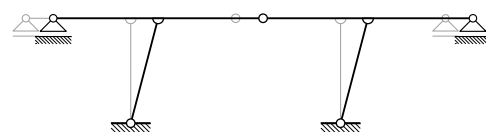


nije osnovni sistem

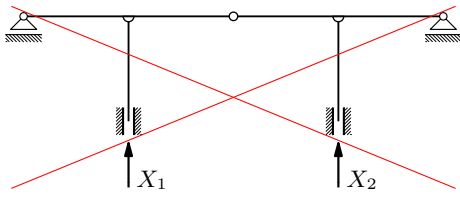
(iako je privlačan za prisilne zaokrete ležajeva  
stupova (kao u zadatku na 2. kolokviju)):



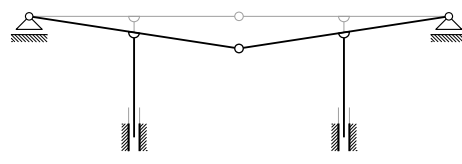
nego mehanizam:



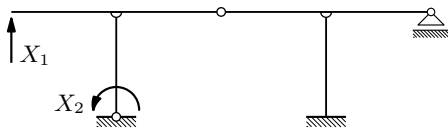
nije osnovni sistem:



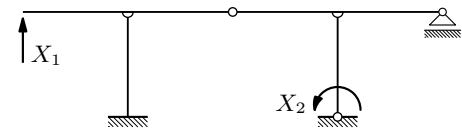
nego mehanizam:



osnovni sistem:



drugi osnovni sistem:



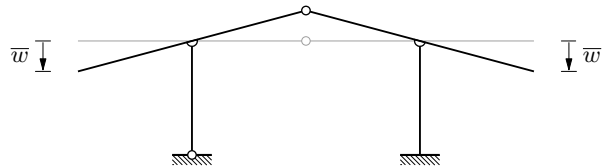
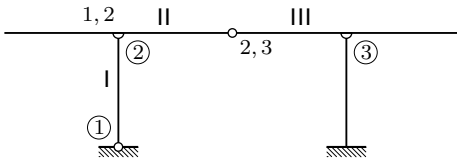
Korak drugi. Sustav jednačbi kompatibilnosti (za prvi osnovni sistem) i njegovo rješenje.

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 + \delta_{1,0} = \bar{\delta}_1$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + \delta_{2,0} = \bar{\delta}_2$$

$$\bar{\delta}_1 = -\bar{w} \quad \dots \text{ jer je prisilni pomak na mjestu i na pravcu raskinute veze,} \\ \text{ ali je suprotnoga smisla}$$

$$\bar{\delta}_2 = 0 \quad \dots \text{ jer na mjestu raskinute veze nema prisilnoga pomaka}$$



$$\delta_{1,0} = \bar{\delta}_{1,0} = -\bar{w} \quad \dots \text{ prema planu pomakā}$$

$$\delta_{2,0} = \bar{\delta}_{2,0} = 0 \quad \dots \text{ prema planu pomakā}$$

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 - \bar{w} = -\bar{w}$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 + 0 = 0$$

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 = -\bar{w} + \bar{w}$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 = 0$$

$$\delta_{1,1} X_1 + \delta_{1,2} X_2 = 0$$

$$\delta_{2,1} X_1 + \delta_{2,2} X_2 = 0$$

sustav jednačbi je homogen

regularni homogeni sustav jednačbi ima jedinstveno rješenje  $X_1 = 0 \ \& \ X_2 = 0$

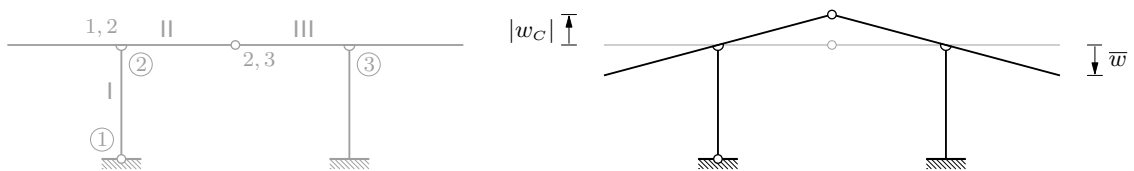
Korak treći. Unutarnje sile.

$$M(x) = X_1 m_1(x) + X_2 m_2(x) = 0 \cdot m_1(x) + 0 \cdot m_2(x) \Rightarrow M \equiv 0$$

iz  $T(x) = M'(x)$  i  $M \equiv 0$  slijedi  $T \equiv 0$

iz  $T \equiv 0$  i uvjetā ravnoteže slijedi  $N \equiv 0$

Korak četvrti. Orijeantirana duljina pomaka točke  $C$ .



(redukcijski stavak — bilo koji osnovni sistem)

$$|w_C| = \bar{w} = 3,25 \text{ mm}$$

$$w_C = -3,25 \text{ mm}$$

### Zadatak 3.

Općom metodom pomakā izračunajte orijentiranu duljinu pomaka točke 2 i kut zaokreta osi u njoj! Nacrtajte dijagrame unutarnjih sila!

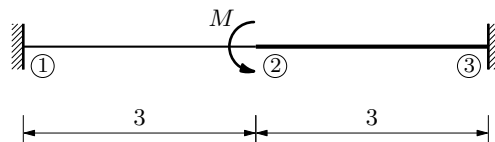
$$M = 100 \text{ kNm}$$

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h_{\{1,2\}} = 30 \text{ cm}$$

$$h_{\{2,3\}} = 45 \text{ cm}$$



#### Korak prvi $\mathcal{E}$ činjenica prva.

Korak prvi: pročitajte tekst zadatka obrativši pritom pozornost na traženu metodu rješavanja!

Činjenica prva: opća metoda pomakā *nije* metoda sila.

Sada, kad smo utvrdili/potvrdili očito, možemo početi rješavati zadatak *općom metodom pomakā* (a *ne* metodom sila).

#### Korak drugi. Nepoznanice $\mathcal{E}$ osnovni sistem za opću metodu pomakā.

Budući da su izrazi za sile na krajevima štapa kao funkcija pomakā krajeva izvedeni za štap konstantne aksijalne i fleksijske krutosti i da se krutosti zadane grede mijenjaju u točki 2, ta točka mora biti čvor koji gredu dijeli u dva štapa,  $\{1,2\}$  i  $\{2,3\}$ . Čvorovi su i ležajevi 1 i 3. Čvor 2 nazivamo slobodnim čvorom.

Nepoznanice opće metode pomakā orijentirane su duljine horizontalnih i vertikalnih komponentata (translacijskih) pomakā slobodnih čvorova i kutovi njihovih zaokreta. U našem su primjeru, sistemu samo s jednim slobodnim čvorom, čvorom 2, nepoznanice  $u_2, w_2, \varphi_2$ . (Pomaci su ležajnih čvorova spriječeni, pa su duljine komponentata njihovih pomaka i kutovi njihovih zaokreta poznati:  $u_1 = w_1 = \varphi_1 = 0$  i  $u_3 = w_3 = \varphi_3 = 0$ .)

Osnovni sistem za opću metodu pomakā oblikujemo dodavanjem spojeva s podlogom koji sprečavaju sve pomake i zaokrete slobodnih čvorova:



#### Korak treći. Sile na krajevima štapova.

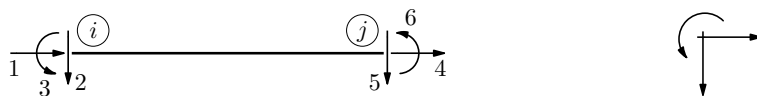
Vrijednosti sila na krajevima štapova zbrojevi su vrijednosti sila u stanju spriječenih pomaka čvorova (ili sila upetosti) i vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka čvorova:

$$N_{i,j} = \bar{N}_{i,j} + n_{i,j}, \quad T_{i,j} = \bar{T}_{i,j} + t_{i,j} \quad \mathcal{E} \quad M_{i,j} = \bar{M}_{i,j} + m_{i,j}.$$

Budući da zadani moment vrijednosti  $M$  djeluje u čvoru 2, vrijednosti su svih sila upetosti nula,  $\bar{N}_{i,j} = 0, \bar{T}_{i,j} = 0$   $\mathcal{E}$   $\bar{M}_{i,j} = 0$ , te su

$$N_{i,j} = n_{i,j}, \quad T_{i,j} = t_{i,j} \quad \mathcal{E} \quad M_{i,j} = m_{i,j}.$$

Pozitivne su orijentacije sila i momenata na krajevima štapa te komponenta pomakā i zaokretā krajeva prikazane na lijevoj skici, a pozitivne su orijentacije sila i momenta koji djeluju na čvor te komponenta pomakā i zaokreta čvora prikazane na desnoj skici:



Duljine su komponenta pomakā i kutovi zaokretā krajeva štapova priključenih u čvor 2

$$\begin{aligned} u_{2,1} &= u_2, & w_{2,1} &= w_2, & \varphi_{2,1} &= \varphi_2 \\ u_{2,3} &= u_2, & w_{2,3} &= w_2, & \varphi_{2,3} &= \varphi_2, \end{aligned}$$

pa su, uz pogled na matricu krutosti navedenu na stranici 285 bilježaka s predavanja (<http://master.grad.hr/nastava/gS/gS1/gS1.pdf>) i na stranici 18 primjera *Dualitet metode sila i opće metode pomakā — usporedni proračun* (<http://master.grad.hr/nastava/gS/gS1/pdn/dual.pdf>), izrazi za vrijednosti sila u stanju prisilnih pomaka

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= -k_{\{1,2\}}^a u_2, & n_{2,1} &= k_{\{1,2\}}^a u_2, \\ t_{1,2} &= -\frac{12 k_{\{1,2\}}^f}{\ell_{\{1,2\}}^2} w_2 - \frac{6 k_{\{1,2\}}^f}{\ell_{\{1,2\}}} \varphi_2, & t_{2,1} &= \frac{12 k_{\{1,2\}}^f}{\ell_{\{1,2\}}^2} w_2 + \frac{6 k_{\{1,2\}}^f}{\ell_{\{1,2\}}} \varphi_2, \\ m_{1,2} &= \frac{6 k_{\{1,2\}}^f}{\ell_{\{1,2\}}} w_2 + 2 k_{\{1,2\}}^f \varphi_2, & m_{2,1} &= \frac{6 k_{\{1,2\}}^f}{\ell_{\{1,2\}}} w_2 + 4 k_{\{1,2\}}^f \varphi_2, \\ n_{2,3} &= k_{\{2,3\}}^a u_2, & n_{3,2} &= -k_{\{2,3\}}^a u_2, \\ t_{2,3} &= \frac{12 k_{\{2,3\}}^f}{\ell_{\{2,3\}}^2} w_2 - \frac{6 k_{\{2,3\}}^f}{\ell_{\{2,3\}}} \varphi_2, & t_{3,2} &= -\frac{12 k_{\{2,3\}}^f}{\ell_{\{2,3\}}^2} w_2 + \frac{6 k_{\{2,3\}}^f}{\ell_{\{2,3\}}} \varphi_2, \\ m_{2,3} &= -\frac{6 k_{\{2,3\}}^f}{\ell_{\{2,3\}}} w_2 + 4 k_{\{2,3\}}^f \varphi_2, & m_{3,2} &= -\frac{6 k_{\{2,3\}}^f}{\ell_{\{2,3\}}} w_2 + 2 k_{\{2,3\}}^f \varphi_2, \end{aligned}$$

Za zadane su duljine stranica poprečnih presjeka

$$\begin{aligned} A_{\{1,2\}} &= b h_{\{1,2\}} = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \text{ m}^2, \\ A_{\{2,3\}} &= b h_{\{2,3\}} = 0,3 \cdot 0,45 = 0,135 \text{ m}^2, \\ I_{\{1,2\}} &= \frac{b h_{\{1,2\}}^3}{12} = \frac{0,3^4}{12} = 0,000675 \text{ m}^4, \\ I_{\{2,3\}} &= \frac{b h_{\{2,3\}}^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,45^3}{12} = 0,00227813 \text{ m}^4, \end{aligned}$$

pa su

$$k_{\{1,2\}}^a = \frac{E A_{\{1,2\}}}{\ell_{\{1,2\}}} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0,09}{3} = 900\,000 \text{ kN/m},$$



$$k_{\{1,2\}}^f = \frac{E I_{\{1,2\}}}{\ell_{\{1,2\}}} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0,000\,675}{3} = 6\,750 \text{ kNm},$$

$$k_{\{2,3\}}^a = \frac{E A_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0,135}{3} = 1\,350\,000 \text{ kN/m},$$

$$k_{\{2,3\}}^f = \frac{E I_{\{2,3\}}}{\ell_{\{2,3\}}} = \frac{3 \cdot 10^7 \cdot 0,002\,278\,13}{3} = 22\,781,3 \text{ kNm}.$$

Uvrštavanjem u izraze za vrijednosti sila dobivamo

$$\begin{aligned} n_{1,2} &= -900\,000 u_2, & n_{2,1} &= 900\,000 u_2, \\ t_{1,2} &= -9\,000 w_2 - 13\,500 \varphi_2, & t_{2,1} &= 9\,000 w_2 + 13\,500 \varphi_2, \\ m_{1,2} &= 13\,500 w_2 + 13\,500 \varphi_2, & m_{2,1} &= 13\,500 w_2 + 27\,000 \varphi_2, \\ n_{2,3} &= 1\,350\,000 u_2, & n_{3,2} &= -1\,350\,000 u_2, \\ t_{2,3} &= 30\,375,1 w_2 - 45\,562,6 \varphi_2, & t_{3,2} &= -30\,375,1 w_2 + 45\,562,6 \varphi_2, \\ m_{2,3} &= -45\,562,6 w_2 + 91\,125,2 \varphi_2, & m_{3,2} &= -45\,562,6 w_2 + 45\,562,6 \varphi_2. \end{aligned}$$

**Korak četvrti.** Sustav jednadžbi ravnoteže sila u čvoru 2 i njegovo rješenje.



Prema slici, jednadžbe su ravnoteže

$$\begin{aligned} -N_{2,1} - N_{2,3} &= 0, \\ -T_{2,1} - T_{2,3} &= 0, \\ -M_{2,1} - M_{2,3} + M &= 0. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izvedenih izrazā za vrijednosti sila na krajevima štapova i vrijednosti zadanoga momenta dobivamo sustav triju jednadžbi s nepoznicama  $u_2$ ,  $w_2$  i  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} -2\,250\,000 u_2 &= 0, \\ -39\,375,1 w_2 + 32\,062,6 \varphi_2 &= 0, \\ 32\,062,6 w_2 - 118\,125,5 \varphi_2 + 100 &= 0, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} 2\,250\,000 u_2 &= 0, \\ 39\,375,1 w_2 - 32\,062,6 \varphi_2 &= 0, \\ -32\,062,6 w_2 + 118\,125,5 \varphi_2 &= 100. \end{aligned}$$

Iz prve je jednadžbe neposredno  $u_2 = 0$ . Druga i treća jednadžba tvore sustav rješenje kojega je

$$w_2 = 0,000\,884\,927 \quad \mathcal{E} \quad \varphi_2 = 0,001\,086\,75.$$

**Korak peti.** Odgovor na prvo pitanje.

Budući da je  $u_2 = 0$ , horizontalne komponente pomaka čvora 2 nema. Orijentirana je duljina vertikalne komponente

$$w_2 = 0,000884927 \text{ m} \simeq 0,0009 \text{ m} = 0,9 \text{ mm};$$

kako je ta vrijednost pozitivna, pomak je prema dolje. Ili, formalnije (školski), duljina je pomaka čvora 2

$$d_2 = \sqrt{u_2^2 + w_2^2} = \sqrt{0 + 0,0009^2} = 0,0009 \text{ m};$$

pomak je po vertikalnome pravcu, prema dolje, jer je

$$\vec{d}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2 = u_2 \vec{i} + w_2 \vec{k} = 0 \vec{i} + 0,0009 \vec{k} = 0,0009 \vec{k}.$$

Kut zaokreta osi grede u točki 2 kut je zaokreta čvora 2:

$$\varphi_2 = 0,00108675 \simeq 0,001 \simeq 0,06^\circ.$$

**Korak šesti.** Vrijednosti sila na krajevima štapova:

$$N_{1,2} = n_{1,2} = -900\,000 u_2 = -900\,000 \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_{1,2} = t_{1,2} &= -9\,000 w_2 - 13\,500 \varphi_2 \\ &= -9\,000 \cdot 0,000885 - 13\,500 \cdot 0,001087 = -22,64 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{1,2} = m_{1,2} &= 13\,500 w_2 + 13\,500 \varphi_2 \\ &= 13\,500 \cdot 0,000885 + 13\,500 \cdot 0,001087 = 26,62 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$N_{2,1} = n_{2,1} = 900\,000 u_2 = 900\,000 \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_{2,1} = t_{2,1} &= 9\,000 w_2 + 13\,500 \varphi_2 \\ &= 9\,000 \cdot 0,000885 + 13\,500 \cdot 0,001087 = 22,64 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,1} = m_{2,1} &= 13\,500 w_2 + 27\,000 \varphi_2 \\ &= 13\,500 \cdot 0,000885 + 27\,000 \cdot 0,001087 = 41,29 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$N_{2,3} = n_{2,3} = 1\,350\,000 u_2 = 1\,350\,000 \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_{2,3} = t_{2,3} &= 30\,375,1 w_2 - 45\,562,6 \varphi_2 \\ &= 30\,375,1 \cdot 0,000885 - 45\,562,6 \cdot 0,001087 = -22,64 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,3} = m_{2,3} &= -45\,562,6 w_2 + 91\,125,2 \varphi_2 \\ &= -45\,562,6 \cdot 0,000885 + 91\,125,2 \cdot 0,001087 = 58,73 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

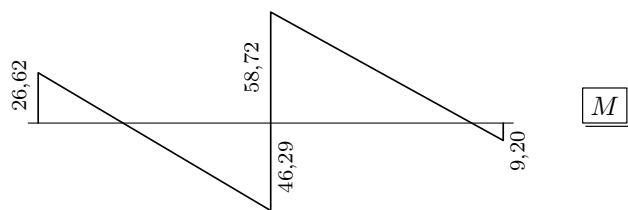
$$N_{3,2} = n_{3,2} = -1\,350\,000 u_2 = -1\,350\,000 \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} T_{3,2} = t_{3,2} &= -30\,375,1 w_2 + 45\,562,6 \varphi_2 \\ &= -30\,375,1 \cdot 0,000885 + 45\,562,6 \cdot 0,001087 = 22,64 \text{ kN}, \end{aligned}$$

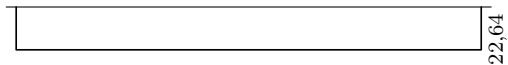
$$\begin{aligned} M_{3,2} = m_{3,2} &= -45\,562,6 w_2 + 45\,562,6 \varphi_2 \\ &= -45\,562,6 \cdot 0,000885 + 45\,562,6 \cdot 0,001087 = 9,20 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

(Zanemariva „neravnoteža” momenata u čvoru 2,  $-58,73 - 41,29 + 100 = -0,02$ , posljedica je pogrešaka zaokruživanja.)

Korak sedmi. Odgovor na drugo pitanje — dijagrami unutarnjih sila.



M



T



N