# GS 1. — 2. kolokvij (2022./2023.)

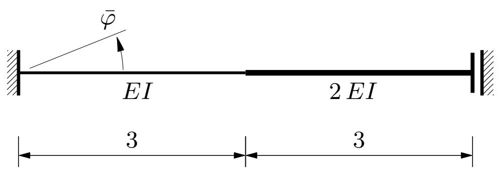
## Zadatak C1.

**a.** Nacrtajte dijagram $M$!

**b.** Provedite deformacijsku kontrolu!

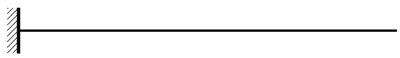
$\bar{\varphi} = 0{,}0025$

$EI = 162\,000\,\mathrm{kNm}^2$




**Korak prvi.** Stupanj statičke neodređenosti i osnovni sistem(i) (za metodu sila).

Neformalno, „pretvaranjem” u statički određeni sistem: uklonimo li desni, klizni ležaj, nastat će konzola (slika 1.); budući da klizni ležaj oduzima dva stupnja slobode, zaključujemo da je zadani sistem dva puta statički neodređen.



Slika 1.

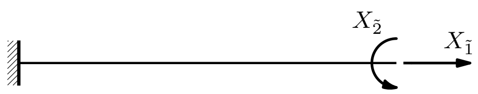
Formalnije, sistem je jedno tijelo koje je s podlogom spojeno upetim i kliznim ležajem. Tijelo u ravnini ima tri stupnja slobode, upeti ležaj oduzima tri stupnja, a klizni dva, pa je

$$S_{\min} = 3t - \ell = 3 \cdot 1 - (3+2) = -2.$$

Budući da se krutost grede u polovini raspona mijenja, možemo reći i da sistem sadrži dva tijela koja su međusobno spojena krutim spojem, dok su s podlogom spojena &td. Kruti spoj oduzima tri stupnja slobode, pa je „računica” sada

$$S_{\min} = 3t - 3k - \ell = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - (3+2) = -2.$$

Prema tome, osnovni ćemo sistem oblikovati raskidanjem dvaju spojeva. Spomenuta je konzola jedan mogući osnovni sistem: nastala je raskidanjem spoja koji onemogućava pomicanje desnoga kraja po horizontalnom pravcu (pa treba na tom pravcu dodati silu) i spoja koji onemogućava zaokretanje osi na desnome kraju (pa treba dodati moment) (slika 2.).




Slika 2.

Želimo li oblikovati osnovni sistem u kojem je raskinut spoj koji odgovara prisilnom zaokretu lijevoga ležaja, upeti ležaj treba zamijeniti nepomičnim zglobnim ležajem (i, naravno, dodati moment). Na desnome ćemo kraju raskinuti spoj koji onemogućava horizontalni pomak (i dodati odgovarajuću silu) (slika 3.a.); klizni ležaj time postaje momentnim ležajem (poznatim iz metode pomakā i iz *Mehanike 1.*), koji onemogućava zaokret, a dopušta pomak po bilo kojem pravcu.


Slika 3.

Sistem na slici 3.a. djeluje pomalo neobično. Možda je tek nešto manje neobičan sistem na slici b. u kojem je zadržan desni klizni ležaj, a horizontalni je pomak, uz zaokret, omogućen u lijevome ležaju. Naime, na prvi se, površni pogled čini da su ti sistemi mehanizmi i da se osi greda mogu oko lijevih ležajeva, koji su zglobni, zaokretati, a njihovi desni krajevi spuštati ili podizati, jer ležajevi na tim krajevima dopuštaju pomicanja po vertikalnim pravcima. Međutim, momentni ležaj na desnome kraju u prvome sistemu i klizni u drugome ne dopuštaju zaokretanja, pa osi greda moraju ostati horizontalnima i, time, nepomičnima. Drugim riječima, i općenitije, spriječenim su zaokretanjem osi u nekoj točki, ako je k tome još spriječeno vertikalno pomicanje neke druge točke, spriječena vertikalna pomicanja svih drugih točaka osi grede (kao što su spriječena vertikalna pomicanja svih točaka osi, a i njezino zaokretanje, ako su spriječena vertikalna pomicanja dviju točaka (jednostavno oslonjena greda, primjerice)).

Mehanizam će nastati omogućimo li na oba kraja zaokretanja osi (uz dopušteno pomicanje jednoga kraja po vertikalnome pravcu) (slika 4.).


Slika 4.

Napomenut ću da je riječ o trenutačnome, statički neodređenome mehanizmu — trenutačnome, jer nakon „maloga" pomaka prestaje biti mehanizmom; neodređenome, jer na oba kraja postoje horizontalne reakcije vrijednosti kojih se ne mogu odrediti samo na temelju uvjeta ravnoteže.

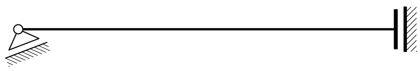
**Korak drugi.** Jednadžba kompatibilnosti i njezino rješenje.

Odabrat ćemo osnovni sistem prikazan na slici 3.b., u kojem je raskinut spoj koji prisilni zaokret ležaja, u stvari podloge „ispod" njega, prenosi na sistem. (Ništa se u priči neće promijeniti odaberemo li osnovni sistem sa slike a.)

Kako su, znamo, poprečna i uzdužna djelovanja međusobno neovisna i kako je prisilni zaokret ležaja „poprečno djelovanje”, bit će $X_1 = 0$, pa treba odrediti samo (zàsada nepoznatu) vrijednost $X_2$. Opći je oblik (druge) jednadžbe kompatibilnosti

$$\delta_{2,2}\, X_2 \;+\; \delta_{2,0} \;=\; \bar{\delta}_2.$$

Prisilni je zaokret jedino djelovanje na zadani sistem, pa je $\delta_{2,0} = \bar{\delta}_{2,0}$, no kako zaokret podloge „ispod” lijevoga ležaja osnovni sistem, zbog umetnoga zgloba, neće „osjetiti” (ležaj se s podlogom zaokreće neovisno o ostatku sistemu: slika 5.), bit će $\bar{\delta}_{2,0} = 0$.

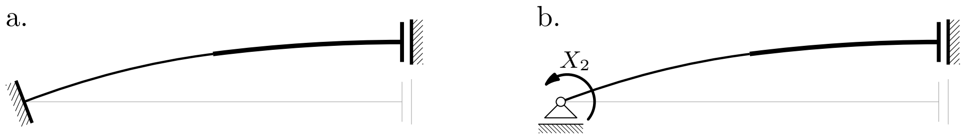


Slika 5.

Vrijednost $X_2$ momenta koji zamjenjuje umetanjem zgloba raskinuti spoj mora biti takva da os na lijevome kraju grede zaokrene za kut $\bar{\varphi}$. Stoga je jednadžba kompatibilnosti, koja izražava da se osnovni sistem na mjestu raskinute veze (lijeva strana jednadžbe) ponaša kao zadani sistem (desna strana),

$$\delta_{2,2}\, X_2 \;=\; \bar{\varphi};$$

riječima: zaokret osi osnovnoga sistema neposredno uz lijevi (zglobni) ležaj (slike 6.b.) mora biti jednak zaokretu podloge „ispod” ležaja koja u zadanome sistemu zbog krutoga spoja s podlogom zaokreće os u točki spoja (slika a).

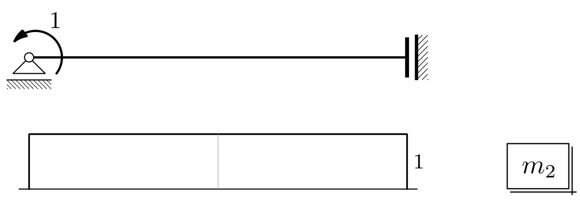



Slika 6.

Uz dijagram momenata $m_2$ (slika 7.) možemo izračunati koeficijent popustljivosti $\delta_{2,2}$:

$$\delta_{2,2} \;=\; \int_0^{\ell} \frac{m_2^2(x)}{EI(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{3} \frac{m_2^2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_3^{6} \frac{m_2^2(x)}{2EI}\,\mathrm{d}x$$

$$\;=\; \frac{1}{EI}\,(1\cdot 3)\cdot 1 \;+\; \frac{1}{2EI}\,(1\cdot 3)\cdot 1 \;=\; \frac{9}{2EI} \;=\; 2{,}\dot{7}\cdot 10^{-5}.$$




Slika 7.

Rješenje je jednadžbe kompatibilnosti

$$X_2 \;=\; \frac{\bar{\varphi}}{\delta_{2,2}} \;=\; 90{,}0 \text{ kNm}.$$

Konačni je momentni dijagram $M = X_2\, m_2$ prikazan na slici 8.


Slika 8.

**Korak treći.** Deformacijska kontrola.

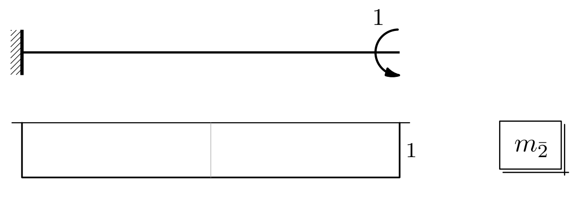
Deformacijsku ćemo kontrolu provesti na osnovnom sistemu prikazanom na slici 2., konzoli upetoj na lijevome kraju.

Na desnome je kraju zadanoga sistema klizni ležaj koji dopušta pomicanje toga kraja po vertikalnome pravcu, ali ne i zaokretanje osi u toj točki (slika 6.a.). Prema tome, kut zaokreta osi konzole na njezinu desnom kraju, označit ćemo ga s $\varphi_B$, mora biti jednak nuli.

Konzolu treba dovesti u isto statičko i kinematičko stanje u kojem je zadani sistem. To ponajprije znači da vrijednost $X_{\bar{2}}$ momenta na njezinu slobodnom kraju mora biti jednaka vrijednosti momenta na desnom kraju zadanoga sistema, $X_{\bar{2}} = -90{,}0$. Dijagram će momenata na konzoli tada biti jednak dijagramu momenata na zadanome sistemu, prikazanom na slici 8. Kad bi na konzolu djelovao samo moment vrijednosti $X_{\bar{2}} = -90{,}0$ na njezinu slobodnom kraju, zaokret bi njezine osi na tom kraju bio

$$\begin{aligned}
\varphi_B(M) \;&=\; \int_0^\ell \frac{M(x)\,m_{\bar{2}}(x)}{EI(x)}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^3 \frac{M(x)\,m_{\bar{2}}(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_3^6 \frac{M(x)\,m_{\bar{2}}(x)}{2EI}\,\mathrm{d}x \\
&=\; \frac{1}{EI}\,(90\cdot 3)\cdot 1\cdot(-1) \;+\; \frac{1}{2EI}\,(90\cdot 3)\cdot 1\cdot(-1) \\
&=\; -\frac{405}{EI} \;=\; -0{,}0025;
\end{aligned}$$

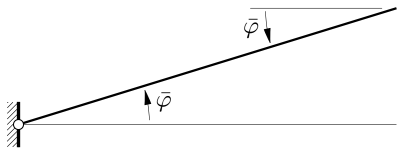
dijagram $m_{\bar{2}}$ prikazan je na slici 9. Međutim, kako su geometrijski rubni uvjeti na lijevome kraju zadanoga sistema i na lijevome kraju konzole jednaki (upeti ležaj) i kako je lijevi




Slika 9.

ležaj zadanoga sistema zaokret za kut $\bar{\varphi}$, treba i lijevi ležaj konzole zaokrenuti za taj kut, pa treba nacrtati odgovarajući plan pomakā (slika 10.). Zaokret je osi konzole na njezinu desnom kraju, prema tome,

$$\varphi_B = \varphi_B(M) + \varphi_B(\bar{\varphi}) = \varphi_B(M) + \bar{\varphi} = -0{,}0025 + 0{,}0025 = 0.$$




Slika 10.

**Korak drugi, još jednom.** Jednadžba kompatibilnosti i njezino rješenje.

Zadatak ćemo riješiti još jedanput, sada pomoću osnovnoga sistema sa slike 2., konzole upete na lijevom kraju. I sada je očito da je $X_{\tilde{1}} = 0$, pa ostaje samo druga jednadžba kompatibilnosti.

Budući da je u zadanom sistemu na desnom kraju ležaj koji ne dopušta zaokret osi, desna strana (druge) jednadžbe kompatibilnosti, koja izražava jednakost zaokretā osī na tom kraju osnovnoga i zadanoga sistema, mora biti jednaka nuli, a utjecaj zadanoga prisilnog zaokreta lijevoga ležaja na zaokret desnoga, slobodnog kraja osnovnoga sistema treba pomoću plana pomakā izraziti slobodnim članom $\bar{\delta}_{\tilde{2},0}$. Jednadžba je kompatibilnosti stoga

$$\delta_{\tilde{2},\tilde{2}}\, X_{\tilde{2}} + \bar{\delta}_{\tilde{2},0} = 0.$$

Prema planu pomakā na slici 10. je $\bar{\delta}_{\tilde{2},0} = \bar{\varphi}$, te je

$$\delta_{\tilde{2},\tilde{2}}\, X_{\tilde{2}} + \bar{\varphi} = 0,$$

odnosno

$$\delta_{\tilde{2},\tilde{2}}\, X_{\tilde{2}} = -\bar{\varphi}.$$

Uz dijagram $m_{\tilde{2}}$ prikazan na slici 9. je

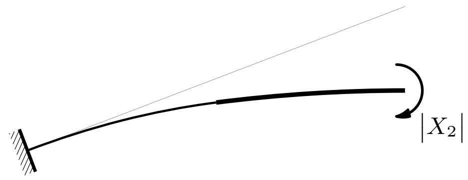
$$\delta_{\tilde{2},\tilde{2}} = \int_0^3 \frac{m_{\tilde{2}}^2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \int_3^6 \frac{m_{\tilde{2}}^2(x)}{2EI}\,\mathrm{d}x = 2{,}\dot{7} \cdot 10^{-5},$$

te je rješenje jednadžbe kompatibilnosti

$$X_{\tilde{2}} = -\frac{\bar{\varphi}}{\delta_{\tilde{2},\tilde{2}}} = -90{,}0 \text{ kNm}.$$

Dobivena je vrijednost negativna, što znači da je smisao vrtnje momenta suprotan od smisla pretpostavljenoga na slici 2. (i slici 9.). I zaista, smisao vrtnje momenta mora biti smisao vrtnje kazaljke na satu želimo li da moment „poništi” zaokret slobodnoga kraja konzole koji je izazvan zaokretom ležaja (slika 11.).

Konačni je momentni dijagram $M = X_{\tilde{2}}\, m_{\tilde{2}}$, dakako, ponovno onaj prikazan na slici 8.




Slika 11.

Oni koji ne vole (ili ne znaju) crtati planove pomakā, pa ni one najjednostavnije, na sistemima s jednim tijelom, slobodni član mogu izračunati prema izrazu

$$\bar{\delta}_{\tilde{2},0} \;=\; -m_{\mathrm{u}\ell,\tilde{2}}\,\bar{\varphi},$$

gdje je $m_{\mathrm{u}\ell,\tilde{2}}$ vrijednost virtualnoga reaktivnoga momenta u upetom ležaju zbog jediničnoga virtualnog momenta na desnome kraju, pa je $m_{\mathrm{u}\ell,\tilde{2}}\,\bar{\varphi}$ rad virtualnoga reaktivnog momenta na zadanom zaokretu ležaja.* Uvrštavanje daje

$$\bar{\delta}_{\tilde{2},0} \;=\; -(-1{,}0\cdot 0{,}0025) \;=\; 0{,}0025.$$

**Korak treći, još jednom.** Deformacijska kontrola.

Deformacijsku ćemo kontrolu sada provesti na „pomalo neobičnom” osnovnom sistemu sa slike 3.b. (pomoću pripadnoga dijagrama $m_2$ prikazanog na slici 7.):

$$\begin{aligned}\varphi_A \;=\; \varphi_A(M) \;&=\; \int_0^3 \frac{M(x)m_2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \;+\; \int_3^6 \frac{M(x)m_2(x)}{2EI}\,\mathrm{d}x\\ &=\; \frac{1}{EI}\,(90\cdot 3)\cdot 1 \;+\; \frac{1}{2EI}\,(90\cdot 3)\cdot 1 \;=\; \frac{405}{EI} \;=\; 0{,}0025 \;=\; \bar{\varphi}.\end{aligned}$$

Budući da je u tom osnovnom sistemu umetnut zglob u ležaju zaokret kojega je zadan, kut zaokreta osi neposredno desno od toga zgloba, prouzročen savijenjem (i samo savijanjem — zaokret podloge „ispod” ležaja ne prenosi se na osnovni sistem), mora biti jednak kutu zadanoga zaokreta.

* Ali zašto predznak „$-$” u izrazu za $\bar{\delta}_{\tilde{2},0}$? I kako zaokret (jer $\bar{\delta}_{\tilde{2},0}$ jest zaokret) može biti jednak radu momenta na zaokretu (pozitivnom ili negativnom, svejedno)?