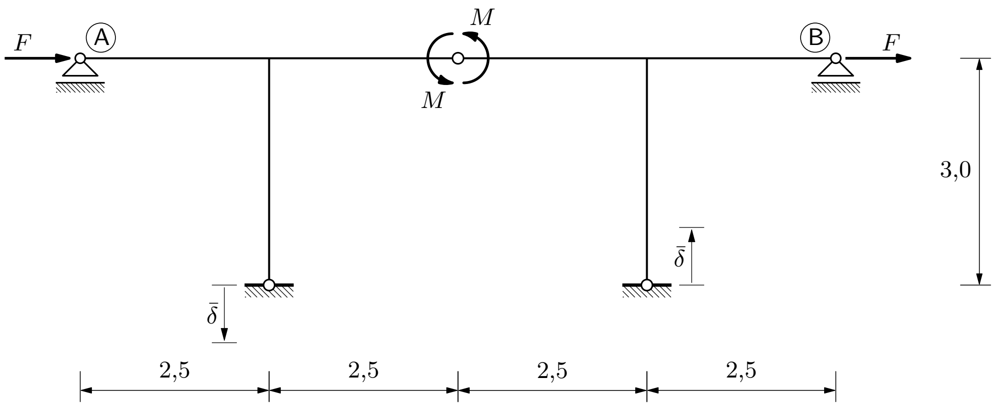
GS 1. — 6. rujna 2022.

Zadatak 3.

Izračunajte relativni kut zaokreta između osi grede neposredno desno od točke A i osi grede neposredno lijevo od točke B.

$F = 75$ kN $\qquad M = 100$ kNm $\qquad \bar{\delta} = 5$ mm

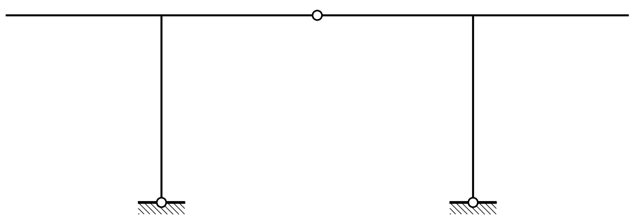
$E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2 $\qquad b/h = 36/72$ [cm]



Korak prvi. Stupanj statičke neodređenosti i osnovni sistem (za metodu sila):

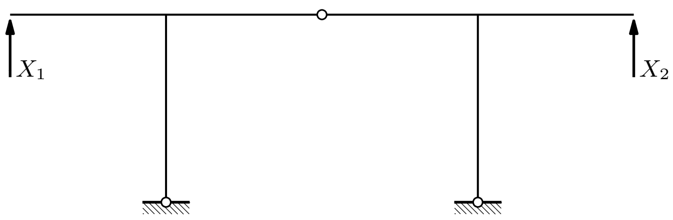
Stupanj statičke neodređenosti zadanoga sistema može se odrediti „formalnim" i „neformalnim" postupkom. U „neformalnom" se postupku stupanj statičke neodređenosti utvrđuje istodobno s oblikovanjem osnovnoga sistema — raskidanjem dovoljnoga broja spojeva zadani se sistem pretvara u statički određeni; stupanj statičke neodređenosti jednak je, dakako, broju raskinutih spojeva. Taj je postupak posebno prikladan ako vas zadani sistem podsjeća na neki „poznati" statički određeni sistem (samo što ima nekoliko spojeva previše).

Zadani bi vas sistem trebao podsjetiti na trozglobni okvir: ležajevi stupova su nepomični zglobni, a u polovištu je grede (treći) zglob. „Višak" su pomični zglobni ležajevi na krajevima grede; maknemo li ih, ostaje statički određeni sistem:

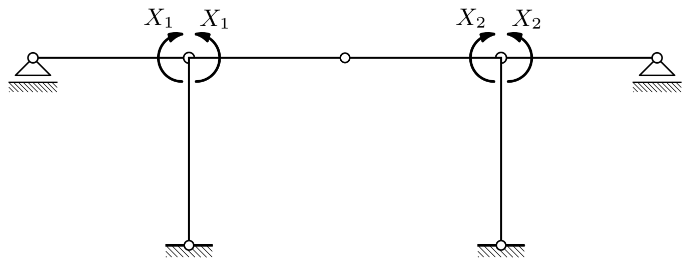


Raskinuli smo dva spoja, što znači da je zadani sistem dva puta statički neodređen.

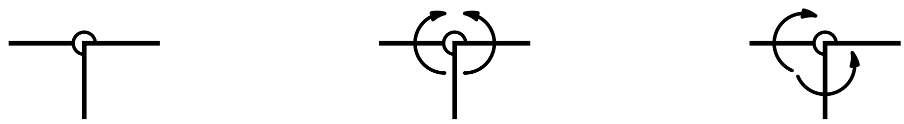
Osnovni sistem za metodu sila dobivamo tako da na dobiveni statički određeni sistem dodamo (zásada nepoznate) sile koje su raskinuti spojevi prenosili:



Razmjerno poznati bi osnovni sistem mogao biti i trozglobni okvir s dvije „jednostavno oslonjene grede” kojima su nepomični zglobni „ležejevi” zglobni spojevi s okvirom:

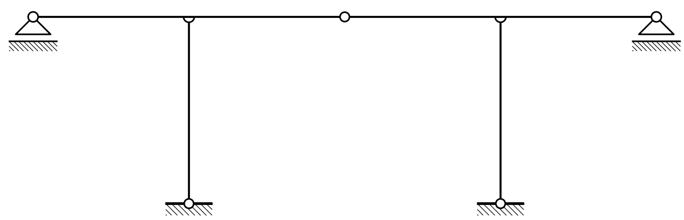


Obratite pozornost na način na koji su umetnuti zglobovi: između stupa i grede trozglobnoga okvira ostaje kruti spoj; zglobni je spoj samo između ugla/čvora okvira i priključenoga kraja jednostavno oslonjene grede:

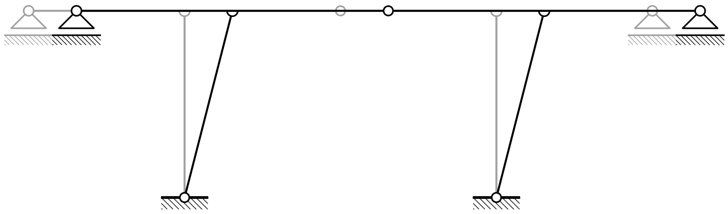


(Spomenut ću i to da je lako pokazati da je svejedno stavimo li jedan moment para nepoznatih momenata na početak grede okvira ili na vrh stupa.)

Postupak „prisjećanja poznatih sistema” nije bez opasnosti. Ponekoga bi zadani sistem mogao podsjetiti na poduprtu gredu (iz prve skupine) koja nema stupove nego potporne zglobne štapove, te bi krute spojeve stupova s gredom trebalo zamijeniti zglobnim spojevima (ponovno se raskidaju dva spoja):



Dobiveni je sistem, međutim, mehanizam (s kinematičkom preodređenošću):



„Formalni” je postupak određivanja stupnja statičke neodređenosti prebrojavanje tijelâ i spojeva i izračunavanje (minimalnoga) broja stupnjeva slobode prema izrazu

$$S_{\min} = 3\,t - 3\,k - 2\,z_1 - 4\,z_2 - \cdots - l,$$

gdje su:

t — broj tijelâ (otvorenih kontura*),

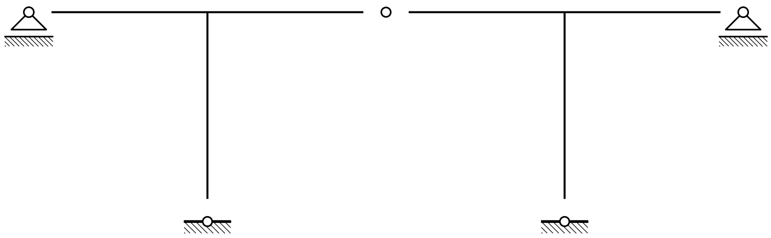
k — broj krutih spojeva dvaju tijela,

z_1 — broj jednostrukih zglobova (zglobova koji spajaju dva tijela),

z_2 — broj dvostrukih zglobova (zglobova koji spajaju tri tijela),

l — broj stupnjeva slobode koje oduzimaju spojevi s podlogom.

U našem su primjeru



- ♠ dva tijela (otvorenih kontura),
- ♠ jedan jednostruki zglob,
- ♠ dva nepomična zglobna ležaja (svaki oduzima dva stupnja slobode),
- ♠ dva pomična zglobna ležaja (svaki oduzima jedan stupanj slobode),

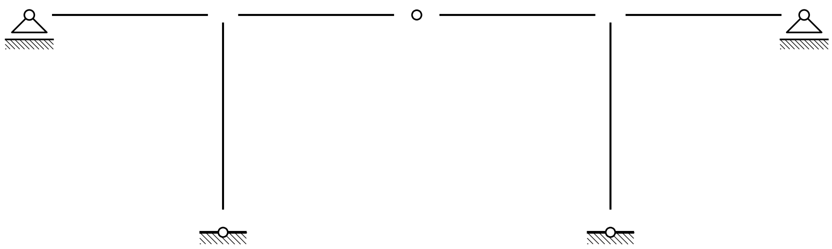
pa je

$$S_{\min} = 3\,t - 2\,z_1 - l = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - (2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = -2,$$

što znači da je sistem dva puta statički neodređen.

Mogući su i drugi načini prebrojevanja; primjerice:

* Priča o razlici tijelâ otvorenih i zatvorenih kontura bila bi predugačka za ovaj esejčić. Treba ipak upozoriti da se u tom (ne)razlikovanju krije jedna od opasnosti primjene formalnoga postupka.



dakle,

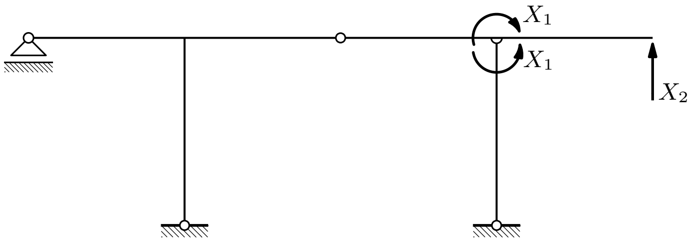
- ♠ šest tijela,
- ♠ dva puta po dva kruta spoja (sa svake strane zgloba dva dijela grede međusobno, pa stup s tako spojenom gredom),
- ♠ jedan jednostruki zglob,
- ♠ dva nepomična zglobna ležaja (svaki oduzima dva stupnja slobode),
- ♠ dva pomična zglobna ležaja (svaki oduzima jedan stupanj slobode),

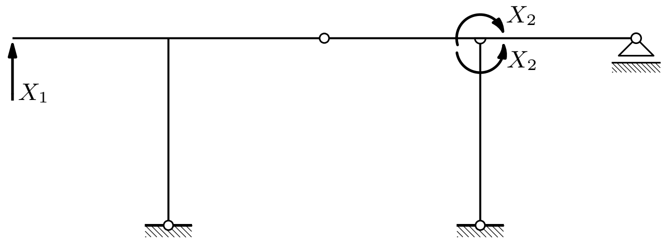
te je sada

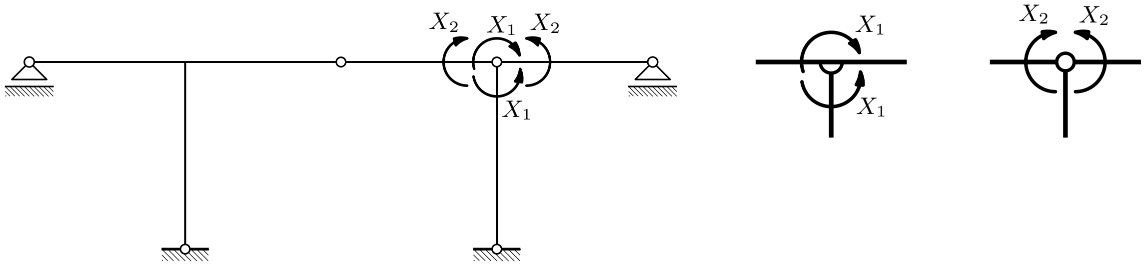
$$S_{\min} = 3\,t - 3\,k - 2\,z_1 - l = 3 \cdot 6 - 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 - (2 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = -2;$$

naravno, rezultat je jednak prijašnjemu.

Nakon izračunavanja stupnja statičke neodređenosti treba raskidanjem spojeva oblikovati osnovni sistem; prikazane su tri mogućnosti (dakako, i sada se može odabrati jedan od prije prikazanih „poznatih” sistema):



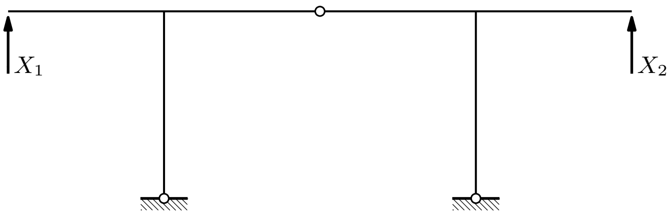




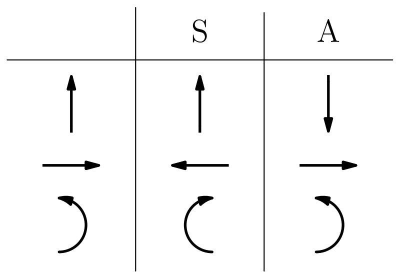
(Iako je u trećem primjeru umetnut samo jedan zglob, raskinuta su dva spoja: prvo između stupa i grede, a potom je greda „slomljena”.)

Korak drugi. Rješavanje odabranoga osnovnog sistema:

Rješavat ćemo prvoprikazani osnovni sistem:



Pri oblikovanju osnovnoga sistema uvijek je pogodno zadržati simetriju zadanoga sistema, ako ona, kao u našem slučaju, postoji. Onaj u metodi sila najdugotrajniji, najdosadniji i greškama najpodložniji dio posla, izračunavanja koeficijenata popustljivosti $\delta_{i,j}$ (za $j > 0$) i slobodnih članova $\delta_{i,0}$, može se time osjetno smanjiti, posebno ako su zadana djelovanja simetrična ili antimetrična[†]. Prisjetite se (doduše, oni koji nisu pohađali predavanja ovo vjerojatno vide prvi put):



Simetrična djelovanje (stupac S) zrcalne su slike, pri čemu je u ravnini „zrcalo” odsječak pravca. Antimetrična (antisimetrična) djelovanja (stupac A) nastaju tako da simetričnima promijenimo smisao.

Opći je oblik jednadžbi kompatibilnosti za dva puta statički neodređeni sistem

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}\,X_1 \;+\; \delta_{1,2}\,X_2 \;+\; \delta_{1,0} \;&=\; \bar{\bar{\delta}}_1, \\ \delta_{1,2}\,X_1 \;+\; \delta_{2,2}\,X_2 \;+\; \delta_{2,0} \;&=\; \bar{\bar{\delta}}_2. \end{aligned}$$

Kao što, nadam se, znate, jednadžbe kompatibilnosti kazuju da se zadani i osnovni sistem jednako ponašaju; konkretnije, da su na mjestima raskinutih spojeva u zadanome i u osnovnome sistemu (poopćeni) pomaci jednaki.

U ležajevima zadanoga sistema u kojima su pri oblikovanju osnovnoga sistema raskinuti spojevi nema prisilnih pomaka (prisilni su pomaci negdje drugdje), pa su $\bar{\bar{\delta}}_1 = 0$ & $\bar{\bar{\delta}}_2 = 0$. Za odabrani su osnovni sistem jednadžbe kompatibilnosti stoga

$$\begin{aligned} \delta_{1,1}\,X_1 \;+\; \delta_{1,2}\,X_2 \;+\; \delta_{1,0} \;&=\; 0, \\ \delta_{1,2}\,X_1 \;+\; \delta_{2,2}\,X_2 \;+\; \delta_{2,0} \;&=\; 0. \end{aligned}$$

[†] U stvari, svako se djelovanje može prikazati kao zbroj simetričnoga i antimetričnoga dijela, ali to je (ponovno) druga priča.

2.1. Koeficijenti popustljivosti $\delta_{i,j},\ j > 0$:

U našem je primjeru koeficijent popustljivosti $\delta_{i,j}$ orijentirana duljina pomaka hvatišta sile X_i po pravcu i u smislu njezina djelovanja, uzrokovana djelovanjem jedinične sile na pravcu i u smislu djelovanja sile X_j. Ako zanemarujemo utjecaj uzdužnih sila, opći je izraz za njegovo izračunavanje

$$\delta_{i,j} = \int \frac{m_i(x)\, m_j(x)}{EI}\, \mathrm{d}x,$$

gdje su m_i i m_j funkcije/dijagrami momenata savijanja zbog djelovanja jediničnih sila na pravcima i u smislu djelovanja sila X_i i X_j.

Za zadani je poprečni presjek moment tromosti

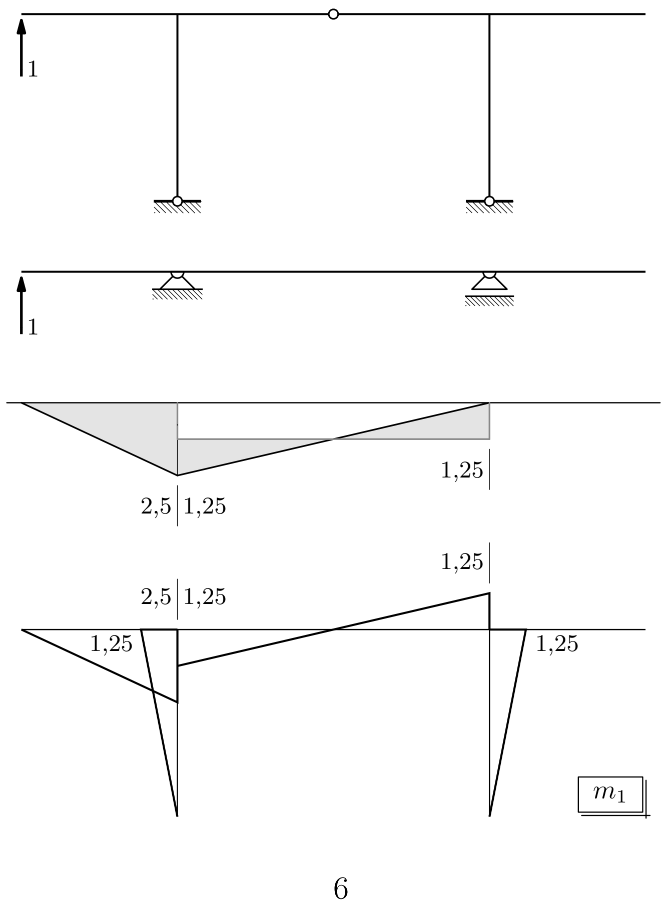
$$I = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{0{,}36 \cdot 0{,}72^3}{12} = 0{,}011\,2 \text{ m}^4,$$

pa je

$$EI = 3 \cdot 10^7 \cdot 0{,}011\,2 = 335\,923{,}2 \text{ kNm}^2.$$

Pri crtanju dijagrama m_i dopušteni su svi „prljavi trikovi” koji mogu to crtanje olakšati, pojednostavniti ili ubrzati.

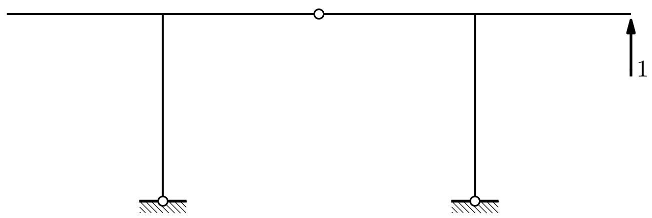
Dijagram m_1 nacrtat ćemo superpozicijskim postupkom. Pritom treba izračunati samo vrijednost momenta u spoju prepusta i grede ($1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$). Ostale je vrijednosti (ovdje, u stvari, samo još jednu vrijednost) lako očitati neposredno s crteža:

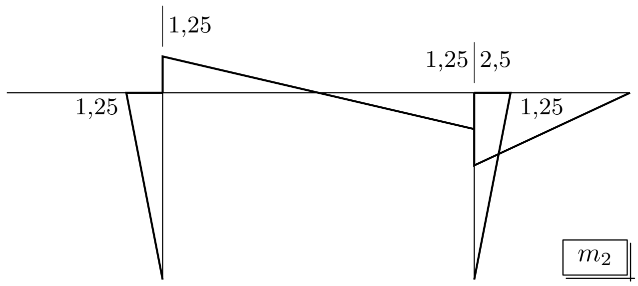


Uz poznati je dijagram m_1

$$\begin{aligned}
\delta_{1,1} &= \int \frac{m_1^2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2{,}5\right) + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}25\cdot 2{,}5\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}25\cdot 3\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\right)\right] = 0{,}000\,032\,559\,5.
\end{aligned}$$

Okvir opterećen jediničnom silom u hvatištu sile X_2 zrcalna je slika okvira s prethodne slike u odnosu na vertikalnu os kroz srednji zglob, pa će i dijagram m_2 biti zrcalna slika momenta m_1:





a to znači da će koeficijent $\delta_{2,2}$ biti jednak koeficijentu $\delta_{1,1}$:

$$\delta_{2,2} = \int \frac{m_2^2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x = \delta_{1,1} = 0{,}000\,032\,559\,5.$$

Ostaje još

$$\begin{aligned}
\delta_{1,2} = \delta_{2,1} &= \int \frac{m_1(x)\,m_2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{EI}\left[2\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}25\cdot 2{,}5\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\right)(-1) + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 1{,}25\cdot 3\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\right)\right] \\
&= 0{,}000\,001\,550\,45
\end{aligned}$$

(podsjećam, (-1) u prvome pribrojniku posljedica je toga što su dijelovi dijagramâ na gredi u m_1 i u m_2 na različitim stranama).

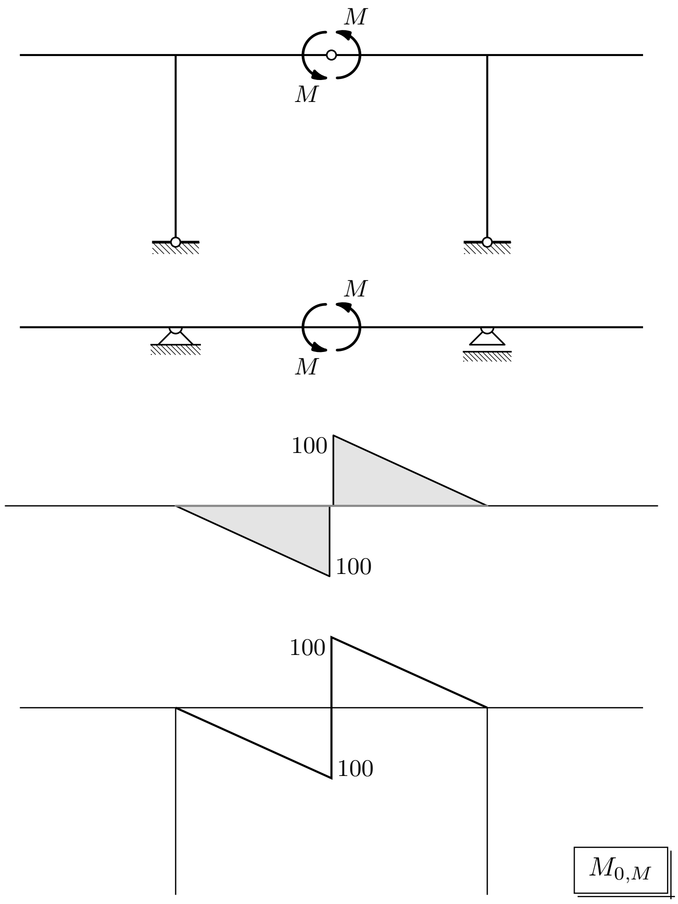
2.2. Slobodni članovi $\delta_{i,0}$:

Slobodni član $\delta_{i,0}$ orijentirana je duljina pomaka hvatišta sile X_i po pravcu i u smislu njezina djelovanja, uzrokovana vanjskim djelovanjima, a izračunava se prema izrazu

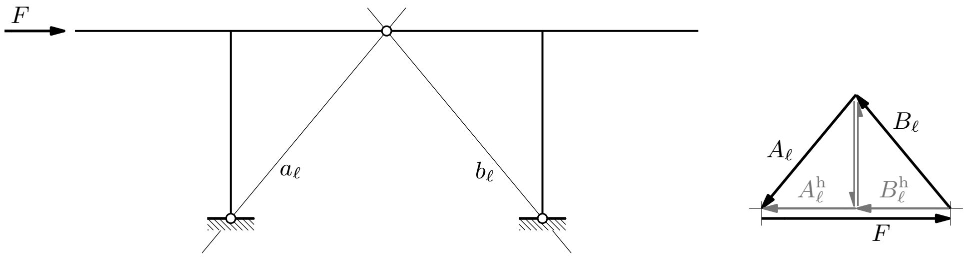
$$\delta_{i,0} \;=\; \int \frac{m_i(x)\, M_0(x)}{EI}\,\mathrm{d}x \;+\; \bar{\bar{\delta}}_{i,0},$$

gdje je M_0 funkcija/dijagram momenata savijanja zbog opterećenja na sistem, a $\bar{\bar{\delta}}_{i,0}$ utjecaj prisilnih pomaka na duljina pomaka hvatišta sile X_i. (U našem primjeru nema toplinskih djelovanja. Ima li ih, treba dodati pribrojnik koji izražava njihov utjecaj.)

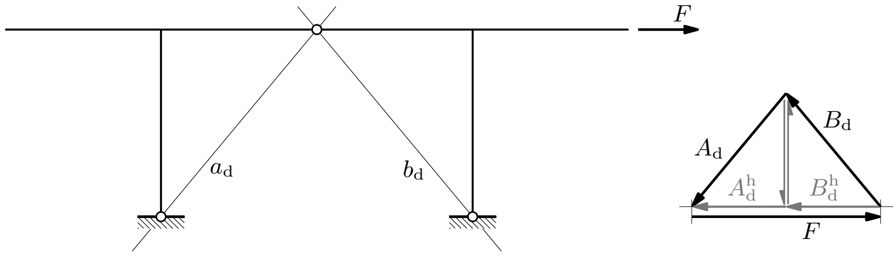
Umjesto dijagrama M_0 za ukupno opterećenje silama F i momentima M nacrtat ćemo dijagram $M_{0,M}$ za opterećenje momentima M i dijagram $M_{0,F}$ za opterećenje silama F. Dijagram $M_{0,M}$ nacrtat ćemo superpozicijskim postupkom; lako je vidjeti da se on ne razlikuje od dijagrama na zamjenjujućoj slobodno oslonjenoj gredi:



Za crtanje dijagrama $M_{0,F}$ „izračunat” ćemo vrijednosti horizontalnih komponenata reakcija trozglobnoga sistema. Primijenit ćemo grafički postupak uz malo razmišljanja; za silu F koja djeluje na lijevome dijelu:



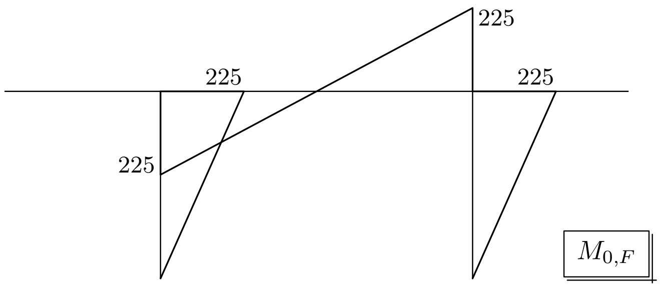
Zbog simetrije sistema i poligona sila vrijednosti su horizontalnih komponenata reakcija u oba ležaja jednake, a kako zajedno moraju uravnotežiti silu F, jasno je da su te vrijednosti $F/2$. Za silu F koja djeluje na desnome dijelu priča je ista:



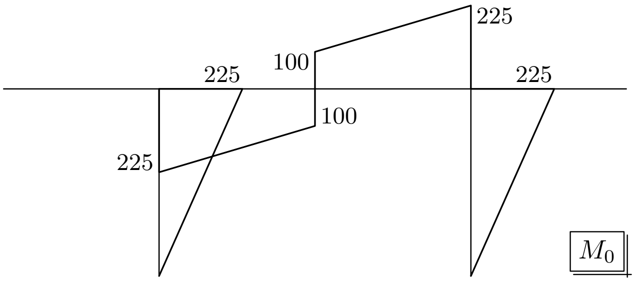
Za obje su sile zajedno vrijednosti horizontalnih komponenata reakcija F. Vrijednosti vertikalnih komponenata nas ne zanimaju, jer su vrijednosti momenata na vrhovima stupova

$$\left(A_\ell^{\mathrm{h}} + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{h}}\right) \cdot 3 = F \cdot 3 = 225 \qquad \text{i} \qquad \left(B_\ell^{\mathrm{h}} + B_{\mathrm{d}}^{\mathrm{h}}\right) \cdot 3 = F \cdot 3 = 225.$$

Uvjeti ravnoteže momenata u čvorovima daju vrijednosti momenata na početku i na kraju dijela grede između stupova:



Dijagram M_0 za ukupno opterećenje zbroj je dijagramâ $M_{0,M}$ i $M_{0,F}$:



No, pri izračunavanju dijela slobodnoga člana $\delta_{1,0}$ koji izražava utjecaj opterećenja zadržat ćemo rastav u dijagrame $M_{0,M}$ i $M_{0,F}$ jer su za nijansu jednostavniji za geometrijsku integraciju (sadrže samo trokute, ne i trapeze):

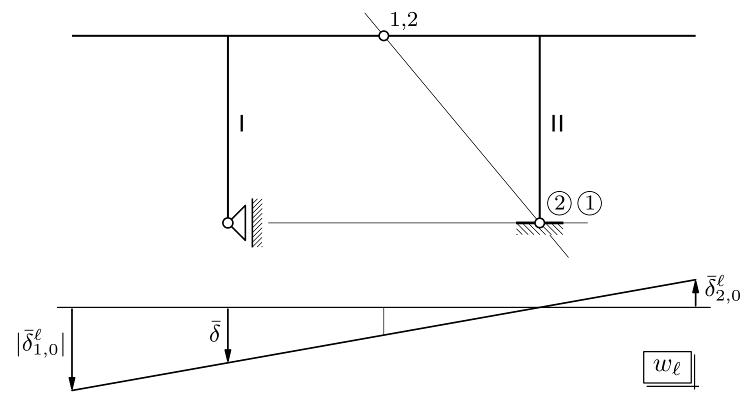
$$\begin{aligned}
\delta_{1,0} &= \int \frac{M_0(x)\,m_1(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \bar{\delta}_{1,0} = \int \frac{\big(M_{0,M}(x) + M_{0,F}(x)\big)\,m_1(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \bar{\delta}_{1,0} \\
&= \int \frac{M_{0,M}(x)\,m_1(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \int \frac{M_{0,F}(x)\,m_1(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \bar{\delta}_{1,0} \\
&= \frac{1}{EI}\left[2\left(\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 2{,}5\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 1{,}25\right) + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 225\cdot 2{,}5\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\right)\right] + \bar{\delta}_{1,0} \\
&= 0{,}001\,705\,50 + \bar{\delta}_{1,0}.
\end{aligned}$$

Dijelovi dijagrama m_1 na stupovima simetrični su, dok su odgovorajući dijelovi dijagrama $M_{0,F}$ antimetrični, pa se doprinosi dijelova na stupovima poništavaju — vrijednost je integrala na lijevome stupu negativna, a na desnome pozitivna. Izračunavanje integrala umnoška simetričnih i antimetričnih dijelova dijagrama možemo uvijek preskočiti.

Lijevi dio dijagrama m_1 na gredi s donje je njezine strane, a desni s gornje, dok je lijevi dio dijagrama m_2 na gredi s gornje, a desni s donje strane. Drugim riječima, $m_2^{\text{greda}} = -m_1^{\text{greda}}$. Stupovi su, rekoh, ispali iz igre, pa je

$$\delta_{2,0} = \int \frac{M_0(x)\,m_2(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \bar{\delta}_{2,0} = -\int \frac{M_0(x)\,m_1(x)}{EI}\,\mathrm{d}x + \bar{\delta}_{2,0} = -0{,}001\,705\,50 + \bar{\delta}_{2,0}.$$

Utjecaje prisilnih pomaka na vrijednosti pomakâ hvatištâ sila X_1 i X_2 odredit ćemo pomoću planova pomakâ. Za prisilni je pomak lijevoga ležaja plan pomakâ

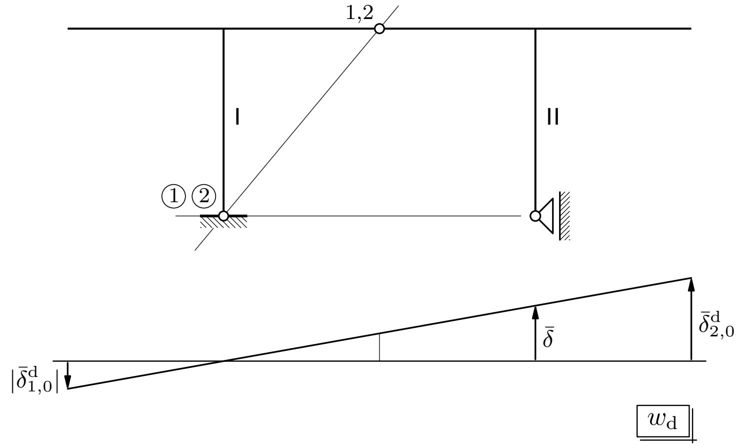


Iz omjerâ stranicâ sličnih trokuta slijedi

$$\frac{\bar{\delta}}{5{,}0} = \frac{|\bar{\delta}^{\ell}_{1,0}|}{7{,}5} \quad\Rightarrow\quad |\bar{\delta}^{\ell}_{1,0}| = \frac{3}{2}\,\bar{\delta} = 7{,}5\ \mathrm{mm} = 0{,}007\,5\ \mathrm{m},$$

$$\frac{\bar{\delta}}{5{,}0} = \frac{\bar{\delta}^{\ell}_{2,0}}{2{,}5} \quad\Rightarrow\quad \bar{\delta}^{\ell}_{2,0} = \frac{1}{2}\,\bar{\delta} = 2{,}5\ \mathrm{mm} = 0{,}002\,5\ \mathrm{m}.$$

Za prisilni je pomak desnoga ležaja plan pomakâ



Usporedbom planova w_ℓ i $w_{\rm d}$ dobivamo

$$|\bar\delta^{\rm d}_{1,0}| \;=\; 0{,}0025\,\mathrm{m} \qquad \text{i} \qquad \bar\delta^{\rm d}_{2,0} \;=\; 0{,}0075\,\mathrm{m}.$$

Ukupne su duljine pomakâ

$$|\bar\delta_{1,0}| \;=\; |\bar\delta^{\ell}_{1,0}| + |\bar\delta^{\rm d}_{1,0}| \;=\; 0{,}01\,\mathrm{m} \qquad \Rightarrow \qquad \bar\delta_{1,0} \;=\; -0{,}01\,[\mathrm{m}],$$

$$\bar\delta_{2,0} \;=\; \bar\delta^{\ell}_{2,0} + \bar\delta^{\rm d}_{2,0} \;=\; 0{,}01\,\mathrm{m};$$

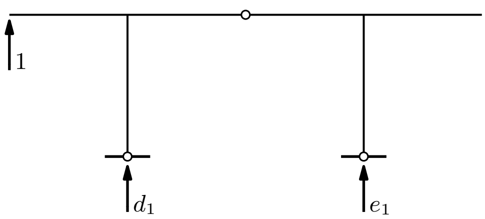
Vrijednost je $\bar\delta_{1,0}$ negativna jer je pomak suprotan pretpostavljenomu smislu djelovanja sile X_1.

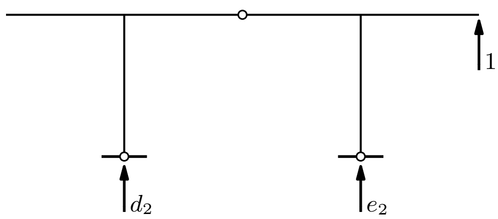
Budući da ih ne volite, crtanje planova pomakâ možete izbjeći na dva načina. Prvi je primjena metode jedinične sile (odnosno rada virtualnih sila na stvarnim pomacima) prema izrazu

$$\bar\delta_{i,0} \;=\; -\sum\nolimits_s r_{s,i}\,\bar\delta_s,$$

gdje je $r_{s,i}$ vrijednost virtualne reakcije u ležaju s zbog djelovanja jedinične sile na pravcu i u smislu djelovanja sile X_i, dok je $\bar\delta_s$ orijentirana duljina prisilnoga pomaka ležaja s.[‡]

Za primjenu ovoga postupka treba izračunati vrijednosti reakcija u ležajevima uzrokovanih jediničnim silama:





$$-1\cdot 7{,}5 - d_1\cdot 5 \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad d_1 \;=\; -1{,}5,$$

$$-1\cdot 2{,}5 + e_1\cdot 5 \;=\; 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_1 \;=\; 0{,}5.$$

[‡] Rješavate li zadatak na taj način, za usmeni dio ispita pripremite odgovore na pitanja odakle predznak „−” ispred znaka sumacije i zašto se može pomak (lijeva strana izraza) izjednačiti s radom (desna strana izraza).

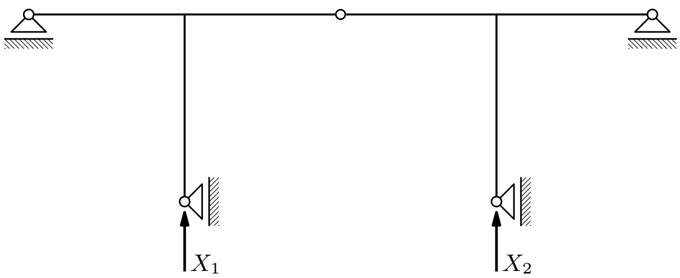
Desni je crtež (osim oznaka reakcija) zrcalna slika lijevoga, pa je očito da su $d_2 = 0{,}5$ i $e_2 = 1{,}5$.

Rad je pozitivan ako su sila i pomak jednako orijentirani, a negativan ako nisu, pa su

$$\bar{\delta}_{1,0} = -\big[1{,}5 \cdot 0{,}005 + 0{,}5 \cdot 0{,}005\big] = -0{,}01\,\mathrm{m},$$

$$\bar{\delta}_{2,0} = -\big[-0{,}5 \cdot 0{,}005 - 1{,}5 \cdot 0{,}005\big] = 0{,}01\,\mathrm{m}.$$

Drugi je način odabir drukčijega osnovnoga sistema, osnovnoga sistema u kojem su u ležajevima prisilni pomaci kojih su zadani raskinuti spojevi po pravcima prisilnih pomaka:



U tom će se slučaju osnovni i zadani sistem jednako ponašati ako su orijentirane duljine pomakâ hvatišta sila X_1 i X_2 jednake orijentiranim duljinama prisilnih pomaka (uzimajući predznacima u obzir smisao djelovanja sila):

$$\delta^*_{1,1}\,X_1 + \delta^*_{1,2}\,X_2 + \delta^*_{1,0} = -\bar{\delta}$$

$$\delta^*_{1,2}\,X_1 + \delta^*_{2,2}\,X_2 + \delta^*_{2,0} = \bar{\delta}$$

Slobodni članovi $\delta^*_{1,0}$ i $\delta^*_{2,0}$ sada sadrže samo utjecaje opterećenja silama F i momentima M. (Koeficijenti fleksibilnosti i slobodni članovi označeni su zvijezdicama jer se računaju na drugom osnovnom sistemu, pa će im i vrijednosti biti drukčije od prije izračunanih.)

Opasnost toga načina krije se u tome da u prerevnome pokušaju da ga primijenite (to jest, da izbjegnete crtanje planova pomakâ) umjesto osnovnoga sistema oblikujete mehanizam.

Ukupne su orijentirane duljine hvatišta sila X_1 i X_2 po pravcima i u smislu njihova djelovanja

$$\delta_{1,0} = 0{,}001\,705\,50 + \bar{\delta}_{1,0} = 0{,}001\,705\,50 - 0{,}01 = -0{,}008\,294\,50,$$

$$\delta_{2,0} = -0{,}001\,705\,50 + \bar{\delta}_{1,0} = -0{,}001\,705\,50 + 0{,}01 = 0{,}008\,294\,50.$$

Uvrstimo li sve dobivene vrijednosti u jednadžbe kompatibilnosti, dobivamo sustav jednadžbi

$$0{,}000\,032\,559\,5 \cdot X_1 + 0{,}000\,001\,550\,45 \cdot X_2 - 0{,}008\,294\,50 = 0,$$

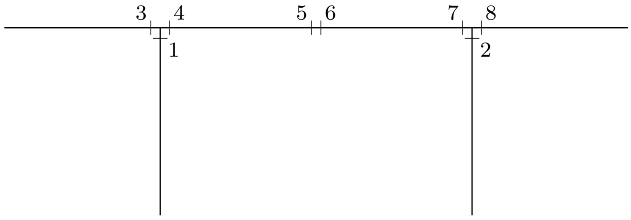
$$0{,}000\,001\,550\,45 \cdot X_1 + 0{,}000\,032\,559\,5 \cdot X_2 + 0{,}008\,294\,50 = 0.$$

Njegova su rješenja

$$X_1 = 267{,}486\,\mathrm{kN} \qquad \& \qquad X_2 = -267{,}486\,\mathrm{kN}.$$

Konačne vrijednosti momenata u karakterističnim točkama označenima na crtežu na sljedećoj stranici računamo prema izrazu

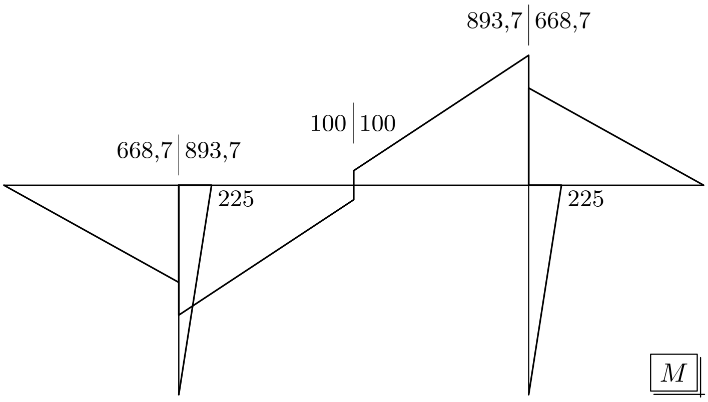
$$M(x) = M_0(x) + X_1\,m_1(x) + X_2\,m_2(x),$$



pa su

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 225 + 267{,}49 \cdot (-1{,}25) + (-267{,}49) \cdot (-1{,}25) = 225\,\mathrm{kNm},\\
M_2 &= 225 + 267{,}49 \cdot 1{,}25 + (-267{,}49) \cdot 1{,}25 = 225\,\mathrm{kNm},\\
M_3 &= 0 + 267{,}49 \cdot 2{,}5 + 0 = 668{,}725\,\mathrm{kNm},\\
M_4 &= 225 + 267{,}49 \cdot 1{,}25 + (-267{,}49) \cdot (-1{,}25) = 893{,}725\,\mathrm{kNm},\\
M_5 &= 100 + 0 + 0 = 100\,\mathrm{kNm},\\
M_6 &= -100 + 0 + 0 = 100\,\mathrm{kNm},\\
M_7 &= -225 + 267{,}49 \cdot (-1{,}25) + (-267{,}49) \cdot 1{,}25 = -893{,}725\,\mathrm{kNm},\\
M_8 &= 0 + 0 + (-267{,}49) \cdot 2{,}5 = -668{,}725\,\mathrm{kNm},
\end{aligned}
$$

te je konačni momentni dijagram



2.3. Relativni kut zaokreta između osi grede neposredno desno od točke A i osi grede neposredno lijevo od točke B:

Relativni kut zaokreta između osi grede u njezine dvije točke izračunavamo metodom jedinične sile *uz primjenu redukcijskoga stavka* prema izrazu

$$\varphi_{\mathsf{A,B}} = \int \frac{m_{\mathsf{A,B}}(x)\, M(x)}{EI}\, \mathrm{d}x + \bar{\varphi}_{\mathsf{A,B}}$$

gdje su:

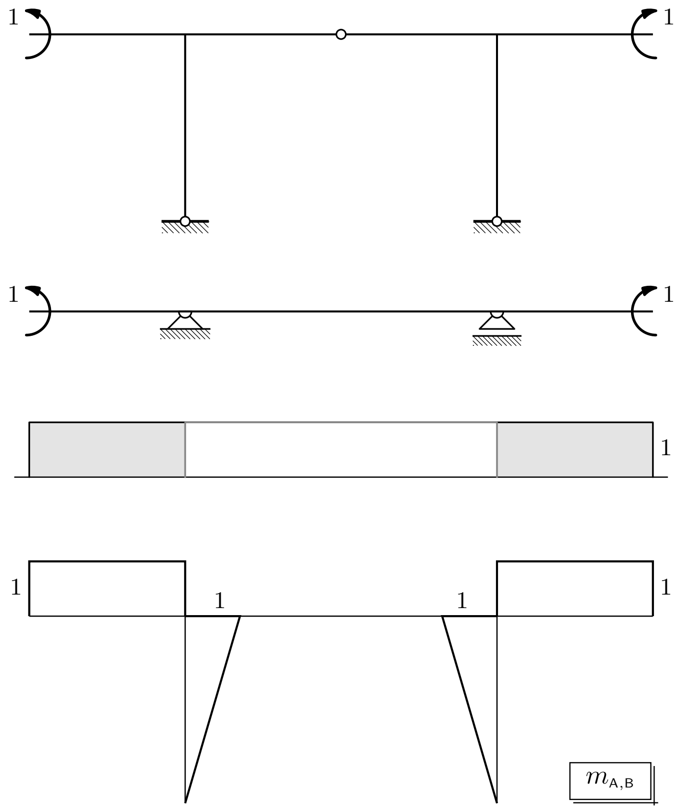
M — funkcija/dijagram momenata savijanja na izvornome statički neodređenom sistemu zbog zadanih djelovanja,[§]

[§] To je i funkcija/dijagram momenata savijanja na osnovnome sistemu zbog zadanih djelovanja i sila X_i koje imaju izračunane vrijednosti.

$m_{\mathsf{A,B}}$ — funkcija/dijagram momenata savijanja na *bilo kojem osnovnom sistemu* zbog para suprotno orijentiranih jediničnih momenata koji djeluju u točkama između kojih računamo relativni kut zaokreta osi,

$\bar{\varphi}_{\mathsf{A,B}}$ — relativni kut zaokreta na odabranom osnovnom sistemu zbog zadanih prisilnih pomaka ležejeva.

Za crtanje dijagrama $m_{\mathsf{A,B}}$ zadržan je isti osnovni sistem, a primijenjen je superpozicijski postupak:



Dijagram $m_{\mathsf{A,B}}$ je simetričan, dok je dijagram M (na prethodnoj stranici) antimetričan, pa je

$$\int \frac{m_{\mathsf{A,B}}(x)\, M(x)}{EI}\, \mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Dijagrami w_ℓ (stranica 10) i w_d (stranica 11) pokazuju da su

$$\bar{\varphi}^{\,\ell}_{\mathsf{A,B}} \;=\; 0 \quad \text{(zbog prisilnoga pomaka lijevoga ležaja)}$$

i

$$\bar{\varphi}^{\,\mathrm{d}}_{\mathsf{A,B}} \;=\; 0 \quad \text{(zbog prisilnoga pomaka desnoga ležaja),}$$

te je $\bar{\varphi}_{\mathsf{A,B}} = \bar{\varphi}^{\,\ell}_{\mathsf{A,B}} + \bar{\varphi}^{\,\mathrm{d}}_{\mathsf{A,B}} = 0.$ Slijedi

$$\varphi^{\mathrm{d}}_{\mathsf{A,B}} \;=\; 0.$$

Na prikazu progibne linije sistema može se vidjeti da je kut zaokreta osi grede neposredno desno od točke A (krajnje lijeve točke) jednak kutu zaokreta osi neposredno lijevo od točke B (krajnje desne točke):