Stručni rad
Prihvaćen 23. 12. 2004.

SANJA HAK
SONJA GORJANC
MARIO UROŠ

Vizualizacije funkcija Gaussove i srednje zakrivljenosti u programu *Mathematica*

Visualizations of Gaussian and Mean Curvatures by Using *Mathematica*

ABSTRACT

The paper gives an overview of the program written in the language *Mathematica*, which enables colouring of a surface with the colour that is the function of its Gaussian and mean curvatures, as well as drawing the graphs of those functions. Ten examples of visualizations obtained by the use of that program are presented.

The article is a small extract from the students' paper which was awarded Rector's Prize in 2004.

Key words: Gaussian curvature, mean curvature, surface, visualization

MSC 2000: 53A05

Vizualizacije funkcija Gaussove i srednje zakrivljenosti u programu *Mathematica*

SAŽETAK

U radu je dan prikaz programa, pisanog u jeziku *Mathematica*, koji omogućuje bojanje plohe bojom koja je funkcija njene Gaussove ili srednje zakrivljenosti kao i crtanje grafova tih funkcija. Dano je deset primjera vizualizacija dobivenih pomoću tog programa.

Članak je mali ulomak iz studentskog rada [7] koji je 2004. godine nagrađen Rektorovom nagradom.

Ključne riječi: Gaussova zakrivljenost, ploha, srednja zakrivljenost, vizualizacija

Akademske godine 2003/04 Sanja Hak i Mario Uroš, tadašnji studenti četvrte i treće godine Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, napisali su rad *Gaussova i srednja zakrivljenost ploha - vizualizacije u programu Mathematica*. Voditeljica rada bila je Sonja Gorjanc, a rad je nagrađen Rektorovom nagradom. Ovaj je članak mali izvadak iz te radnje.

1 O plohama euklidskoga prostora

Ovdje dajemo neke osnovne definicije iz područja diferencijalne geometrije ploha koje se uz znatno detaljnija objašnjenja nalaze u drugom i trećem poglavlju radnje [7, str. 10-37] pri čijem su pisanju autori koristili sljedeću literaturu: [1], [5], [6], [8], [9].

1.1 Parametrizacija i singulariteti ploha

Neka je $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ otvoren i povezan skup (područje) i neka je $\mathbf{r} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija dana formulom

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}, \tag{1}$$

gdje su $x,y,z : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ realne funkcije klase $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ tj. imaju neprekidne prve parcijalne derivacije na $\mathcal{U}$.

Skup točaka euklidskoga prostora

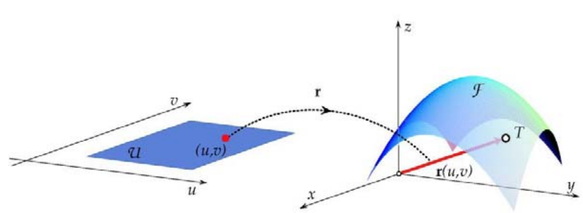
$$\mathcal{F} = \{T \in \mathbb{R}^3 \,|\, T = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in \mathcal{U}\} \tag{2}$$

nazivamo *plohom*, a uređeni par $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ *parametrizacijom plohe* $\mathcal{F}$.

Ploha $\mathcal{F}$ može se zadati i s tri *parametarske jednadžbe*

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v) \tag{3}$$

gdje su $x,y,z : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diferencijabilne skalarne funkcije iz jednakosti (1).



Slika 1: $\mathcal{U}$ je najčešće pravokutno područje u $\mathbb{R}^2$. Vektorska funkcija $\mathbf{r}$ preslikava točku područja $\mathcal{U}$ u radijvektor točke T plohe $\mathcal{F}$.

Za točku T plohe $\mathcal{F}$ koja odgovara paru (u_0, v_0) kažemo da je *regularna točka parametrizacije* $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ ako je

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq 0. \tag{4}$$

Za točku T plohe $\mathcal{F}$ koja odgovara paru (u_0, v_0) kažemo da je *singularna točka parametrizacije* $(\mathcal{U}, \mathbf{r})$ ako je

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = 0. \tag{5}$$

Ploha $\mathcal{F}$ dopušta različite parametrizacije. Točka plohe koja je singularna za jednu parametrizaciju ne mora biti singularna i za ostale njezine parametrizacije. Za plohu $\mathcal{F}$ kažemo da je *regularna* ako svaka njezina točka ima u $\mathcal{F}$ okolinu s regularnom parametrizacijom. Za točku $S \in \mathcal{F}$ kažemo da je *singularna točka plohe* ako je ona singularna točka svake njezine parametrizacije.

1.2 Tangencijalna ravnina i normala

U svakoj regularnoj točki T plohe $\mathcal{F}$, koja odgovara parametrima (u_0, v_0), postoji jedinstvena *tangencijalna (dirna) ravnina* čija je vektorska jednanžba:

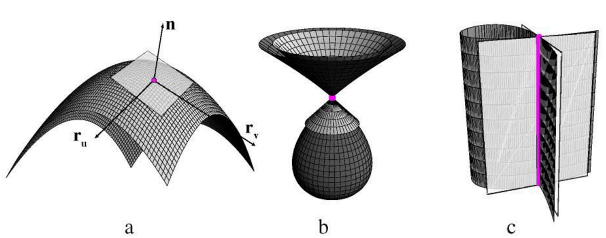
$$\mathbf{t} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + \rho_1 \mathbf{r}_u + \rho_2 \mathbf{r}_v, \quad \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Tangente onih krivulja na plohi $\mathcal{F}$ koje sadrže regularnu točku T leže u *tangencijalnoj ravnini* te točke. U singularnim točkama plohe, u kojima je $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 0$ za svaku parametrizaciju $(\mathbf{r}, \mathcal{U})$, takve tangente formiraju tangencijalne stošce onog reda koliki je stupanj višestrukosti singularne točke. Ti se tangencijalni stošci mogu raspasti na ravnine od kojih neke mogu biti i višestruko brojene. Ako su sve točke neke krivulje na plohi singularne onda takvu krivulju nazivamo *singulanom linijom* plohe.

Vektor

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \tag{7}$$

je *jedinični vektor normale* u regularnoj točki plohe i okomit je na tangencijalnu ravninu.



Slika 2: **(a)** Tangencijalna ravnina i normala u regularnoj točki. **(b)** Dvostruka točka s tangencijalnim stošcem. **(c)** Dvostruki pravac plohe duž kojeg se tangencijalni stožac raspada na dvije ravnine.

1.3 Gaussova i srednja zakrivljenost u regularnoj točki plohe

Kvadratnu formu

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{8}$$

gdje je

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \\ G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{aligned} \tag{9}$$

nazivamo *prvom osnovnom diferencijalnom formom plohe*. Ona predstavlja kvadrat elementa duljine luka krivulje na plohi, odnosno kvadrat udaljenosti dviju "beskonačno bliskih" točaka (u, v) i $(u + du, v + dv)$ plohe. Za određenu točku T na plohi koeficijenti E, F, G imaju konstantnu vrijednost, dok se diferencijali du i dv mijenjaju ovisno o krivulji koja se promatra.

Kvadratnu formu

$$L\,du^2 + 2M\,du dv + N\,dv^2. \tag{10}$$

gdje je

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}_0, \\ M &= \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}_0, \\ N &= \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}_0 \end{aligned} \tag{11}$$

nazivamo *drugom osnovnom diferencijalnom formom plohe*. Ona izražava glavni dio odstupanja krivulje na plohi od tangencijalne ravnine pri pomaku od dirališta u njemu "beskonačno blisku" točku. Za određenu točku T na plohi koeficijenti L, M, N imaju konstantnu vrijednost, dok se diferencijali du i dv mijenjaju prema krivulji koja se promatra.

Neka je $\mathcal{F}$ regularna ploha i $T(u, v) \in \mathcal{F}$.

Gaussova zakrivljenost plohe $\mathcal{F}$ u točki $T(u, v)$ dana je relacijom

$$K(u, v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{12}$$

Srednja zakrivljenost plohe $\mathcal{F}$ u točki $T(u, v)$ dana je relacijom

$$H(u, v) = \frac{1}{2}\Big(\frac{EN - 2MF + GL}{EG - F^2}\Big). \tag{13}$$

2 Prikaz *Mathematica* bilježnice

Mathematica je svestran programski sustav i programski jezik za izradu matematičkih i drugih aplikacija. Može se primijenjivati kao numerički i simbolički kalkulator, sustav za vizualizaciju funkcija i podataka, visoko razvijeni programski jezik, okolina za modeliranje i analizu podataka, sustav za reprezentaciju znanja, softverska platforma za pokretanje drugih aplikacija itd. Program se sastoji od dva osnovna dijela: u jezgri (*kernel*) odvija se samo računanje, dok se u grafičkom sučelju (*front end*) vrše ulazno/izlazne operacije, odnosno pripremanje ulaznih podataka i prikazivanje rezultata dobivenih od jezgre. Osnovni format datoteka koje se koriste u *Mathematici* naziva se bilježnicom (*notebook*). Bilježnice imaju razgranatu hijerarhijsku strukturu, te osim inputa i outputa mogu sadržavati tekst, matematičke izraze, slike, animacije, zvuk i linkove na druge sadržaje.

Knjiga [6] krasan je primjer upotrebe *Mathematice* u diferencijalnoj geometriji, iz nje smo preuzeli i ideju za vizualizaciju funkcija zakrivljenosti. Ovdje dajemo prikaz *Mathematica* bilježnice u kojoj su za varijabilnu vektorsku funkciju dviju varijabli definirane funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti, definicije se mogu naći i u knjizi [6, str. 394]. Na primjeru rotacijskog paraboloida prikazno je kako se tako definirana funkcija može koristiti pri vizualizaciji svojstava srednje zakrivljenosti.

Vektorsku funkciju $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ koja određuje parametrizaciju neke plohe može se, u programskom jeziku *Mathematica*, definirati na sljedeći način:

```
x[u_,v_]:={x1[u,v],x2[u,v],x3[u,v]}
```

gdje su skalarne funkcije x1, x2 i x3 diferencijabilne na $\mathcal{U}$.

Koeficijente E, F, G prve osnovne diferencijalne forme (koje ćemo u *Mathematici* nazivati ee, ff, gg) možemo na temelju jednakosti (9), za varijabilnu vektorsku funkciju $\mathbf{x}$, definirati na sljedeći način:

```
ee[x_][u_,v_]:=
       FullSimplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],uu]/.
        {uu->u,vv->v};
ff[x_][u_,v_]:=
       FullSimplify[D[x[uu,vv],uu].D[x[uu,vv],vv]]/.
        {uu->u,vv->v};
gg[x_][u_,v_]:=
       FullSimplify[D[x[uu,vv],vv].D[x[uu,vv],vv]]/.
        {uu->u,vv->v};
```

Nadalje, definicija jediničnog vektora normale (7) je

```
NO[x_][u_,v_]:=
FullSimplify[Cross[D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]]/
       Sqrt[Cross[D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]].
            Cross[D[x[uu,vv],uu],D[x[uu,vv],vv]]]]/.
                  {uu->u,vv->v}
```

a definicije koeficijenata druge diferencijalne forme, na temelju jednakosti (11) su:

```
ll[x_][u_,v_]:=
       FullSimplify[D[x[uu,vv],uu,uu].NO[x][uu,vv]]/.
        {uu->u,vv->v};
mm[x_][u_,v_]:=
       FullSimplify[D[x[uu,vv],uu,vv].NO[x][uu,vv]]/.
        {uu->u,vv->v};
nn[x_][u_,v_]:=
       FullSimplify[D[x[uu,vv],vv,vv].NO[x][uu,vv]]/.
        {uu->u,vv->v};
```

Sada je, u programskom jeziku *Mathematica*, na temelju jednakosti (12) i (13) moguće definirati funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti (koje ćemo označiti GZ i SZ) za bilo koju funkciju $\mathbf{x}$.

```
GZ[x_][u_,v_]:=
FullSimplify[(ll[x][uu,vv]*nn[x][uu,vv]
    -mm[x][uu,vv]*mm[x][uu,vv])/
     (ee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]
    -ff[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv])]/.
      {uu->u,vv->v}

SZ[x_][u_,v_]:=
FullSimplify[1/2(ee[x][uu,vv]*nn[x][uu,vv]
-2mm[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv]+gg[x][uu,vv]*ll[x][uu,vv])/
 (ee[x][uu,vv]*gg[x][uu,vv]-ff[x][uu,vv]*ff[x][uu,vv])]/.
   {uu->u,vv->v}
```

Ove nam definicije omogućuju strojno računanje Gaussove i srednje zakrivljenosti na plohi, kao i crtanje grafova tih funkcija. Na primjer, nakon učitavanja gornjih definicija, za rotacijski paraboloid s eksplicitnom jednadžbom $z = x^2 + y^2$ to izgleda ovako:

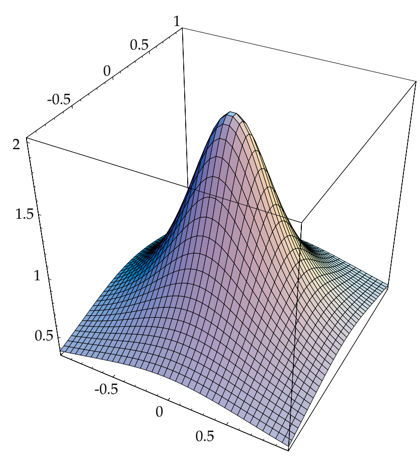
```
In[10]:= par[u_,v_]:={u,v,u^2+v^2}

In[11]:= GZ[par][u,v]
Out[11]= 4/(1+4u^2+4v^2)^2

In[12]:= SZ[par][u,v]
Out[12]= (2+4u^2+4v^2)/(1+4u^2+4v^2)^(3/2)
```

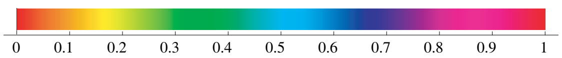
Naredba za crtanje grafa funkcije srednje zakrivljenosti definiranog paraboloida je sljedeća:

```
In[13]:= Plot3D[SZ[par][u,v],{u,-1,1},{v,-1,1},
               BoxRatios->{1,1,1},PlotPoints->40]
```



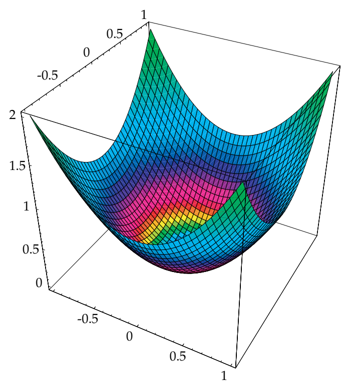

```
Out[13]= - SurfaceGraphics -
```

U programu *Mathematica* može se koristiti periodička funkcija boje *Hue*. Period joj je 1, a područje vrijednosti boje spektra. Definirana je na sljedeći način:



Ta funkcija omogućuje prikaze ploha obojane bojom koja je funkcija njihove Gaussove ili srednje zakrivljenosti. S takvih slika ne može se očitavati točna vrijednost zakrivljenosti plohe u pojedinim točkama, ali one vrlo dobro vizualiziraju "ponašanje" funkcija na plohi. Na sljedećoj je slici prikazan paraboloid obojan bojom koja je funkcija njegove srednje zakrivljenosti $Hue(SZ)$.

```
In[14]:=
ParametricPlot3D[
Append[par[u,v],Hue[SZ[par][u,v]]]//Evaluate,
{u,-1,1},{v,-1,1},Lighting->False,PlotPoints->40]
```



```
Out[14]= - Graphics3D -
```

U okviru svog rada na IT projektu[1] V. Benić i S. Gorjanc, s Građevinskog fakulteta u Zagrebu, oblikovali su, na temelju izloženog principa, interaktivnu *webMathematica* datoteku za crtanje grafova funkcija Gaussove i srednje zakrivljenosti te prikazivanja ploha obojanih bojom koja je funkcija tih zakrivljenosti. Datoteka je dostupna na adresi: http://www.grad.hr/itproject_math/Links/webmath/

3 Primjeri vizualizacija

Primjer 1. Parametrizacija elipsoida sa središtem u ishodištu je

$$(u,v) \mapsto (a\cos u \sin v, b \sin u \sin v, c\cos v)$$

$$(u,v) \in [0,2\pi) \times [0,\pi), \quad a,b,c \in \mathbb{R}^+ \tag{14}$$

Singularne točke ove parametrizacije su $(0,0,\pm c)$.

Ako su brojevi a, b, i c međusobno različiti elipsoid nazivamo *troosnim*. Ako je $a = b \neq c$ elipsoid je *rotacijski* i to *spljošteni* ukoliko je $a > c$, odnosno *izduženi* ukoliko je $a < c$. U slučaju kada je $a = b = c$ parametrizacija (14) određuje *sferu* polumjera a.

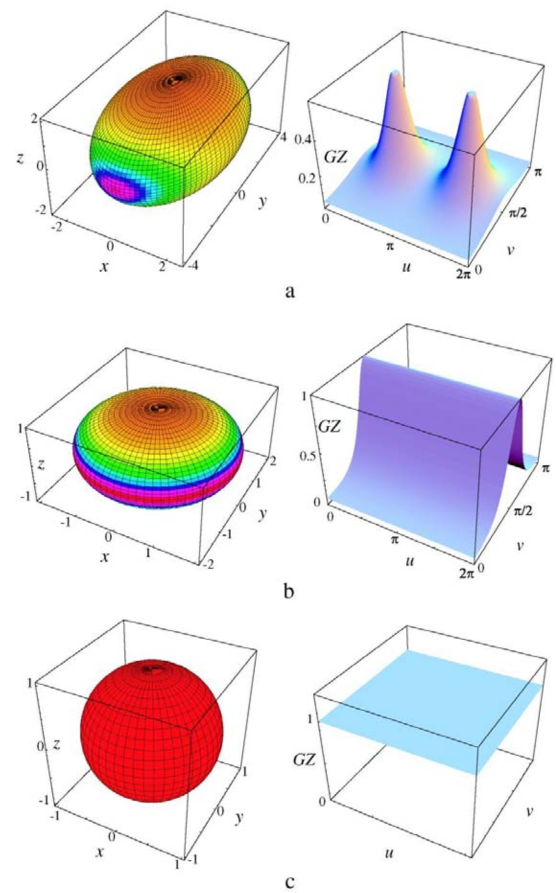
Funkcija Gaussove zakrivljenosti troosnog elipsoida dana je formulom

$$\frac{4a^2b^2c^2}{(2a^2b^2\cos^2 v + c^2(a^2+b^2+(b^2-a^2)\cos 2u)\sin^2 v)^2}. \tag{15}$$

Funkcija Gaussove zakrivljenosti rotacijskog elipsoida dana je formulom

$$\frac{4c^2}{(a^2+c^2+(a-c)(a+c)\cos 2v)^2}, \tag{16}$$

dok je Gaussova zakrivljenost u svakoj točki sfere polumjera a jednaka $1/a^2$.



Slika 3: Na slici su za
(**a**) troosni elipsoid, ($a = 2.5$, $b = 4$, $c = 2$),
(**b**) spljošteni rotacijski elipsoid, ($a = 2$, $c = 1$) i
(**c**) sferu ($a = 1$),
dani prikazi ploha obojanih bojom $Hue(GZ)$ te grafovi njihovih funkcija GZ (funkcija GZ definirana je u inputu na prethodnoj stranici).

[1] Odabrana poglavlja geometrije i matematike za buduće inženjere obrađena pomoću *Mathematice* - projekt primjene informacijske tehnologije MZT RH, 2003/24.

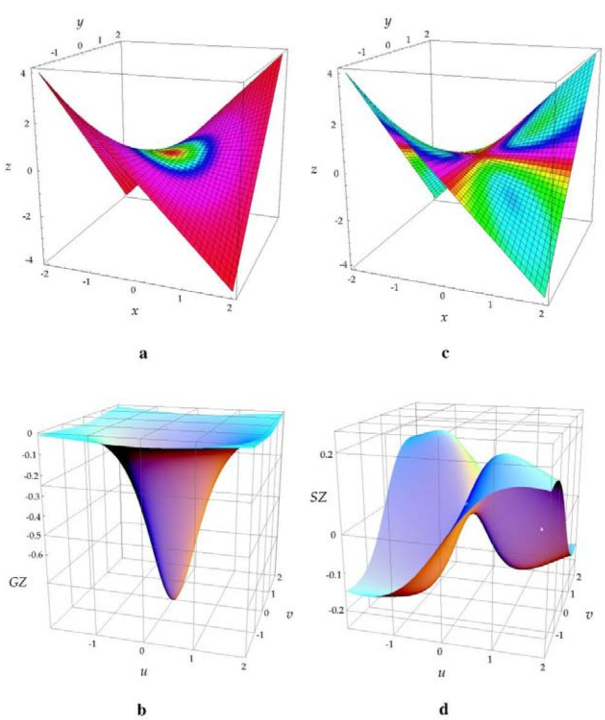
Primjer 2. Promatramo parametrizaciju hiperboličkog paraboloida kod koje su parametarske krivulje (u ili v su konstante) pravci

$$(u,v) \mapsto (u,v,u\cdot v) \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Za tako parametriziranu plohu funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti dane su formulama:

$$K(u,v) = -\frac{1}{(1+u^2+v^2)^2}, \tag{18}$$

$$H(u,v) = -\frac{uv}{(1+u^2+v^2)^{3/2}}. \tag{19}$$



Slika 4: Na slici su za hipar s parametrizacijom (17), za područje $(-2,2)\times(-2,2)$, dani sljedeći prikazi:
(a) Ploha obojana bojom $Hue(GZ)$.
(b) Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti hipara (18).
(c) Ploha obojana bojom $Hue(3SZ)$.
(d) Graf funkcije srednje zakrivljenosti hipara (19).

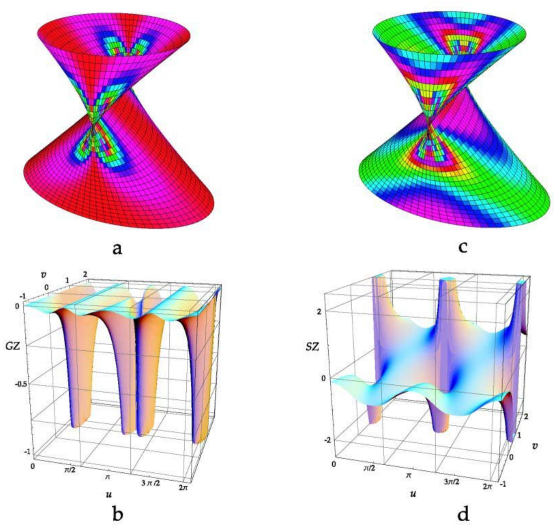
Primjer 3. Parametrizacija kružnog konoida 4. reda (primjer opisan u [4]) je:

$$(u,v) \mapsto (\cos u, \sin u(1-v), v), \quad (u,v)\in(0,2\pi)\times\mathbb{R}. \tag{20}$$

Za tako zadanu plohu funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti dane su formulama:

$$K(u,v) = -\frac{\cos^2 u \sin^2 u}{((v-1)^2\cos^2 u + \sin^2 u + \sin^4 u)^2}, \tag{21}$$

$$H(u,v) = \frac{(v-1)(1+(2+\cos^2 2u)\sin^2 u)}{2((v-1)^2\cos^2 u + \sin^2 u \sin^4 u)^{3/2}}. \tag{22}$$



Slika 5: Na slici su za konoid s parametrizacijom (20), za područje $(0,2\pi)\times(-2,1)$, dani sljedeći prikazi:
(a) Ploha obojana bojom $Hue(GZ)$.
(b) Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti (21).
(c) Ploha obojana bojom $Hue(SZ)$.
(d) Graf funkcije srednje zakrivljenosti (22).

Pravac paralelan s osi x ($v=1$, $u\in\mathbb{R}$) singularna je linija plohe s parametrizacijom (20). To je dvostruki pravac ove plohe i u svakoj njegovoj točki postoje dvije tangencijalne ravnine. U tim točkama funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti nisu definirane, što se jasno vidi na njihovim grafovima (slika 5b i 5d).

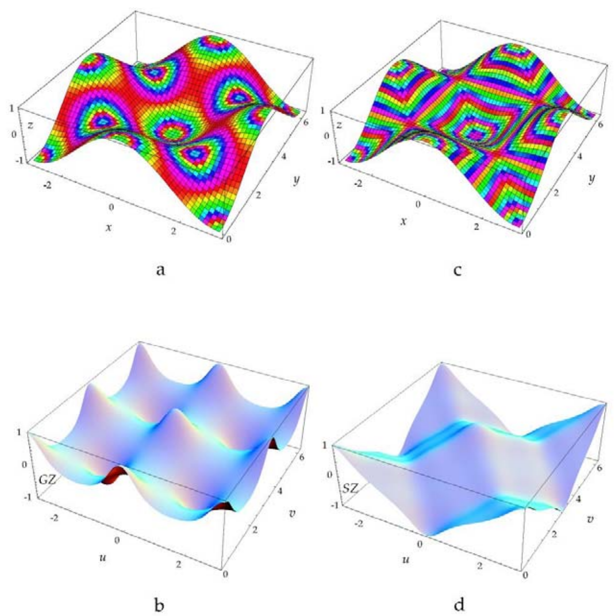
Primjer 4. Regularna ploha dana je parametrizacijom:

$$(u,v) \mapsto (u,v,\cos u \cos v), \qquad (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{23}$$

Njezine funkcije Gaussove i srednje zakrivljenosti dane su formulama:

$$K(u,v) = -\frac{2(\cos 2u + \cos 2v)}{(\cos 2u \cos 2v - 3)^2}, \tag{24}$$

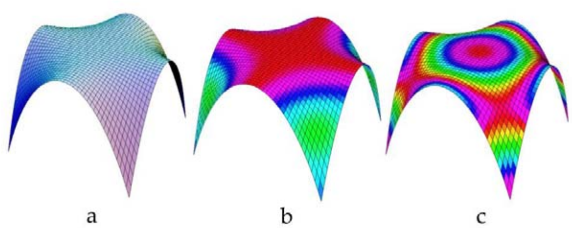
$$H(u,v) = \frac{2\cos u \cos v(\cos 2u + \cos 2v - 6)}{(6-2\cos 2u \cos 2v)^{3/2}}. \tag{25}$$



Slika 6: Na slici su za plohu s parametrizacijom (23), za područje $(-\pi,\pi)\times(0,2\pi)$, dani sljedeći prikazi:
(a) Ploha obojana bojom $Hue(GZ)$.
(b) Graf funkcije Gaussove zakrivljenosti (24).
(c) Ploha obojana bojom $Hue(SZ)$.
(d) Graf funkcije srednje zakrivljenosti (25).

Primjer 5. Ploha je dana parametrizacijom

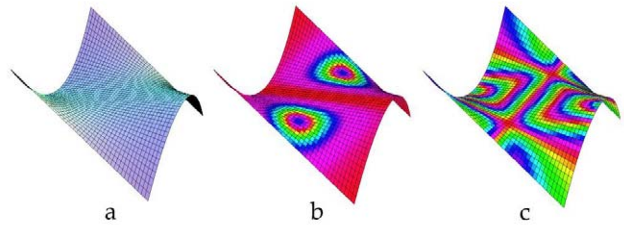
$$(u,v)\mapsto(u,v,-\cosh uv),$$
$$(u,v)\in(-1,1)\times(-1,1). \quad (26)$$



Slika 7:
(a) Ploha s parametrizacijom (26).
(b) Ploha (26) obojana bojom $Hue(GZ)$.
(c) Ploha (26) obojana bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 6. Parabolički konoid 3. reda (detaljno obrađen u radu [3]) dan je parametrizacijom

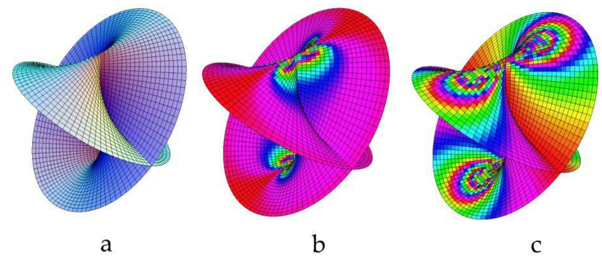
$$(u,v)\mapsto(u,v,0.5(v^2-1)(3-u))$$
$$(u,v)\in(1,5)\times(-2,2). \quad (27)$$



Slika 8:
(a) Ploha s parametrizacijom (27).
(b) Ploha (27) obojana bojom $Hue(GZ)$.
(c) Ploha (27) obojana bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 7. Plückerov konoid 4. reda dan je parametrizacijom

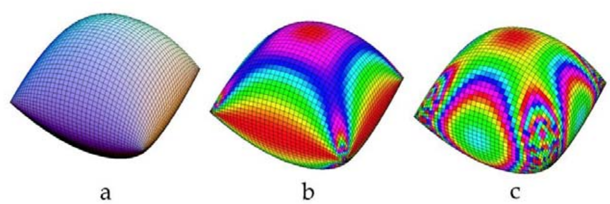
$$(u,v)\mapsto(v\cos u, v\sin u, 2\sin u),$$
$$(u,v)\in(0,2\pi)\times(-2,2). \quad (28)$$



Slika 9:
(a) Ploha s parametrizacijom (28).
(b) Ploha (28) obojana bojom $Hue(GZ)$.
(c) Ploha (28) obojana bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 8. Ploha je dana parametrizacijom

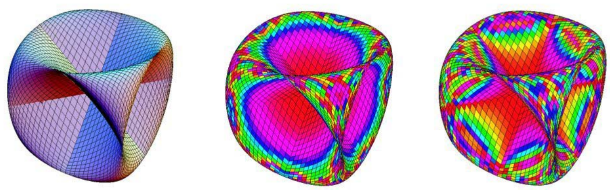
$$(u,v)\mapsto(\sin u,\sin v,\cos u\cos v),$$
$$(u,v)\in[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]. \quad (29)$$



Slika 10:
(a) Ploha s parametrizacijom (29).
(b) Ploha (29) obojana bojom $Hue(GZ)$.
(c) Ploha (29) obojana bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 9. Ploha je dana parametrizacijom

$$(u,v) \mapsto (\sin u, \sin v, \sin(u+v)),$$
$$(u,v) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi). \tag{30}$$

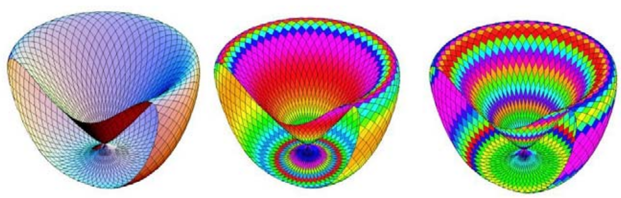


a b c

Slika 11:
(a) Ploha s parametrizacijom (30).
(b) Ploha (30) obojana bojom $Hue(GZ)$.
(c) Ploha (30) obojana bojom $Hue(SZ)$.

Primjer 10. Ploha je dana parametrizacijom

$$(u,v) \mapsto (\sin u + \cos v, \cos u + \sin v, \cos(u+v) + \sin(u+v)),$$
$$(u,v) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi). \tag{31}$$



a b c

Slika 12:
(a) Dio plohe s parametrizaciojom (31) ograničen ravninom $y = -1$.
(b) Dio plohe (31) obojan bojom $Hue(GZ)$.
(c) Dio plohe (31) obojan bojom $Hue(SZ)$.

Literatura

[1] BEBAN-BRKIĆ J., 2003, *Matematika IV - Diferencijalna geometrija*, web skripta (www.grad.hr/itproject_math/Links/jelena/index.html)

[2] BENIĆ V., GORJANC S., 2004, ”Visualizations of Gaussian and Mean Curvatures by Using *Mathematica* and *webMathematica*”, Proc. of 6th Internacional Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary

[3] FILIPAN S., GORJANC S., KVASNIČKA H., 2000, “Natkrivanje paraboličkim konoidom”, KoG, No. 5, pp. 57-64.

[4] GORJANC S., 2003, *Pravčaste plohe*, web skripta (www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/pravcaste/pravcaste.html)

[5] Goetz A., 1970, *Introduction to Differential Geometry.* Addison–Wesley, Reading, Massachusetts

[6] GRAY A., 1998, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.* CRC Press, Boca Raton

[7] HAK S., UROŠ M., 2004, *Gaussova i srednja zakrivljenost ploha - Mathematica vizualizacije*, studentski rad nagrađen Rektorovom nagradom, Građevinski fakultet, Zagreb

[8] Marković Ž., 1952, *Uvod u višu analizu*, II dio, Školska knjiga, Zagreb

[9] Suljagić S., 2000, *Matematika II*,web skripta (www.grad.hr/nastava/matematika/mat2)

[10] Wolfram S., 1993, *Mathematica* - Second Edition, Addison–Wesley

[11] Wolfram S., 2004, *MathWorld*, web enciklopedija (http://mathworld.wolfram.com/)

Sanja Hak
e-mail: sanja.hak@hi.htnet.hr
Sonja Gorjanc
e-mail: sgorjanc@grad.hr
Mario Uroš
e-mail: mario.uros@du.htnet.hr
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb