KoG

BROJ 7
ZAGREB, 2003

ZNANSTVENO - STRUČNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPJUTORSKU GRAFIKU

KoG

Offical publication of the Croatian Society for Constructive Geometry nad Computer Graphics publishes scientific and professional papers from the fields of geometry, appplied geometry and computer graphics.

Founder and Publisher

Croatian Society for Constructive Geometry nad Computer Graphics

Editors

Sonja Gorjanc, Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Croatia
Jelena Beban-Brkić, Faculty of Geodesy, University of Zagreb, Croatia

Editorial Board

Vlasta Ščurić - Čudovan, Faculty of Geodesy, University of Zagreb, Croatia
Domen Kušar, Faculty of Architecture, University of Ljubljana, Slovenia
Miljenko Lapaine, Faculty of Geodesy, University of Zagreb, Croatia
Emil Molnár, Institute of Mathematics, Tehnical University of Budapest, Hungary
Lidija Pletenac, Faculty of Civil Engineering, University of Rijeka, Croatia
Hellmuth Stachel, Institute of Geometry, Tehnical University of Vienna, Austria
Nikoleta Sudeta, Faculty of Architecture, University of Zagreb, Croatia
Vlasta Szirovicza, Faculty of Civil Engineering, University of Zagreb, Croatia
Gunter Weiss, Institute of Geometry, Tehnical University of Dresden, Germany

Design

Miroslav Ambruš-Kiš

Layout

Sonja Gorjanc

Cover Illustration

Jelena Beban - Brkić, *Rampart of Arg-e-Bam*, photograph

Print

"O-tisak", d.o.o., Zagreb

URL address

http://www.hdgg.hr/kog

Edition

250

Published annually

Guide for authors

Please see the page 34.

KoG is cited in: Mathematical Review, MathSci, Zentralblatt für Mathematik

---

This issue has been financially supported by The Ministry of Science and Technology of the Republic of Croatia.

ISSN 1331–1611

KoG

No. 7
Zagreb, 2003

SCIENTIFIC AND PROFESSIONAL JOURNAL OF
CROATIAN SOCIETY FOR CONSTRUCTIVE GEOMETRY AND COMPUTER GRAPHICS

CONTENTS

ANNIVERSARIES

Željka Milin-Šipuš, Mirko Polonijo: Rajko Draščić (1923 - 1972) 3

ORIGINAL SCIENTIFIC PAPERS

Vladimir Volenec: Pascal-Brianchon Sets in Pappian Projective Planes 5

REVIEWS

Josip Dvornik: Computer Methods for Problem Solving 19

PROFESSIONAL PAPERS

Jasna Kos-Modor, Ema Jurkin: The Layer 25

Nikoleta Sudeta, Ivan Petrunić: Vaults as Parts of Sphere in Orthogonal Axonomerty 29

ISSN 1331–1611

KoG

BROJ 7
Zagreb, 2003

ZNANSTVENO-STRUČNI ČASOPIS
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA KONSTRUKTIVNU GEOMETRIJU I KOMPJUTORSKU GRAFIKU

SADRŽAJ

OBLJETNICE

Željka Milin-Šipuš, Mirko Polonijo: Rajko Draščić (1923 - 1972) 3

IZVORNI ZNANSTVENI RADOVI

Vladimir Volenec: Pascal-Brianschonovi skupovi u Pappusovim projektivnim ravninama 5

PREGLEDNI RADOVI

Josip Dvornik: Metode rješavanja problema pomoću računala 19

STRUČNI RADOVI

Jasna Kos-Modor, Ema Jurkin: Sloj 25

Nikoleta Sudeta, Ivan Petrunić: Svodovi kao dijelovi kugline plohe u ortogonalnoj aksonometriji 29

ŽELJKA MILIN-ŠIPUŠ, MIRKO POLONIJO

Rajko Draščić (1923 - 1972)

u povodu osamdesete godišnjice rođenja

Ove se godine navršava osamdeseta godišnjica od rođenja značajnog hrvatskog geometričara Rajka Draščića čiju su tridesetgodišnjicu prerane smrti članovi Geometrijskog seminara PMF-Matematičkog odjela i drugi njegovi štovatelji obilježili prošle godine. Na temelju prigodnog izlaganja koje smo tada održali nastao je i ovaj tekst. Njime želimo potsjetiti na život i djelo Rajka Draščića koji je ostavio zapažen trag u našoj matematičkoj zajednici. Ističemo kako su o radu i životu R. Draščića, u povodu njegove smrti, nadahnuto i iscrpno pisali Krešo Horvatić i Sibe Mardešić - tekst je objavljen u Glasniku matematičkom t. 8 (28) iz 1973. (str. 150.-152.). U istom broju Glasnika, na str.149. objavljen je i govor što ga je, danas pokojni, Stanko Bilinski održao nad odrom R. Draščića, dirljivo svjedočenje oproštaja učitelja od iznenada preminula učenika.

Rajko Draščić rođen je 29. lipnja 1923. u Buzetu, koji je tada bio u sastavu Italije, pa obitelj iz političkih razloga seli 1927. u Kastav. Imao je mlađeg brata Slavka i sestru Neviu. Osnovnu školu i gimnaziju polazio je na Sušaku i tamo ga je 1936. godine, kao učenika trećeg razreda klasičnog odjeljenja Sušačke gimnazije, prvi puta susreo i zapazio profesor Bilinski koji će mu predavati matematiku sve do mature. Matematika će ih povezivati i kasnije, Stanko Bilinski će biti Rajku Draščiću i sveučilišni profesor i mentor doktorske teze i predstojnik zavoda. Maturiravši 1941., R. Draščić zbog rata prekida daljnje školovanje, a nakon kapitulacije Italije stupa u Prvu prekomorsku brigadu i sudjeluje u borbama za oslobođenje Korčule. Biva zarobljen od strane Nijemaca i odveden u zarobljeništvo u Njemačku, gdje će u koncentracijskom logoru dočekati kraj svjetskog rata.

U jesen 1945., kao dvadesetdvogodišnjak nastavlja svoje školovanje, upisuje na tadašnjem Filozofskom fakultetu studij matematike i fizike, točnije tzv. prvu grupu, koju čine pod A) Teorijska matematika, pod B) Racionalna mehanika i teorijska fizika, te pod C) Eksperimentalna fizika. Diplomirao je u prvom mogućem roku, već u srpnju 1949. Tijekom studija isticao se posebice svojim izrazitim zanimanjem za geometrijske kolegije, pa će geometrija ostati osnovnim poljem i odrednicom njegovoga matematičkog života.

Na jesen 1949. dobiva poziciju asistenta u Geometrijskom zavodu (tada Geometrijski institut), a nakon doktoriranja 1965. godine biva iduće 1966. izabran za docenta. Preminuo je iznenada 30. svibnja 1972., uputivši se tog utorka na uobičajeni popodnevni izlet biciklom u zagrebačku okolicu. Tri dana kasnije, umjesto redovitog sastanka Geometrijskog seminara, na kojem je Rajko Draščić trebao biti predavač, bio je njegov ispraćaj na Mirogoju i pokop na Rijeci.

Znanstveni radovi Rajka Draščića su malobrojni, kao posljedica njegove visoke samokritičnosti i težnje k perfekcionizmu. Glavnina pripada diferencijalnoj geometriji, području koje je Rajko Draščić specijalizirao za vrijeme boravka na Moskovskom državnom univerzitetu od 1959. do 1961. na Katedri za geometriju pod vodstvom P. K. Raševskog. Po povratku će nastaviti u Moskvi započeta istraživanja u diferencijalnoj geometriji, radom na doktorskoj disertaciji, koju uspješno brani četiri godine kasnije, i koju želimo nešto detaljnije prikazati.

U svojoj disertaciji "*O nekim specijalnim mrežama na plohi*" Rajko Draščić je istražio područje vezano uz diferencijalnu geometriju ploha u trodimenzionalnom realnom euklidskom prostoru R^3. Na plohama u R^3 postoji cijeli niz istaknutih krivulja, kao npr. crte krivine, geodetske krivulje, asimptotske krivulje, a R. Draščić se bavio proučavanjem poopćenja ovih posljednjih.

Asimptotske krivulje su takve krivulje plohe duž kojih je normalna zakrivljenost plohe jednaka nuli. Pri tome je normalna zakrivljenost plohe u nekoj danoj točki i u nekom danom smjeru jednaka, do na predznak, zakrivljenosti krivulje na plohi koja je dobivena presjecanjem plohe ravninom određenom danim smjerom i vektorom normalnog jediničnog polja plohe u danoj točki. S. L. Creanga je 1925. godine u radu "*Directions cyclifiablement conjuguées– Courbes à courbure normale constatne*" istražio krivulje konstantne normalne zakrivljenosti, a R. Draščić te rezultate generalizira proučavajući krivulje duž kojih je normalna zakrivljenost plohe jednaka nekoj unaprijed zadanoj skalarnoj funkciji F, tzv. F–krivulje. Funkcija F, osim što je dovoljno puta diferencijabilna, zadovoljava samo uvjet $k_1 \leq F \leq k_2$, koji je nužan uvjet egzistencije F–krivulja. Pritom su sa k_1, k_2 označene glavne zakrivljenosti plohe koje su ekstremi normalne zakrivljenosti. Skup svih F–krivulja tvori mrežu plohe, tzv. F–mrežu, koja je opisana diferencijalnom jednadžbom. Kao i za asimptotske mreže, tako i za F–mreže vrijedi da je mreža crta krivine njena bisektorna mreža tj. svaka F–krivulja raspolavlja kut između glavnih smjerova. U disertaciji se proučavaju i posebni slučajevi F– mreža: H–mreža, koja je jedina ortogonalna mreža, harmonijska mreža $F = \dfrac{K}{H}$ (K i H su Gaussova i srednja zakrivljenost plohe), te F–mreža kao parametarska mreža.

Kao poopćenje pojma konjugiranih smjerova plohe, dakle smjerova koji poništavaju drugu fundamentalnu formu plohe, uvodi se pojam F–konjugiranih smjerova. Klasični je rezultat da se smjerovi konjugirani smjerovima zadane krivulje c mogu geometrijski okarakterizirati kao izvodnice razvojne plohe koja je ovojnica tangencijalnih ravnina krivulje c. Kod F–konjugiranih smjerova je dobiven sljedeći rezultat: karakteristike (krivulje duž kojih ovojnica dira pojedinu plohu neke familije) ovojnice familije sfera varijabilnog radijusa $1/F$ (ovojnica je kanalna ploha) koje diraju polaznu plohu duž neke krivulje c, su kružnice čije tangente u diralištu sa plohom imaju smjer koji je F–konjugiran smjeru krivulje c. Osim toga, ravnine karakteristika (kružnica) su okomite na plohu ako i samo ako je funkcija F konstantna, a to su upravo one F-krivulje koje razmatra S. L. Creanga.

Nadalje, R. Draščić proučava i ponašanje F–mreža pri konformnom i sfernom preslikavanju ploha. Kako konformno preslikavanje između dviju ploha crte krivine preslikava u crte krivine i čuva kut među krivuljama, to se F–mreža jedne plohe preslikava u F'–mrežu druge plohe, koja je opisana istim mrežnim kutom, ali ne i istom skalarnom funkcijom F (ta funkcija ovisi o Gaussovoj i srednjoj zakrivljenosti plohe). Odatle slijedi da postoji samo jedna F–mreža koja se pri konformnom preslikavanju preslika opet u F-mrežu.

Kod sfernog preslikavanja je situacija drugačija: kao prvo, na sferi je pojam F–mreže besmislen, jer je normalna zakrivljenost sfere u svakoj njenoj točki i u svakom smjeru obrnuto proporcionalna radijusu sfere, i druge vrijednosti ne može poprimiti. Zato se postavlja pitanje: Kada F–mreža pri sfernom preslikavanju prelazi u mrežu s istim kutom među krivuljama, odnosno u ortogonalnu mrežu? Dobiveno je da jedino asimptotska i harmonijska mreža zadržavaju isti mrežni kut, a u ortogonalnu mrežu se preslikava F–mreža za koju je $F = \dfrac{HK}{2H^2 - K}$. Nadalje je pokazano i da su jedine plohe kod kojih je sačuvan mrežni kut svake F–mreže, minimalne plohe.

Uz zahtjev da F–mreža bude čebiševska ili geodetska dobiva se da funkcija F mora zadovoljavati sustav linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Kako su ti sustavi rješivi samo uz neke uvjete, to na plohama ne moraju postojati navedene mreže. No, analizirajući spomenute uvjete dobiva se da npr. sve cilindrične i rotacijske plohe imaju beskonačno mnogo čebiševskih F–mreža, i da sve nedegenerirane kvadrike (isključujući sferu) za koje je $K > 0$ imaju beskonačno mnogo realnih geodetskih F–mreža.

Iz područja diferencijalne geometrije bila su i dva važna dvogodišnja kolegija koja je R. Draščić držao na poslijediplomskom studiju krajem šezdesetih godina: "Diferencijabilna geometrija mnogostrukosti" i "Raslojene mnogostrukosti i koneksija".

Posebno važnim smatramo i cijenimo njegov nastavnički rad na dodiplomskm studiju, u kojem je izvrsno i besprijekorno poučavao matematičke kolegije i djelatno pokazivao kako valja poučavati matematiku. Tako je postao primjer i uzor svojim kolegama i studentima. Na predavanjima je izgarao u beskrajnoj želji da i najmanju sitnicu iznese jasno i nedvosmisleno, uspijevajući prodrijeti i zaintrigirati svakog slušatelja, a na ispitima je bio duboko angažiran, ne propuštajući otkriti i ono čega student nije bio svjestan da zna.

Predavanja su mu bila pomno pripremljena, promišljena, jasno motivirana i dobro koncipirana. Došlo je to do izražaja i 1968. kada je osmislio i predavao na prvoj godini studija matematike novi kolegij (kompromisnog naziva) "Analitička geometrija s linearnom algebrom". Zaokret i pomak izveden s tim kolegijem (tada i dugi niz godina znan studentima kao AGLA), predstavljao je bitnu stepenicu osuvremenjivanja nastave matematike na zagrebačkom Matematičkom odjelu.

Rajko Draščić je aktivno i svesrdno obnašao razne dužnosti u Matematičkom odjelu i Društvu matematičara i fizičara, sudjelovao je na mnogim znanstvenim i stručnim kongresima i skupovima, pisao stručne i popularne tekstove, te redigirao matematičke jedinice za Leksikografski zavod, učinivši i na taj način značajan doprinos matematičkom životu u našoj sredini.

Rajka Draščića su povrh svega resile vrline skromnosti, etičnosti, poštenosti, pravednosti, strogosti, ozbiljnosti, vedrine i srdačnosti i tako ga pamte oni koji su imali sreću biti njegovim prijateljima, kolegama i učenicima.

Original scientific paper
Accepted 24. 11. 2003.

Vladimir Volenec

Pascal-Brianchon Sets in Pappian Projective Planes

Pascal-Brianchon Sets in Pappian Projective Planes

ABSTRACT

It is well-known that Pascal and Brianchon theorems characterize conics in a Pappian projective plane. But, using these theorems and their modifications we shall show that the notion of a conic (or better a Pascal-Brianchon set) can be defined without any use of theory of projectivities or of polarities as usually.

Key words: conic, Pascal set, Pascal-Brianchon set

MSC 2000: 51A30, 51E15

Pascal-Brianschonovi skupovi u Pappusovim projektivnim ravninama

SAŽETAK

Poznato je da Pascalov i Brianchonov teorem karakteriziraju kivulje 2. reda u Pappusovoj projektivnoj ravnini. Međutim, koristeći te teoreme i njihove modifikacije pokazat ćemo da se pojam krivulje 2. reda (ili bolje: pojam Pascal-Brianchonovog skupa) može definirati bez pomoći projektiviteta ili teorije polariteta, kao što se to obično radi.

Ključne riječi: konika, Pascalov skup, Pascal-Brianchonov skup

1 Introduction

We shall operate in a Pappian projective plane of order at least 5 and characteristic other then 2.

A *simple 6-point* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ is a set of six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 taken in this cyclic order in which any two consecutive points and any other point are non-collinear. We say that this 6-point is a *Pascalian 6-point* and we write $P(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$ if $A_1A_2 \cap A_4A_5$, $A_2A_3 \cap A_5A_6$ and $A_3A_4 \cap A_6A_1$ are collinear points.

The Pappus theorem can be stated in the following form:

If A_1, A_3, A_5 resp. A_2, A_4, A_6 are collinear points then $P(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6)$.

Now, we can prove (see [2]):

Theorem 1.1
$P(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6) \implies P(A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4},A_{i_5},A_{i_6})$, where $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6)$ is any permutation of $\{1,2,3,4,5,6\}$.

It is well-known that Pappus theorem implies the Desargues theorem. More precisely Pappus theorem resp. Desargues theorem is equivalent to the statement of Theorem 1.1 for $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6) = (1,2,3,4,6,5)$ resp. $(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6) = (1,2,3,6,5,4)$ (see [1], [2]).

By the following definitions we shall generalize the notion of a simple 6-point. Let $\mathtt{I}$ be the relation of incidence.

A *one-fold specialized simple 6-point* $A_1a_1A_1A_2A_3A_4A_5$ is a set of five points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 taken in this cyclic order in which any three points are non-collinear, and of a line a_1 such that $A_i \mathtt{I} a_1$ iff $i = 1$. We say that this 6-point is a *Pascalian one-fold specialized 6-point* and we write $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ if $a_1 \cap A_3A_4$, $A_1A_2 \cap A_4A_5$, $A_2A_3 \cap A_5A_1$ are collinear points.

A *two-fold specialized simple 6-point* $A_1a_1A_1A_2a_2A_2A_3A_4$ *of type 1* is a set of four points A_1, A_2, A_3, A_4 taken in this cyclic order in which any three points are non-collinear, and of two lines a_1, a_2 such that $A_i \mathtt{I} a_j$ iff $i = j$. We say that this 6-point is a *Pascalian two-fold specialized 6-point of type 1* and we write $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3,A_4)$ if $a_1 \cap A_2A_3$, $A_1A_2 \cap A_3A_4$, $a_2 \cap A_4A_1$ are collinear points.

A *two-fold specialized simple 6-point* $A_1a_1A_1A_2A_3a_3A_3A_4$ *of type 2* is a set of four points A_1, A_2, A_3, A_4 taken in this cyclic order in which any three points are non-collinear, and of two lines a_1, a_3 such that $A_i \mathtt{I} a_j$ iff $i = j$. We say that this 6-point is a *Pascalian two-fold specialized 6-point of type 2* and we write $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3a_3A_3, A_4)$ if $a_1 \cap a_3$, $A_1A_2 \cap A_3A_4$, $A_2A_3 \cap A_4A_1$ are collinear points.

A *three-fold specialized simple 6-point* $A_1a_1A_1A_2a_2A_2A_3a_3A_3$ is a set of three non-collinear points A_1, A_2, A_3 and of three non-concurrent lines a_1, a_2, a_3 such that $A_i \mathtt{I} a_j$ iff $i = j$.We say that this 6-point is a *Pascalian three-fold specialized 6-point* and we write $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3a_3A_3)$ if $a_1 \cap A_2A_3$, $A_1A_2 \cap a_3$, $a_2 \cap A_3A_1$ are collinear points.

Now, we can prove some theorems about Pascalian 6-points.

Theorem 1.2
$P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \Longrightarrow P(A_1a_1A_1, A_4, A_3, A_2, A_5)$

Proof. Let $a_1 \cap A_3A_4 = U$, $A_1A_2 \cap A_4A_5 = V$, $A_2A_3 \cap A_5A_1 = W$ be collinear points (Fig. 1). We must prove that the points $a_1 \cap A_3A_2 = U'$, $A_1A_4 \cap A_2A_5 = V'$, $A_4A_3 \cap A_5A_1 = W'$ are collinear. Consider two triangles with the vertices U, A_1, A_4 resp. W, A_2, A_5. As the lines UW, A_1A_2, A_4A_5 pass through the point V, so by Desargues theorem the points $A_1A_4 \cap A_2A_5 = V'$, $A_4U \cap A_5W = W'$, $UA_1 \cap WA_2 = U'$ are collinear.

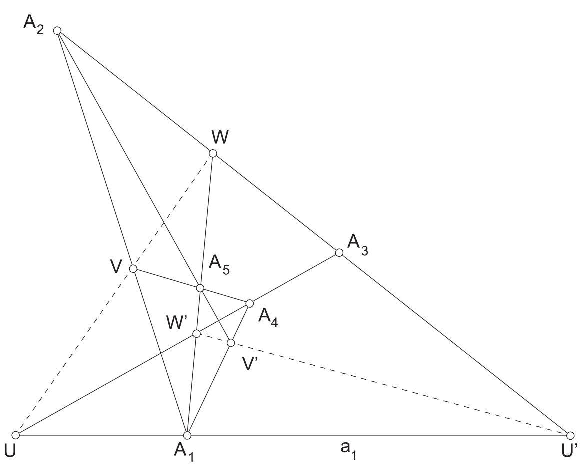


Figure 1

Theorem 1.3
$P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \Longrightarrow P(A_1a_1A_1, A_2, A_4, A_3, A_5)$

Proof. We must prove that the collinearity of points $a_1 \cap A_3A_4 = U$, $A_1A_2 \cap A_4A_5 = V$, $A_2A_3 \cap A_5A_1 = W$ implies the collinearity of points $a_1 \cap A_4A_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3A_5 = V'$, $A_2A_4 \cap A_5A_1 = W'$ (Fig. 2). By Pappus theorem we have $P(A_2, A_4, A_3, A_5, W, V)$, i.e. $A_2A_4 \cap A_5W = W'$, $A_4A_3 \cap WV = U$, $A_3A_5 \cap VA_2 = V'$ are collinear points.

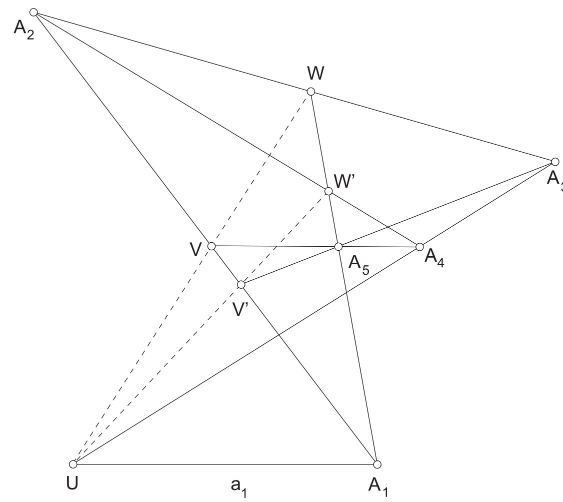


Figure 2

Theorem 1.4
$P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \Longrightarrow P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_5, A_4)$

Proof. $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ implies by Theorem 1.2 $P(A_1a_1A_1, A_4, A_3, A_2, A_5)$, i.e. $P(A_1a_1A_1, A_5, A_2, A_3, A_4)$. But, Theorem 1.3 implies then $P(A_1a_1A_1, A_5, A_3, A_2, A_4)$ and finally Theorem 1.2 implies $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_5, A_4)$.

Obviously, Theorems 1.2, 1.3 and 1.4 imply:

Theorem 1.5
$P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \Longrightarrow P(A_1a_1A_1, A_{i_2}, A_{i_3}, A_{i_4}, A_{i_5})$, *where* (i_2, i_3, i_4, i_5) *is any permutation of* $\{2, 3, 4, 5\}$

Further, we have:

Theorem 1.6
$P(A_1a_1A_1, A_2, A_3a_3A_3, A_4) \Longleftrightarrow P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2, A_4)$.

Proof. We must prove that $a_1 \cap a_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3A_4 = V$, $A_2A_3 \cap A_4A_1 = W$ are collinear points iff $a_1 \cap A_3A_2 = U'$, $A_1A_3 \cap A_2A_4 = V'$, $a_3 \cap A_4A_1 = W'$ are collinear points (Fig. 3). If the points U, V, W are collinear, then the lines A_3A_4, UW, A_1A_2 pass through the point V and according to Desargues theorem the points $UA_1 \cap WA_2 = U'$, $A_1A_3 \cap A_2A_4 = V'$, $A_3U \cap A_4W = W'$ are collinear. Conversely, if U', V', W' are collinear points, then the lines A_2A_4, $U'W'$, A_1A_3 pass through the point V' and Desargues theorem implies the collinearity of points $U'A_1 \cap W'A_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3A_4 = V$, $A_2U' \cap A_4W' = W$.

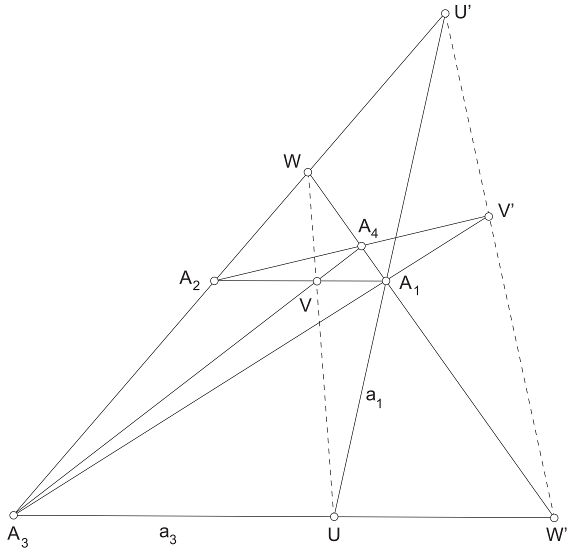


Figure 3

Theorem 1.7
$P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3,A_4) \Longrightarrow P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_4,A_3)$.

Proof. According to Theorem 1.6 we have $P(A_1a_1A_1,A_3,A_2a_2A_2,A_4)$, i.e. $P(A_1a_1A_1,A_4,A_2a_2A_2,A_3)$ and then Theorem 1.6 implies $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_4,A_3)$.

2 Ordinary Pascal sets

Let A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 be five points such that any three of them are non-collinear. An *ordinary Pascal set* determined by A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 is the set of points $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) = \{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\} \cup \{X \mid P(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,X)\}$.

In virtue of Theorem 1.1 we have $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) = p(A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4},A_{i_5})$, where (i_1,i_2,i_3,i_4,i_5) is any permutation of $\{1,2,3,4,5\}$.

Now, we have a theorem proved in [2].

Theorem 2.1
$p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) = p(A_{1'},A_{2'},A_{3'},A_{4'},A_{5'})$ for any different points $A_{1'},A_{2'},A_{3'},A_{4'},A_{5'} \in p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$, i.e. an ordinary Pascal set is uniquely determined by any five different of its points.

Theorem 2.1 and the definition of ordinary Pascal set imply that any three different points of an ordinary Pascal set are non-collinear.

A line a_1 such that $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ holds is said to be a *tangent of the ordinary Pascal set $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at its point A_1*. According to Theorem 1.5 a_1 is a tangent of $p(A_1,A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4},A_{i_5})$ at the point A_1, where (i_2,i_3,i_4,i_5) is any permutation of $\{2,3,4,5\}$.

Let us prove:

Theorem 2.2
There is one and only one tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at the point A_1.

Proof. Let $V = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $W = A_2A_3 \cap A_5A_1$. A line a_1 is a tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at the point A_1 iff $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ holds, i.e. iff $A_1 \mathtt{I} a_1$ and iff the points $U = a_1 \cap A_3A_4$, V, W are collinear, i.e. iff $a_1 = A_1U$, where $U = A_3A_4 \cap VW$ (Fig. 1).

Theorem 2.3
Let $A_{5'} \in p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) \setminus \{A_1,A_2,A_3,A_4\}$. A line a_1 is the tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at the point A_1 iff a_1 is the tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_{5'})$ at the point A_1.

Proof. The statment is trivial if $A_{5'} = A_5$.
Let further $A_{5'} \neq A_5$. In virtue of Theorem 1.1 $A_{5'} \in p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5) \setminus \{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ implies $A_5 \in p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_{5'}) \setminus \{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ and we have $P(A_1,A_2,A_{5'},A_4,A_5,A_3)$, i.e. the points $A_1A_2 \cap A_4A_5 = U$, $A_2A_{5'} \cap A_5A_3 = V$, $A_{5'}A_4 \cap A_3A_1 = W$ are collinear (Fig. 4).

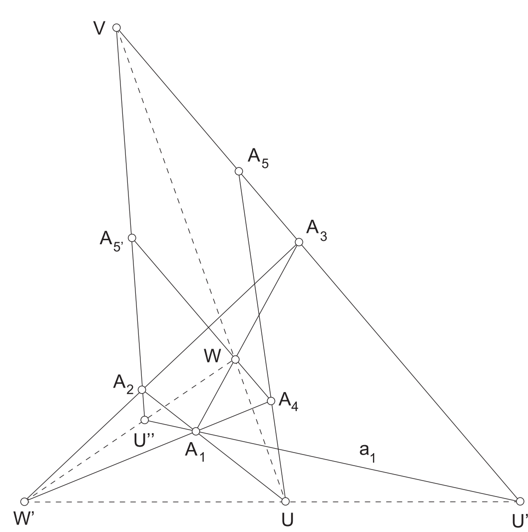


Figure 4

Let a_1 be the tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at the point A_1, i.e. let $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ holds. Then by Theorem 1.4 we have $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_5,A_4)$, i.e. $a_1\cap A_3A_5=U'$, $A_1A_2\cap A_5A_4=U$, $A_2A_3\cap A_4A_1=W'$ are collinear points. By Pappus theorem we have $P(U',A_1,A_3,A_2,V,U)$, i.e. $U'A_1\cap A_2V=U''$, $A_1A_3\cap VU=W$, $A_3A_2\cap UU'=W'$ are collinear points. But, this means that $a_1\cap A_2A_{5'}=U''$, $A_1A_3\cap A_{5'}A_4=W$, $A_3A_2\cap A_4A_1=W'$ are collinear points, i.e. we have $P(A_1a_1A_1,A_3,A_2,A_{5'},A_4)$, wherefrom by Theorem 1.5 $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_{5'})$ follows, i.e. a_1 is the tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_{5'})$ at the point A_1. The proof of the converse follows by the substitution $A_5\leftrightarrow A_{5'}$.

On the basis of Theorem 2.3 we can prove:

Theorem 2.4
Let $A_{2'},A_{3'},A_{4'},A_{5'}\in p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)\setminus\{A_1\}$ be four different points. A line a_1 is the tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at the point A_1 iff a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{2'},A_{3'},A_{4'},A_{5'})$ at the point A_1, i.e. the tangent of an ordinary Pascal set at anyone of its points is uniquely determined.

Proof. By Theorem 2.1 $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=P(A_1,A_{2'},A_{3'},A_{4'},A_{5'})$. At least one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$, $A_{4'}$, $A_{5'}$ is different from the points A_2, A_3, A_4. Let be e.g. $A_{5'}\neq A_2,A_3,A_4$. From $A_{5'}\in p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ by Theorem 2.1 $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)=p(A_1,A_{5'},A_2,A_3,A_4)$ follows and by Theorem 2.3 a_1 is the tangent of $p(A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ at the point A_1 iff a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{5'},A_2,A_3,A_4)$ at the point A_1. At least one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$, $A_{4'}$ is different from the points A_2, A_3. Let be e.g. $A_{4'}\neq A_2,A_3$. From $A_{4'}\in p(A_1,A_{5'},A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_{5'},A_2,A_3\}$ by Theorem 2.1 $p(A_1,A_{5'},A_2,A_3,A_4)=p(A_1,A_{4'},A_{5'},A_2,A_3)$ follows and by Theorem 2.3 a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{5'},A_2,A_3,A_4)$ at the point A_1 iff a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{4'},A_{5'},A_2,A_3)$ at the point A_1. At least one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$ is different from the point A_2. Let be e.g. $A_{3'}\neq A_2$. From $A_{3'}\in p(A_1,A_{4'},A_{5'},A_2,A_3)\setminus\{A_1,A_{4'},A_{5'},A_2\}$ by Theorem 2.1 $p(A_1,A_{4'},A_{5'},A_2,A_3)=p(A_1,A_{3'},A_{4'},A_{5'},A_2)$ follows and by Theorem 2.3 a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{4'},A_{5'},A_2,A_3)$ at the point A_1 iff a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{3'},A_{4'},A_{5'},A_2)$ at the point A_1. Finally, from $A_{2'}\in p(A_1,A_{3'},A_{4'},A_{5'},A_2)\setminus\{A_1,A_{3'},A_{4'},A_{5'}\}$ by Theorem 2.3 follows that a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{3'},A_{4'},A_{5'},A_2)$ at the point A_1 iff a_1 is the tangent of $p(A_1,A_{2'},A_{3'},A_{4'},A_{5'})$ at the point A_1.

If a is the tangent of an ordinary Pascal set p at its point A, then we say that AaA is a *flag* of p.

Theorem 2.5
If $A_1a_1A_1$ is a flag of an ordinary Pascal set p, then A_1 is the unique point such that $A_1\in p$ and $A_1\mathtt{I}a_1$.

Proof. Suppose that there is a point A_2 such that $A_2\neq A_1$; $A_2\mathtt{I}a_1$ and $A_2\in p$. But p contains at least five different points and there are three different points $A_3,A_4,A_5\in p\setminus\{A_1,A_2\}$. Then we have $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ which contradicts with $A_2\mathtt{I}a_1$.

3 One-fold specialized Pascal sets

Let A_1, A_2, A_3, A_4 be four points such that any three of them are non-collinear and let a_1 be a line such that $A_i\mathtt{I}a_1$ iff $i=1$. An *one-fold specialized Pascal set* determined by the flag $A_1a_1A_1$ and the points A_2, A_3, A_4 is the set of points $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}\cup\{X\mid P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,X)\}$.

According to Theorem 1.5 we have $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)=p(A_1a_1A_1,A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4})$, where (i_2,i_3,i_4) is any permutation of $\{2,3,4\}$.

Theorem 3.1
$p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)=p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})$ for any point $A_{4'}\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3\}$.

Proof. If $A_{4'}=A_4$, the statement is trivial. Let be further $A_{4'}\neq A_4$. As $A_{4'}\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, so we have $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_{4'})$, wherefrom by Theorem 1.4 $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'},A_4)$ follows, i.e. $A_4\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_{4'}\}$ holds. Let $X\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$, i.e, let $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4,X)$ holds, and let $X\neq A_{4'}$. It is necessary to prove $X\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_{4'}\}$, i.e. $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'},X)$. Therefore, because of Theorem 1.5 we must prove that $P(A_1a_1A_1,A_2,A_4,A_3,A_{4'})$, $P(A_1a_1A_1,A_2,A_4,A_3,X)$ and $A_{4'}\neq X$ imply $P(A_1a_1A_1,A_2,X,A_3,A_{4'})$. But, the first two hypotheses mean that $a_1\cap A_4A_3=U$, $A_1A_2\cap A_3A_{4'}=V$, $A_2A_4\cap A_{4'}A_1=W$ resp. $a_1\cap A_4A_3=U$, $A_1A_2\cap A_3X=V'$, $A_2A_4\cap XA_1=W'$ are collinear points (Fig. 5). Consider two triangles with the vertices W,A_1, U resp. A_2, X, V'. As the lines WA_2, A_1X, UV' pass through the point W' so by Desargues theorem $A_1U\cap XV'=U''$, $UW\cap V'A_2=V$, $WA_1\cap A_2X=W''$ are collinear points. But, $U''=a_1\cap XA_3$, $V=A_1A_2\cap A_3A_{4'}$, $W''=A_2X\cap A_{4'}A_1$ and we have $P(A_1a_1A_1,A_2,X,A_3,A_{4'})$. On the same manner (by the substitution $A_4\leftrightarrow A_{4'}$) we can prove that $X\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_{4'}\}$ and $X\neq A_4$ imply $X\in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$.

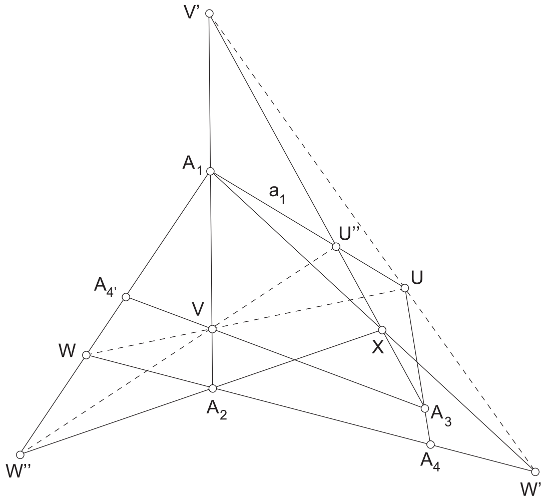


Figure 5

Theorem 3.2
$p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4) = p(A_1a_1A_1,A_{2'},A_{3'},A_{4'})$ for any different points $A_{2'},A_{3'},A_{4'} \in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1\}$, i.e, an one-fold specialized Pascal set is uniquely determined by its flag $A_1a_1A_1$ and any three of its points, which are mutually different and different from A_1.

Proof. At least one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$, $A_{4'}$ is different from the points A_2, A_3. Let be e.g. $A_{4'} \neq A_2,A_3$. From $A_{4'} \in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3\}$ by Theorem 3.1 $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4) = p(A_1a_1A_1,A_{4'},A_2,A_3)$ follows. At least one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$ is different from the point A_2. Let be e.g. $A_{3'} \neq A_2$. From $A_{3'} \in p(A_1a_1A_1,A_{4'},A_2,A_3)\setminus\{A_1,A_{4'},A_2\}$ by Theorem 3.1 $p(A_1a_1A_1,A_{4'},A_2,A_3) = p(A_1a_1A_1,A_{3'},A_{4'},A_2)$ follows. Finally, from $A_{2'} \in p(A_1a_1A_1,A_{3'},A_{4'},A_2)\setminus\{A_1,A_{3'},A_{4'}\}$ by Theorem 3.1 $p(A_1a_1A_1,A_{3'},A_{4'},A_2) = p(A_1a_1A_1,A_{2'},A_{3'},A_{4'})$ follows.

Theorem 3.2 and the definition of one-fold specialized Pascal set p determined by the flag AaA imply that any three different points of p are non-collinear and that $X\,\mathtt{I}\,a$ iff $X = A$ for any point $X \in p$.

A line a_2 such that $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3,A_4)$ holds is said to be a *tangent of the one-fold specialized Pascal set $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_2*. According to Theorem 1.7 then a_2 is a tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_4,A_3)$ at the point A_2. The line a_1 is said to be the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_1.

Theorem 3.3
There is one and only one tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_2.

Proof. Let $U = a_1 \cap A_2A_3$, $V = A_1A_2 \cap A_3A_4$. A line a_2 is a tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_2 iff $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3,A_4)$ holds, i.e. iff $U,V,W = a_2 \cap A_4A_1$ are collinear points, i.e. iff $a_2 = A_2W$, where $W = A_4A_1 \cap UV$.

Theorem 3.4
Let be $A_{4'} \in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3\}$. A line a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_2 iff a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})$ at the point A_2.

Proof. The statement is trivial if $A_{4'} = A_4$. Let further $A_{4'} \neq A_4$. By Theorem 1.5 $A_{4'} \in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)\setminus\{A_1,A_2,A_3\}$ implies $A_4 \in p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})\setminus\{A_1,A_2,A_3\}$ and we have $P(A_1a_1A_1,A_4,A_2,A_{4'},A_3)$, i.e. $a_1 \cap A_2A_{4'} = U$, $A_1A_4 \cap A_{4'}A_3 = V$, $A_4A_2 \cap A_3A_1 = W$ are collinear points (Fig. 6). Let a_2 be the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_2, i.e. let $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3,A_4)$ hold. Then by Theorem 1.6 we have $P(A_1a_1A_1,A_3,A_2a_2A_2,A_4)$, i.e. $a_1 \cap a_2 = U'$, $A_1A_3 \cap A_2A_4 = W$, $A_3A_2 \cap A_4A_1 = W'$ are collinear points. Consider the triangles with the vertices A_2, U', A_1 resp. A_3, W, V. The lines A_2A_3, $U'W$, A_1V pass through the point W' and Desargues theorem implies that $U'A_1 \cap WV = U$, $A_1A_2 \cap VA_3 = V''$, $A_2U' \cap A_3W = W''$ are collinear points. But, $U = a_1 \cap A_2A_{4'}$, $V'' = A_1A_2 \cap A_{4'}A_3$, $W'' = a_2 \cap A_3A_1$ and we have $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_{4'},A_3)$, i.e. a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_{4'},A_3) = p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_{4'})$ at the point A_2. The proof of the converse follows by the substitution $A_4 \leftrightarrow A_{4'}$.

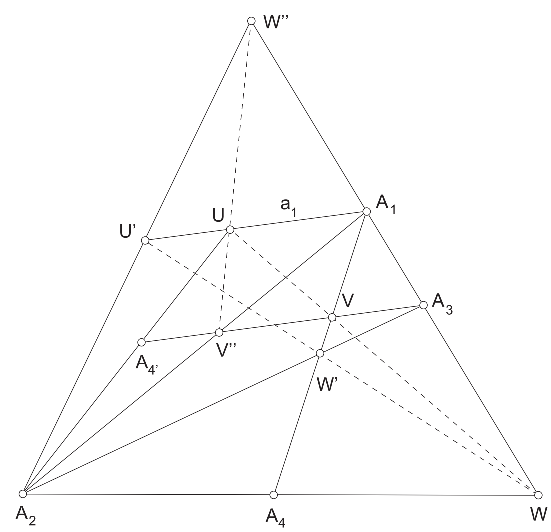


Figure 6

Theorem 3.5
Let $A_{3'}, A_{4'} \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2\}$ *be two different points. A line* a_2 *is the tangent of* $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ *at the point* A_2 *iff* a_2 *is the tangent of* $p(A_1a_1A_1, A_2, A_{3'}, A_{4'})$ *at the point* A_2.

Proof. By Theorem 3.2 $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_{3'}, A_{4'})$. At least one of the points $A_{3'}$, $A_{4'}$ is different from the point A_3. Let be e.g. $A_{4'} \neq A_3$. From $A_{4'} \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$ by Theorem 3.2 $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_{4'}, A_3)$ follows and by Theorem 3.4 a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ at the point A_2 iff a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_{4'}, A_3)$ at the point A_2. From $A_{3'} \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_{4'}, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_{4'}\}$ by Theorem 3.2 it follows that a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_{4'}, A_3)$ at the point A_2 iff a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_{4'}, A_{3'}) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_{3'}, A_{4'})$ at the point A_2.

Theorem 3.6
If a_2 *is the tangent of* $p = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ *at the point* A_2*, then* A_2 *is the unique point such that* $A_2 \in p$ *and* $A_2 \mathtt{I} a_2$.

Proof. We have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$ and therefore $A_i \mathtt{I} a_2$ iff $i = 2$. Suppose that there is a point $A_5 \in p \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ such that $A_5 \mathtt{I} a_2$. Owing to Theorem 3.2 we have $p = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_5)$ and by Theorem 3.5 a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_5)$ at the point A_2. Therefore we have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_5)$ which contradicts with $A_5 \mathtt{I} a_2$.

If p is an one-fold specialized Pascal set and a_2 is a tangent of p at its point A_2, then we say that $A_2a_2A_2$ is a *flag* of p.

Theorem 3.7
If $A_2a_2A_2$ *is a flag of* $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$*, then* $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = P(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4)$.

Proof. The line a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ at the point A_2 and so $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$ holds, wherefrom by Theorem 1.7 $P(A_2a_2A_2, A_1a_1A_1, A_3, A_4)$ follows, i.e. a_1 is the tangent of $p(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4)$ at the point A_1, and $a_1 \cap A_2A_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3A_4 = V$, $a_2 \cap A_4A_1 = W$ are collinear points (Fig. 7). Let $X \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, i.e. let $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, X)$ holds. We must prove $X \in p(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, i.e. $P(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4, X)$. According to Theorem 1.5 we have $P(A_1a_1A_1, A_2, X, A_3, A_4)$, i.e. $a_1 \cap XA_3 = U'$, $A_1A_2 \cap A_3A_4 = V$, $A_2X \cap A_4A_1 = W'$ are collinear points. The lines A_3X, VW' , UA_1 pass through the point U' and Desargues theorem implies the collinearity of the points $VU \cap W'A_1 = W$, $UA_3 \cap A_1X = V''$, $A_3V \cap XW' = W''$. But, we have $W = a_2 \cap A_4A_1$, $V'' = A_2A_3 \cap A_1X$, $W'' = A_3A_4 \cap XA_2$, i.e. $P(A_2a_2A_2, A_3, A_4, A_1, X)$, and Theorem 1.5 implies $P(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4, X)$. On the same manner (by the substitutions $A_1 \leftrightarrow A_2$, $a_1 \leftrightarrow a_2$) it can be proved that $X \in p(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ implies $X \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

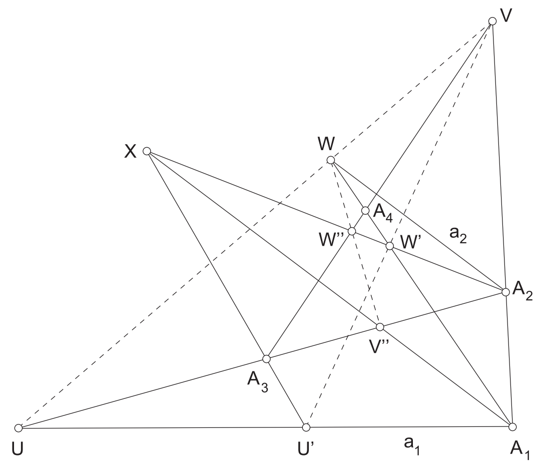


Figure 7

Theorem 3.8
Let $A_2a_2A_2$ *be a flag of* $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$*. A line* a_3 *is the tangent of* $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ *at the point* A_3 *iff* a_3 *is the tangent of* $p(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4)$ *at the point* A_3.

Proof. As in the proof of Theorem 3.7 we conclude that a_1 is the tangent of $p(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4)$ at the point A_1. We have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$ i.e. by Theorem 1.6 $P(A_1a_1A_1, A_3, A_2a_2A_2, A_4)$, and $a_1 \cap a_2 = U$, $A_1A_3 \cap A_2A_4 = V$, $A_3A_2 \cap A_4A_1 = W$ are collinear points (Fig. 8). Let a_3 be the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1a_1A_1, A_3, A_2, A_4)$ at the point A_3. Then $P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2, A_4)$ holds, i.e. $a_1 \cap A_3A_2 = U'$, $A_1A_3 \cap A_2A_4 = V$, $a_3 \cap A_4A_1 = W'$ are collinear points. The lines $W'V$, A_3A_2, A_1U pass through the point U' and Desargues theorem implies that $A_3A_1 \cap A_2U = U''$, $A_1W' \cap UV = W$, $W'A_3 \cap VA_2 = W''$ are collinear points. But, $U'' = a_2 \cap A_3A_1$, $W = A_2A_3 \cap A_1A_4$, $W'' = a_3 \cap A_4A_2$ and we have $P(A_2a_2A_2, A_3a_3A_3, A_1, A_4)$, i.e. a_3 is the tangent of $p(A_2a_2A_2, A_3, A_1, A_4) = p(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4)$ at the point A_3. The proof of the converse follows by the substitutions $A_1 \leftrightarrow A_2$, $a_1 \leftrightarrow a_2$.

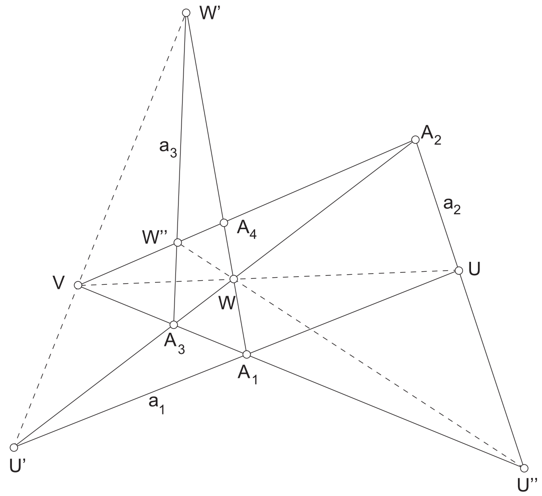


Figure 8

Theorem 3.9
If $A_{1'}$, $A_{2'}$, $A_{3'}$, $A_{4'} \in p = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ are four different points and if $a_{1'}$ is a tangent of p at the point $A_{1'}$ then $p = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}, A_{4'})$, i.e. an one-fold specialized Pascal set is uniquely determined by anyone of its flags AaA and any three of its points which are mutually different and different from the point A.

Proof. If $A_{1'} = A_1$ then we use Theorem 3.2. Let be further $A_{1'} \neq A_1$. At most one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$, $A_{4'}$ is equal to A_1. Let be e.g. $A_1 \neq A_{2'}.A_{3'}$. Then Theorem 3.2 implies $p = p(A_1a_1A_1, A_{1'}, A_{2'}, A_{3'})$. By Theorem 3.5 $a_{1'}$ is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{1'}, A_{2'}, A_{3'})$ at the point $A_{1'}$. Therefore, Theorem 3.7 implies $p(A_1a_1A_1, A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}) = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1, A_{2'}, A_{3'})$. So we have $A_{4'} \in p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1, A_{2'}, A_{3'})$ and finally Theorem 3.2 implies $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1, A_{2'}, A_{3'}) = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}, A_{4'})$.

Theorem 3.10
Let $A_{1'}$, $A_{2'}$, $A_{3'} \in p = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ be different points such that $A_{1'}$, $A_{2'}$, $A_{3'} \neq A_4$ and let $a_{1'}$ be the tangent of p at the point $A_{1'}$. A line a_4 is the tangent of p at the point A_4 iff a_4 is the tangent of $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}, A_4)$ at the point A_4, i.e. the tangent of an one-fold specialized Pascal set at anyone of its points is uniquely determined.

Proof. If $A_{1'} = A_1$, then we use Theorem 3.5. Let be further $A_{1'} \neq A_1$. At most one of the points $A_{2'}$, $A_{3'}$ is equal to A_1. Let be e.g. $A_1 \neq A_{2'}$. By Theorem 3.5 it follows that a_4 is the tangent of p at the point A_4 iff a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{1'}, A_{2'}, A_4)$ at the point A_4. If we apply this fact to the point $A_{1'}$ instead of the point A_4, then it follows that $a_{1'}$ is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{1'}, A_{2'}, A_4)$ at the point $A_{1'}$. Therefore, Theorem 3.8 implies that a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{1'}, A_{2'}, A_4)$ at the point A_4 iff a_4 is the tangent of $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1, A_{2'}, A_4)$ at the point A_4. But, $A_{3'}$ $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1, A_{2'}, A_4)$ and Theorem 3.5 implies that a_4 is the tangent of $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1, A_{2'}, A_4)$ in the point A_4 iff a_4 is the tangent of $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}, A_{3'}, A_4)$ at the point A_4.

4 Two-fold specialized Pascal sets

Let A_1, A_2, A_3 be three non-collinear points and a_1, a_2 two lines such that $A_i \mathtt{I} a_j$ iff $i = j$. A *two-fold specialized Pascal set* determined by the flags $A_1a_1A_1$, $A_2a_2A_2$ and the point A_3 is the set of points $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = \{A_1, A_2, A_3\} \cup \{X \mid P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, X)\}$.

Theorem 4.1
$p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{3'})$ for any point $A_{3'} \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2\}$.

Proof. If $A_{3'} = A_3$, the statement is trivial.
Let be further $A_{3'} \neq A_3$. As $A_{3'} \in P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$, so we have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_{3'})$, wherefrom by Theorem 1.7 $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{3'}, A_3)$ follows, i.e. $A_3 \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{3'}) \setminus \{A_1, A_2, A_{3'}\}$. Let now be $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_{3'}\}$, i.e. let we have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, X)$, and let $X \neq A_{3'}$. We must prove $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{3'}) \setminus \{A_1, A_2, A_{3'}\}$, i.e. $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{3'}, X)$. Therefore, because of Theorem 1.6, we must prove that $P(A_1a_1A_1, A_3, A_2a_2A_2, A_{3'}), P(A_1a_1A_1, A_3, A_2a_2A_2, X)$ and $A_{3'} \neq X$ imply $P(A_1a_1A_1, A_{3'}, A_2a_2A_2, X)$. But, the first two hypotheses mean that $a_1 \cap a_2 = U$, $A_1A_3 \cap A_2A_{3'} = V$, $A_3A_2 \cap A_{3'}A_1 = W$ resp. $a_1 \cap a_2 = U$, $A_1A_3 \cap A_2X = V'$, $A_3A_2 \cap XA_1 = W'$ are collinear points (Fig. 9).

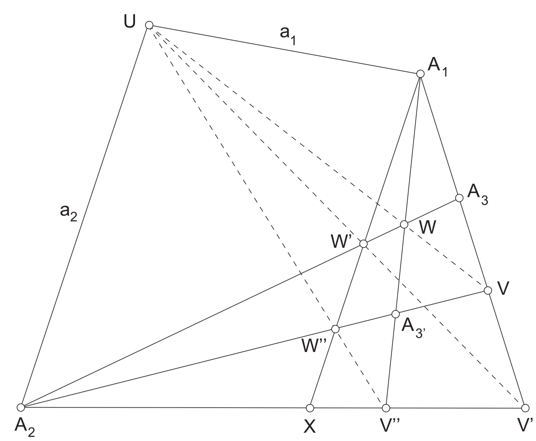


Figure 9

By Pappus theorem we have $P(V,W,A_1,W',V',A_2)$, i.e. $VW \cap W'V' = U$, $WA_1 \cap V'A_2 = V''$, $A_1W' \cap A_2V = W''$ are collinear points. But, $U = a_1 \cap a_2$, $V'' = A_1A_{3'} \cap A_2X$, $W'' = A_{3'}A_2 \cap XA_1$, and we have $P(A_1a_1A_1, A_{3'}, A_2a_2A_2, X)$. On the same manner (by the substitution $A_3 \leftrightarrow A_{3'}$) it can be proved that $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{3'}) \setminus \{A_1, A_2, A_{3'}\}$ and $X \neq A_3$ imply $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$.

Theorem 4.1 and the definition of two-fold specialized Pascal set p determined by flags $A_1a_1A_1$ and $A_2a_2A_2$ imply that any point of $p \setminus \{A_1, A_2\}$ is not-incident with the lines a_1, a_2, A_1A_2.

A line a_3 such that $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3a_3A_3)$ holds is said to be a *tangent of the two-fold specialized Pascal set* $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ *at the point* A_3. The lines a_1 and a_2 are said to be the tangents of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the points A_1 and A_2, respectively.

Theorem 4.2
There is one and only one tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ *at the point* A_3.

Proof. Let $U = a_1 \cap A_2A_3$, $W = a_2 \cap A_3A_1$. A line a_3 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_3 iff $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3a_3A_3)$ holds, i.e. iff $A_3 \mathtt{I} a_3$ and iff $U, V = A_1A_2 \cap a_3, W$ are collinear points, i.e. iff $a_3 = A_3V$, where $V = A_1A_2 \cap UW$.

Theorem 4.3
If a_3 *is the tangent of* $p = p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ *at the point* A_3*, then* A_3 *is the unique point such that* $A_3 \in p$ *and* $A_3 \mathtt{I} a_3$.

Proof. We have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3a_3A_3)$ and therefore $A_i \mathtt{I} a_3$ iff $i = 3$. The points $a_1 \cap A_2A_3 = U$, $A_1A_2 \cap a_3 = V$, $a_2 \cap A_3A_1 = W$ are collinear. Suppose that there is a point $A_4 \in p \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$ such that $A_4 \mathtt{I} a_3$. Then we have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$, i.e. $a_1 \cap A_2A_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3A_4 = A_1A_2 \cap a_3 = V$, $a_2 \cap A_4A_1 = W'$ are collinear points. Therefore we have $W' \mathtt{I} UV$ and $W' = a_2 \cap UV = W$ i.e. finally $A_4 = a_3 \cap A_1W' = a_3 \cap A_1W = A_3$, contrary to the hypothesis.

If p is a two-fold specialized Pascal set and a_3 a tangent of p at its point A_3, then we say that $A_3a_3A_3$ is a *flag* of p.

Theorem 4.4
If $A_3a_3A_3$ *is a flag of* $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$*, then* $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$.

Proof. The line a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_3 and so $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3a_3A_3)$, i.e. $P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2a_2A_2)$ holds, and a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$ at the point A_2. Moreover, we have collinear points $a_1 \cap A_2A_3 = U$, $A_1A_2 \cap a_3 = V$, $a_2 \cap A_3A_1 = W$ (Fig. 10). Let $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$, i.e. let $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, X)$ hold. Then $a_1 \cap A_2A_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3X = V'$, $a_2 \cap XA_1 = W'$ are collinear points. The lines WA_2, UV', A_1X pass through the point W' and by Desargues theorem $UA_1 \cap V'X = U''$, $A_1W \cap XA_2 = V''$, $WU \cap A_2V' = V$ are collinear points. But, $U'' = a_1 \cap A_3X$, $V'' = A_1A_3 \cap XA_2$, $V = a_3 \cap A_2A_1$ and we have $P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, X, A_2)$, i.e. $P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2, X)$ because of Theorem 1.7. Hence $X \in p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$. On the same manner (by the substitutions $A_2 \leftrightarrow A_3$, $a_2 \leftrightarrow a_3$) we can prove that $X \in p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$ implies $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$.

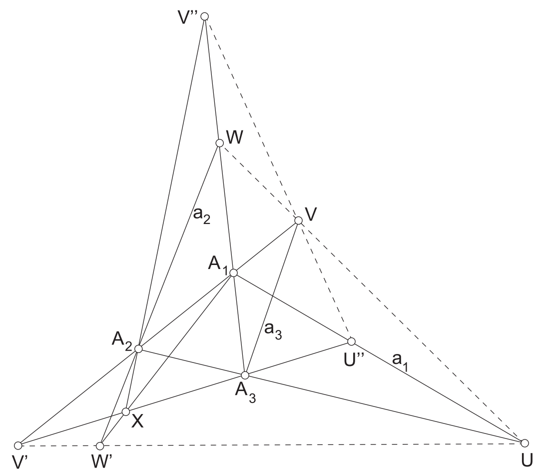


Figure 10

Theorem 4.5
Let $A_4 \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$*. A line* a_3 *is the tangent of* $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ *at the point* A_3 *iff* a_3 *is the tangent of* $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ *at the point* A_3.

Proof. By Theorem 1.7 we have $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_4, A_3)$, i.e. $a_1 \cap A_2A_4 = U$, $A_1A_2 \cap A_4A_3 = V$, $a_2 \cap A_3A_1 = W$ are collinear points (Fig. 11). We must prove that $P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_4, A_2)$ is equivalent to $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3a_3A_3)$. If $a_1 \cap A_3A_4 = U'$, $A_1A_3 \cap A_4A_2 = V'$, $a_3 \cap A_2A_1 = W'$ are collinear points, then Pappus theorem implies $P(A_3, A_2, V, U, U', V')$, i.e. $A_3A_2 \cap UU' = U''$, $A_2V \cap U'V' = W'$, $VU \cap V'A_3 = W$ are collinear points. But, $U'' = a_1 \cap A_2A_3$, $W' = A_1A_2 \cap a_3$, $W = a_2 \cap A_3A_1$. Conversely, if $a_1 \cap A_2A_3 = U''$, $A_1A_2 \cap a_3 = W'$,

$a_2 \cap A_3A_1 = W$ are collinear points, then Pappus theorem implies $P(U'', U, A_2, V, A_3, W)$, i.e. $U''U \cap VA_3 = U'$, $UA_2 \cap A_3W = V'$, $A_2V \cap WU'' = W'$ are collinear points. But, $U' = a_1 \cap A_3A_4$, $V' = A_1A_3 \cap A_4A_2$, $W' = a_3 \cap A_2A_1$.

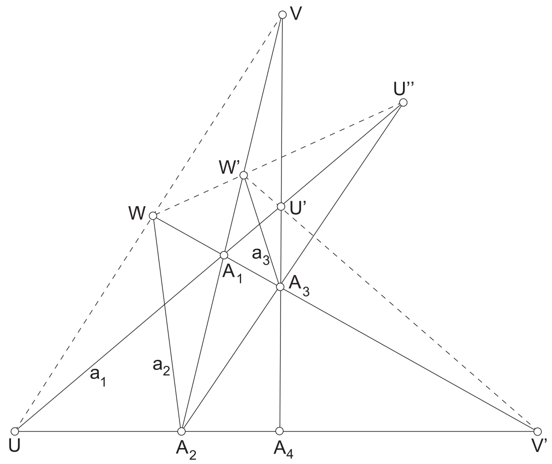


Figure 11

Theorem 4.6

Let $A_3a_3A_3$ be a flag and A_4 a point of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$. A line a_4 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_4 iff a_4 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$ at the point A_4.

Proof. The statement is obvious if $A_4 \in \{A_1, A_2, A_3\}$. Let be further $A_4 \neq A_1, A_2, A_3$. We have $A_4 \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$ and Theorem 1.7 implies $A_3 \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_4\}$. Let us suppose that a_4 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_4. Then, by the definition, a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_4)$ at the point A_4. Therefore, Theorem 4.5 implies (by the substitutions $A_3 \leftrightarrow A_4$, $a_3 \leftrightarrow a_4$) that a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_4, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ at the point A_4. But $A_3a_3A_3$ is a flag of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ and Theorem 4.4 implies $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$. So we have $A_4 \in p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$ and by Theorem 1.7 we obtain $P(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_4, A_2)$, i.e. $A_2 \in p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_3, A_4\}$. Moreover, a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1a_1A_1, A_3, A_4, A_2)$ at the point A_4 and Theorem 4.5 implies (by the substitutions $A_2 \to A_3$, $A_3 \to A_4$, $A_4 \to A_2$, $a_3 \to a_4$) that a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_4)$ at the point A_4. Then, by the definition, a_4 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$ at the point A_4. As $A_3a_3A_3$ is a flag of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$, so $A_2a_2A_2$ is a flag of $p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$. Moreover, $A_4 \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ implies $A_4 \in p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$ because of Theorem 4.4. Now, if we suppose that a_4 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_3a_3A_3, A_2)$ at the point A_4, then on the same way as in the first part of this proof (by the substitutions $A_2 \leftrightarrow A_3$, $a_2 \leftrightarrow a_3$) it follows that a_4 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_4.

Theorem 4.7

If $A_{1'}$, $A_{2'}$, $A_{3'} \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ are different points and $a_{1'}$, $a_{2'}$ are two tangents of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the points $A_{1'}$, $A_{2'}$, respectively, then $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ i.e. a two-fold specialized Pascal set is uniquely determined by any two of its flags AaA, BaB and anyone of its points different from A, B.

Proof. At least one of the points $A_{1'}$, $A_{2'}$ is different from A_1. Let be e.g. $A_{2'} \neq A_1$. At first let be $A_{2'} \neq A_2$. Then $A_{2'} \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2\}$ implies by Theorem 4.1 $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'})$. As $a_{2'}$ is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point $A_{2'}$ so $a_{2'}$ is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'})$ at this point. Therefore, Theorem 4.4 implies $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'}) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2)$. At least one of the points A_1, A_2 is different from $A_{3'}$. Let be e.g. $A_1 \neq A_{3'}$. Then $A_{3'} \in p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2) \setminus \{A_1, A_{2'}\}$ implies $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$. Therefore, if we have $A_{2'} \neq A_2$, then $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ holds. As $a_{1'}$ is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point $A_{1'}$, then $a_{1'}$ is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'})$ at this point. By Theorem 4.6 $a_{1'}$ is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2)$ at the point $A_{1'}$, i.e. a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ at this point. If we have $A_{2'} = A_2$ and then necessarily $A_{2'} \neq A_{3'}$ then obviously $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$ and we conclude again that $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ and that $a_{1'}$ is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ at the point $A_{1'}$. Therefore, in every case we have $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{3'})$ and so $A_{1'} \in p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{3'})$. Moreover, $a_{1'}$ is a tangent of $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{3'})$ at the point $A_{1'}$. Now, let $A_{1'} \neq A_1$ at first. From $A_{1'} \in p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{3'}) \setminus \{A_{2'}, A_1\}$ we obtain $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{3'}) = p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{1'})$ by Theorem 4.1. As $a_{1'}$ is a tangent of $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{3'})$ at the point $A_{1'}$ so $a_{1'}$ is the tangent of $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{1'})$ at the same point $A_{1'}$. Therefore, Theorem 4.4 implies $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_{1'}) = p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_1)$. From $A_{3'} \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_{1'}, A_{2'}\} = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1) \setminus \{A_{1'}, A_{2'}\}$ we obtain finally

$p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1) = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ by Theorem 4.1. If we have $A_{1'} = A_1$, then $p(A_1a_1a_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'}) = p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ obviously holds.

Theorem 4.8
Let $A_{1'}a_{1'}A_{1'}$, $A_{2'}a_{2'}A_{2'}$ be two different flags of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ and let $A_{1'}, A_{2'} \neq A_3$. A line a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_3 iff a_3 is a tangent of $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{3'})$ at this point, i.e. the tangent of a two-fold specialized Pascal set in anyone of its points is uniquely determined.

Proof. At least one of the points $A_{1'}$, $A_{2'}$ is different from A_1. Let be e.g. $A_{2'} \neq A_1$. At first, let $A_{2'} \neq A_2$. According to proof of Theorem 4.7 we have $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'}) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2)$. Then $A_3 \in p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2) \setminus \{A_1, A_{2'}\}$ and Theorem 4.1 implies $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$. Moreover, $A_{2'}a_{2'}A_{2'}$ is a flag of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ and therefore a flag of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'})$. So, Theorem 4.6 implies that a_3 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'})$ at the point A_3 iff a_3 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2)$ at this point. Moreover, we conclude that a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_3 iff a_3 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_{2'})$ at this point and that a_3 is a tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_2)$ at the point A_3 iff a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$ at this point. Therefore, it follows finally in the case $A_{2'} \neq A_2$ that a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_3 iff a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$ at this point. In the case $A_{2'} = A_2$ this statement is trivial. Therefore, we have the conclusion: if $A_{2'}a_{2'}A_{2'}$ is a flag of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ and $A_{2'} \neq A_1, A_3$ then $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$ and a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$ at the point A_3 iff a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$, i.e. of $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_3)$ at this point. So, we have now a flag $A_{1'}a_{1'}A_{1'}$ of $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_3)$ and $A_{1'} \neq A_{2'}, A_3$ and on the same manner (by the substitutions $A_1 \to A_{2'}$, $A_2 \to A_1$, $A_{2'} \to A_{1'}$, $a_1 \to a_{2'}$, $a_2 \to a_1$, $a_{2'} \to a_{1'}$) we conclude that $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_3) = p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_3)$ and that a_3 is the tangent of $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_1a_1A_1, A_3)$ at the point A_3 iff a_3 is the tangent of $p(A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_3)$, i.e. of $p(A_{1'}a_{1'}A_{1'}, A_{2'}a_{2'}A_{2'}, A_3)$ at the point A_3.

5 Pascal sets

Now, we shall investigate the mutual relationships between different types of Pascal sets.

Theorem 5.1
a) If $A_1a_1A_1$ is a flag of $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$, then $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$.

b) If $A_5 \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, then $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Proof. The hypothesis of a) resp. b) is that $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ holds, wherefrom by Theorem 1.4 $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_5, A_4)$ follows, i.e, the points $a_1 \cap A_3A_5 = U'$, $A_1A_2 \cap A_5A_4 = U$, $A_2A_3 \cap A_4A_1 = W'$ are collinear. We must show that $X \in p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ iff $X \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$. This is obvious if $X \in \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Let be further $X \neq A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. We must show that $P(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, X)$ implies $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, X)$ and conversely that $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, X)$ implies $P(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, X)$. The first statement was proved in fact in the proof of Theorem 2.3 (instead of $A_{5'}$ it must be taken X). Let us prove the second statement. $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, X)$ implies by Theorem 1.5 $P(A_1a_1A_1, A_3, A_2, X, A_4)$, i.e. $a_1 \cap A_2X = U''$, $A_1A_3 \cap XA_4 = W$, $A_3A_2 \cap A_4A_1 = W'$ are collinear points (Fig. 4) with X instead of $A_{5'}$). By Pappus theorem we have $P(A_1, A_2, U'', W', U', A_3)$, i.e. $A_1A_2 \cap W'U' = U$, $A_2U'' \cap U'A_3 = V$, $U''W' \cap A_3A_1 = W$ are collinear points. But, $U = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $V = A_2X \cap A_5A_3$, $W = XA_4 \cap A_3A_1$ and so $P(A_1, A_2, X, A_4, A_5, A_3)$ holds and Theorem 1.1 implies $P(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, X)$.

Theorem 5.2
If A_1, A_2, A_3, A_4 are four different points of an ordinary Pascal set p and a_1 the tangent of p at the point A_1, then p is equal to the one-fold specialized Pascal set $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$. Conversely, if A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 are five different points of an one-fold specialized Pascal set p, then p is equal to the ordinary Pascal set $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Proof. Let p be an ordinary Pascal set, $A_1, A_2, A_3, A_4 \in p$ four different points and a_1 the tangent of p at the point A_1. There is a point $A_5 \in p \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ and by Theorem 2.1 we have $p = p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$. By Theorem 2.4 a_1 is the tangent of $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ at the point A_1. So Theorem 5.1 implies $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$. Conversely, let p be an one-fold specialized Pascal set and $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in p$ five different points. By Theorem 3.10 there is the tangent

a_1 of p at the point A_1 and according to Theorem 3.9 we have $p = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$. As we have $A_5 \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, so Theorem 5.1 implies $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Theorem 5.3

a) Let $A_1a_1A_1$ be a flag of $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

b) Let $A_5 \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

In both cases a line a_2 is the tangent of $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ at the point A_2 iff it is tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ at the same point.

Proof. The hypothesis of a) resp. b) is that $P(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ holds, wherefrom by Theorem 1.5 $p(A_1a_1A_1, A_2, A_5, A_3, A_4)$ follows, i.e. $a_1 \cap A_5A_3 = U$, $A_1A_2 \cap A_3A_4 = V$, $A_2A_5 \cap A_4A_1 = W$ are collinear points (Fig. 12). We must show that $P(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4, A_5)$ holds iff $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$. The hypothesis $P(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4, A_5)$ implies by Theorem 1.5 $P(A_2a_2A_2, A_4, A_1, A_3, A_5)$, i.e. $a_2 \cap A_1A_3 = W'$, $A_2A_4 \cap A_3A_5 = V'$, $A_4A_1 \cap A_5A_2 = W$ are collinear points. Using the Pappus theorem we have $P(A_1, U, W', V', A_4, A_3)$, i.e. $A_1U \cap V'A_4 = U''$, $UW \cap A_4A_3 = V$, $WV' \cap A_3A_1 = W'$ are collinear points. But, $U'' = a_1 \cap A_2A_4$, $V = A_1A_2 \cap A_4A_3$, $W' = a_2 \cap A_3A_1$ and so $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_4, A_3)$ holds, wherefrom by Theorem 1.7 $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$ follows. Conversely, let $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_4, A_3)$, i.e. $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3, A_4)$ holds. Then U'', V, W' are collinear points. The Pappus theorem implies now $P(A_1, A_3, U, V, U'', A_4)$, i.e. $A_1A_3 \cap VU'' = W'$, $A_3U \cap U''A_4 = V'$, $UV \cap A_4A_1 = W$ are collinear points. But, $W' = a_2 \cap A_1A_3$, $V' = A_2A_4 \cap A_3A_5$, $W = A_4A_1 \cap A_5A_2$ and so $P(A_2a_2A_2, A_4, A_1, A_3, A_5)$, $P(A_2a_2A_2, A_1, A_3, A_4, A_5)$ holds.

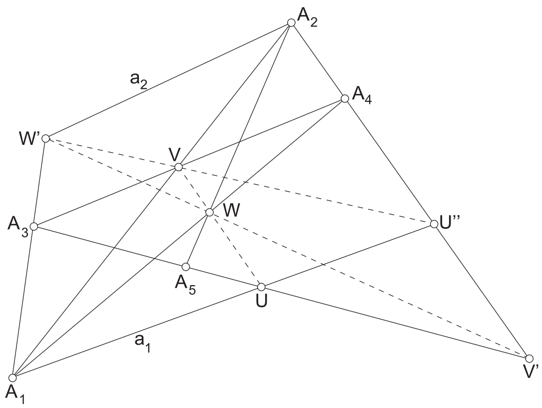


Figure 12

Theorem 5.4

Let p_1 be an ordinary Pascal set and p_2 an one-fold specialized Pascal set such that $p_1 = p_2$ and let $A_2 \in p_1 = p_2$. A line a_2 is the tangent of p_1 at the point A_2 iff it is the tangent of p_2 at this point.

Proof. Let A_1, A_3, A_4, $A_5 \in p_1 \setminus \{A_2\} = p_2 \setminus \{A_2\}$ be four different points and let a_1 be the tangent of p_2 at the point A_1. Then by Theorem 2.1 we have $p_1 = p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ and by Theorem 3.9 $p_2 = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ holds. Moreover, by Theorems 2.4 and 3.10 it follows that p_1 and $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ resp. p_2 and $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ have the same tangent at the point A_2. As $A_5 \in p_2 \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\} = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) \setminus \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, so by Theorem 5.3 b) it follows that a_2 is the tangent of $p(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ at the point A_2 iff a_2 is the tangent of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ at the same point.

Theorem 5.5

a) If $A_2a_2A_2$ is a flag of $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$, then $p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4) = p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$.

b) If $A_4 \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) \setminus \{A_1, A_2, A_3\}$, then $p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3) = p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$.

Proof. The hypothesis of a) resp. b) implies $P(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_4, A_3)$ by Theorem 1.7, i.e. $a_1 \cap A_2A_4 = U$, $A_1A_2 \cap A_4A_3 = V$, $a_2 \cap A_3A_1 = W$ are oollinear points (Fig. 13).

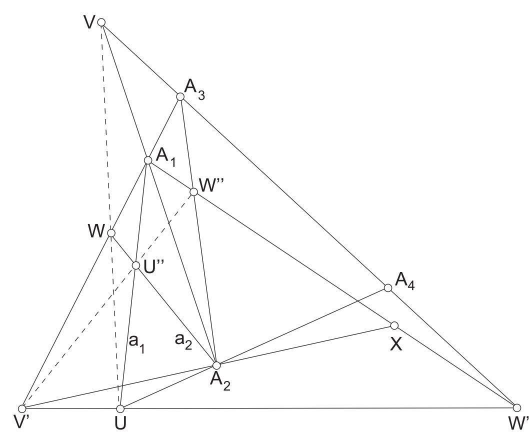


Figure 13

We must prove that $X \in p(A_1a_1A_1, A_2, A_3, A_4)$ iff $X \in p(A_1a_1A_1, A_2a_2A_2, A_3)$. The statement is obvious if $X \in \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Let be now $X \neq A_1, A_2, A_3, A_4$. Because of Theorem 1.5 and 1.6 we must show that $P(A_1a_1A_1, A_3, A_4, A_2, X)$ holds iff $P(A_1a_1A_1, A_3, A_2a_2A_2, X)$ holds. If we have

$P(A_1a_1A_1,A_3,A_4,A_2,X)$, then $a_1 \cap A_4A_2 = U$, $A_1A_3 \cap A_2X = V'$, $A_3A_4 \cap XA_1 = W'$ are collinear points. As the lines $W'A_3$, A_1A_2, UW pass through the point V, so Desargues theorem implies that $A_1U \cap A_2W = U''$, $UW' \cap WA_3 = V'$, $W'A_1 \cap A_3A_2 = W''$ are collinear points. But, $U'' = a_1 \cap a_2$, $V' = A_1A_3 \cap A_2X$, $W'' = A_3A_2 \cap XA_1$ and so $P(A_1a_1A_1,A_3,A_2a_2A_2,X)$ holds. Conversely, if $P(A_1a_1A_1,A_3,A_2a_2A_2,X)$ holds, then U'', V', W'' are collinear points. As the lines $W''A_3$, A_1V, $U''W$ pass through the point A_2 so by Desargues theorem $A_1U'' \cap VW = U$, $U''W'' \cap WA_3 = V'$, $W''A_1 \cap A_3V = W'$ are collinear points. But, $U = a_1 \cap A_4A_2$, $V' = A_1A_3 \cap A_2X$, $W' = A_3A_4 \cap XA_1$ and we have $P(A_1a_1A_1,A_3,A_4,A_2,X)$.

Theorem 5.6
If A_1, A_2, A_3 are three different points of an one-fold specialized Pascal set p and a_1, a_2 are the tangents of p at the points A_1, A_2, respectively, then p is equal to the two-fold specialized Pascal set $p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$. Conversely, if A_1, A_2, A_3, A_4 are four different points of a two-fold specialized Pascal set p and a_1 the tangent of p at the point A_1, then p is equal to the one-fold specialized Pascal set $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$.

Proof. Let p be an one-fold specialized Pascal set, A_1, A_2, $A_3 \in p$ three different points and a_1, a_2 the tangents of p at the points A_1, A_2, respectively. There is a point $A_4 \in p \setminus \{A_1,A_2,A_3\}$ and by Theorem 3.9 we have $p = p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$. According to Theorem 3.10 a_4 is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_2. Therefore, Theorem 5.5 implies $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4) = p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$. Conversely, let p be a two-fold specialized Pascal set, $A_1,A_2,A_3,A_4 \in p$ four different points and a_1 the tangent of p at the point A_1. According to Theorem 4.8 there is the tangent a_2 of p at the point A_2 and because of Theorem 4.7 we have the equality $p = p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$. As $A_4 \in p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3) \setminus \{A_1,A_2,A_3\}$, so Theorem 5.5 implies $p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3) = p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$.

Theorem 5.7
Let $A_2a_2A_2$ be a flag of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$. A line a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_3 iff it is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$ at the same point.

Proof. The hypothesis $P(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3,A_4)$ is the same as the hypothesis of Theorem 4.5 and so the proof is the same as the proof of Theorem 4.5.

Theorem 5.8
Let p_1 be an one-fold specialized Pascal set and p_2 a two-fold specialized Pascal set such that $p_1 = p_2$ and let $A_3 \in p_1 = p_2$. A line a_3 is the tangent of p_1 at the point A_3 iff it is the tangent of p_2 at this point.

Proof. Let $A_1,A_2,A_4 \in p_1 \setminus \{A_3\} = p_2 \setminus \{A_3\}$ be three different points and let a_1, a_2 be the tangents of p_2 at the points A_1, A_2, respectively. Then by Theorem 3.9 we have $p_1 = p(A_1a_1A_1,A_2,A_3A_4)$ and by Theorem 4.7 $p_2 = p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$. Moreover, by Theorem 3.10 resp. Theorem 4.8 it follows that p_1 and $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ resp. p_2 and $p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$ have the same tangent at the point A_3. As $A_4 \in p_2 \setminus \{A_1,A_2,A_3\} = p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3) \setminus \{A_1,A_2,A_3\}$ so by Theorem 4.5 it follows that a_3 is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2,A_3,A_4)$ at the point A_3 iff it is the tangent of $p(A_1a_1A_1,A_2a_2A_2,A_3)$ at this point.

Any ordinary Pascal set, any one-fold specialized Pascal set and any two-fold specialized Pascal set are said to be a *Pascal set*. Because of Theorems 5.1 and 5.5 any Pascal set is simultaneously an ordinary Pascal set, an one-fold specialized Pascal set, and a two-fold specialized Pascal set.

6 Pascal-Brianchon sets

A *simple 6-line* $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ is a set of six lines a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 taken in this cyclic order in which any two consecutive lines and any other line are non-concurrent. We say that this 6-line is a *Brianchonian 6-line* and we write $B(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ if the lines $(a_1 \cap a_2)(a_4 \cap a_5)$, $(a_2 \cap a_3)(a_5 \cap a_6)$, $(a_3 \cap a_4)(a_6 \cap a_1)$ are concurrent.

The Pappus theorem can be stated now in the dual form:

If a_1, a_3, a_5 resp. a_2, a_4, a_6 are concurrent lines then $B(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$.

Now, we shall dualize the whole above-mentioned theory. E.g. a *two-fold specialized simple 6-line $a_1A_1a_1a_2A_2a_2a_3a_4$ of type 1* is a set of four lines a_1, a_2, a_3, a_4 taken in this cyclic order in which any three lines are non-concurrent, and of two points A_1, A_2 such that $A_i \mathtt{I} a_j$ iff $i = j$. We say that this 6-line is a *Brianchonian two-fold specialized 6-line of type 1* and we write $B(a_1A_1a_1,a_2A_2a_2,a_3,a_4)$ if the lines $A_1(a_2 \cap a_3)$, $(a_1 \cap a_2)(a_3 \cap a_4)$, $A_2(a_4 \cap a_1)$ are concurrent. A *two-fold specialized Brianchon set* determined by two flags $a_1A_1a_1$, $a_2A_2a_2$ and a line a_3 such that $A_i \mathtt{I} a_j$ iff $i = j$ is the set of lines $b(a_1A_1a_1,a_2A_2a_2,a_3) = \{a_1,a_2,a_3\} \cup \{x \mid B(a_1A_1a_1,a_2A_2a_2,a_3,x)\}$.

A tangent of a Pascal set at one of its points has for the dual the notion of a *point of contact* of a Brianchon set with one of its lines.

Now, we can prove:

Theorem 6.1
The set of tangents of a Pascal set is a Brianchon set. Conversely, the set of points of contact of a Brianchon set is a Pascal set.

Proof. It suffices to prove only the first statement. Let p be the given Pascal set and $A_1a_1A_1$, $A_2a_2A_2$, $A_3a_3A_3$ three different flags of p. Let AaA be any flag of p. We shall prove that a is a line of the Brianchon set $B(a_1A_1a_1,a_2A_2a_2,a_3)$. The statement is trivial if $A\in\{A_1,A_2,A_3\}$, i.e. $a\in\{a_1,a_2,a_3\}$. Let be now $A\neq A_1,A_2,A_3$, i.e. $a\neq a_1,a_2,a_3$. We must show that $B(a_1A_1a_1,a_2A_2a_2,a_3,a)$ holds. By the hypothesis we have $P(A_1a_1A_1,A_2,A_3a_3a_3,A)$, $P(A_2a_2A_2,A_1,AaA,A_3)$, $P(A_1a_1A_1,A_2,AaA,A_3)$ and $P(A_2a_2A_2,A_1,A_3a_3A_3,A)$, i.e. the triples of points $a_1\cap a_3=V''$, $A_1A_2\cap A_3A=W$, $A_2A_3\cap AA_1=U$; $a_2\cap a=V'$, $A_2A_1\cap AA_3=W$, $A_1A\cap A_3A_2=U$; $a_1\cap a=U'$, $A_1A_2\cap AA_3=W$, $A_2A\cap A_3A_1=V$ and $a_2\cap a_3=U''$, $A_2A_1\cap A_3A=W$, $A_1A_3\cap AA_2=V$ are collinear (Fig. 14). Therefore, we have V'', $V'\mathtt{I}UW$, and U', $U''\mathtt{I}VW$, i.e. V', V'', W resp. U', U'', W are collinear points. As the lines A_1A_2, $(a_1\cap a_3)(a_2\cap a)=V''V'$, $(a_3\cap a_2)(a\cap a_1)=U''U'$ pass through the point W, so $B(a_1A_1a_1,a_3,a_2A_2a_2,a)$ holds, wherefrom by the dual of Theorem 1.6 $B(a_1A_1a_1,a_2A_2a_2,a_3,a)$ follows.

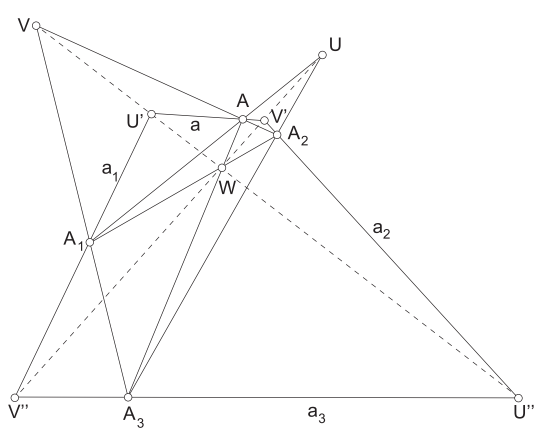


Figure 14

If p is a Pascal set and b a Brianchon set such that b is the set of tangents of p, i.e. p is the set of points of contact of b, then the ordered pair (p,b) is said to be a *Pascal-Brianchon set*. If $A\in p$ is a point and $a\in b$ a line such that AaA is a flag of p, i.e. aAa is a flag of b, then we say that (A,a) is a *flag* of (p,b).

According to Theorems 2.1, 3.9, 4.7 and their duals the following theorem follows:

Theorem 6.2
A Pascal-Brianchon set is uniquely determined by:

a) *any five different of its points;*

b) *anyone of its flags (A,a) and any three of its points which are mutual different and different from A;*

c) *any two different of its flags (A_1,a_1), (A_2,a_2) and anyone of its points different from A_1 and A_2;*

d) *any two different of its flags (A_1,a_1), (A_2,a_2) and anyone of its lines different from a_1 and a_2;*

e) *anyone of its flags (A,a) and any three of its lines which are mutual different and different from a;*

f) *any five different of its lines.*

Theorems 2.5, 3.6 and 4.3 and their duals imply:

Theorem 6.3
If (A,a) is a flag of a Pascal-Brianchon set (p,b) and $A_1\in p$, $a_1\in b$, then $A_1\mathtt{I}a$ implies $A_1=A$ and $A\mathtt{I}a_1$ implies $a_1=a$.

Let us prove the following theorem.

Theorem 6.4
Let (A_1,a_1) be a flag of a Pascal-Brianchon set (p,b). If b_1 is any line such that $A_1\mathtt{I}b_1$ and $b_1\neq a_1$, then there is one and only one point X such that $X\mathtt{I}b_1$ and $X\in p\setminus\{A_1\}$. Dually, if B_1 is any point such that $B\mathtt{I}a_1$ and $B_1\neq A_1$, then there is one and only one line x such that $B_1\mathtt{I}x$ and $x\in b\setminus\{a_1\}$.

Proof. It suffices to prove the statement for an ordinary Pascal set p, any flag $A_1a_1A_1$ of p and any line b_1 such that $A_1\mathtt{I}b_1$ and $b_1\neq a_1$. At first let us prove the existence of the required point X. Let $A_2,A_3,A_4,A_5\in p\setminus\{A_1\}$ be four different points. The statement of theorem is obvious if $A_i\mathtt{I}b_1$, for any $i\in\{2,3,4,5\}$. Let be further A_2, A_3, A_4, A_5 non-incident with b_1. Put $A_1A_2\cap A_4A_5=U$, $A_3A_4\cap b_1=W$, $A_2A_3\cap UW=V$, $b_1\cap A_5V=X$. If it were $X=A_1$, then would be $P(A_1b_1A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$ because of the collinearity of the points $b_1\cap A_3A_4=W$,

$A_1A_2 \cap A_4A_5 = U$, $A_2A_3 \cap A_5A_1 = V$. But, then $A_1b_1A_1$ would be a flag of p, which is in contradiction with $b_1 \neq a_1$. Therefore, we have $X \neq A_1$. The points $A_1A_2 \cap A_4A_5 = U$, $A_2A_3 \cap A_5X = V$, $A_3A_4 \cap XA_1 = W$ are collinear and we have $P(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, X)$, i.e. $X \in p$. Let now X' be a point such that $X' \mathtt{I} b_1$ and $X' \in p \setminus \{A_1\}$. Because of non-collinearity of any three different points of p it follows necessarily $X' = X$.

Theorem 6.4 implies that any Pascal or Brianchon set contains $n+1$ points resp. lines, where n is the order (finite or infinite) of the projective plane.

In virtue of Theorem 6.4 we can define two new notions.

Let (A, a) be a flag of a Pascal-Brianchon set (p, b). If c is any line such that $A \mathtt{I} c$ and $c \neq a$, then the point X such that $X \mathtt{I} c$ and $X \in p \setminus \{A\}$ is said to be *the second intersection* of the line c with the Pascal set p. If $c = a$, then we say that A is the second intersection of the line c with p. If C is any point, such that $C \mathtt{I} a$ and $C \neq A$, then the line x such that $C \mathtt{I} x$ and $x \in b \setminus \{a\}$ is said to be *the second tangent* from the point C onto the Brianchon set b. If $C = A$, then we say that a is the second tangent from the point C onto b.

We shall say that the simple 6-points $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, $A_1a_1A_1A_2A_3A_4A_5$, $A_1a_1A_1A_2a_2A_2A_3A_4$, $A_1a_1A_1A_2A_3a_3A_3A_4$, or $A_1a_1A_1A_2a_2A_2A_3a_3A_3$ are *inscribed* resp. that the simple 6-lines $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$, $a_1A_1a_1a_2a_3a_4a_5$, $a_1A_1a_1a_2A_2a_2a_3a_4$, $a_1A_1a_1a_2a_3A_3a_3a_4$ or $a_1A_1a_1a_2A_2a_2a_3A_3a_3$ are *circumscribed* to a Pascal-Brianchon set (p, b) if $A_i \in p$ and $a_i \in b$ for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Now, the definitions of various types of Pascal and Brianchon sets and of tangents of Pascal sets or of points of contact of Brianchon sets imply:

Theorem 6.5 *(generalized Pascal theorem)*
A simple 6-point is a Pascalian 6-point iff it is inscribed to a Pascal-Brianchon set.

Theorem 6.6 *(generalized Brianchon theorem)*
A simple 6-line is a Brianchonian 6-line iff it is circumscribed to a Pascal-Brianchon set.

References

[1] LIEBMANN H., *Synthetische Geometrie*, Teubner, Leipzig-Berlin, 1934.

[2] VOLENEC V., "Projective definition of conic without use of theory of projectivities", Glasnik Mat. 12(32)(1977), 323-326.

Vladimir Volenec
Dept. of Mathematics
Faculty of Natural Sciences, University of Zagreb
Bijenička 30, Zagreb, Croatia
e-mail: volenec@math.hr

Pregledni rad
Prihvaćeno 8. 12. 2003.

JOSIP DVORNIK

Metode rješavanja problema pomoću računala

Computer Methods for Problem Solving

ABSTRACT

There are a lot of computer methods for solving mathematical and other problems. Generally, they can be classified into numerical, symbolic and analytic, as well as heuristic methods which may include "artificial intelligence". For different problems, different approaches are needed. In recent years the development of all the three groups of methods has been very fast. Owing to an increasing number of hybrid methods which combine analitic, numerical and heuristic approach, some very difficult problems have been solved successfully.

Key words: artificial intelligence, heuristic methods, numerical methods, problem solving, symbolic method

MSC 2000: 68T20

Metode rješavanja problema pomoću računala

SAŽETAK

Postoji mnogo metoda za rješavanje matematičkih i ostalih problema uz pomoć računala. Mogu se uglavnom podijeliti na numeričke, simboličke i analitičke te heurističke metode u koje se može uključiti i "umjetna inteligencija". Različiti problemi zahtijevaju i različit pristup rješavanju. U sve tri grupe metoda vidi se velik napredak iz godine u godinu. Postoji i sve više hibridnih metoda, koje kombiniraju analitički, numerički i heuristički pristup i kojima su već uspješno rješeni i neki vrlo teški problemi.

Ključne riječi: heurističke metode, numeričke metode, rješavanje problema, simboličke metode, umjetna inteligencija

1 Uvod

Prve su vijesti o elektroničkim računalima bile pune dezinformacija i doživljavale su se kao znanstvena fantastika. No u manje od pola stoljeća računala su postala nezaobilazno pomagalo. Njihovim se mogućnostima još i danas često začudimo. U znanstvenom se radu i tehnici upotrebljavaju na mnogo načina. Informacije su brže dostupne nego ikada ranije. Omogućena je suradnja među znanstvenicima koji žive na udaljenim djelovima svijeta a osobno se ni ne poznaju. Dogodile su se velike promjene u pisanju, organiziranju i prelamanju tekstova. Moguća su automatska mjerenja različitih pojava uz gotovo trenutnu obradu rezultata i prikaz na ekranu u dalekom gradu. Grafičke mogućnosti računala su velike a grafički hardver i softver se i dalje brzo razvija, a to je čitaocima ovog časopisa dobro poznato.

U ovom se pregledu ne namjeravamo baviti svim navedenim i nenavedenim primjenama računala u istraživanjima nego ćemo se ustredotočiti na upotrebu računala pri rješavanju matematičkih i ostalih problema te njihove primjene.

Problemi koje rješavamo su vrlo raznovrsni. Neki su od njih dobro definirani i imaju jedno ili nekoliko diskretnih rješenja. U nekima se rješenje može odrediti u prihvatljivom vremenu. Kod nekih drugih problema vrijeme traženja točnog rješenja bi i na najbržem računalu bilo tako dugo da se moramo zadovoljiti najboljim dohvatljivim približnim rješenjem. Ima i problema kod kojih je skup rješenja kontinuiran pa pokušavamo naći najbolje. Ima čak i takvih problema kod kojih je granica između rješenja i ne-rješenja nejasna, pa ih prije svega treba preciznije formulirati.

Navest će se tri grupe metoda koje imaju primjenu u rješavanju problema pomoću računala. To su:

- Numeričke metode
- Simboličke i analitičke metode
- Heurističke metode i "umjetna inteligencija"

Postoje i druge metode, primjerice eksperimentalne, koje se neće spominjati u ovom pregledu.

2 Numeričke metode

Danas se najveća primjena računala u matematici i tehnici odnosi na numeričke metode. One potiču već od početaka ljudskih civilizacija. Računanjem su se bavili matematičari starih naroda: Egipćani, Babilonci, Indijci, Feničani, Kinezi, Azteci, Maje itd. No njihovo računanje se još ne može nazvati numeričkom metodom, jer su se upotrebljavali nedokazani empirijski postupci. Sustavni početak numeričkih metoda je započeo u antičkoj Grčkoj. Grčki matematičari su uveli pojam algoritma. Od mnogih njihovih algoritama spomenut će se Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere više brojeva i *Eratostenovo sito*- algoritam za određivanje niza prim brojeva. Arhimed je shvatio pojam limesa i pojam integrala premda ih nije strogo formalizirao - primjerice interpretirao je površinu kruga kao graničnu vrijednost niza površina upisanih i opisanih pravilnih poligona.

Na žalost, Grčki su matematičari (isključujući neke, primjerice Arhimeda koji je ujedno bio i inženjer) imali elitistički stav prema matematici. Primjenu na rješavanje praktičkih problema smatrali su srozavanjem uzvišene znanosti, a numeričke metode manje vrijednim "nužnim zlom". Taj negativan odnos prema numeričkim metodama ni do danas nije posve nestao.

Kasnije je ipak glavni motiv razvoja numeričkih metoda bila primjena na mnoga područja znanosti i tehnike. Od matematičara i fizičara koji su se uz ostalo bavili i tim metodama navodimo nekoliko: Fibonacci, Newton, Fermat, Descartes, Gauss, Euler, Pascal, Laplace, Lagrange, Fourier, Rayleigh, Poincaré, Ljapunov, Courant... Navodimo i neke nematematičare od mnogih koji su dali veliki doprinos: Bairstow (aerodinamičar), Seidel (astronom), Richardson i Lorenz, (meteorolozi), Aitken (statističar), Pareto (ekonomist) ... Njihove su ideje matematičari preuzeli te ih strože formulirali, dokazali i poopćili. Izvorni autori ne bi više prepoznali svoje ideje.

Računala su dala numeričkim metodama novi impuls. Mnoge metode poznate od ranije, znatno su se usavršile i upotrijebile za rješavanje vrlo složenih problema.

Primjerice, iako je Gaussov algoritam eliminacije za rješavanje sustava linearnih jednadžbi bio dobro poznat među matematičarima i inženjerima, za čovjeka oboružanog papirom i olovkom bilo je vrlo teško riješiti sustav od desetak linearnih jednadžbi, a rješenje sustava od dvadeset jednadžbi je bio pravi podvig.

Uz pomoć suvremenih računala ni sustavi od nekoliko milijuna nelinearnih jednadžbi ne predstavljaju nesavladivu prepreku (Ipak nije svejedno o kakvom se tipu nelinearnosti radi. Za razne tipove se upotrebljavaju različite metode.) NASA je pred tridesetak godina najavila do kraja dvadesetog stoljeća numeričko rješenje sustava od oko milijardu jako nelinearnih jednadžbi, nastalih modeliranjem strujanja zraka oko avionskog krila. Nepoznanice su diskretizirane veličine koje opisuju turbulentno strujanje zraka, ali i veličine koje opisuju pomake krila od dinamičkog opterećenja turbulentnim strujanjem. Oscilacije krila i strujanje zraka su međusobno zavisni, pa jednadžbe treba rješavati kao cjeloviti sustav. Ne znamo je li NASA-ino predviđanje ostvareno, ali ako i nije to će se bez sumnje uskoro dogoditi.

Bilo je metoda koje su se razvijale u teoriji u predkompjutorsko vrijeme ali su bile zbog opsežnih proračuna jedva primjenjive. Tek s računalima su mnoge od njih uspješno realizirane. Osobito je veliku primjenu u inženjerstvu doživjela metoda konačnih elemenata (MKE). Ideja je, koliko je poznato, potekla od Couranta, ali se u to vrijeme mogla primijeniti samo na jednostavne i male školske primjere. Danas se uspješno primjenjuje na sve linearne i nelinearne probleme matematičke fizike s primjenom u tehnici. Teorijskim istraživanjima, numeričkim eksperimentima i inženjerskim iskustvom je utvrđeno da MKE usprkos velikih prednosti ima nedostataka, pa se osim poboljšanja MKE, u novije vrijeme razvijaju i mnoge alternativne metode.

3 Simboličke i analitičke metode

Računala su potakla i renesansu analitičkih i simboličkih metoda. Idejama automatske primjene tih metoda su se bavili već Babbage i Turing prije pojave elektroničkih računala. Babbage je proizveo mehanički kompjutor s kojim se nije moglo baš mnogo računati zbog neprekidnog kvarenja, ali je to ipak bio važan početak. Turing je kasnije izumio matematički model računala - *Turingov stroj*. Iako autor nije ni zamislio da se taj stroj "materijalizira", uz njegovu su pomoć formulirana načela rada računala koja u velikoj mjeri vrijede i danas.

Brzo nakon pojave računala pojavio se programski jezik LISP s kojim su se mogli rješavati simbolički problemi. Ubrzo zatim se pojavio i logički jezik PROLOG, a nakon toga još veliki broj drugih simboličkih i logičkih jezika. LISP je danas još uvijek u intenzivnoj upotrebi, dok je PROLOG u najnovije vrijeme zamijenjen novim još jačim, ali i još apstraktnijim i složenijim logičkim programskim jezikom *Gödel*.

Neće se ovdje nabrajati svi programski jezici kojima se mogu rješavati simbolički problemi, ali treba navesti da danas postoje i vrlo razvijeni matematički paketi, od kojih se ističu *Mathematica*, *Maple* i MACSYMA. Ti paketi sadrže veliki broj matematičkih funkcija, algoritama i transformacija. Uz pomoć tih paketa mogu se pojednostaviti matematički izrazi, analitički derivirati, rješavati određeni i neodređeni integrali te obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe itd. Ako se neki problem ne može riješiti analitički, bilo zbog toga što je to načelno nemoguće bilo zbog toga što neki postupci još nisu implementirani u programski paket, može se odmah preći na numerički proračun. Prije pojave tih paketa često je važni i vremenski zahtjevni dio posla kod izrade magistarskih radova i doktorata iz matematike, prirodnih i tehničkih znanosti sadržavao međusobno množenje ili potenciranje polinoma, supstituciju matematičkih izraza umjesto varijabli u drugim izrazima, deriviranje i integriranje složenih funkcija i slično. Isti je postupak trebalo ponavljati i provjeravati nekoliko puta zbog grešaka. Upotrebom tih paketa to su postale automatske operacije koje se mogu napraviti brzo i bez pogrešaka. Paket *Mathematica* se već dugo upotrebljava u Hrvatskoj.

Iako ne postoji dokaz da nova verzija paketa *Mathematica* može riješiti sve analitički rješive integrale, nije do sada nađen ni jedan protuprimjer, premda su prema navodima autora paketa - firme Wolfram Research, ispitani svi primjeri iz svih poznatih i dostupnih zbirki integrala i još mnogo integrala - generiranih na računalu deriviranjem složenih izraza i različitim transformacijama, pa im je analitičko rješenje unaprijed poznato. Naravno, kako znamo, za mnoge se integrale može dokazati nemogućnost analitičkog rješenja elementarnim funkcijama. Njih ne može analitički riješiti ni *Mathematica* ni bilo koji drugi paket.

Navedenim se paketima mogu rješavati obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe, za koje do sad nije bilo poznato rješenje. Primjerice, u zadnjih desetak godina je otkriveno najmanje dvadesetak do nedavno nepoznatih analitičkih rješenja Plateauovog problema minimalne plohe. Minimalna ploha je oblik koji bi poprimila opna od sapunice razapeta na žicu oblika zadane prostorne krivulje. Rješenja zadovoljavaju Lagrangeovu nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu. Nije se ni slutilo da postoji toliki broj analitičkih rješenja. Bez računala taj bi posao bio mnogo teži.

Također se u posljednje vrijeme unutar spomenutih paketa razvijaju programi za automatsko dokazivanje matematičkih teorema i postignuti su već mnogi zanimljivi rezultati. Na početku se upisuju aksiomi koje program smije upotrijebiti te hipoteza koju treba dokazati ili oboriti. Korake dokaza računalo ispisuje u jeziku razumljivom matematičarima, pa ih specijalist za konkretno područje može provjeriti. Naravno, događa se da neku tvrdnju program ne može ni dokazati ni oboriti. Iako će napretkom softvera i napretkom matematike kao znanosti takvih ”neodlučenih” slučajeva biti sve manje, posve je sigurno da ih neće nikad posve nestati. Gödel je dokazao da postoje neodlučive tvrdnje koje se u načelu ne mogu (i nikada neće moći) matematičkim metodama ni dokazati ni oboriti. Najteže dokaze ipak će još dugo (možda i uvijek) morati provoditi ljudi sa svježim idejama, ali će im računala višestruko ubrzati i olakšati rad.

Do sad je ponovljeno mnogo poznatih dokaza, primjerice teorema iz euklidske planimetrije i stereometrije, a već su u ”suradnji” čovjeka i računala dokazani neki do nedavno nedokazanih teških matematičkih teorema.

Mathematica sadrži vrlo djelotvorni programski jezik s funkcijskim, simboličkim, numeričkim, logičkim, grafičkim i ostalim naredbama. Sadrži i naredbe visoke razine, tako da je moguće pisanje vrlo kratkih programa. Treba reći da je za učinkovito programiranje u jeziku *Mathematica* potrebno više znanja iz teorije koja se upotrebljava i više vještine programiranja nego za primjenu proceduralnih kompjutorskih jezika. No trud uložen u učenje se višestruko isplati.

4 Heurističke metode i “umjetna inteligencija”

Kao treća ”grana” razvijaju se heurističke metode i metode tzv. ”umjetne inteligencije”, koje već sada imaju zanimljivu i vrlo uspješnu primjenu u mnogim područjima tehnike, medicine, ekonomije, biologije, ratnih operacija itd.

Heurističke se metode redovito upotrebljavaju i u svakodnevnom životu. Kad idemo na posao nastojimo odabrati najbolju varijantu: hoćemo li ići tramvajem, automobilom ili pješice? Odlučujemo i kojim je putem najbolje proći. Odluke ćemo donjeti bez proračuna i mjerenja situacije na terenu. Ponekad imamo djelomične podatke. (Primjerice, saznali smo preko radija da je na glavnoj ulici zastoj zbog prometne nesreće.) Pomoću podataka i iskustva od prije nastojat ćemo “od oka” procijeniti optimalno rješenje.

Kad nešto kupujemo odlučit ćemo prema (vizualno procijenjenoj) kvaliteti, cijeni, imenu proizvođača, vlastitom estetskom kriteriju, itd.

Odluke donosimo u svakodnevnom životu pomoću grubih procjena koje ne možemo nazvati “metodama”. Ipak ako slični pristup želimo automatizirati za rad na računalu, moramo definirati sustavni postupak koji tada ipak postaje metoda.

Programi ipak još daleko zaostaju za ljudskim mozgom jer moraju raditi po unaprijed definiranim pravilima. Istina je da postoje i programi koji mogu mijenjati svoja pravila, ali samo prema zadanim još složenijim ”meta-pravilima” - pravilima za promjenu pravila koja su ipak napisali programeri. Možda čak postoje ili će uskoro postojati i programi koji mogu mijenjati i ”meta-pravila” prema zadanim ”meta-meta-pravilima”. Ne bismo se usudili proricati budućnost i tvrditi da se jednog dana, možda i prije nego što itko očekuje, neće pojaviti doista inteligentni strojevi. A možda inteligencija i nije ništa drugo nego veliki broj hijerarhijskih sve složenijih ”meta-meta-meta...-pravila” različitih razina? Prema mišljenju Douglasa R. Hofstadtera - koje se čini uvjerljivim, prava umjetna inteligencija bi trebala započeti modeliranjem podsvjesti i definiranjem ”najnižeg” programskog jezika na toj razini. U tom bi jeziku trebalo izprogramirati slijedeći ”sloj” u kojemu bi se modelirao malo viši stupanj svijesti i definirati viši i apstraktniji programski jezik. Takva koncepcija bi se rekurzivno nastavljala. Svaki bi se ”sloj” naslanjao na prethodni, a u njemu bi bio sadržan programski jezik viši od prethodnoga. Nakon desetak slojeva moglo bi se možda već govoriti o pravoj inteligenciji.

Mi ipak nećemo više teoretizirati o modeliranju inteligencije nego o metodama koje se već danas upotrebljavaju. Dat će se pregled tih metoda bez pretenzije na potpunost.

Primjene su npr. automatsko prevođenje, razumijevanje govora i pisma, prepoznavanje slika, orijentacija u prostoru, automatsko upravljanje vozilima i strojevima, medicinska dijagnostika, nalaženje rudnih ležista iz morfoloških podataka o terenu, optimalizacija raznih sustava, čak i komponiranje glazbe itd.

Općenito, heurističke metode i metode umjetne inteligencije su osobito prikladne za rješavanje ”mutnih” problema, koji se ne mogu dobro matematički formulirati, kao što je primjerice već spomenuta medicinska dijagnostika i nalaženje lokacija potencijalnih rudnih ležiata iz podataka o konfiguraciji terena. Upotrebljavaju se i za dobro definirane probleme koji bi se u teoriji mogli rješavati matematičkim metodama, ali se od toga odustaje zbog nedostatka ili nepouzdanosti podataka.

Druga važna klasa problema za koje se intenzivno primjenjuju metode umjetne inteligencije su problemi opterećeni tzv. "kombinatoričkom eksplozijom". To su problemi za koje je poznat egzaktni matematički algoritam, ponekad je čak i jednostavan, ali bi njegova primjena kad je broj nepoznanica velik, zahtijevala neostvarivo mnogo vremena. Poznati je primjer kombinatoričke eksplozije igranje šaha. Nije posebno teško napisati na nekom programskom jeziku algoritam koji bi pretraživanjem svih varijanata do kraja partije egzaktno odredio najbolji potez, ali realizacija takvog algoritma nije moguća u stvarnosti, zbog golemog broja varijanata koje bi trebalo istražiti, koje mnogostruko nadmašuju mogućnosti bilo kojeg računala. A treba priznati da šah po broju podataka i mogućih varijanata ne pretstavlja naročito veliki problem - postoji samo 64 polja i 32 figure. Problemi koji se pojavljuju u drugim djelatnostima, npr. u automatskom projektiranju, često su veći za mnogo redova veličine, jer imaju neusporedivo više varijabli i njihovih mogućih vrijednosti. U literaturi se navode primjeri koji po formulaciji izgledaju prilično bezazleno, ali bi za njihovo egzaktno rješavanje na nekom budućem računalu mnogo djelotvornijem od današnjih, trebalo mnogostruko više vremena od sadašnje starosti svemira. Naravno da se mora odustati od rješavanja takvog problema pretraživanjem svih mogućnosti.

Metodama umjetne inteligencije nastoji se eliminirati pretraživanja za koja se približnim rezoniranjem može zaključiti da vjerojatno ne sadrže optimum. Tako se dobivaju rješenja u prihvatljivom vremenu, ali se ne može dokazati da su "apsolutno" najbolja. Samo se može tvrditi da su tako dobivena rješenja s vrlo velikom vjerojatnošću mnogo bolja od rješenja koja bismo mogli postići bez primjene tih metoda. Ako opet uzmemo primjer iz šaha, program će odrediti potez koji samo slučajno može biti egzaktno najbolji, ali je vjerojatno najbolji koji se može odrediti na raspoloživom kompjutoru odabranim programom u raspoloživom vremenu. Ni šahovski velemajstor ne može jamčiti da je njegov potez apsolutno najbolji - osim u slučajevima kad je rješenje jednostavno - primjerice kad je moguć forsirani matni napad ili pat te često u završnici kad je jako reduciran broj figura na ploči, pa se ipak mogu analizirati sve mogućnosti.

Treća se klasa odnosi na pojednostavljeno i ubrzano rješavanje vrlo složenih problema. Neki problem bi se mogao jedamput točno riješiti u prihvatljivom, ali dosta dugom vremenu. U procesima optimalizacije takav bi problem trebalo rješavati mnogo puta pa trajanje proračuna postaje ipak neprihvatljivo dugo. Zato prihvaćamo aproksimacije dobivene pojednostavljenim metodama. Zbog složenosti problema i pisanje programa bi dugo trajalo uz mnoge pogreške.

Navest će se nekoliko heurističkih metoda i metoda umjetne inteligencije upotrebljivih za široku klasu problema optimalizacije, bez pretenzije na potpunost:

4.1 Metode Monte Carlo

Umjesto sustavnog pretraživanja čitavog područja definicije problema, pretražuju se samo "slučajno" odabrane točke u tom području, pa se traži optimum među tim točkama. ("Slučajno" na računalu najčeće znači kvazislučajno što se postiže pomoću determinističkih algoritama "generatora slučajnih brojeva". Postoje doduše i hardverski generatori pravih slučajnih brojeva zasnovani na radioaktivnom raspadu nekih materijala ili na električnom iskrenju itd. Slučajni brojevi asociraju na kockarnicu - odatle je i naziv *Monte Carlo*). Često se tako odabrane točke upotrebljavaju kao početni uvjeti za lokalnu matematičku optimalizaciju. Postoji mnogo varijanata metoda *Monte Carlo*. Neke od njih se zasnivaju na slučajnim perturbacijama postignutih lokalnih optimuma u tijeku prethodnog pretraživanja.

Zapravo veliki broj metoda umjetne inteligencije upotrebljava metodu *Monte Carlo* kao jednu od svojih komponenata u trenutku donošenja odluka.

4.2 Ekspertni sustavi

Te se metode služe pravilima kojima oponašaju odluke živog eksperta. Pravila se određuju u suradnji s više živih stručnjaka, a mogu se i automatski određivati na primjerima. Ekspertni sustavi su se pokazali djelotvornima u medicinskoj dijagnostici, geološkim prognozama, generiranju osnovnih varijanata projekata izborom postojećih rješenja iz kataloga i mnogim drugim primjenama.

4.3 Neuralne mreže

Sastoje se od sustava čvorova i veza između njih čime se nastoji simulirati osnovno funkcioniranje mozga - ljudskog ili životinjskog. U većini slučajeva do sada nisu realizirani hardverski nego softverski. To su posebni programski paketi. Razvijaju se i posebna hardverska neuralna računala koja će kad dođu do praktične primjene moći raditi mnogo brže. Neuralne mreže se ne programiraju nego uče na primjerima. "Pokazuju" im se primjeri i rješenja tih primjera, pa neuralna mreža može automatski "zaključiti" po kojim se pravilima mogu odrediti ispravna rješenja. Slijedeće primjere program rješava samostalno pri čemu upotrebljava tako naučena pravila. Područje djelotvorne primjene neuralnih mreža je približno jednako području primjene ekspertnih sustava: medicinska dijagnostika, geološke prognoze, prepoznavanje oblika itd.

4.4 Fuzzy logika

Postoje sustavi s tzv. "mutnom" logikom. Po klasičnoj logici neka smislena tvrdnja može biti ili istinita ili lažna. Prema mutnoj logici tvrdnja nije posve istinita ni pove lažna, nego joj se može pripisati "stupanj istinitosti". Npr. neki predmet nije ni potpuno svjetao ni potpuno taman nego je 40% svjetao i 60% taman. Uvedena su pravila za baratanje s tom logikom, koja pretstavljaju poopćenje normalne Aristotelove logike i Booleove algebre. Neki se problemi mnogo brže i lakše približno rješavaju pomoću takve formulacije nego pomoću klasične logike. Ta se metoda pokazala kao vrlo uspješna, posebno za probleme automatskog upravljanja u realnom vremenu, kad je potrebno vrlo brzo odrediti približno rješenje. Primjeri su automatsko određivanje potrebne ekspozicije filma na foto aparatu kad je jedan dio slike u mraku a drugi dobro osvjetljen, ili prilagođavanje rada semafora trenutnoj situaciji u prometu. Kad se primjenjuje na optimalizaciju mutna se logika često primjenjuje u kombinaciji s drugim determinističkim i probabilističkim algoritmima.

4.5 Genetički algoritmi

Genetički algoritmi su inspirirani Darwinovom teorijom prirodne selekcije: U ”nultom koraku” se pomoću generatora slučajnih brojeva generira ”populacija” potencijalnih rješenja koja zadovoljavaju propisana ograničenja i koja se nazivaju ”genomi”. Između njih se odabere podskup odabranog broja najboljih. Najbolja rješenja su ona koja imaju najmanju vrijednost funkcije cilja. Svako od tih rješenja je definirano odabranim brojem ”gena”. U sljedećim koracima se generiraju ”potomci” koji od svakog roditelja nasljeđuju dio genetskog koda. Kod toga ne treba doslovno kopirati prirodu pa svako ”dijete” može imati i više od dva ”roditelja”. Također za razliku od prirode, rješenja koja su dovoljno dobra ne stare i ne umiru, nego mogu ”živjeti vječno”. Unija skupa ”roditelja” i skupa ”potomaka” čini novi zajednički skup iz kojega se opet odabire podskup najboljih. Osim ”križanja” predviđene su i ”mutacije” - slučajne promjene vrijednosti nekog gena. To je uvedeno zbog toga da se u konačnom rješenju omogući pojava i onih gena koje nema ni jedan od roditelja, a koji mogu dovesti do boljeg rješenja. Radi još veće raznolikosti mogu se uključiti i novi slučajni genomi koji nisu dobiveni modifikacijom starih. Oni se zovu ”imigranti”. Algoritam nema definiran kraj, nego se postupak može uvijek nastaviti. Ipak nakon izvjesnog broja koraka nova poboljšanja postaju vrlo rijetka i numerički gledano malena, pa se postupak obično prekida po nekom kriteriju. Genetički algoritmi se s velikim uspjehom primjenjuju za mnoge vrste problema, a osobito kombinatoričke optimalizacije, a čak i za probleme diskretizirane kontinurane optimalizacije.

Kao i u ostalim metodama umjetne inteligencije, još brže se dobivaju dobri rezultati ”nečistim” postupkom u kojem se genetski algoritam kombinira s nekom od klasičnih tehnika optimalizacije: Svako od rješenja dobiveno u tijeku genetskog algoritma postaje početni uvjet za lokalni postupak klasične matematičke optimalizacije, primjerice gradijentnom metodom.

Lokalni optimumi dobiveni tim postupkom ponovo ulaze u novi korak genetskog algoritma. Dakle ”djeca” se generiranju ”križanjem roditeljskih genoma”, mutacijama i matematičkom optimalizacijom.

4.6 Evolucijsko programiranje

Zanimljivo je da se postupak sličan genetskom algoritmu može primijeniti i na izradu kompjutorskih programa. ”Geni” u tom programu su različite programske naredbe. Na početku se generiraju slučajni nizovi naredbi uz provjeru sintakse - programi. Program koji za više zadanih setova ulaznih podataka dobiva više ispravnih rezultata ocjenjuje se kao bolji. Među programima se provode postupci ”križanja” i ”mutacije” te se odabire skup najboljih koji preživljavaju.

Istovremeno se provodi slična simulacija prirodne selekcije među setovima ulaznih podataka. Najbolji set ulazih podataka je onaj koji je najkritičniji, odnosno onaj na kojemu najviše programa daje pogrešne rezultate.

Ako neki program zadovoljava sve takve evoluirane setove podataka, znači da prolazi test.

Tako u toku ”evolucije” programi zadovoljavaju sve više sve strožih testova. Na kraju procesa preostaju samo programi koji su ispravno rješili sve testove, pa se konačni pobjednik određuje između njih po nekom drugom kriteriju, npr. brzini. Naravno, nikada nije posve sigurno da ne postoji neki neotkriveni test na kojemu bi i taj pobjednik ”pao na ispitu”. No i programima koje su napisali ljudi se ponekad i nakon više godina ispravnog rada pojavi pogrešno rješenje za neki skup ulaznih podataka.

Vrijeme evolucijskog programiranja je za neke tipove problema mnogo kraće nego pisanje konvencionalnog programa koji rade programeri, ali su programi gotovo nečitljivi za ljude.

4.7 Simulirano kaljenje

Taj je algoritam inspiriran poboljšanjem svojstava metala preslaganjem atoma na visokoj temperaturi za vrijeme kaljenja. Počevši od slučajnog ili drugim metodama nađenog inicijalnog rješenja pokušava se slučajnim varijacijama tog rješenja naći bolje. Pri tome se dopušta i pogoršanje u pojedinim koracima, da bi se izišlo iz lokalnog minimuma. U tijeku postupka se postepeno snizuje ”temperatura” (što znači da se slučajne varijacije smanjuju). Matematičkim riječnikom simulirano kaljenje se može opisati kao nestacionarni Markovljev lanac u diskretnom vremenu. Najnovije varijante algoritma automatski popravljaju parametre optimalizacije za vrijeme proračuna prema ”iskustvu” iz dosadašnjeg tijeka procesa.

4.8 Tabu algoritam

Jednostavni algoritmi probabilističkog i heurističkog pretraživanja dopustivog područja (Monte Carlo, simulirano kaljenje itd.) često ne konvergiraju ili sporo konvergiraju zbog višestrukog pretraživanja već pretraženih dijelova dopustivog područja te se pojavljuju beskonačni ciklusi. Tabu algoritam sprema podatke o povjesti već obavljenog pretraživanja, pa ne dopušta ponovno posjećivanje istih dijelova područja. Na taj se način istražuje uvijek novi dio područja, zbog čega raste vjerojatnost nalaženja globalnog optimuma. Taj se algoritam najčešće kombinira s drugim metodama.

4.9 Mravlja kolonija

Mravi, termiti, pčele i ose imaju svojstvo tzv. "kolektivne inteligencije". Zadržimo se na primjeru mrava. Mravi svakog dana izlaze iz mravinjaka u potrazi za hranom. Prva skupina mrava su "izviđači". Oni lutaju nasumce i ostavljaju kemijski "feromonski trag" po kojemu ih ostali mogu slijediti. Onaj mrav koji prvi slučajno nađe hranu vraća se u mravinjak udvostručujući svoj trag. Ostali mravi kreću po tom tragu i dodatno ga pojačavaju svojim tragom. Oni mravi iz prve skupine koji nisu našli hranu ili su ju našli daleko od mravinjaka vraćaju se kasnije. Njihov je trag slabiji jer po njemu još nisu išli drugi mravi. S vremenom sve više mrava ide po najjačem tragu do najboljeg nalazišta hrane. Neki od njih u međuvremenu otkriju kraći put do cilja koji po istom algoritmu prihvaćaju i ostali. Tragovi s vremenom isparuju, pa se lošiji putevi kojima ide manje mrava postepeno "zaboravljaju". Tako kolonija mrava zajednički nalazi optimalni put.

Ovaj algoritam je najprije vrlo uspješno simuliran na računalu. Kasnije je i usavršen napuštajući analogiju s mravljom kolonijom, jer kopiranje mrava nije bilo cilj. U najnovije se vrijeme poboljšava u kombinaciji s genetskim algoritmom i sa strogim matematičkim metodama.

4.10 Celularni automati i metoda perkolacije

Često se različite pojave na kontinuumu ili na nepravilnoj mreži mogu dobro aproksimirati idealiziranim diskretnim pojavama na pravilnoj mreži. Mreža može biti kvadratna, ali i općenito romboidna, trokutna i šesterokutna. Pojava se opisuje u diskretnim vremenskim koracima, a prelaz s jednog koraka na drugi je definiran jednostavnim pravilima, koja mogu biti deterministička ili probabilistička. Na taj se način može modelirati razmnožavanje bakterija na hranjivoj podlozi, pritisci u zrnatom materijalu, širenje šumskih požara, širenje epidemija raznih bolesti, procjeđivanje vode kroz sustav pukotina, difuzija itd.

4.11 Čovjek u petlji

Mnoge od navedenih i drugih metoda optimalizacije se mogu još više unaprijediti i ubrzati, ako se omogući da čovjek donosi odluku na kritičnim mjestima u algoritmu. Stručnjak može iskoristiti svoju (prirodnu) inteligenciju, znanje, iskustvo i intuiciju da spriječi pretraživanje onih djelova područja u kojima je mala vjerojatnost postizanja pravog rješenja. Ljudska odluka najčešće mnogostruko ubrzava konvergenciju pri određivanju približnog optimuma. Neki programi u kritičnim trenucima postavljaju pitanja stručnjaku, a njegov odgovor usmjeruje nastavak pretraživanja.

Treba na kraju istaknuti da se metode umjetne inteligencije nažalost vrlo često (zlo)upotrebljavaju za probleme koje bi bilo mnogo lakše riješiti bez njih. To se često radi čak i (ne)namjerno. Neki zadatak koji se može lako i brzo riješiti poznatim determinističkim matematičkim metodama postaje mnogo nerazumljiviji i "znanstveniji" ako se rješava pomoću "umjetne inteligencije". Nije čak uopće važno jesu li rezultati ispravni. Često se to radi pomoć nekog softverskog paketa za onu metodu umjetne inteligencije koja je trenutno u modi, a koju korisnik najvjerojatnije ni ne razumije i tako se proizvede "izvorni znanstveni rad". Ima recenzenata koji ne žele priznati da nikad nisu ni čuli za novu metodu, pa im je najjednostavnije prihvatiti takav rad. Neki su autori čak metodama umjetne inteligencije rješavali sustave algebarskih jednadžbi, što je jedan od problema najprikladnijih za standardne determinističke matematičke postupke a ujedno i izrazito neprikladnih za primjenu umjetne inteligencije.

5 Zaključak

U različitim primjenama ima mnogo bitno različitih tipova problema. Metode rješavanja su vrlo raznovrsne. Za svaki je tip problema prikladna različita metoda. Ako mislimo na rješavanje na računalu metode možemo podijeliti na numeričke, simboličke-analitičke te heurističke i metode umjetne inteligencije. Unutar svake od spomenutih klasa je veliki broj metoda, koje se nisu mogle pojedinačno analizirati. Sadšanji je trend kombiniranje više tipova metoda, jer se time najdjelotvornije pronalaze dobra rješenja.

Literatura

[1] ARANTES E OLIVEIRA, E.R., BENTO, J., "The Sense of Progress in Structural Engineering", Development of Knowledge-Based Systems for Engineering, Springer-Velag, New York, Wien, 1998.

[2] DVORNIK, J., "Razvoj matematičkih modela inženjerskih problema", GRAĐEVINAR 42(1990)12,507-516

[3] DVORNIK, J., "Numeričke, simboličke i heurističke metode", GRAĐEVINAR 55(2003)10, 575-582 37-58

[4] HOFSTADTER, D. R., *Gödel, Esher, Bach: An eternal golden braid*, Penguin Books, 1979.

[5] MOREY, C., SCALES, J., VAN VLECK, E. S., "A Feedback Algorithm for Determinig Search Parameters for Monte Carlo Optimization", Journal of Computational Physics 146(1998), 263-281

[6] O'SHEA, T., EISENSTADT, M., *Artificial Intelligence*, Harper & Row, 1984.

Josip Dvornik
Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-mail: dvornik@grad.hr

Stručni rad
Prihvaćeno 4. 12. 2003.

JASNA KOS -MODOR, EMA JURKIN

Sloj

The Layer

ABSTRACT

The layer is the basic unit of sediment rocks. In the projection with heights the presentation of the regular layer limited with two parallel planes is shown. Profile of the layer is constructed and the thickness and inclination of layer are determined. Two cases of setting and solving the layer are demonstrated.

Key words: projection with heights, layer, outcrop line, thickness of layer

MSC 2000: 51N05

Sloj

SAŽETAK

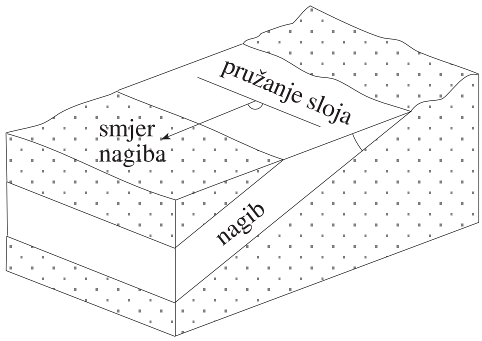
Sloj je osnovna jedinica sedimentnih stijena. U kotiranoj projekciji dan je prikaz pravilnog sloja omeđenog dvjema paralelnim ravninama. Konstruiran je profil sloja i određeni su debljina i nagib sloja. Pokazana su dva slučaja zadavanja i rješavanja sloja.

Ključne riječi: kotirana projekcija, sloj, izdanak, debljina sloja

Sedimentne stijene, odnosno taložine ili sedimenti, nastaju na površini ili blizu površine Zemlje određenim biološkim, fizikalnim, kemijskim i geološkim procesima [5]. Istraživanje i proučavanje sedimentnih stijena pokazuje njihovu veliku važnost za čovječanstvo [4]. Iz sedimentnih stijena dobiva se približno $85-90\%$ svih mineralnih sirovina u svijetu kao na primjer nafta, prirodni plin, ugljen, aluminij, željezo itd.

Sloj je osnovna jedinica sedimentnih ili taložnih stijena [5]. Definira se kao geološko tijelo uglavnom jednoličnog sastava i strukture koja nastaje kontinuiranim taloženjem pri jednakim fizikalnim, kemijskim i biološkim uvjetima. Sloj je omeđen dvjema plohama, *gornjom* i *donjom slojnom plohom* koje nastaju pri prekidu taloženja drastičnim promjenama uvjeta taloženja. Slojne plohe mogu biti ravne i međusobno paralelne, ravne i neparalelne, te valovite. U prvom slučaju debljina sloja je podjednaka u svim točkama, a u ostalima može varirati.

Sloj je najčešće nagnut pod većim ili manjim kutom pa se na površini terena pojavljuje samo njegov manji dio koji se zove *izdanak*. Položaj sloja u prirodi određuje se pružanjem sloja, smjerom nagiba i nagibom [1]. Pružanje sloja je presjek sloja s horizontalnom ravninom. U horizontalnoj ravnini smjer nagiba je okomit na pravac pružanja sloja i pokazuje na koju stranu svijeta je sloj nagnut, a nagib je određen kutom koji sloj zatvara s horizontalnom ravninom [3].

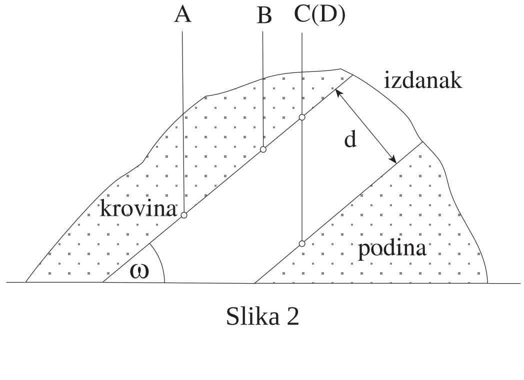


Slika 1

Pravilan sloj bez poremećaja i bora može se geometrijski jednostavno prikazati ako se pretpostavi da su slojne plohe paralelne ravnine.

Kako se sloj nalazi pod površinom Zemlje, dakle unutar jedne topografske plohe ili terena, najpogodnija metoda za njegov prikaz i rješavanje je kotirana projekcija [2].

Promatrani sloj je dakle omeđen dvjema paralelnim ravninama, gornjom i donjom slojnom ravninom. Te dvije ravnine odvajaju sloj od okolne stijenske mase pri čemu se takva masa iznad gornje slojne ravnine zove *krovina*, a ona ispod donje slojne ravnine *podina*.

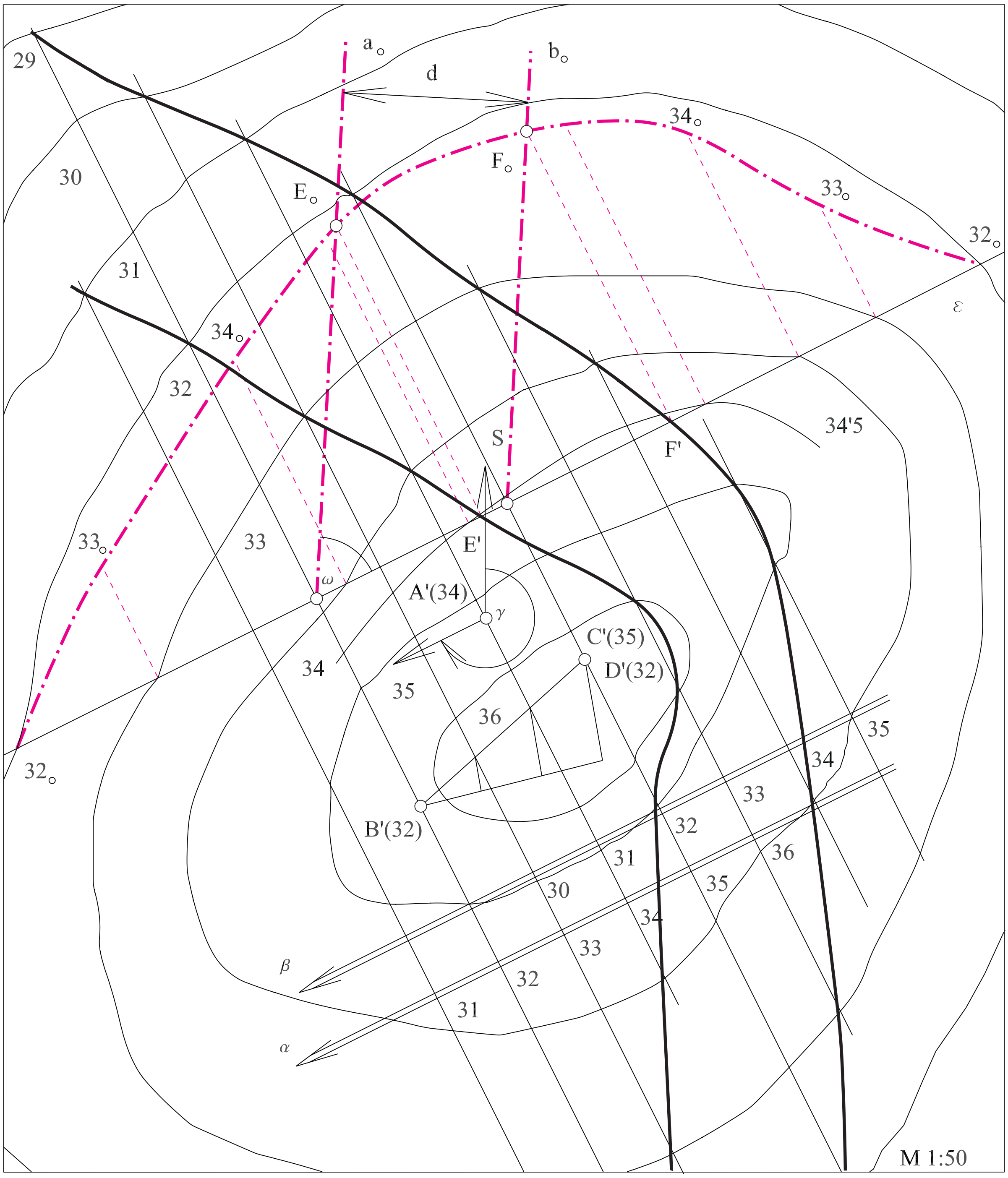


Slika 2

Kod rješavanja sloja razlikuju se dva slučaja:

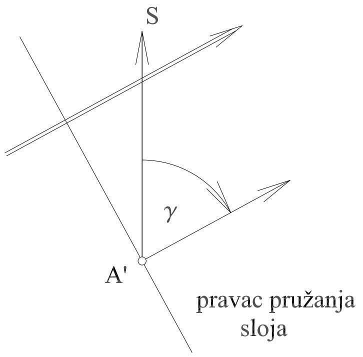
1. Na zadanom terenu krovinsku ravninu α određuju tri bušotine (tri nekolinearne točke *A*, *B*, *C*) kojima su zadani položaj i visina (projekcija i kota). Podinska ravnina β je određena četvrtom bušotinom ispod jedne od tri zadane bušotine (npr. točka *D* ispod točke *C*). Presječne krivulje krovinske i podinske ravnine s topografskom plohom određuju presjek sloja s površinom terena - *izdanak*.

Postavi li se jedna projicirajuća - profilna ravnina ε koja siječe topografsku plohu i sloj te ju se prevali zajedno s dobivenim presjekom u po želji odabranu nivo ravninu, dobiva se profil sloja (Slika 1).



Slika 3

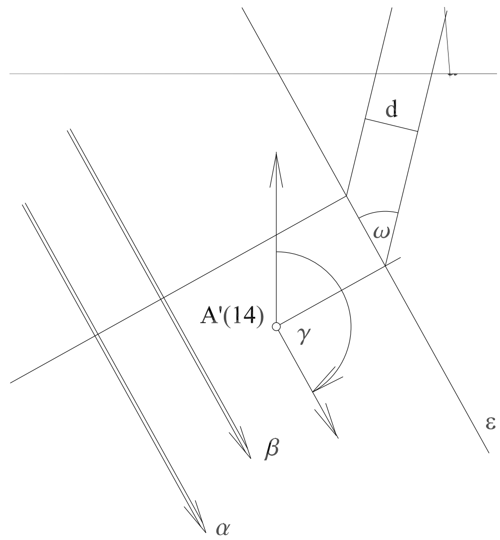
Profilna ravnina postavlja se uvijek okomito na slojnice krovinske i podinske ravnine pa tako te dvije ravnine siječe u njihovim priklonicama, što omogućuje da se na profilu sloja odredi prikloni kut ω (kut nagiba) tih dviju ravnina i debljina sloja d, tj. udaljenost krovinske i podinske ravnine (Slika 2).
Na profilu sloja posebno su istaknute točke E i F u kojima rubovi izdanka sijeku profilnu ravninu. U prevaljenom položaju te dvije točke E_o i F_o moraju biti u sjecištima prevaljenih priklonica krovinske i podinske ravnine s prevaljenim terenom.



Slika 4

Uz kut ω pri rješavanju sloja određuje se i kut γ između smjera sjevera S u nekoj točki krovine i smjera nagiba sloja, mjeren u smjeru kazaljke na satu (azimut).

2. Uz jednu bušotinu (točka A) određenu položajem i visinom (projekcijom i kotom) na zadanom terenu, zadani su kutovi ω i γ, te debljina sloja d.



Stručni rad
Prihvaćeno 14. 12. 2003.

NIKOLETA SUDETA
IVAN PETRUNIĆ

Svodovi kao dijelovi kugline plohe u ortogonalnoj aksonometriji

Vaults as Parts of Sphere in Orthogonal Axonomerty

ABSTRACT

In order to represent an architectural structure we often use axonometric methods. The most convinient type of representing vaults as parts of spheres is orthogonal axonomerty. The paper presents simple constructons of axonometric representations of some architectural dome (spherical, bohemian and pendentive) with view from above and from below.

Key words: dome, contour, ellipse, orthogonal axonomerty

MSC 2000: 51N05

Svodovi kao dijelovi kugline plohe u ortogonalnoj aksonometriji

SAŽETAK

Za postizanje zornog prikaza arhitektonskog objekta često se služimo aksonometrijskim metodama. Kod predočavanja svodova kao dijelova kugline plohe najprikladnija je ortogonalna aksonometrija. U radu su pokazane jednostavne konstrukcije aksonometrijskih slika nekih arhitektonskih kupola (viseće, češke i bizantske) s pogledom odozgo i pogledom odozdo.

Ključne riječi: elipsa, kontura, kupola, ortogonalna aksonometrija

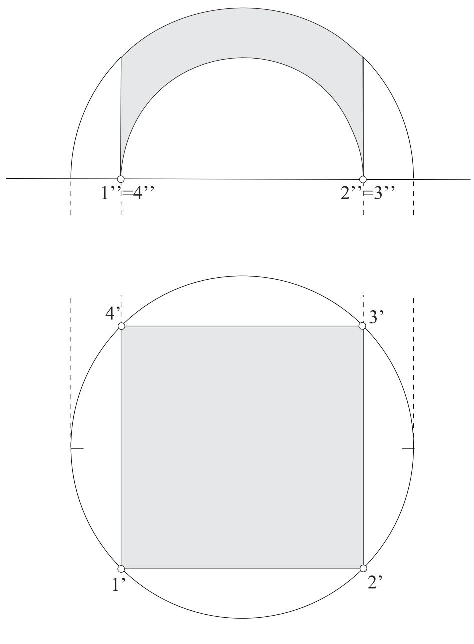
1 Uvod

Ortogonalno projiciranje na dvije ravnine općenito ne daje dovoljno zoran prikaz objekta. Da bismo postigli zornost, služimo se metodama paralelnog projiciranja na samo jednu ravninu. Pritom su zrake projiciranja u općem položaju s obzirom na koordinatni sustav. Zbog jednostavnijeg crtanja, objekt kojeg prikazujemo postavljamo u koordinatni sustav tako da mu osnovne dimenzije imaju smjer usporedan s koordinatnim osima. Ako su zrake projiciranja okomite na ravninu slike govorimo o *ortogonalnoj aksonometriji*, a u ostalim slučajevima riječ je o *kosoj aksonometriji*. Vrijednost aksonometrije je, posebno za arhitekte, u velikom broju informacija koje ona nudi što omogućava da arhitektonski projekt bude realistično prikazan i stoga razumljiv. U radu [3] arhitekt Ivan Juras naglašava: "U proceduri rada arhitekt aksonometriju upotrebljava u laboratorijskom istraživanju dok u procesu simulacije stvarnosti nužno primjenjuje perspektivu, pa se ne može strogo odvojiti jedno od drugog."

U ovom radu koristimo ortogonalno aksonometrijsku metodu za prikazivanje svodova kao arhitektonskih tvorbenih elemenata. Konstrukcije su izvedene na primjerima viseće, češke i bizantske *kupole* (tal. *cupola* - svod ili krov polukuglasta ili polukugli slična oblika).

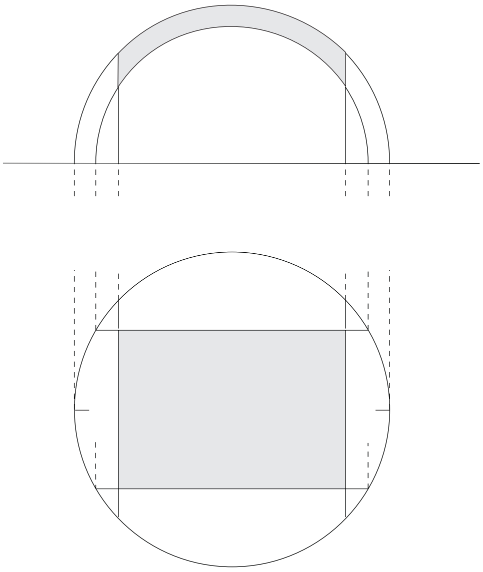
2 Viseća, češka i bizantska kupola

Ako je kupola izvedena nad kvadratnim tlocrtom kod kojeg je promjer polukugle jednak dijagonali kvadrata, govorimo o *visećoj* ili *opisanoj* kupoli. (Slika 1)



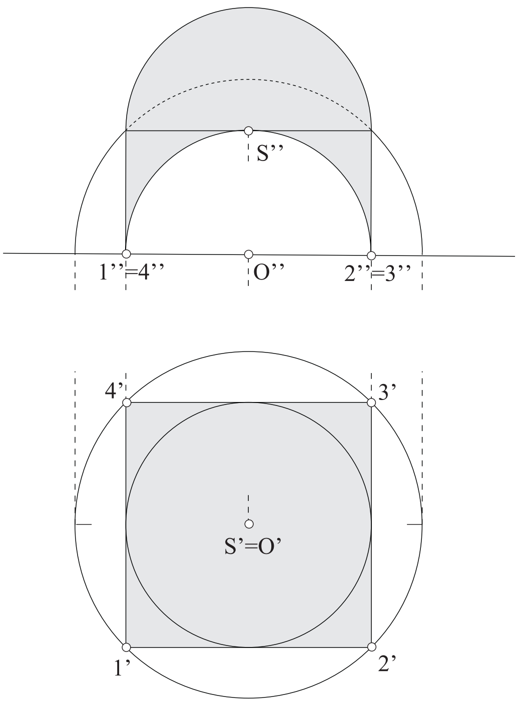
Slika 1: Viseća ili opisana kupola

Svod kao dio kugline plohe nad pravokutnim tlocrtom zovemo *češkom* ili *baroknom* kupolom. (Slika 2)



Slika 2: Češka ili barokna kupola

Tlocrt *bizantske* kupole ili *kupole s pandantivima* je kvadrat s upisanom kružnicom. Kupola leži na četiri sferna trokutasta isječka (tzv. pandantiva). (Slika 3)



Slika 3: Bizantska kupola ili kupola s pandantivima

Slika 4: Bizantska kupola na svodu Sulejmanove džamije u Istanbulu.

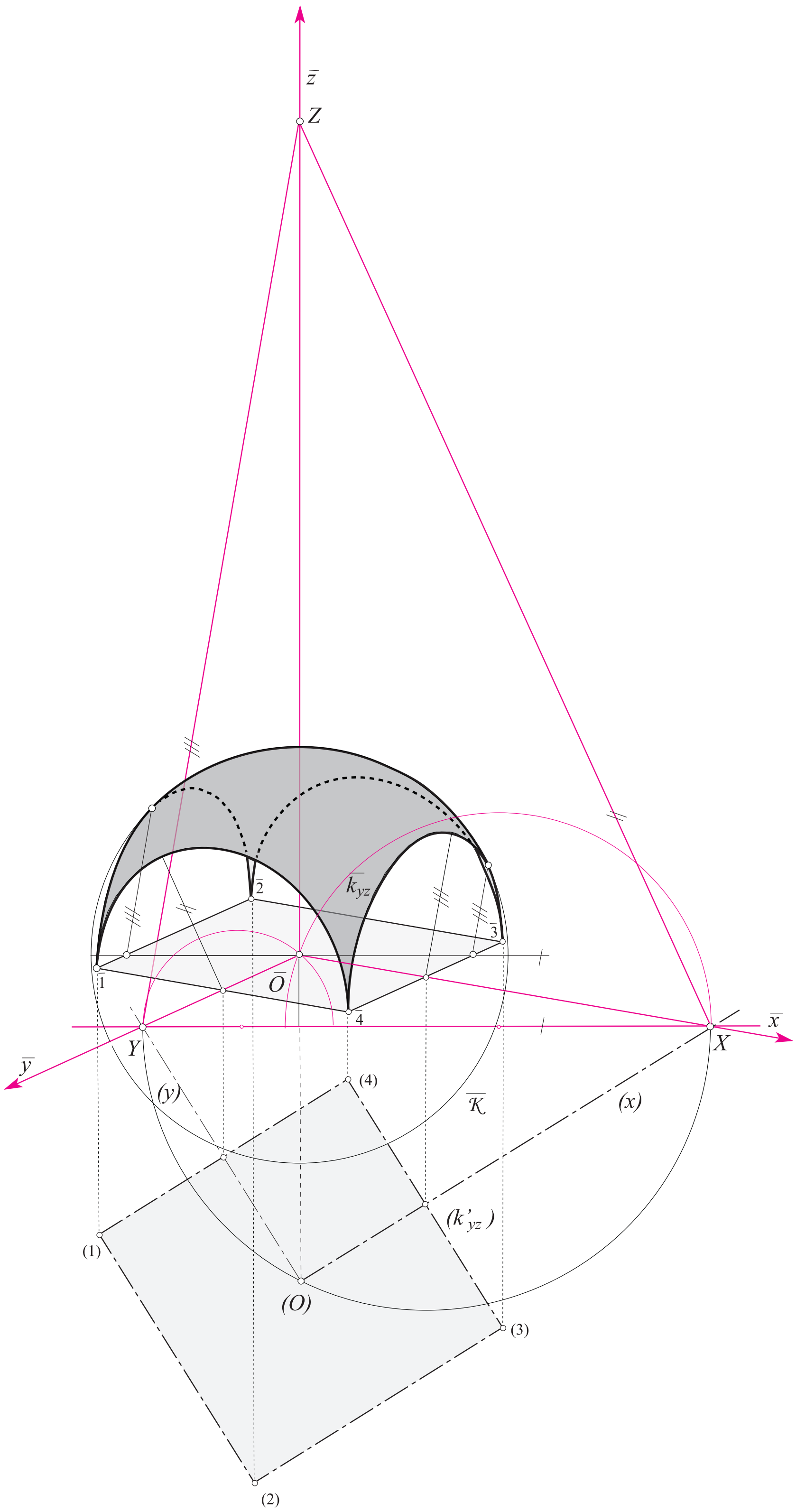
3 Ortogonalno aksonometrijske slike kupola

Pri promatranju nekog crteža smjer pogleda približno je okomit na ravninu crteža. Kako je, pored toga, prikazivanje kružnica i kugli najjednostavnije u ortogonalnom projiciranju, prirodno je da za zorni prikaz kugline plohe odaberemo *ortogonalnu aksonometriju*. Na slikama 5, 6 i 7 konstruirali smo ortogonalno aksonometrijsku sliku viseće, češke i bizantske kupole, zanemarivši njihovu debljinu.

Ortogonalnu aksonometriju smo, na slikama 5 i 7, zadali omjerom prikrata $m : n : p = 9 : 6 : 10$, te konstruirali pripadni *tračni trokut* $\triangle XYZ$ i *osni križ* na uobičajeni način [4]. Ta je konstrukcija istaknuta na slici 5. Na slici 6 ortogonalna aksometrija zadana je po volji odabranim tračnim trokutom za pogled odozdo.

Poznavajući zakonitosti ortogonalne aksonometrije i Mongeovog projiciranja možemo pojednostavniti aksonometrijsku konstrukciju kupole. To postižemo tako da središte polukugle postavimo u ishodište koordinatnog sustava, a ravnine rubnih polukružnica kupole u položaj usporedan s koordinatnim ravninama.

Aksonometrijski tlocrt kupole lako ćemo dobiti koristeći perspektivnu afinost između aksonometrijske slike koordinatne ravnine (x,y) i njenog rotiranog položaja u ravnini slike. Os te afinosti je trag koordinatne ravnine (x,y) u ravnini slike, a par pridruženih točaka je $\overline{O} \leftrightarrow (O)$. Ta je veza posebno istaknuta na slici 5 gdje smo rotirani tlocrt kupole, kvadrat $(1)(2)(3)(4)$, postavili tako da mu je središte u točki (O), a stranice paralelne s rotiranim koordinatnim osima (x) i (y). Na isti su način konstruirani i aksonometrijski tlocrti kupola na slikama 6 i 7. Napominjemo da na slici 7 nije nacrtan aksonometrijski tlocrt one polukugle čiji je promjer jednak stranici kvadrata 1234.



Slika 5: Ortogonalno aksonometrijska slika viseće kupole s pogledom odozgo.

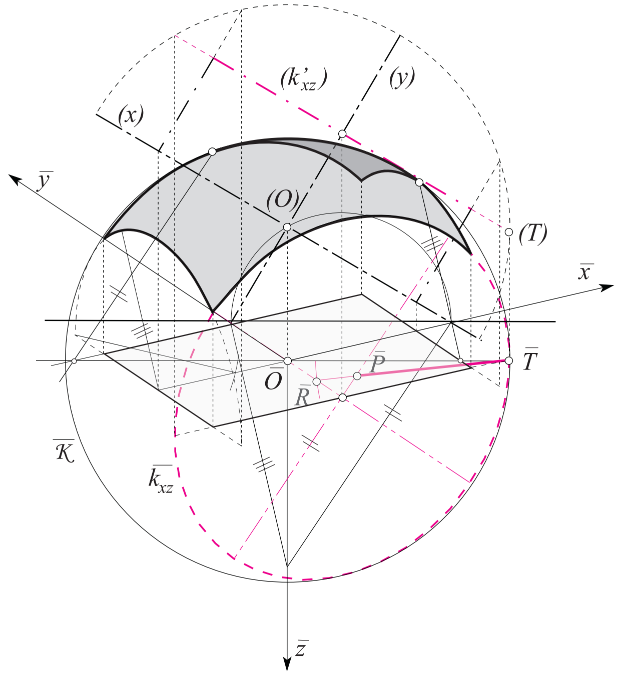
Pri konstrukciji aksonometrijskih slika zadanih kupola koristimo dvije poznate činjenice:

- Ortogonalna aksometrija kružnice općenito je elipsa.

- Kontura kugle u ortogonalnoj aksonometriji je kružnica (to je aksonometrijska slika one glavne kružnice kugle koja je paralelna s ravninom slike).

Aksonometrijske projekcije onih kružnica kugle koje leže u ravninama paralelnim s koordinantnim, a upravo smo tako postavili rubne polukružnice kupola, lako je odrediti. Središte svake takve elipse konstruirali smo pomoću rotiranog tlocrta, a ono leži na slici odgovarajuće koordinatne osi. Velika os svake takve elipse jednaka je promjeru odgovarajuće kružnice, a paralelna je s tragom ravnine u kojoj kružnica leži, odnosno s tragom njoj usporedne koordinantne ravnine (tj. odgovarajućom stranicom tračnoga trokuta). Veličinu male poluosi možemo konstruirati iz njezine velike poluosi i bilo koje točke te elipse [4, str. 18]. Ta je konstrukcija korištena za određivanje svih rubnih elipsi na slikama kupolama. Ona je posebno istaknuta, zbog preglednosti, na slici 6.

Malu poluos elipse $\overline{k_{xz}}$, koja je aksonometrijska slika kružnice k_{xz} paralelne s koordinatnom ravninom (x,z), konstruirali smo koristeći točku $\overline{T}$ - krajnu točku promjera elipse paralelnog s koordinatnom osi $\overline{x}$. Luk pomoćne kružnice sa središtem u točki $\overline{T}$ i polumjerom jednakim polumjeru kružnice k_{xz} siječe pravac male osi u točki $\overline{R}$. Spojnica $\overline{R}\,\overline{T}$ siječe pravac velike osi u točki $\overline{P}$. Udaljenost $d(\overline{T},\overline{P})$ jednaka je veličini male poluosi elipse $\overline{k_{xz}}$.



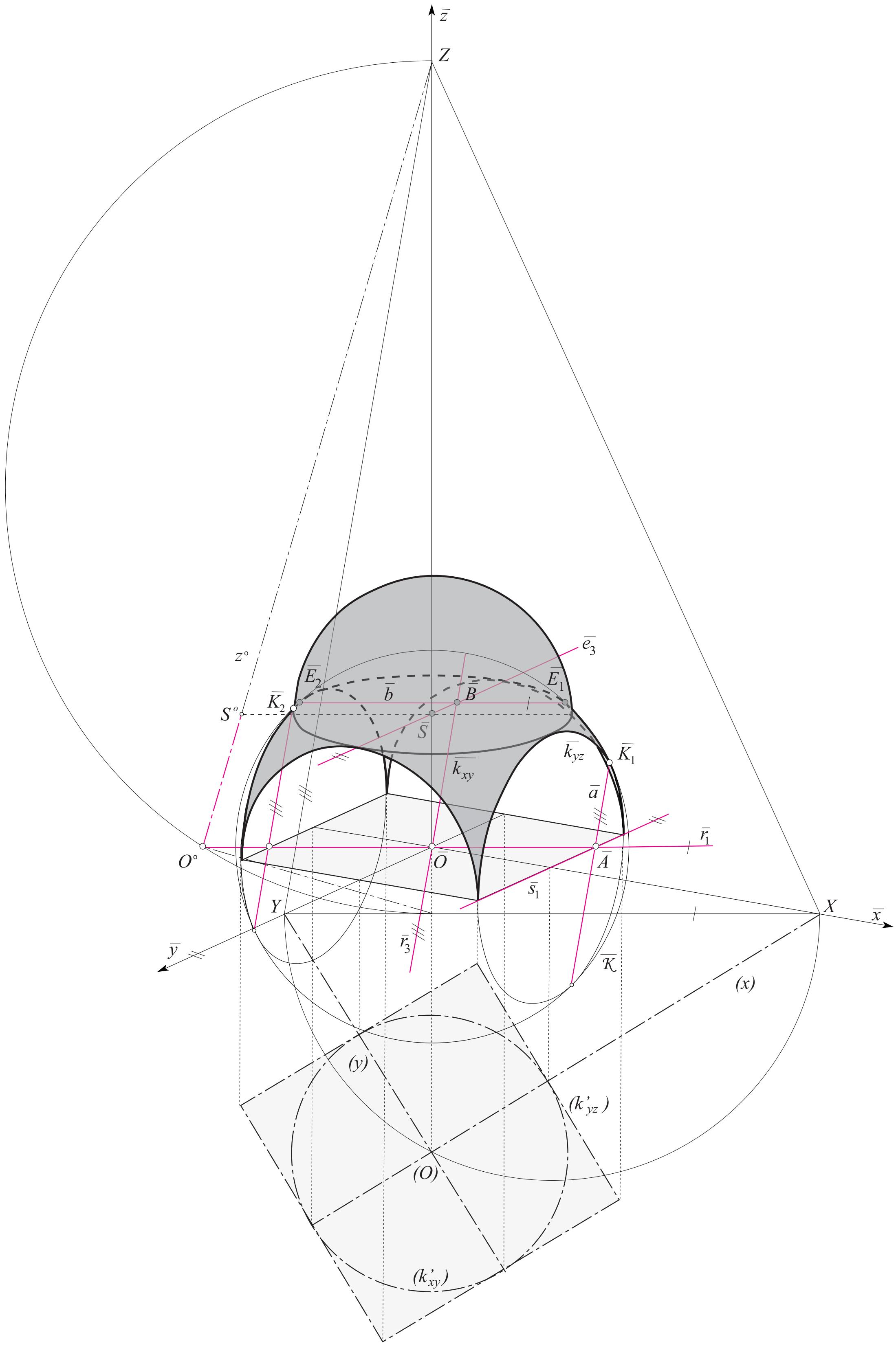
Slika 6: Ortogonalno aksonometrijska slika barokne kupole s pogledom odozdo.

Aksonometrijsku sliku kružnice paralelne s (x,y) ravninom na bizantskoj kupoli (Slika 7) konstruirali smo odredivši joj središte $\overline{S}$ na osi $\overline{z}$. Kao što se vidi u nacrtu slike 3, udaljenost $d(S,O)$ jednaka je polumjeru gornje polukugle (pravu veličinu te udaljenosti nanijeli smo na prevaljeni položaj osi z^o).

Za određivanje vidljivosti na aksonometrijskoj slici kupole potrebno je konstruirati točke u kojima rubne elipse dodiruju konturnu kružnicu $\overline{\mathcal{K}}$. Na slici 7 prikazano je to na primjeru elipse $\overline{k_{yz}}$, koja je aksonometrijska slika kružnice k_{yz} paralelne s koordinatnom ravninom (y,z). Ona s konturnom kružnicom $\overline{\mathcal{K}}$ ima dvije zajedničke točke. Na kupoli se nalazi samo jedna, točka $\overline{K_1}$. Konstruiramo ju kao presjek pravca a (presječnica ravnine konturne kružnice kugle i ravnine odabrane kružnice) i kružnice $\mathcal{K}$. Pri tom koristimo činjenicu da paralelne ravnine presječene trećom imaju paralelne presječnice. Stoga je pravac $\overline{a}$ paralelan s tragom koordinantne ravnine (y,z). Zbog toga što znamo smjer tog pravca za njegovu kostrukciju dovoljna nam je jedna njegova točka, npr. $\overline{A}$. Konstruiramo ju kao sjecište traga $\overline{r_1}$ ravnine konturne kružnice kugle i koordinantne ravnine (x,y), s tragom $\overline{s_1}$ ravnine odabrane kružnice kugle i iste koordinantne ravnine. Traženi pravac $\overline{a}$ prolazi točkom $\overline{A}$ i siječe kružnicu $\overline{\mathcal{K}}$ u točki $\overline{K_1}$. Konturna točka dakako mora ležati i na odabranoj poluelipsi kao aksonometrijskoj projekciji polukružnice. Analogno je konstruirana i točka $\overline{K_2}$.

Ta je konstrukcija prikladna za određivanje konturnih točaka bilo koje elipse kao aksonometrijske slike kružnice kugle paralelne s odabranom koordinatnom ravninom. Stoga ju ponavljamo i za elipsu $\overline{k_{xy}}$, koja je aksonometrijska slika kružnice k_{xy} paralelne s koordinatnom ravninom (x,y). Ona s konturnom kružnicom $\overline{\mathcal{K}}$ ima zajedničke točke $\overline{E_1}$ i $\overline{E_2}$. Njih konstruiramo kao presjek pravca $\overline{b}$ (b - presječnica ravnine konturne kružnice kugle i ravnine odabrane kružnice) i kružnice $\overline{\mathcal{K}}$. Traženi je pravac $\overline{b}$ paralelan s tragom koordinatne ravnine (x,y) stoga nam je dovoljno poznavati jednu njegovu točku. Tu točku $\overline{B}$ možemo npr. konstruirati kao sjecište traga $\overline{r_3}$ ravnine konturne kružnice kugle i koordinantne ravnine (y,z) s tragom $\overline{e_3}$ ravnine odabrane kružnice kugle i iste koordinatne ravnine. Traženi pravac $\overline{b}$ prolazi točkom $\overline{B}$ i siječe kružnicu $\overline{\mathcal{K}}$ u točkama $\overline{E_1}$ i $\overline{E_2}$. Konturne točke dakako leže i na elipsi $\overline{k_{xy}}$.

Taj postupak koristili smo za određivanje konturnih točaka i na slikama 5 i 6, a vrijedi za određivanje bilo kojih konturnih točaka arhitektonskih objekata koji su dijelovi kugline plohe. Npr. pravac $\overline{b}$ (sa slike 7) mogli smo također konstruirati pomoću sjecišta drugog traga ravnine konturne kružnice $\mathcal{K}$ i drugog traga ravnine kružnice k_{xy}.



Slika 7: Ortogonalno aksonometrijska slika bizantske kupole s pogledom odozgo.

Literatura

[1] BRAUNER, H., KICKINGER, W., *Geometrija u graditeljstvu*, Školska knjiga, Zagreb, 1980. (prijevod: P. Kurilj, B. Hajsig)

[2] HOHENBERG, F., *Konstruktivna geomertrija u tehnici*, Građevinska knjiga, Beograd,1966. (prijevod: V. Niče)

[3] JURAS, I., Aksonometrija u arhitektovu crtežu, Crtež u znanosti, Zagreb, 1998, 107-123.

[4] NIČE, V., *Deskriptivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

Nikoleta Sudeta
Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26, 10000 Zagreb
e-mail: nsudeta@arhitekt.hr
Ivan Petrunić (student)
e-mail: ipetrunic@hotmail.com

GUIDE FOR AUTHORS

SCOPE. “KoG” publishes scientific and professional papers from the fields of geometry, appplied geometry and computer graphics.

SUBMISSION. Scientific papers submited to this journal should be written in English or German, professional papers should be written in Croatian, English or German. Only unpublished material can be accepted.
Two single-side copies of the manuscript with wide margins and double spaced should be sent to the one of the editors.

Sonja Gorjanc
Faculty of Civil Engineering
University of Zagreb
Kačićeva 26
10000 Zagreb
Croatia
sgorjanc@grad.hr

Jelena Beban - Brkić
Faculty of Geodesy
University of Zagreb
Kačićeva 26
10000 Zagreb
Croatia
jbeban@geof.hr

The first page should contain the article title, author and coautor names, affilation, a short abstract in English, a list of keywords and the Mathematical subject classification.

ELECTRONIC FORMATS. Accepted papers should be sent by electronic mail as ASCII files (LaTeX format is recommanded) to the address: sgorjanc@grad.hr

OFFPRINTS. The total of 20 reprints of each contribution will be sent to its first mentioned author (if not otherwise desired) free of charge.

How to get KoG?

The easiest way to get your copy of KoG is by contacting the editor’s office:

Nikoleta Sudeta
nsudeta@arhitekt.hr
Faculty of Architecture
Kačićeva 26
10 000 Zagreb
Croatia
Tel: (+385 1) 4561 219
Fax: (+385 1) 4828 079

The price of the issue is €20 + mailing expenses €5 for European countries and €10 for other parts of the world.

The amount is payable to:

ACCOUNT NAME:	Hrvatsko društvo za konstruktivnu geometriju i kompjutorsku grafiku Kačićeva 26, 10000 Zagreb, Croatia
ACCOUNT NO.:	2421809001
BANK NAME:	Zagrebačka banka
SWIFT-CODE:	ZABA HR 2X

UPUTE ZA AUTORE

PODRUČJE. “KoG” objavljuje znanstvene i stručne radove iz područja geometrije, primijenjene geometrije i kompjutorske grafike.

UPUTSTVA ZA PREDAJU RADA. Znanstveni radovi trebaju biti napisani na engleskom ili njemačkom jeziku, a stručni na hrvatskom, engleskom ili njemačkom. Rad treba biti neobjavljen.
Dva primjerka rukopisa sa širokim marginama i dvostrukim proredom treba poslati na adresu jedne od urednica:

Sonja Gorjanc	Jelena Beban - Brkić
Građevinski fakultet	Geodetski fakultet
Sveučilišta u Zagrebu	Sveučilišta u Zagrebu
Kačićeva 26	Kačićeva 26
10000 Zagreb	10000 Zagreb
Hrvatska	Hrvatska
sgorjanc@grad.hr	jbeban@geof.hr

Prva stranica treba sadržavati naslov rada, podatke o autoru i koautorima, sažetak na hrvatskom i engleskom, ključne riječi i MSC broj.

ELEKTRONIČKI FORMATI. Prihvaćene radove autori dostavljaju elektronskom poštom kao ASCII datoteke (preporučuje se LaTeX format) na adresu: sgorjanc@grad.hr

POSEBNI OTISCI. Autori dobivaju 20 otisaka svog rada.

Kako nabaviti KoG?

KoG je najjednostavnije nabaviti u uredništvu časopisa:

Nikoleta Sudeta
nsudeta@arhitekt.hr
Arhitektonski fakultet
Kačićeva 26
10 000 Zagreb
Hrvatska
Tel: (01) 4561 219
Fax: (01) 4828 079

Za Hrvatsku je cijena primjerka 145 KN + 10 KN za poštarinu.

Nakon uplate za:
HDKGIKG (za KoG), Kačićeva 26, 10000 Zagreb
žiro račun broj **2360000-1101517436**
poslati ćemo časopis na Vašu adresu.

Ako Vas zanima tematika časopisa i rad našega društva, preporučamo Vam da postanete članom HDKGIKG (godišnja članarina iznosi 100 KN). Za članove društva časopis je besplatan.

U auli AGG-fakulteta (Kačićeva 26, Zagreb) od 5. veljače 2004. postavljena je izložba fotografija *Arg-e-Bam* (Citadela Bam) grada-utvrde uništenog u katastrofalnom potresu koji je pogodio jugoistok Irana 26. prosinca 2003.

Autori su *Jelena Beban-Brkić* i *Zoran Brkić*.

Izložbu se može pogledati tijekom veljače, svakim danom od 9 do 19 sati.

Fotografija na ovitku ovog časopisa jedna je od fotografija s te izložbe.

O Arg-e-Bamu

Smješten u jugoistočnom Iranu, 200 km južno od grada Kermana, grad-utvrda Arg-e-Bam sagrađen je isključivo od nepečene cigle, ilovače i debla palminog drveća. Grad je prvobitno ustanovljen tokom perioda Sasanida (224-637 n.e.) i dok je dio postojećih građevina sagrađen prije 12. stoljeća, najveći dio nastaje za vladavine Safavida (1502-1722). Tokom safavidskog perioda grad se rasprostirao na 6 km^2, bio je opasan bedemima s 38 kula i imao je između 9000 i 13000 stanovnika. Grad se razvijao, vjernici Zoroastrijanci su posjećivali Hram vatre, a bio je također i gospodarski i trgovački centar na čuvenom Putu svile. Tokom razdoblja Safariana (866-903), na mjestu nekadašnjeg Hrama vatre sagrađena je džamija (Jame Mosque) u čijoj se blizini nalazi grob Mirze Naima, mistika i astronoma koji je ondje živio prije tri stotine godina. Opadanje važnosti grada započinje okupacijom prvo po Afganistancima 1722., potom po okupatorima koji od 1810. nadolaze iz regije Širaza. U tom razdoblju grad je korišten kao vojarna, sve do 1932. kada je u potpunosti napušten. Intenzivni restauratorski radovi započeli su 1953. godine.

ISSN 3331-1621