Professionelle Arbeit
Angenommen 02. 05. 2002.

Vlasta Szirovicza

Die imaginären Elemente bestimmter Kegelschnitte

Krivulja 2. reda zadana imaginarnim elementima

SAŽETAK

U radu je dana konstrukcija nekoliko realnih točaka jedne konike iz pramena konika ako je pramen zadan dvostrukom realnom i parom konjugirano imaginarnih točaka ili parom konjugirano imaginarnih dirališta.

Ključne riječi: imaginarne točke, konika, perspektivna kolineacija

The Conic Given by the Imaginary Elements

ABSTRACT

In this paper the construction of some real points of the conic from the pencil of conics is shown. The pencil of conics is given by a double real point and the pair of imaginary points or by the pair of imaginary touching points.

Key words: conic, imaginary points, perspective collineation

MSC 2000: 51N05

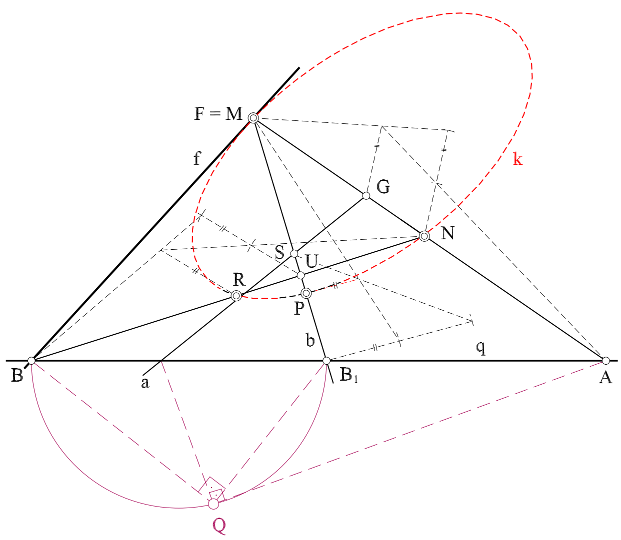
In der Literatur kann man Konstruktionen mit imaginären Elementen nur selten finden. Die folgenden Konstruktionen gehören zu den Themen aus dem Ërdgeschoss der Geometrieünd befassen sich mit den imaginären Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels.

Aufgabe 1.

Ein Kegelschnittbüschel ist durch zwei reell zusammenfallende Punkte $F = M$ und ein konjugiert imaginäres Punktepaar D_1 und D_2 an der Geraden q gegeben. Die Punkte D_1 und D_2 sind als Doppelpunkte einer zirkulären Involution mittels Laguerrischen Punkt $Q \notin q$ gegeben (Fig. 1). Die Aufgabe ist ein Paar beliebig reeller Punkte eines Kegelschnittes dieses Büschels zu konstruieren.

Lösungsansatz

Alle Kegelschnitte des Büschels besitzen im Punkt $F = M$ die gemeinsame Tangente f. Mit $F = M$, D_1 und D_2 und einem weiteren Punkt N ist der Kegelschnitt k dieses Büschels eindeutig bestimmt. Dieses Kegelschnittbüschel enthält zwei entartete Kegelschnitte. Eines ist in die Geraden q und f, das andere in konjugiert - imaginäres Geradenpaar FD_1 und FD_2 zerfällt.



Figur 1.

Stellen wir uns P und p als einen Punkt und seine Polare bezüglich des Kegelschnittes k vor. Die Schnittpunkte einer den Punkt P enthaltenden Geraden t mit k sind mit T_1 und T_2 bezeichnet. Wegen des Polaritätsbegriffes sind diese Punkte in Harmonität mit P und P_1, wobei $P_1 = t \cup p$ entspricht. Es gilt $(T_1T_2PP_1) = -1$. Diese Tatsache ermöglicht folgende Konstruktionen.

Konstruktive Lösung

Der Schnittpunkt der Tangente f mit der Geraden q sei mit B bezeichnet. Da jedes Geradenpaar des involutorischen Geradenbüschels sehnkrecht zueinander steht, bekommt man entsprechend dem Punkt B den zugeordneten Punkt $B_1 \in (q)$. Damit wird $b = B_1F$ die Polare des Punktes B bezüglich k.

Nun ist $U = NB \cap b$. Die Gerade NB schneidet den Kegelschnitt k in noch einem Punkt R, wobei $(BUNR) = -1$ gilt. Daraus bekommt man einen zusätzlichen reellen Punkt R des Kegelschnittes k.

Mittels derselben elliptischen Involution an der Geraden q, kann man die Polare a des Punktes $A = FN \cap q$ bekommen, wobei man G mittels der Harmonität $(FNAG) = -1$ konstruiert.

Jetzt wird der Punkt $S = a \cap b$ der Pol der Geraden q in Bezug auf k sein. Er ist der Schnittpunkt von allen Polaren der Punkte von (q). Somit kann man mittels $(B_1SFP) = -1$ den zweiten Schnittpunkt P der Geraden b mit k konstruieren.

Mit diesen fünf reellen Punkten $F = M$, N, R und P von k haben wir die Möglichkeit, weitere Punkte dieses Kegelschnittes mittels Projektivität relativ leicht zu konstruieren [1].

Aufgabe 2.

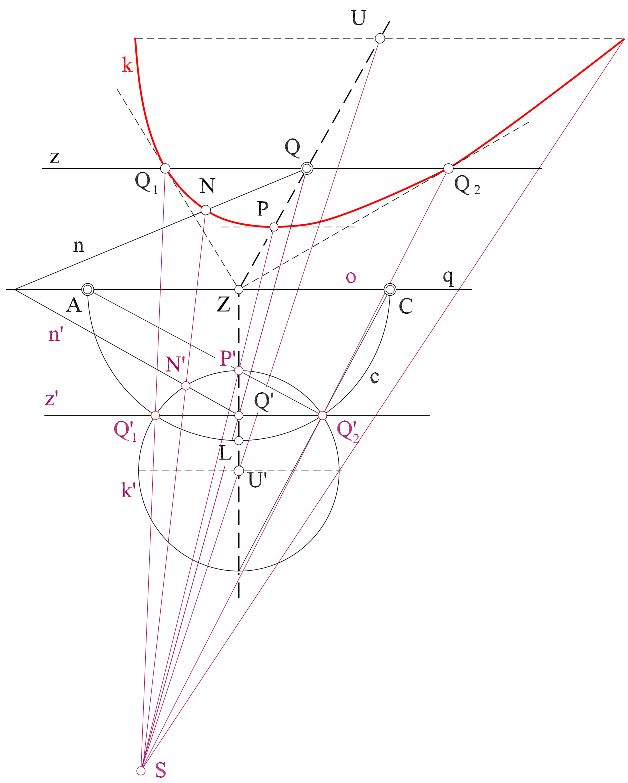
Es wird ein Kegelschnittberührbüschel mit konjugiert - komplexen Grundpunkten betrachtet [2]. Die Aufgabe ist ein Paar beliebig reeller Punkte eines Kegelschnittes k des Büschels zu konstruieren, wobei k mit einem weiteren Punkt N bestimmt ist.

Lösungsansatz

Sind je zwei der vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels zusammengefallen, d.h. $A \equiv B$ und $C \equiv D$, es handelt sich um ein Berührbüschel. Alle Kegelschnitte eines solchen Büschels berühren im vorliegenden Fall zwei konjugiert - komplexe Geraden g_1 und g_2 in den an der Geraden q liegenden konjugiert - komplexen Grundpunkten A und C. Diese Punkte sind die Doppelpunkte der elliptischen Involution der konjugierten Punktepaare bezüglich jedes Kegelschnittes des Büschels [1]. Die Punkte A und C in der Fig. 2. kann man als ihre reelle Repräsentanten nennen. Der Zentralpunkt Z der Punktinvolution (q) liegt im Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.

Der eigentliche reelle Schnittpunkt Q der imaginären Tangenten g_1 und g_2 ist der gemeinsame Pol der Geraden q bezüglich alle Kegelschnitte des Büschels. An der Geraden ZQ liegt somit ein Durchmesser jedes Kegelschnittes des Büschels.

Mit einem Punkt N ist ein Kegelschnitt k dieses Büschels gegeben. Wir möchten ein paar beliebige Punkte dieses Kegelschnittes, besonders seine Schnittpunkte mit der Polare z des Zentralpunktes Z erreichen. Zu diesem Zweck wird eine perspektive Kollineation gesucht, die den gegebenen Kegelschnitt k in einen Kreis k' abbilden wird. Die Gerade q soll diesen Kreis in derselben elliptischen Involution wie den Kegelschnitt k schneiden, woraus schließt man, dass q die Kollineationsachse ist. An der Geraden ZL wird deutlich ein Durchmesser des gesuchten Kreises liegen (Fig.2).



Figur 2.

Konstruktive Lösung

Man kann eine beliebige zu der Kollineationsachse parallele Gerade wählen, die den Kreis c in zwei reelle und verschiedene Punkte schneidet. Diese Gerade z' soll die Polare des Zentralpunktes Z bezüglich des gesuchten Kreises k' sein. Die Schnittpunkte Q'_1 und Q'_2 der Geraden z' mit k' kann man als die Doppelpunkte der hyperbolischen Involution an der Geraden z' bezeichnen [1]. Die Verbindungsgeraden AQ'_2 und CQ'_2 schneiden die Gerade ZL in einem Durchmesser des Kreises k'. Dieser Kreis steht damit ortogonal zum Kreis c. Die Punkte $Q' = z' \cap ZL$ und Q bilden ein zugeordnetes Paar bei der gesuchten perspektiven Kollineation und damit wird ein Kollineationsstrahl bestimmt. Der Geraden $n \equiv QN$ findet man entsprechend die zugeordnete Gerade $n' \equiv Q'N'$, wobei N' am Kreis k' liegt. Der Kollineationsstrahl NN' schneidet QQ' im Zentrum S der perspektiven Kollineation. Entsprechend bekommt man die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 der Geraden z mit dem Kegelschnitt k, wie auch alle anderen beliebigen Punkte von k.

Unter der Voraussetzung des fixen Punktes N hängt diese Konstruktion nicht von der Wahl der Geraden z' ab. Für jede Gerade z' wird ein Kreis k' bestimmt, der sich mittels einer perspektiven Kollineation im selben Kegelschnitt des Büschels abbilden lässt.

Für jede Wahl des Punktes N bei fixem Kreis k' bekommt man nach obiger Konstruktion das Zentrum einer anderen Kollineation (S_i, q, Q, Q_i') und damit einen anderen Kegelschnitt des Berührbüschels.

Literatur

[1] Niče, V., *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956

[2] Szirovicza, V., *Berührbüschel von Kegelschnitten der isotropen Ebene mit konjugiert-komplexen Grundpunkten*, RAD HAZU **470** (1995), 13-34.

Vlasta Szirovicza
Universität Zagreb
Fakultät für Bauwesen
e-mail: szvlasta@juraj.gradnz.grad.hr