

Stručni rad

Prihvaćeno 03. 12. 2000.

IVANKA BABIĆ

Torus i neke njegove primjene u strojarstvu

Torus i neke njegove primjene u strojarstvu

SAŽETAK

U članku su istaknute neke karakteristike otvorene ili prstenaste torusne plohe, između ostalog i tri sistema kružnih presjeka. Torus tog oblika primjenjuje se u strojarstvu kod tvorbe strojnih dijelova. Neki strojni dijelovi nastaju presjecanjem složenih rotacijskih tijela ravninama, a neki tako da se koriste prodori dviju ili više rotacijskih ploha. Naveden je primjer oblikovanja tijela ojnice, te cijevnog odvojka koji se sastoji od valjkaste i torusne plohe koje su spojene po prodornoj krivulji. U članku se ukazuje na jednostavnost konstruiranja projekcija presječnih i prodornih krivulja u čijoj podlozi stoji geometrijska teorija.

Ključne riječi: apsolutna konika, cijevni odvojak, ojnice, otvoreni torus

MSC 2000: 51N05

Torus and some of its Applications in Mechanical Engineering

ABSTRACT

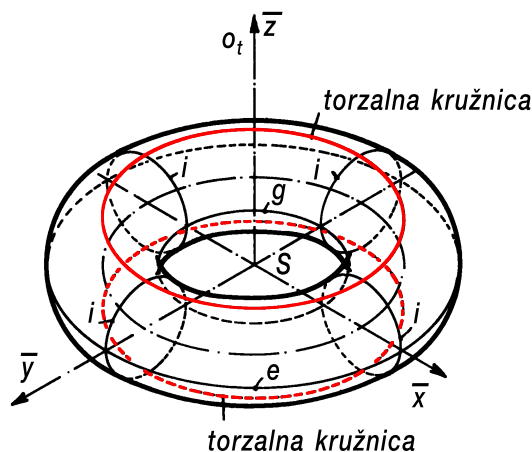
Some characteristics of the open or ring torus such as the three systems of circle sections are pointed out in the article. The torus of this shape is applied in mechanical engineering for designing certain parts of machines. Some machine parts are obtained by the intersection of a surface of revolution and a plane, while some others are obtained by the intersection of surfaces of revolution. The example presented in the article shows how the body of a thrust bar and a pipe diverging which consist of a cylinder and a torus are created. The article emphasizes the simplicity of the construction of the projection of the intersection curves which derives from the geometric theory.

Key words: absolute conic, pipe diverging, ring torus, thrust bar

U svim tehničkim znanostima, pa tako i u strojarstvu, neophodno je poznavanje nacrtne geometrije. Koliko se geometrije krije u naoko jednostavnim strojnim dijelovima pokazat će se na nekoliko primjera u ovom članku. Konstrukcija i izrada složenih strojnih dijelova, alata i kalupa ne može se zamisliti bez rotacijskih ploha: valjka, stošca, kugle i torusa. Jedan strojni element je sastavljen od više rotacijskih tijela, a oblikuje se presijecanjem alatima (pilama, glodalima, itd.) tj. obradom odvajanja čestica. Pri toj obradi koriste se "radionički crteži" na kojima su u projekcijama nacrtani temeljni oblici složenog rotacijskog tijela i ravnine kojima se tijelo presijeca. U većini je slučajeva torus sastavni dio pojedinih strojnih dijelova, pa je potrebno detaljnije upoznati tu plohu.

Torus je rotacijska ploha 4. reda koja nastaje rotacijom kružnice oko čvrstog pravca njezine ravnine [1]. S obzirom na međusobni položaj kružnice i osi rotacije, postoje tri oblika torusa. U strojarstvu se većinom primjenjuje *otvoreni torus* ili *prstenasta ploha*, koja nastaje rotacijom kružnice oko pravca koji ju realno ne siječe. Os rotacije je pritom ujedno i os torusa. Na otvorenom torusu posebno se ističu *grlena kružnica* i *ekvator* tj. kružnice najmanjeg i najvećeg

radijusa, koje se nalaze u ravnini okomitoj na os torusa, tzv. glavnoj simetralnoj ravnini torusa (slika 1). U sistemu ravnina okomitih na os torusa postoje dvije ravnine koje ga dodiruju duž kružnica koje su sukladne središnjoj



Slika 1.

kružnici torusa, a koje dijele “unutarnji” od “vanjskog” dijela torusa. To su *torzalne kružnice* na torusnoj plohi, tj. sve njihove točke su *paraboličkog* tipa. Sve točke na vanjskom dijelu torusne plohe su *eliptičke*, a na unutarnjem su *hiperboličke*. Torus je jedna od ploha koja nosi sve tri vrste točaka. (Općenito se kaže da je točka neke plohe *eliptičkog tipa* ako dirna ravnina plohe s diralištem u toj točki u njenom okolišu nema drugih zajedničkih realnih točaka s plohom. U *hiperboličkoj točki* plohe dirna ravnina realno siječe plohu u okolišu dirališta u krivulji, a diralište je dvostruka točka te krivulje. Točka plohe je *paraboličkog tipa* ako dirna ravnina u okolišu dirališta dira plohu duž neke krivulje koja se tada naziva *torzalnom* krivuljom.[5])

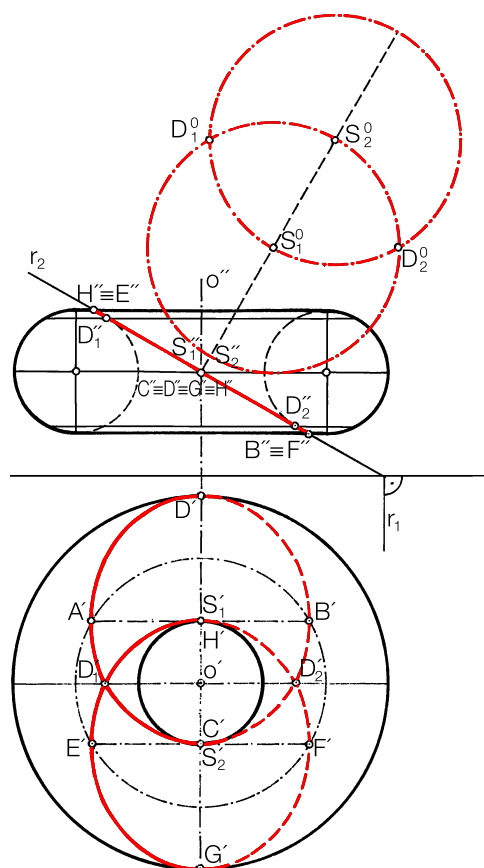
Budući da je torus algebarska ploha 4. reda, svaka ga ravnina siječe u algebarskoj krivulji 4. reda. Važno je napomenuti da postoje tri sistema presječnih ravnina koje sijeku torus u krivuljama 4. reda koje degeneriraju u par kružnica[1].

Prvi sistem čine sve ravnine položene kroz os torusa, a koje ga sijeku u paru sukladnih kružnica. Svaki par ovakvih kružnica čini *meridijan* torusa. Budući da se radi o pramenu ravnina koje sijeku torus u krivulji 4. reda degeneriranoj na dvije kružnice, slijedi da u svakoj od spomenutih ravnina torus ima dvije apsolutne (dvostruke) točke. Poznato je da se apsolutna konika nalazi na svakom torusu kao njegova imaginarna dvostruka krivulja [1]. Stoga su svi ravninski presjeci torusa bicirkularne krivulje 4. reda.

Drugi sistem kružnih presjeka torusa čine ravnine okomite na os torusa. U svakoj takvoj ravnini nalaze se dvije koncentrične kružnice, koje mogu biti realne i različite (jedna na unutarnjem, a druga na vanjskom dijelu torusa), pasti zajedno (torzalne kružnice), ili mogu biti imaginarne.

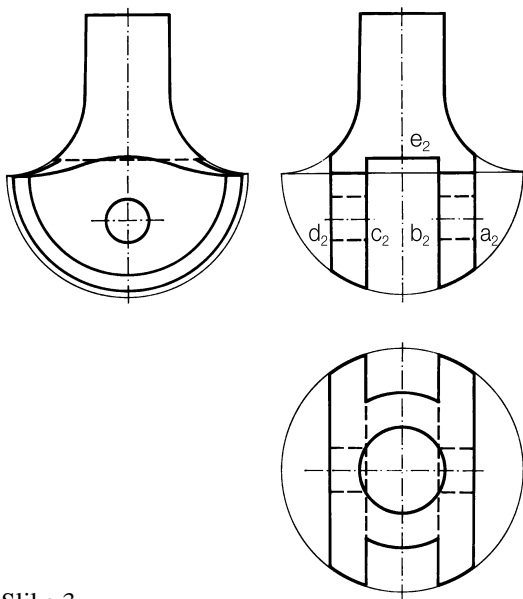
Treći sistem degeneriranih presjeka torusa čine tzv. dvostruke dirne ravnine torusa, tj. ravnine koje diraju torus u po dvije hiperboličke točke. Naime, svaka dirna ravnina torusa postavljena njegovom hiperboličkom točkom siječe torus u krivulji 4. reda koja u diralištu ima dvostruku točku. Uz ovu dvostruku točku ima ta krivulja i dvije imaginarne dvostruke točke na neizmjereno dalekoj apsoluti [1]. Unutar svih ravnina koje diraju torus u njegovim hiperboličkim točkama postoje i takve koje ga diraju u po dvije hiperboličke točke (tzv. dvostruke dirne ravnine). Presječna krivulja torusa s takvom ravninom ima četiri dvostruke točke i to dvije realne i dvije apsolutne. Kao što je poznato, ravninska krivulja 4. reda s četiri dvostruke točke raspada se ili na dvije konike ili pravac i krivulju trećeg reda. U ovom se slučaju ona raspada na dvije konike koje prolaze apsolutnim točkama ravnine, dakle na dvije kružnice. Naime, Villarceau-ov teorem (1848) kaže: “Svaka dvostruka dirna ravnina torusa siječe torus

u dvije kongruentne kružnice” [1]. Postoji beskonačno mnogo ravnina s ovim svojstvom i one omataju dirni stožac torusa. Jedna od takvih ravnina zajedno s Villarceau-ovim kružnicama prikazana je na slici 2.



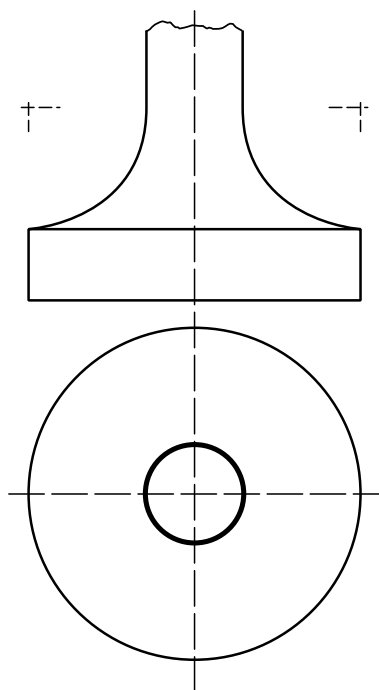
Slika 2.

Primjenu torusa susrećemo primjerice kod oblikovanja strojnih dijelova, koji nastaju presjecanjem rotacijskih tijela ravninama. Radi se o tzv. *pogonskim ojnica* koje predstavljaju spojne elemente križne glave i rukavca koljenastog vratila [2]. Zadatak im je prenošenje snage sa svornjaka križne glave na rukavac koljenastog vratila. Ojnice se sastoje od dviju glava i tijela. Jedna glava ojnice se veže s križnom glavom, a druga s rukavcem koljenastog vratila. Dobivaju se obradom složenih rotacijskih tijela koja su uglavnom sastavljena od kugle, torusa, stošca i valjka. Na primjer, da bi se dobila viličasta glava ojnice (slika 3) složeno se rotacijsko tijelo, sastavljeno od polukugle, torusa i valjka, presijeca s pet ravnina, a za plosnatu zatvorenu glavu ojnice tijelo se presijeca s dvije ravnine. Njihova konstruktivna obrada detaljno je izvedena u sveučilišnom udžbeniku [4].



Slika 3.

Tijelo ojnice se također dobiva obradom složenog rotacijskog tijela. Postoji više oblika tijela ojnica. Na slici 4a. prikazane su projekcije složenog rotacijskog tijela, koje se sastoji od valjkaste ploče, četvrtine torusne plohe i valjka. Presijecanjem tog tijela ravninama, što se u praksi izvodi obradom odvajanja čestica, dobije se tijelo ojnice.



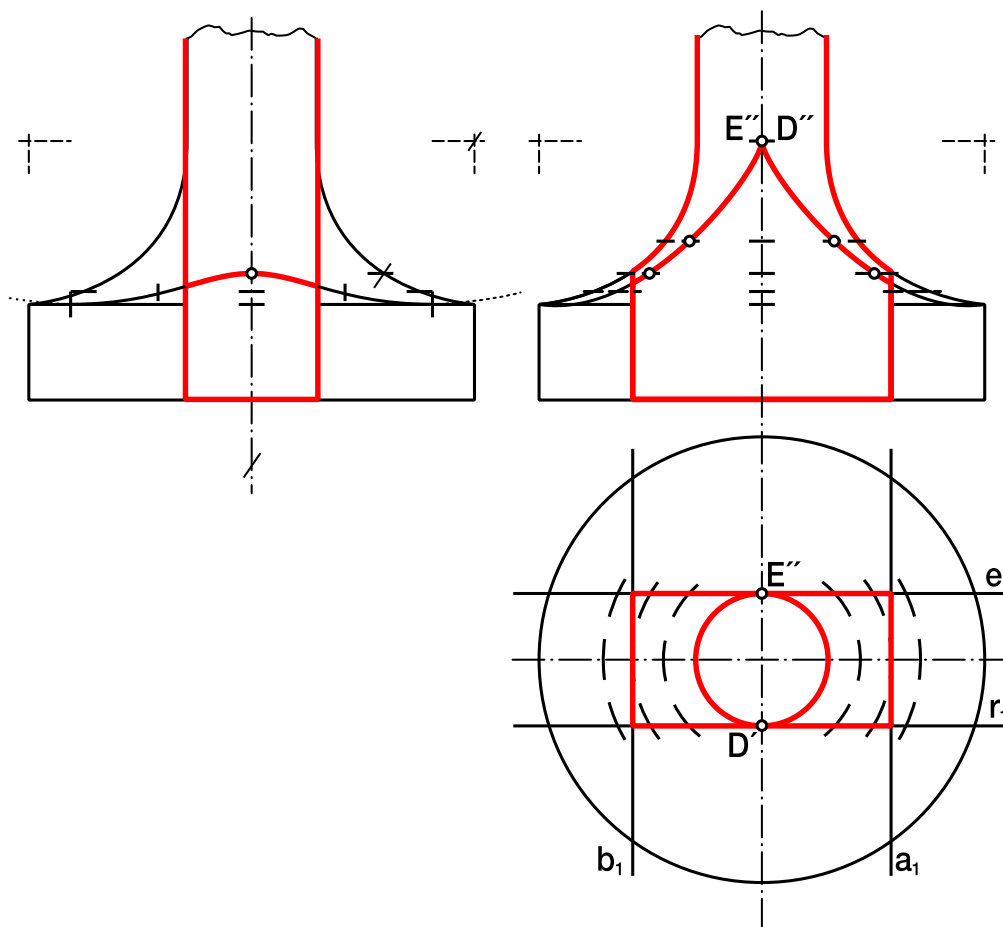
Slika 4a.

Ravnine kojima oblikujemo tijelo ojnice usporedne su s osi rotacijskog tijela i simetrično postavljene s obzirom na os tako da su dvije od njih usporedne s ravninom Π_2 , a dvije

s ravninom Π_3 . Postoje dvije varijante tijela ojnice: ravnine usporedne s ravninom Π_2 dodiruju torus u točki grlene kružnice ili ga ne dodiruju. Na sl 4b. prikazana je prva varijanta.

Dijelovi presječnih krivulja koje dobivamo na torusnoj plohi su 4. reda. Naime, ravnine paralelne s osi torusa presijecaju torus u Persejevim krivuljama [7]. Postoji šest različitih oblika tih krivulja, među koje spada i meridijan torusa. Oblik krivulje ovisi o udaljenosti presječne ravnine od osi torusa. Ravnina **P**, odnosno **E**, dodiruje torus u točki grlene kružnice u kojoj presječna krivulja ima dvostruku točku, a cijela krivulja ima oblik lemniskate. Ravnine **A** i **B** sijeku torus u jednodjelnim krivuljama koje imaju po četiri infleksione točke. Točke presječnih krivulja određene su na torusnoj plohi pomoću usporednika. Ravnine kojima se presjeca torus sijeku i valjkastu ploču u pravokutnicima. Od rotacijskog tijela odstranjen je dio ispred ravnine **P**, iza ravnine **E**, desno od ravnine **A** i lijevo od **B**.

Neki strojni dijelovi nastaju i tako da se koriste *prodori* dviju ili više rotacijskih ploha. Najviše se primjenjuju prodori dviju rotacijskih ploha, čija se prodorna krivulja raspada na krivulje nižih redova. Na tom su principu izrađena tzv. *koljena* koja mogu biti sastavljena od valjkastih ili stožastih ploha. Plohe su spojene po elipsama koje su dijelovi raspadnute prodorne krivulje 4. reda. *Cijevni odvojci* su strojni dijelovi izrađeni po principu sastavljanja pojedinih ploha duž raspadnutih prodornih krivulja reda višeg od četiri, jer se uglavnom radi o prodoru torusne plohe s valjkastom, stožastom ili drugom torusnom plohom. Na slici 5. prikazan je nacrt *cijevnog odvojka* koji se sastoji od valjkaste i torusne plohe koje su spojene po prodornoj krivulji. Plohe imaju iste promjere, a zajednička im je ravnina simetrije usporedna s ravninom Π_2 . Točke prodorne krivulje mogu se odrediti na dva načina: metodom ravnina i metodom "kliznih" kugli. U ovom primjeru to je učinjeno metodom ravnina. Umjesto tlocrta ploha korišteni su stranocrti. Ravnine su postavljene usporedno s ravninom Π_2 te svaka siječe valjkastu plohu u po dvije izvodnice, a torus u dvije koncentrične kružnice. Sjecišta izvodnica i kružnica su točke prodorne krivulje. U svakoj ravnini se na taj način dobije osam točaka prodorne krivulje koje mogu biti realne ili su u parovima konjugirano imaginarne, a može se dogoditi da više njih padne zajedno. Prodorna krivulja je 8. reda. Budući da plohe imaju jednake promjere i zajedničku ravninu simetrije usporednu s Π_2 imaju i dvije zajedničke dirne ravnine usporedne također s ravninom Π_2 . Svaka od tih ravnina sadrži torzalnu kružnicu torusa i dvostruko brojevu izvodnicu valjka čija su sjecišta četiri realne dvostruke točke prodorne krivulje. Izvan zajedničkih dirnih ravnina nema više realnih točaka prodorne krivulje. No, ako se uzme u obzir da torus dva puta prolazi apsolutom, a neizmjereno

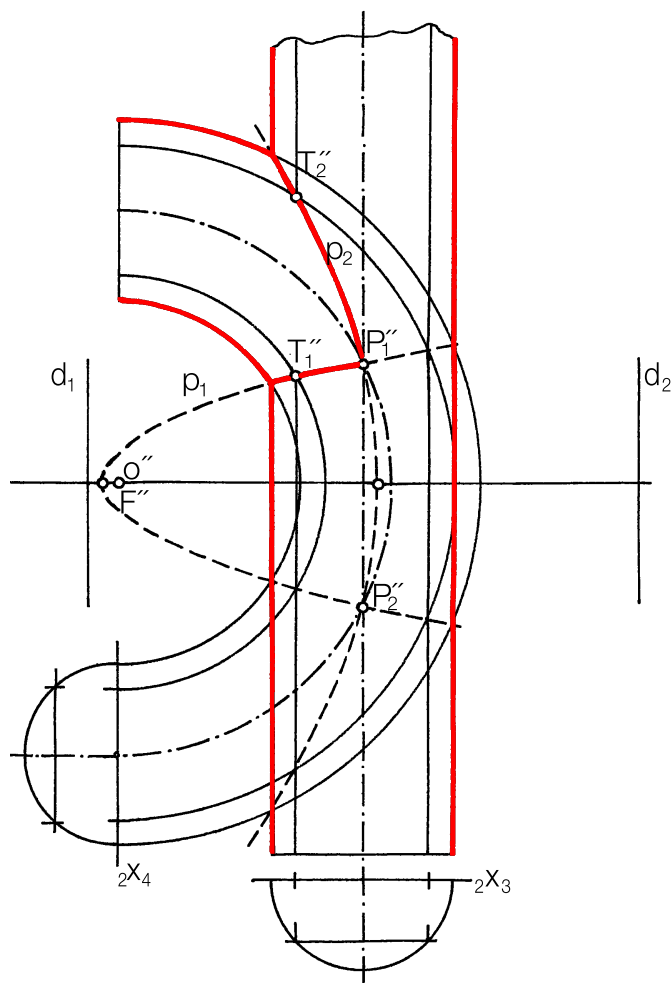


Slika 4b

daleka ravnina prostora presijeca zadani valjak u izotropnim pravcima koji diraju apsolutu [1], postoje i imaginarne dvostruke točke prodorne krivulje. Zbog prevelikog broja dvostrukih točaka prodorna se krivulja raspada na dvije krivulje 4. reda. Zbog zajedničke ravnine simetrije usporedne s ravninom Π_2 , prodorna se krivulja projicira u nacrtu u dvije dvostruko brojene krivulje 2. reda koje se sijeku u dvostrukim točkama P_1 i P_2 te prodorne krivulje. Konstruktivno se može pokazati da su to dvije parabole koje imaju zajednički fokus i zajedničku os. Analitički se može dokazati da se u ovom primjeru fokus tih parabola poklapa s nacrtom projekcijom osi torusa [6], a ravnalice tih parabola su pravci usporedni s izvodnicama valjka. Ravnalice se konstruiraju tako da se polumjer usporednika, na kojem leže točke P_1 i P_2 , prenese na obje strane one izvodnice valjka, na kojoj se te točke nalaze. Tada se za bilo koju točku T_1 krivulje p_1 , odnosno T_2 krivulje p_2 može pokazati da vrijedi $d(T_1F) = d(T_1d_1)$, odnosno $d(T_2F) = d(T_2d_2)$, iz čega je očito da se radi o parabolama.

Posebni slučaj cijevnog odvojka nastaje kada os valjka tangira središnju kružnicu torusa. Tada se prodorna krivulja raspada na dvostruko brojenu kružnicu, koja se projicira u dužinu p_1 i krivulju 4. reda, koja se projicira u parabolu p_2 . Dvostruke točke P_1 i P_2 padaju zajedno. Analitički dokaz ove činjenice nalazi se u [6].

Postoji još niz primjera strojnih dijelova izrađenih na principu prodora rotacijskih ploha koji ukazuju na jednostavnost, ne samo projekcija, nego i samih prodornih krivulja. Na primjer *koljeno za odtjecanje čine* tri torusa čije se prodorne krivulje mogu konstruirati i kao ravninski presjeci zbog njihovog međusobnog položaja, zajedničke ravnine simetrije i jednakih promjera tih torusa [3].



Slika 5.

Literatura

- [1] BEREIS, R., *Darstellende Geometrie I*, Akademie-Verlag GmBh, Berlin, 1964.
- [2] ELČIĆ, Z. ..., OBERŠMIT, E. ... (grupa autora), *Praktičar 3. - Strojstvo 2.*, Školska knjiga, Zagreb, 1973.
- [3] HOHENBERG, F., *Konstruktivna geometrija u tehničari*, (Niče V., prijevod s njemačkog), Građevinska knjiga, Beograd, 1966.
- [4] HORVATIĆ-BALDASAR, K., BABIĆ, I., *Nacrtna geometrija*, SAND d.o.o., Zagreb 1997.
- [5] MARKOVIĆ, Ž., *Uvod u višu analizu*, NZH, Zagreb, 1948.
- [6] STRUBECKER, K., *Nacrtna geometrija*, (Palman D., prijevod s njemačkog), Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [7] WUNDERLICH, W., *Darstellende Geometrie I*, B.I.-AG, Mannheim, 1966.

Dr. sc. Ivanka Babić

Sveučilište u Zagrebu

Građevinski fakultet

e-mail: ibabic@juraj.gradnz.grad.hr