Stručni rad
Prihvaćeno 20. 12. 1999.

VINKO MANDEKIĆ–BOTTERI

O konstrukcijama zlatnih trokuta

On the Constructions of the Golden Triangles

ABSTRACT

This article proves that there exist the infinite number of the golden triangles ABC, with sides $AB=1$ and $BC=(\sqrt{5}-1)/2$. It is derived the inequality which must satisfy the angle at a vertex A of each of these triangles, and it is shown that two isosceles and two right golden triangles are between them.

Key words: golden section, golden triangle

O konstrukcijama zlatnih trokuta

SAŽETAK

Dokazuje se da postoji beskonačno mnogo zlatnih trokuta ABC sa stranicama $AB=1$ i $BC=(\sqrt{5}-1)/2$. Izvodi se nejednakost koju mora zadovoljavati kut pri vrhu A svakoga od tih trokuta, te pokazuje da među njima postoje dva jednakokračna i dva pravokutna zlatna trokuta.

Ključne riječi: zlatni rez, zlatni trokut

MSC: 51M15

1. Uvod

O zlatnom rezu nedavno je izašao članak [5] u MFL-u, a 1995. knjiga [1] poznatog matematičara Beutelspachera. Oba se autora dotiču i zlatnog trokuta. Među autorima koji su prvi, u svezi sa zlatnim rezom, promatrali zlatni trokut bili su V. E. Hoggatt, jr. i M. Bicknell u članku [2] i knjizi [3].

U ovome radu navode se dvije definicije zlatnih trokuta ([3,2]) te dokazuje da su one ekvivalentne.

Nadalje, daju se konstrukcije zlatnih trokuta kojima su poznate dvije stranice kojih je omjer jednak broju zlatnog reza.

2. Definicije i stavci o zlatnom trokutu

Kao što je uobičajeno, omjer $(1+\sqrt{5})/2$ zlatnoga reza označavat ćemo sa Φ. (Na slici 1. crvenom je linijom istaknuta konstrukcija dužine AD čija je duljina $1/\Phi$.) Kako smo u Uvodu istaknuli, navodimo dvije ekvivalentne definicije zlatnoga trokuta te dva stavka o njemu. Treba napomenuti da su te definicije i stavci u lijepoj analogiji s dobro poznatom definicijom i svojstvom zlatnoga pravokutnika.

Definicija 1. ([3])

Zlatni trokut je onaj kojemu je, kad se njemu sličan trokut ukloni iz njega, omjer njegove površine i površine preostaloga trokuta jednak Φ.

Definicija 2. ([2])

Zlatni trokut je onaj trokut kojemu je omjer dviju stranica jednak Φ.

Stavak 1. ([2])

Zadan je omjer k dviju stranica trokuta a i b, $a/b=k>1$. Trokut sa stranicom jednakom b može se ukloniti tako da trokut koji ostaje bude sličan početnom ako i samo ako je $k=\Phi$.

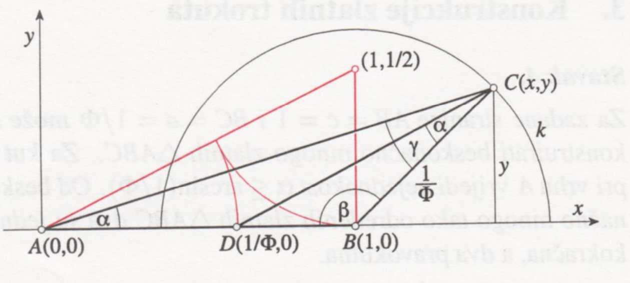
Stavak 2. ([2])

Zadan je omjer $k>1$ dviju stranica trokuta. Trokut sličan početnomu možemo ukloniti tako da omjer površina početnog i preostaloga trokuta bude jednak k ako i samo ako je $k=\Phi$.

Stavak 3.

Definicija 1. i Definicija 2. su ekvivalentne.

Dokaz. Neka je $\triangle ABC$ zlatni prema definiciji 1., tj. kad se njemu sličan $\triangle CDB$ ukloni iz njega, omjer površine zlatnog $\triangle ABC$ i površine preostaloga $\triangle ADC$ je Φ (slika 1.). Iz sličnosti $\triangle ABC$ i $\triangle CDB$ slijedi proporcionalnost njihovih stranica $AB:BC=BC:BD$.



Slika 1.

Budući da $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ imaju istu visinu y na stranicu AB, odnosno AD, može se napisati

$\left(\frac{1}{2}AB\cdot y\right):\left(\frac{1}{2}AD\cdot y\right)=\Phi,$

što je ekvivalentno s $AB:AD=\Phi$.

Kako je $AB = AD + BD = AB/\Phi + BD$, to je

$BD = AB(\Phi - 1)/\Phi$.

Konačno je

$AB : BC = BC : BD = \Phi/(\Phi-1)BC : AB = \Phi^2 BC : AB$

i odatle $AB : BC = \Phi$.

Obratno, pretpostavimo da je $\triangle ABC$ zlatni prema definiciji 2., tj. $AB : BC = \Phi$.

Neka je točka D na stranici AB (slika 1.) takva da bude $AB : AD = \Phi$.

Pokazat ćemo da je $\triangle ABC$ sličan $\triangle CDB$.

Oba trokuta imaju zajednički kut β s vrhom u točki B, a osim toga vrijedi

$BC : BD = AB : \Phi(AB - AD) = 1/(\Phi - 1) = \Phi$.

To znači da su $\triangle ABC$ i $\triangle CBD$ slični budući da imaju jedan zajednički kut i dva para razmjernih stranica.

Pokazat ćemo još da je omjer površina $\triangle ABC$ i $\triangle ADB$ jednak Φ. Budući da $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$ imaju istu visinu y na stranicu AB, odnosno AD, može se omjer njihovih površina napisati

$(\frac{1}{2}AB \cdot y) : (\frac{1}{2}AD \cdot y) = AB : AD$,

što je jednako Φ, jer smo tako postavili točku D.

Time je stavak 3. dokazan.

Posljedica 1.

Neka je $\triangle ABC$ zlatni. Točka D na stranici $AB = 1$ dijeli $\triangle ABC$ na dva trokuta, na $\triangle BCD$, koji je sličan $\triangle ABC$, i na $\triangle ADC$, za koji vrijedi $P_{\triangle ABC}/P_{\triangle ADC} = \Phi$ ako i samo ako je $AD = 1/\Phi$.

Dokaz. Ako je $AD = 1/\Phi$, onda sličnost $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$ te jednakost $P_{\triangle ABC}/P_{\triangle ADC} = \Phi$ slijedi prema tijeku dokaza stavka 3.

Obratno,

$P_{\triangle ABC}/P_{\triangle ADC} = [(AB \cdot y)/2]/[(AD \cdot y)/2] = 1/AD = \Phi$,

tj. $AD = 1/\Phi$.

3. Konstrukcije zlatnih trokuta

Stavak 4.

Za zadane stranice $AB = c = 1$ i $BC = a = 1/\Phi$ može se konstruirati beskonačno mnogo zlatnih $\triangle ABC$. Za kut α pri vrhu A vrijedi nejednakost $\alpha \leq \arcsin(1/\Phi)$. Od beskonačno mnogo tako određenih zlatnih $\triangle ABC$ dva su jednakokračna, a dva pravokutna.

Dokaz. Smjestimo $\triangle ABC$ u Descartesov pravokutni koordinatni sustav $x0y$ tako da vrh A bude u ishodištu, a vrh B jedinična točka na osi x (slika 1.). Točka D na stranici AB ima apscisu $1/\Phi$. Na temelju stavka 3. i posljedice 1. možemo zaključiti da za svaku točku C koja leži na gornjoj polukružnici kružnice k sa središtem u vrhu B i polumjerom $1/\Phi$ vrijedi da je $\triangle ABC$ zlatni.

Očigledno je da vrh C može zauzeti beskonačno mnogo položaja na polukružnici od k i tako odrediti beskonačno mnogo zlatnih $\triangle ABC$.

Lako se uočava da vrijedi $\sin\gamma/\sin\alpha = 1/(1/\Phi)$ pa stoga i

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = \Phi. \qquad (1)$$

Iz (1) proizlazi da je $\sin\alpha \leq 1/\Phi = (\sqrt{5}-1)/2$. Odatle je

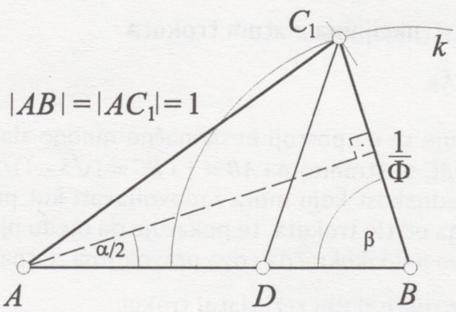
$$\alpha \leq \arcsin\frac{1}{\Phi} = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 38°10'22''. \qquad (2)$$

Uočava se također da α ima najveću vrijednost kada je $\gamma = 90°$ te da, prema [4, str. 78–79], vrijedi

$$\sin 18° = \frac{1}{2\Phi}, \qquad \cos 36° = \frac{\Phi}{2}. \qquad (3)$$

Istaknimo još i one pozicije točke C koje realiziraju jednakokračne i pravokutne zlatne trokute.

a) Prvi jednakokračni zlatni $\triangle ABC_1$ (slika 2.) nastaje za $a = 1/\Phi$ i $b = c = 1$.



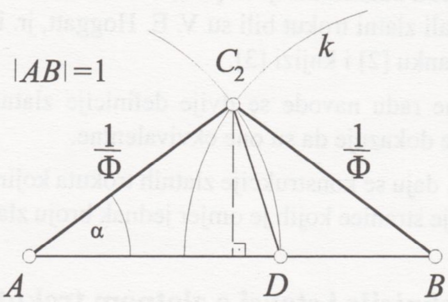
Slika 2.

Sa slike 2. lako se uočava da je $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\Phi}$, što prema (3) daje $\alpha/2 = 18^o$ i na kraju

$$\alpha = 36°, \qquad \beta = \gamma = 72°.$$

To je dobro poznat jednakokračni zlatni trokut koji se javlja kod konstrukcije pravilnog deseterokuta, pri čemu je $a_{10} = R/\Phi$.

b) Drugi jednakokračni $\triangle ABC_2$ (slika 3.) nastaje za $a = b = 1/\Phi$ i $c = 1$.

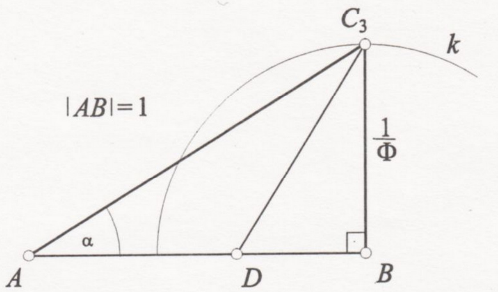


Slika 3.

Sada je $\alpha = \beta$ te sa slike 3. lako uočavamo da je $\cos\alpha = \Phi/2$, što prema (3) daje

$$\alpha = \beta = 36°, \qquad \gamma = 108°.$$

c) Prvi pravokutni zlatni trokut ABC_3 nastaje za $\beta = 90°$.

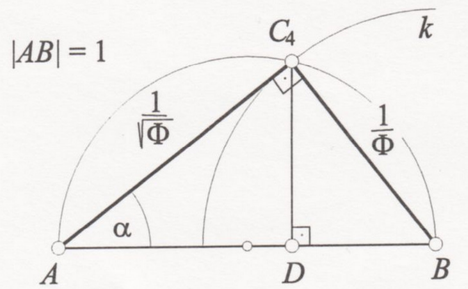


Slika 4.

Očito je $\mathrm{tg}\alpha = 1/\Phi = \mathrm{ctg}\beta$, tj. $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{\Phi} \approx 31°43'3''$.
Kako je $c = 1$, $a = 1/\Phi$, vrijedi

$$b = \sqrt{1 + \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{\sqrt{\Phi + 2}}{\Phi}.$$

d) Drugi pravokutni zlatni trokut nastaje za $\gamma = 90°$.



Slika 5.

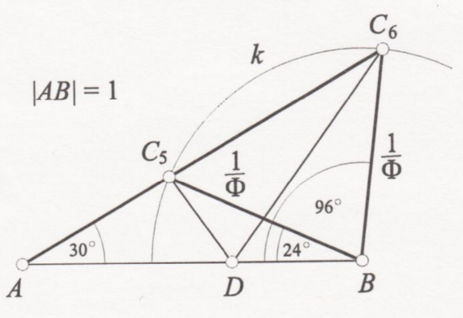
Kako smo već istaknuli u svezi s formulom (2), kut α poprima najveću moguću vrijednost $\arcsin\frac{1}{\Phi}$, a stranica b leži na tangenti iz vrha A na kružnicu k.

Uz $c = 1$, $a = 1/\Phi$ vrijedi

$$b = \sqrt{1 - \frac{1}{\Phi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}.$$

Time je stavak 4 dokazan.

Primjedba 1. Istaknimo tu još dva zlatna trokuta koji se lako konstruiraju. Zbog uvjeta (2) kut α može biti 30°. Tada dobivamo dva tupokutna zlatna trokuta ($\triangle ABC_5$ i $\triangle ABC_6$).



Slika 6.

Naime, prema (1) i (3) vrijedi $\sin(\beta + 30°) = \frac{\Phi}{2}$, pa stoga i $\beta + 30° = 54°$ ili $\beta + 30° = 180° - 54°$, tj. $\beta_1 = 24°$ ili $\beta_2 = 96°$.

Primjedba 2. Ovisno o vrijednosti kuta α dobivamo sljedeće zlatne trokute:

1. za svaki kut α za koji vrijedi

   $\mathrm{arctg}(1/\Phi) < \alpha < \arcsin(1/\Phi)$

   dobivamo jedan šiljastokutan i jedan tupokutan zlatni trokut,
2. vrijednosti $\alpha = \mathrm{arctg}(1/\Phi)$ i $\alpha = \arcsin(1/\Phi)$ daju pravokutne zlatne trokute,
3. za svaki kut α za koji je $\alpha < \mathrm{arctg}(1/\Phi)$ dobivamo dva tupokutna zlatna trokuta.

Primjeri za te tri mogućnosti:

$\triangle ABC_1$ i $\triangle ABC_2$ za prvu, uz izbor $\alpha = 36°$,

$\triangle ABC_3$ i $\triangle ABC_4$ za drugu, uz $\alpha = \mathrm{arctg}(1/\Phi) \approx 31°43'3''$ i $\alpha = \arcsin(1/\Phi) \approx 38°10'22''$, te

$\triangle ABC_5$ i $\triangle ABC_6$ za treću mogućnost, uz izbor $\alpha = 30°$.

Literatura

[1] BEUTELSPACHER, A.; BERNARD, P.: *Der Goldene Schnitt,* 2. Auflage, Wissenchsftsverlag, Mannheim–Leipzig–Wien–Zürich, 1995.

[2] BICKNELL, M.; HOGGATT, V. E. JR.: *Golden Triangles, Rectangles, and Cuboids,* Fibonacci Quarterly, 7, (1969, February), 73–91.

[3] HOGGATT, V. E. JR.: *Fibonacci and Lucas Numbers,* Houghton Mifflin Company, 1969, USA.

[4] VOROBJEV, N. N.: *Čisla Fibonači,* III. izd., Izdateljstvo Nauka, Moskva, 1969.

[5] ŽUBRINIĆ, D.: *Božanski ili zlatni omjer,* Matematičko–fizički list, 1998/99, 65–75.

Vinko Mandekić–Botteri
Tekstilno–tehnološki fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
10000 Zagreb, Pierottijeva 6
tel.: 4836–058, fax.: 4836–058
e-mail: vinko@zagreb.tekstil.hr