

<https://doi.org/10.31896/k.27.5>

Stručni rad

Prihvaćeno 18. 10. 2023.

MONIKA ĐUZEL

IVANA FILIPAN

LJILJANA PRIMORAC GAJČIĆ

Krivulje u 3-dimenzionalnom Minkowskijevom prostoru

Curves in 3-dimensional Minkowski Space

ABSTRACT

In this paper curves in threedimensional Minkowski space were analyzed and the main differences in local theory of curves in Euclidean and Minkowski space were emphasized. Special attention is paid to curves with no Euclidean counterpart. There are numerous examples of studied curves whose graphic representations were made by *Mathematica* software.

Key words: Minkowski space, spacelike curve, timelike curve, lightlike curve

MSC2010: 53A35, 53B30

Krivulje u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru

SAŽETAK

U radu su promatrane krivulje u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru, te su istaknute razlike u lokalnoj teoriji krivulja u odnosu na euklidski prostor. Posebna pažnja posvećena je krivuljama koje nemaju svoj analogon u euklidskom prostoru. Navedeni su i brojni primjeri krivulja, za čiju vizualizaciju je korišten program *Mathematica*.

Ključne riječi: Minkowskijev prostor, prostorna krivulja, vremenska krivulja, svjetlosna krivulja

1 Uvod

Iako je francuski matematičar i teorijski fizičar Henri Poincaré (1854.-1912.) predviđao da će euklidska geometrija zauvijek ostati najprikladnija za proučavanje fizike, danas je, zahvaljujući njemačkom matematičaru i fizičaru Hermannu Minkowskom (1864.-1909.), poznato da je to zapravo 4-dimenzionalna ne-euklidska mnogostrukost.

U jesen 1907. Minkowski je uvidio značaj Einsteinove teorije relativnosti za cjelokupnu fiziku te je održao predavanje Matematičkom društvu Göttingena pod naslovom "O principu relativnosti u elektrodinamici: novi oblik jednadžbi elektrodinamike". Tom prilikom je Minkowski predstavio svoju reformulaciju zakona fizike u terminima 4-dimenzionalnog prostora, koja se temeljila na Lorentzovoj invarijantnosti kvadratne forme $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, gdje su x, y, z pravokutne prostorne koordinate, t je vrijeme, a c brzina svjetlosti u vakuumu. Svjetlosni signal iz točke O se širi u obliku kružnice zadane jednadžbom $(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i ona predstavlja doseg širenja informacija brzinama ispod brzine svjetlosti. Svaki događaj T u 4-dimenzionalnom prostoru zadan s koordinatama (t, x, y, z) koji zadovoljava gornju jednadžbu pri-

pada svjetlosnom konusu. Takav konus možemo pridružiti svakom događaju T , pri čemu događaji s $t > 0$ predstavljaju događaje koje je moguće posjetiti iz događaja T brzinom gibanja manjom ili jednakom brzini svjetlosti. Potaknut time, Minkowski definira metriku zadanu s $ds^2 = (ct)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ koja očito nije definitna, odnosno postoje događaji čija je udaljenost od fiksnog događaja jednaka nuli. Takvi događaji su događaji koji se odvijaju istovremeno. Četiridimenzionalni prostor s ovako definiranom (pseudo)-metrikom naziva se Minkowskijev prostor i to je najprikladniji prostor za izučavanje moderne fizike. Definiranu (pseudo)-metriku možemo analogno definirati i na trodimenzionalnom prostoru, te izučavati krivulje i plohe unutar takvog prostora, što možemo lako vizualno predočiti. Dakle, Minkowskijev 3-dimenzionalni (ili čak n -dimenzionalni) prostor je vrlo privlačan za izučavanje objekata diferencijalne geometrije, budući da se u njemu javljaju razlike u odnosu na teoriju euklidskog prostora. U ovom radu bavit ćemo se krivuljama u Minkowskijevom trodimenzionalnom prostoru, s posebnim naglaskom na krivulje kakvih nema u euklidskom prostoru, te ćemo isticati bitne razlike u teoriji krivulja u odnosu na euklidski slučaj. Dijelovi ovog članka temelje se na diplom-

skom radu [3] kojeg je pod voditeljstvom doc.dr.sc.Ljiljane Primorac Gajčić izradila studentica Odjela za matematiku, Sveučilišta u Osijeku, Monika Đuzel.

2 Trodimenzionalni Minkowskijev prostor

Minkowskijev trodimenzionalni prostor, koji se zbog važnosti Lorentzovih transformacija pri njegovom definiranju naziva još i Lorentz-Minkowskijev, a katkad i samo Lorentzov prostor predstavlja uređeni par realnog trodimenzionalnog vektorskog prostora i odgovarajuće pseudo-metrike.

Definicija 1 *Minkowskijev prostor je metrički prostor $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, gdje je metrika (pseudo-skalarni produkt indeksa 1) definirana s*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3,$$

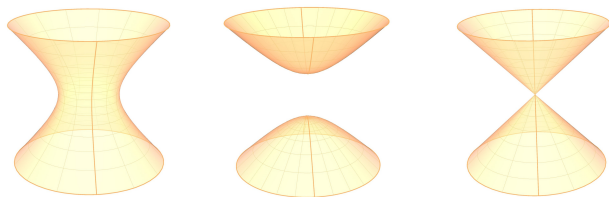
$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3).$$

Neki autori ([7]), definiraju metriku s minusom na prvoj koordinati ($\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$), dok ćemo se mi u radu služiti definicijom 1.

Definirana metrika je pseudo-metrika budući da ne zadovoljava svojstvo pozitivne definitnosti. S obzirom na definiranu pseudo-metriku u Minkowskijevom prostoru razlikujemo tri vrste vektora koje definiramo kao slijedi:

Definicija 2 *Za vektor $x \in \mathbb{R}_1^3$ kažemo da je prostorni ako je $\langle x, x \rangle > 0$ ili $x = 0$, vremenski ako je $\langle x, x \rangle < 0$ i svjetlosni (nul, izotropni) ako je $\langle x, x \rangle = 0$ i $x \neq 0$.*

Svojstvo vektora iz prethodne definicije nazivamo kauzalnim karakterom vektora. Promotrimo li sad klasifikaciju vektora s obzirom na skalarni kvadrat vektora, možemo uočiti da prostorni vektori pripadaju jednoplošnom hiperboloidu zadanom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = r^2$, $r > 0$, vremenski vektori pripadaju dvoplošnom hiperboloidu zadanom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = -r^2$, $r > 0$, dok svjetlosni vektori pripadaju stošcu zadanom jednadžbom $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Spomenute plohe su i primjeri kvadratika u Minkowskijevom prostoru [12], te ih redom nazivamo, vremenska ili pseudo-sfera, prostorna sfera ili hiperbolična ravnina te svjetlosni stožac, slika 1.



Slika 1: Pseudo-sfera, hiperbolična ravnina i svjetlosni stožac

Primjer 1 *Vektor $x_1 = (3, 2, 1)$ je prostorni jer je $\langle x_1, x_1 \rangle = 12 > 0$. Vektor $x_2 = (1, 2, 3)$ je vremenski jer je $\langle x_2, x_2 \rangle = -4 < 0$ i vektor $x_3 = (2, 0, 2)$ je svjetlosni jer je $\langle x_3, x_3 \rangle = 0$.*

Okomitost vektora u \mathbb{R}_1^3 definira se isto kao i u euklidskom prostoru.

Definicija 3 *Za vektore $x, y \in \mathbb{R}_1^3$ kažemo da su okomiti (ortogonalni) ako je $\langle x, y \rangle = 0$.*

Istaknimo da za razliku od euklidskog prostora, gdje za kolinearne vektore $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ nikako ne vrijedi da je $\langle x, y \rangle = 0$ jer bi to značilo da su vektori istovremeno kolinearni i okomiti, u Minkowskijevom prostoru to nije tako. Štoviše, za svaka dva kolinearna svjetlosna vektora $x, y \in \mathbb{R}_1^3$ vrijedi $\langle x, y \rangle = 0$. Odnosno, svjetlosni ortogonalni vektori su kolinearni vektori.

Primjer 2 *Neka su $x = (1, 0, 1)$ i $y = (\lambda, 0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dva svjetlosna vektora. Očito su x i y kolinearni jer vrijedi $y = \lambda x$, no za njih također vrijedi $\langle x, y \rangle = 0$ što znači da su okomiti.*

Za vremenske vektore vrijedi druga osobitost. Naime, može se pokazati da takva dva vektora nisu nikada okomita, tj. ako su $x, y \in \mathbb{R}_1^3$ vremenski vektori onda vrijedi $\langle x, y \rangle \neq 0$. Nadalje, vrijede sjedeća svojstva za dva ortogonalna v i w vektora u \mathbb{R}_1^3 .

1. Ako je v vremenski vektor, onda je w prostorni vektor.
2. Ako je v prostorni vektor, onda je w ili prostorni ili vremenski ili svjetlosni vektor.
3. Ako je v svjetlosni vektor, onda je w prostorni ili svjetlosni vektor.

Definicija 4 *Pseudo-norma vektora $x \in \mathbb{R}_1^3$ definirana je s $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$.*

Napomena 1 *Za vektor $x \in \mathbb{R}_1^3$ kažemo da je jedinični (normiran) ako je $\|x\| = 1$. Za razliku od euklidskog prostora gdje se svaki vektor različit od $\vec{0}$ može normirati, u Minkowskijevom prostoru to nije tako. Svaki prostorni vektor različit od $\vec{0}$ i svaki vremenski vektor može se normirati, dok svjetlosni vektori se ne mogu normirati jer je njihova norma 0.*

Euklidski i Minkowskijev prostor razlikuju se i u Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti. Ako su $x, y \in \mathbb{R}^3$ tada vrijedi $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, dok u Minkowskijevom prostoru za vremenske vektore $x, y \in \mathbb{R}_1^3$ vrijedi $|\langle x, y \rangle| \geq \|x\| \|y\|$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x, y kolinearni.

Definicija vektorskog produkta je analogna definiciji vektorskog produkta u \mathbb{R}^3 .

Definicija 5 Vektorski produkt $v \times_L w$ vektora v i w u \mathbb{R}_1^3 dan je $s v \times_L w = J(v \times w)$, gdje \times označava euklidski vektorski produkt, a matrica J je dana s

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dalje u radu ispuštamo indeks L u oznaci \times_L , te će oznaka \times predstavljati vektorski produkt u Minkowskijevom prostoru, osim ako nije istaknuto drugačije.

Promotrimo sad kut između dva vektora u Minkowskijevom prostoru. S obzirom na vezu između skalarnog produkta dva vektora i kuta koji zatvaraju, prirodno je za očekivati da će postojati razlike pri definiciji kuta između dva vektora u Minkowskijevom prostoru. Za dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^3$ u euklidskom prostoru koji zatvaraju kut θ , vrijedi $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$. U Minkowskijevom prostoru vrijedi slična jednakost pomoću koje se definira kut između vektora pri čemu definicija kuta ovisi o kauzalnom karakteru vektora koji ga zatvaraju ([13]). Pri definiranju kuta treba voditi računa i o vremenskoj orijentaciji vektora koja se definira na sljedeći način:

Definicija 6 Neka je $e_1 = (1, 0, 0)$. Za dani vektor $x \in \mathbb{R}_1^3$ kažemo da je orijentiran u budućnost (odnosno prošlost) ako vrijedi $\langle x, e_1 \rangle < 0$ (odnosno $\langle x, e_1 \rangle > 0$).

Definicija 7 Neka su x i y vremenski vektori iste orijentacije u \mathbb{R}_1^3 . Tada postoji jedinstveni realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y \rangle = -\|x\| \|y\| \cosh \theta.$$

Broj θ se naziva hiperbolički kut između vektora x i y .

Definicija 8 Neka su x i y prostorni vektori u \mathbb{R}_1^3 koji razapinju vremenski (prostorni) potprostor. Tada postoji jedinstveni realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cosh \theta, \quad (\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta).$$

Broj θ se naziva središnji kut između vektora x i y .

Definicija 9 Neka je x prostorni, a y vremenski vektor u \mathbb{R}_1^3 . Tada postoji jedinstveni realni broj $\theta \geq 0$ takav da

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \sinh \theta.$$

Broj θ se naziva Lorentzov vremenski kut između vektora x i y .

Za razliku od euklidskog prostora gdje možemo definirati kut između bilo koja dva ne-nul vektora, u Minkowskijevom prostoru kut između dva vektora od kojih je jedan svjetlosnog karaktera se ne definira.

Definicija i svojstva baze za Minkowskijev prostor analogni su onima u euklidskom prostoru tako da ćemo ih izostaviti. Navest ćemo samo definiciju svjetlosne baze i propoziciju koja nema euklidski analogon.

Definicija 10 Uređenu trojku (A, B, C) koja se sastoji od dva svjetlosna i jednog prostornog vektora za koje vrijedi:

$$\langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1$$

$$\langle A, B \rangle = 1, \quad \langle A, C \rangle = 0, \quad \langle B, C \rangle = 0$$

nazivamo svjetlosni (nul) trobrid ili svjetlosna baza.

Propozicija 1 Svaka ortonormirana baza $\{a_1, a_2, a_3\}$ za \mathbb{R}_1^3 ($a_i \perp a_j$ za sve $i \neq j$ i $\|a_i\| = 1$ za $i \in \{1, 2, 3\}$) sastoji se od točno dva prostorna i jednog vremenskog vektora.

Potprostore Minkowskijevog prostora također možemo razlikovati po kauzalnom karakteru, što je određeno sljedećom definicijom.

Definicija 11 Za potprostor $W \leq \mathbb{R}_1^3$ kažemo da je:

1. prostorni ako je svaki vektor $x \in W$ prostorni,
2. vremenski ako sadrži neki vremenski vektor,
3. svjetlosni ako sadrži neki svjetlosni vektor, ali ne sadrži vremenski vektor.

Definicija 12 Neka je $W \leq \mathbb{R}_1^3$ potprostor. Za pseudo-skalarni produkt u \mathbb{R}_1^3 kažemo da je degeneriran na W ako postoji vektor $v \in W$, $v \neq 0$ takav da je $v \perp x$ za svaki $x \in W$. U suprotnom kažemo da je pseudo-skalarni produkt nede-generiran na W .

Pseudo-skalarni produkt na potprostoru $W \leq \mathbb{R}_1^3$ je degeneriran ako i samo ako je W svjetlosni potprostor.

Propozicija 2 Ako je $W \leq \mathbb{R}_1^3$ potprostor:

1. W je prostorni ako i samo ako je W^\perp vremenski.
2. W je vremenski ako i samo ako je W^\perp prostorni.
3. W je svjetlosni ako i samo ako je W^\perp svjetlosni.

U prva dva slučaja je $W \cap W^\perp = \{0\}$, dok je u trećem $W \cap W^\perp \neq \{0\}$, odnosno u trećem slučaju vrijedi $\dim(W \cap W^\perp) = 1$.

3 Lokalna teorija krivulja u \mathbb{R}_1^3

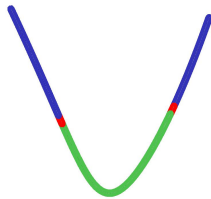
Krivulje u Minkowskijevom prostoru definiramo kao i u euklidskom. Njihova lokalna teorija je u mnogočemu analogna lokalnoj teoriji krivulja u euklidskom prostoru. No ipak postoje neke razlike uzrokovane indefinitnošću pseudo-metrike o kojima će više riječi biti u nastavku.

Kauzalni karakter krivulje u Minkowskijevom prostoru određen je kauzalnim karakterom njezinog tangencijalnog vektora.

Definicija 13 *Krivulja $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna (nul)) u točki $s_0 \in I$ ako je vektor $c'(s_0)$ prostorni (odnosno vremenski, svjetlosni).*

Krivulja $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna (nul)) ako je prostorna (odnosno vremenska, svjetlosna) u svakoj točki $s \in I$.

Primjer 3 *Krivulja $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\alpha(s) = (\cosh s, \frac{s^2}{2}, \sinh s)$ nema jedinstveni kauzalni karakter. Budući da je $\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = s^2 - 1$, onda je α prostorna krivulja na intervalu $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, vremenska na intervalu $(-1, 1)$ i svjetlosna u točkama $s = \pm 1$. Vidi sliku 2.*



Slika 2: Plavi dio krivulje α je prostorni, zeleni dio je vremenski, a crveni svjetlosni.

Definicija 14 *Za prostornu (vremensku) krivulju $c: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka ako je $\|c'(s)\| = 1$, $s \in I$.*

Napomena 2 *Svjetlosnu krivulju c ne možemo parametrizirati parametrom duljine luka jer vrijedi $\|c'(s)\| = 0$, ali je možemo parametrizirati tzv. parametrom duljine pseudo-luka. Kasnije ćemo opisati tu reparametrizaciju.*

Budući da se teorija prostornih i vremenskih krivulja u \mathbb{R}_1^3 razlikuje od teorije svjetlosnih krivulja, najprije ćemo navesti rezultate vezane za prostorne i vremenske krivulje, a zatim za svjetlosne krivulje. Prostorne krivulje razlikujemo s obzirom na kauzalni karakter normale, koji može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni. Vremenske krivulje i prostorne krivulje s prostornom ili vremenskom normalom nazivamo Frenetove krivulje.

Za svaku Frenetovu krivulju c u \mathbb{R}_1^3 , analogno kao u euklidskom prostoru, definiramo ortonormirani trobrid (reper), tj. ortonormiranu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}_{1,c(s)}^3$ u svakoj točki krivulje $c(s)$. Neka je $c: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Frenetova krivulja parametrizirana duljinom luka pri čemu c' i c'' nisu kolinearni vektori. Polje $T(s) = c'(s)$ je jedinično tangencijalno polje od c . Polje vektora glavnih normala dano je s $N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}$, $c''(s) \neq 0$, a polje binormala s $B(s) = T(s) \times N(s)$. Tada je $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormirana baza od $\mathbb{R}_{1,c(s)}^3$ i nazivamo je Frenetovim (Frenet-Serretovim) trobridom (reperom, okvirom) krivulje c ([9]).

Definiramo sada za krivulju parametriziranu duljinom luka i sljedeće funkcije:

Definicija 15 *Neka je $c: I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ Frenetova krivulja parametrizirana duljinom luka.*

1. Funkciju $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ nazivamo zakrivljenošću (fleksijom) krivulje c u točki $c(s)$.
2. Funkciju $\tau: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(s) = \langle N(s), B'(s) \rangle$ nazivamo torzijom (sukanjem) krivulje c u točki $c(s)$.

U \mathbb{R}_1^3 također vrijede Frenetove formule analogne onima u euklidskom prostoru,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\eta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

pri čemu je $\varepsilon = \langle T, T \rangle = \pm 1$, $\eta = \langle N, N \rangle = \pm 1$.

U primjeru 4 dane su parametarske jednadžbe ravninskih krivulja s pripadnim trobridima.

Primjer 4

- (1) *Krivulja $\alpha(s) = r(\cos(\frac{s}{r}), \sin(\frac{s}{r}), 0)$ je prostorna krivulja s prostornom normalom. Leži u prostornoj ravnini s jednadžbom $z = 0$. Njezin Frenetov trobrid je*

$$T(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right),$$

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right), 0 \right),$$

$$B(s) = (0, 0, -1)$$

i zakrivljenosti su $\kappa = \frac{1}{r}$ i $\tau = 0$. Budući da je α ravninska krivulja s konstantnom zakrivljenošću, ona je kružnica u Minkowskijevom prostoru, kao i u euklidskom. Vidi sliku 4 lijevo.

- (2) Krivulja $\alpha(s) = r(0, \sinh(\frac{s}{r}), \cosh(\frac{s}{r}))$ je prostorna krivulja s vremenskom normalom. Leži u vremenskoj ravnini s jednadžbom $x = 0$. Njezin Frenetov trobrid je

$$T(s) = (0, \cosh(\frac{s}{r}), \sinh(\frac{s}{r})),$$

$$N(s) = (0, \sinh(\frac{s}{r}), \cosh(\frac{s}{r})),$$

$$B(s) = (1, 0, 0)$$

i zakrivljenosti su $\kappa = \frac{1}{r}$ i $\tau = 0$. Budući da je α ravninska krivulja s konstantnom zakrivljenošću, ona je kružnica u Minkowskijevom prostoru. Euklidskim očima gledano ona je jednakostrana hiperbola. Vidi sliku 4 sredina (žuta).

- (3) Krivulja $\alpha(s) = r(0, \cosh(\frac{s}{r}), \sinh(\frac{s}{r}))$ je vremenska krivulja koja leži u vremenskoj ravnini s jednadžbom $x = 0$. Njezin Frenetov trobrid je

$$T(s) = (0, \sinh(\frac{s}{r}), \cosh(\frac{s}{r})),$$

$$N(s) = (0, \cosh(\frac{s}{r}), \sinh(\frac{s}{r})),$$

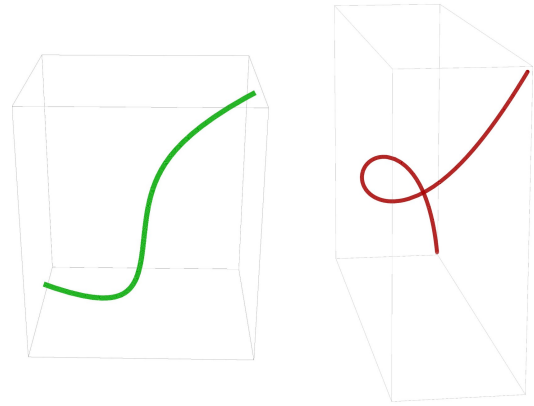
$$B(s) = (-1, 0, 0)$$

i zakrivljenosti su $\kappa = \frac{1}{r}$ i $\tau = 0$. Budući da je α ravninska krivulja s konstantnom zakrivljenošću, ona je kružnica u Minkowskijevom prostoru. Euklidskim očima gledano ona je jednakostrana hiperbola. Vidi sliku 4 sredina (zelena).

Sada ćemo navesti neke primjere prostornih krivulja u \mathbb{R}_1^3 .

Primjer 5

- (1) Obična cilindrična spirala $\alpha(s) = (r \cos s, r \sin s, hs)$, $h \neq 0, r > 0$ je prostorna (vremenska, svjetlosna) krivulja ako je $r^2 > h^2$, ($r^2 < h^2$, $r^2 = h^2$).
- (2) Obična cilindrična hiperbolična spirala $\alpha(s) = (hs, r \sinh s, r \cosh s)$, $h \neq 0, r > 0$ je prostorna krivulja (slika 3 lijevo).
- (3) Obična cilindrična spirala $\alpha(s) = (hs, r \cosh s, r \sinh s)$, $h \neq 0, r > 0$ je prostorna (vremenska, svjetlosna) krivulja ako je $h^2 > r^2$, ($h^2 < r^2$, $r^2 = h^2$).
- (4) Krivulja $(2s - \frac{4}{c} \arctan(cs), -\frac{1}{c}(3 + 2\ln(1 + c^2 s^2)), 2s)$, $c \in \mathbb{R}$ je nul krivulja (slika 3 desno).



Slika 3: Prostorna krivulja $(20s, 2 \sinh s, 2 \cosh s)$ i svjetlosna krivulja $(2s - 2 \arctan(2s), -\frac{1}{2}(3 + 2\ln(1 + 4s^2)), 2s)$, u prostoru.

Za razliku od euklidskog prostora, u Minkowskijevom prostoru postoje tzv. pseudo-nul krivulje ([14]). To su prostorne krivulje sa svjetlosnom normalom. Njihove Frenetove formule su

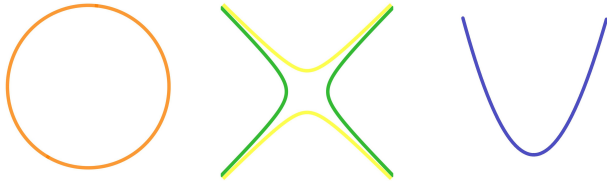
$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

gdje zakrivljenost κ poprima samo dvije vrijednosti, 0 ili 1. Ako je $\kappa = 0$, onda je $c(u)$ pravac. Vrijedi i obrat. Ako je $c(u)$ pravac, onda je $c''(u) = 0 = T'(u)$, što znači da je $\kappa = 0$. Ako $c(u)$ nije pravac, onda postoji interval na kojem je $c''(u) \neq 0$. $N(u)$ je definiran kao $N(u) = c''(u) = T'(u)$, prema tome $\kappa = 1$. Polje binormala $B(u)$ je svjetlosni vektor okomit na $T(u)$ u svakoj točki krivulje $c(u)$ takav da vrijedi $\langle N, B \rangle = 1$. (T, N, B) je svjetlosna baza (vidi definiciju 10). Torzija krivulje $c(u)$ je definirana sa $\tau = \langle N', B \rangle$ i autor u ([9]) je naziva pseudo-torzija. Poznato je da su sve pseudo-nul krivulje ravninske krivulje koje leže u svjetlosnoj ravnini ([1, 2]).

Primjer 6 Krivulja $\alpha(s) = r(\frac{s}{r}, (\frac{s}{r})^2, (\frac{s}{r})^2)$ je pseudo-nul krivulja koja leži u svjetlosnoj ravnini s jednadžbom $y - z = 0$. Njena svjetlosna baza je

$$T(s) = (1, \frac{2s}{r}, \frac{2s}{r}), N(s) = (0, \frac{2}{r}, \frac{2}{r}), B(s) = (0, \frac{r}{4}, -\frac{r}{4})$$

i zakrivljenosti su $\kappa = 1$ i $\tau = 0$. Budući da je α ravninska krivulja s konstantnom zakrivljenošću, ona je kružnica u Minkowskijevom prostoru. Euklidskim očima gledano, ona je parabola čija je os paralelna sa svjetlosnim smjerom. Vidi sliku 4 desno.

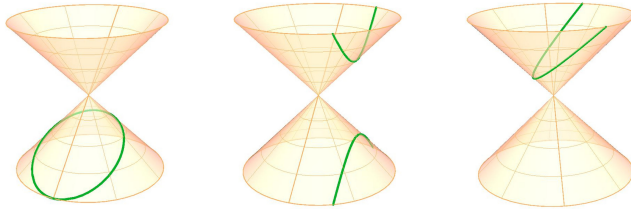


Slika 4: Kružnice u Minkowskijevom prostoru.

Euklidska elipsa je također Minkowskijeva kružnica, što je pokazano u [11]. Promatran je presjek svjetlosnog stošca

$$LC(p) = \{q \in \mathbb{R}_1^3 \setminus \{p\} : \langle q - p, q - p \rangle = 0\},$$

prostornom, vremenskom i svjetlosnom ravninom. U presjeku se dobiju Minkowskijeve kružnice koje su euklidske elipsa, jednakostrana hiperbola i parabola, slika 5.



Slika 5: Kružnice u Minkowskijevom prostoru kao presjeci svjetlosnog stošca i ravnine.

Poznato je da u euklidskom prostoru vrijedi tvrdanja: Neka je $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna krivulja pri čemu c' i c'' nisu kolinearni. Krivulja c je ravninska ako i samo ako je $\tau = 0$. U Minkowskijevom prostoru za pseudo-nul krivulje ta tvrdnja ne vrijedi. Sljedeća dva primjera pokazuju da su pseudo-nul krivulje ravninske, iako je $\tau \neq 0$.

Primjer 7 Dana je pseudo-nul krivulja

$$\alpha(s) = \frac{1}{\tau} (\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s), \tau^2 s, \cosh(\tau s) + \sinh(\tau s)).$$

To je ravninska krivulja koja leži u svjetlosnoj ravnini $x - z = 0$. Svjetlosni trobrid $(T(s), N(s), B(s))$ krivulje $\alpha(s)$ je

$$\begin{aligned} T(s) &= \left(\frac{\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s)}{\tau}, 1, \frac{\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s)}{\tau} \right), \\ N(s) &= \left(\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s), 0, \cosh(\tau s) + \sinh(\tau s) \right), \\ B(s) &= \left(\frac{-(1 + \tau^2) \cosh(\tau s) + (-1 + \tau^2) \sinh(\tau s)}{2\tau^2}, -\frac{1}{\tau}, \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1 + \tau^2) \cosh(\tau s) - (1 + \tau^2) \sinh(\tau s)}{2\tau^2} \right). \end{aligned}$$

To je jedina pseudo-nul prostorna krivulja s pseudo-torzijom $\tau = \text{const.} \neq 0$, [14]. Vidi sliku 6 lijevo.

Primjer 8 Neka je $\alpha(s)$ pseudo-nul prostorna krivulja

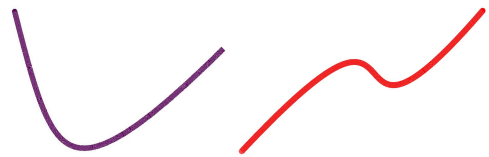
$$\alpha(s) = \left(\frac{s^3 - 12s}{12\sqrt{2}}, \frac{s^3 + 12s}{12\sqrt{2}}, \frac{s^3}{12} \right)$$

s pseudo-torzijom $\tau = \frac{1}{s}$. Ona leži u svjetlosnoj ravnini $x + y = \sqrt{2}z$ i njezin svjetlosni trobrid je

$$T = \left(\frac{-4 + s^2}{4\sqrt{2}}, \frac{4 + s^2}{4\sqrt{2}}, \frac{s^2}{4} \right), \quad N = \left(\frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{s}{2\sqrt{2}}, \frac{s}{2} \right),$$

$$B = \left(\frac{16 + 8s^2 - s^4}{16\sqrt{2}s}, \frac{16 - 8s^2 - s^4}{16\sqrt{2}s}, -\frac{16 + s^4}{16s} \right).$$

Vidi sliku 6 desno.



Slika 6: Pseudo-nul krivulja s parametrizacijom $\alpha(s) = (\cosh s + \sinh s, s, \cosh s + \sinh s)$, (lijevo), odnosno $\alpha(s) = \left(\frac{s^3 - 12s}{12\sqrt{2}}, \frac{s^3 + 12s}{12\sqrt{2}}, \frac{s^3}{12} \right)$ (desno).

Sada ćemo definirati funkcije zakrivljenosti svjetlosne krivulje i njenu reparametrizaciju pseudo-lukom.

Teorem 1 (Osnovni teorem za svjetlosne krivulje, [7])

Ako su zadani početni podatci (p, k_0, k_1, k_2, k_3) , gdje je p fiksna točka i k_0, k_1, k_2, k_3 funkcije klase C^1 , tada postoji jedinstvena svjetlosna Frenetova krivulja $(c(t), (A(t), B(t), C(t)))$ takva da $c(0) = p$, $\dot{c}(t) = k_0(t)A(t)$ i vrijede Frenet-Serretove formule:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_1 & k_3 \\ -k_3 & -k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Funkcije κ_i , $i = 1, 2, 3$ se nazivaju zakrivljenosti funkcije $c(t)$ s obzirom na svjetlosni trobrid $(A(t), B(t), C(t))$. Svjetlosni trobrid nije jedinstven, stoga je potrebno uz svjetlosnu krivulju navesti njezin trobrid. Svjetlosna krivulja u \mathbb{R}_1^3 je pravac ako i samo ako je $\kappa_2 = 0$ ([2, 10]).

U sljedeća dva primjera dani su primjeri svjetlosnih pravaca kojima su pridruženi različiti svjetlosni trobridi i pripadne zakrivljenosti.

Primjer 9 Nul pravac $c(s) = \left(as - \frac{s^2}{2}, -a, as - \frac{s^2}{2} \right)$, $a \in \mathbb{R}$ sa svjetlosnim trobridom

$$A = (1, 0, 1), \quad B = \frac{1}{2}(1, 0, -1), \quad C = (0, -1, 0),$$

ima zakrivljenosti $\kappa_0(s) = a - s$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$.
Ako krivulji $c(s)$ pridružimo svjetlosni trobrid

$$A = (a - s)(1, 0, 1), \quad B = \frac{1}{s - a} \left(\frac{s^2 - 1}{2}, -s, \frac{s^2 + 1}{2} \right),$$

$$C = (s, -1, s),$$

tada krivulja $c(s)$ ima zakrivljenosti $\kappa_0 = 1$,
 $\kappa_1(s) = \kappa_3(s) = \frac{1}{(s - a)}$, $\kappa_2 = 0$.

Primjer 10 Nul pravac

$$c(s) = \left(\frac{2s^3 - 3a(s^2 - 4)}{12\sqrt{2}}, \frac{2s^3 - 3a(4 + s^2)}{12\sqrt{2}}, \frac{(2s - 3a)s^2}{12} \right),$$

$a \in \mathbb{R}$ sa svjetlosnim trobridom o

$$A = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right), \quad B = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2),$$

$$C = (0, -\sqrt{2}, -1),$$

ima zakrivljenosti $\kappa_0 = s(s - a)$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$, dok sa svjetlosnim trobridom

$$A = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$$

$$B = \left(-\sqrt{2}m^2 + m\kappa_3s - \frac{\kappa_3^2s^2 - 8}{4\sqrt{2}}, \right. \\ \left. -\sqrt{2}m^2 + m(\kappa_3s - 4) + \frac{\kappa_3s(8 - \kappa_3s) - 8}{4\sqrt{2}}, \right. \\ \left. -2 - 2m^2 - \frac{1}{4}\kappa_3s(\kappa_3s - 4) + \sqrt{2}m(\kappa_3s - 2) \right)$$

$$C = \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2}\kappa_3s - 4m), \frac{1}{4}(\sqrt{2}(\kappa_3s - 4) - 4m), \right. \\ \left. -(1 + \sqrt{2}m - \frac{\kappa_3s}{2}) \right), \quad m = \text{const.},$$

ima zakrivljenosti $\kappa_0(s) = s(s - a)$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ i $\kappa_3 = \text{const.}$

Svjetlosnu krivulju $c(t)$ možemo reparametrizirati $t = t(u)$ tako da je $k_1 = 0$. Duggal i Bejancu ([4]) zovu parametar u istaknuti parametar od c i krivulju $c(u)$ svjetlosna Frenetova krivulja.

Nadalje, svjetlosnu Frenetovu krivulju $c(u)$ za koju vrijedi $\langle \frac{d^2c}{du^2}, \frac{d^2c}{du^2} \rangle > 0$ (pa vrijedi i uvjet $k_2 \neq 0$) možemo reparametrizirati $u = u(s)$ tako da vrijedi $\langle c_{ss}, c_{ss} \rangle = 1$. Stoga, za trobrid (A, B, C) pridružen krivulji $c(s)$ vrijedi

$$A = c_s = \frac{dc}{ds} \quad \text{i} \quad C = c_{ss} = \frac{d^2c}{ds^2}.$$

Parametar s nazivamo parametar duljine pseudo-luka ([6, 7]) i trobrid (A, B, C) krivulje $c(s)$ zadovoljava sljedeće Frenetove formule:

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k_L \\ -k_L & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}.$$

Funkciju $k_L = \langle B', C \rangle = -\langle C', B \rangle$ zovemo svjetlosna zakrivljenost od $c(s)$, B binormalni vektor i C glavna normala krivulje $c(s)$ ([7]). Ako je $k_2 = 0$, tada krivulju ne možemo reparametrizirati na opisani način. Neki autori poput ([9]) koriste drugačije definicije i oznake $((T, N, B))$ za svjetlosni trobrid i τ za odgovarajuću zakrivljenost koju nazivaju pseudo-torzija).

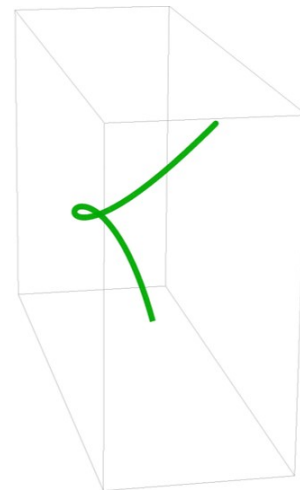
Primjer 11 Svjetlosna zavojnica parametrizirana parametrom duljine pseudo-luka, ([5, 7]), kongruentna je s jednom od sljedećih krivulja:

$$c_1(s) = \left(\frac{1}{\sigma^2} \cos(\sigma s), \frac{1}{\sigma^2} \sin(\sigma s), -\frac{s}{\sigma} \right), \quad k_L = \frac{\sigma^2}{2} > 0$$

$$c_2(s) = \left(-\frac{s}{\sigma}, \frac{1}{\sigma^2} \cosh(\sigma s), \frac{1}{\sigma^2} \sinh(\sigma s) \right), \quad k_L = -\frac{\sigma^2}{2} < 0$$

$$c_3(s) = \left(\frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} + \frac{s}{3} \right), \quad k_L = 0.$$

Krivulju $c_3(s)$ zovemo svjetlosna kubika (slika 7).



Slika 7: Svjetlosna kubika.

Literatura

- [1] CHINO, S., IZUMIYA, S., Lightlike developables in Minkowski 3-space, *Demonstr. Math.* **43**(2) (2010), 387–399, <https://doi.org/10.1515/dema-2013-0236>

- [2] DA SILVA, L.C.B., Moving frames and the characterization of curves that lie on a surface, *J. Geom.* **108** (2017), 1091–1113, <https://doi.org/10.1007/s00022-017-0398-7>
- [3] ĐUZEL, M., *Lokalna teorija krivulja u trodimenzionalnom Minkowskijevom prostoru*, Diplomski rad, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2023.
- [4] DUGGAL, K.L., BEJANCU, A., *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996, <https://doi.org/10.1007/978-94-017-2089-2>
- [5] FERRÁNDEZ, A., GIMÉNEZ, A., LUCAS, P., Null generalized helices in Lorentz-Minkowski spaces, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 8243–8251, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/39/308>
- [6] FERRÁNDEZ, A., GIMÉNEZ, A., LUCAS, P., Null helices in Lorentzian space forms, *Internat. J. Modern Phys. A.* **16** (2001), 4845–4863, <https://doi.org/10.1142/S0217751X01005821>
- [7] INOBUCHI, J., LEE, S., Null curves in Minkowski 3-space, *Int. Electron. J. Geom.* **1** (2008), 40–83.
- [8] LIU, H., Curves in the Lightlike Cone, *Beitr. Algebra Geom. [Contributions to Algebra and Geometry]* **45** (2004), 291–303.
- [9] LÓPEZ, R., Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, *Int. Electron. J. Geom.* **7** (2014), 44–107, <https://doi.org/10.36890/iejg.594497>
- [10] LÓPEZ, R., MILIN ŠIPUŠ, Ž., PRIMORAC GAJČIĆ, LJ., PROTRKA, I., Involutives of pseudo-null curves in Lorentz–Minkowski 3-space, *Mathematics* **11**(9) (2021), 41–46, <https://doi.org/10.3390/math9111256>
- [11] MILIN ŠIPUŠ, Ž., PROTRKA, I., PRIMORAC GAJČIĆ, LJ., Generalized Helices on a Lightlike Cone in 3-Dimensional Lorentz-Minkowski Space, *KoG* **24** (2020), 41–46, <https://doi.org/10.31896/k.24.4>
- [12] PROTRKA, I., *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru*, Disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2019.
- [13] RATCLIFFE, J.G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer Science+Business Media, New York, 1994, <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4013-4>
- [14] WALRAVE, J., *Curves and Surfaces in Minkowski Space*, Ph. D. Thesis, K. U. Leuven, Faculteit Der Wetenschappen, 1995.

Monika Đuzel

e-mail: monikadj@outlook.com

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, Hrvatska**Ivana Filipan**

orcid.org/0000-0001-6616-3206

e-mail: ivana.filipan@rgn.unizg.hr

Sveučilište u Zagrebu
Rudarsko-geološko-naftni fakultet
Pierottijeva 6, HR-10000 Zagreb, Hrvatska**Ljiljana Primorac Gajčić**

orcid.org/0000-0002-8460-3196

e-mail: lprimora@mathos.hr

Fakultet primijenjene matematike i informatike,
Sveučilište u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6, HR-31000 Osijek, Hrvatska