

Crtanje jajolikih krivulja

Drawing of Bird-egg Forms

ABSTRACT

Using Maple V we compared the data of original bird-eggs given by JAKAB[2] with the theoretical results given by Wunderlich. It turned out that for the eggs of the bird *Sterna hirundo* the parabolic cubic and the Kirste profile were almost identical, and their plots coincided with the curves drawn by oologists. But, for the eggs of the birds *Sterna paradisaea* and *Sterna dougallii* differences were greater.

Key Words

bird-eggs, egg-shaped curves, Kirste profile, symmetric parabolic cubic

Crtanje jajolikih krivulja

SAŽETAK

U radu su pomoću programa Maple V, prema podacima koje je JAKAB [2] dobio mjerenjem, nacrtane dvije vrste krivulja (simetrična parabolična kubika i Kirsteov profil koje je predložio Wunderlich). Pokazano je da se te dvije krivulje i crteži oologa među sobom gotovo nimalo ne razlikuju za jaja ptice *Sterna hirundo*, odn. obične čigre, dok je kod jaja druge dvije vrste čigri, tj. polarne (*Sterna paradisaea*) i ružičaste čigre (*Sterna dougallii*), bilo odstupanja.

Ključne riječi

ptičja jaja, jajolike krivulje, Kirsteov profil, simetrična parabolična kubika

UVOD

Jedan dio biomatematike je *biogeometrija*, koja biološke pojave promatra sa stanovišta geometrije. Primjer za to je rad WUNDERLICH [6] u kojem su dani prijedlozi za crtanje oblika osnog presjeka ptičjeg jajeta (jajolikih krivulja) pomoću funkcija. U istom radu postavlja se pitanje da li su ovako dobivene jajolike krivulje stvarno jednake formi jajeta čiji su podaci korišteni prilikom računanja i crtanja. Da bi odgovorili na ovo pitanje korištena su konkretna mjerenja oologa JAKABA [2], znanstvenika koji se bavi izučavanjem ptičjih jaja (promatra oblik, veličinu, težinu i druge karakteristike cijelog jajeta, odnosno ljuske jajeta).

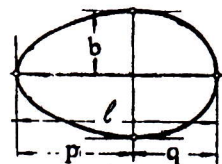
Klasificiranje ptičjih jaja vrlo je star znanstveni problem. Najstarije poznato djelo koje daje opise jaja evropskih ptica knjiga je J. T. Kleina "Sammlung verschiedener Vögel Eyer in natürlicher Grösse und mit lebendigen Farben geschildert und beschrieben" iz 1766. godine (MAKATSCH [3]).

Pokazano je (NAGY F. [4]) da se od jajolikih krivulja

koje je predložio Wunderlich, Kirsteov profil gotovo uvijek, a uz uvjet $p \neq q$, i simetrična parabolična kubika također gotovo uvijek mogu koristiti za crtanje, ali nikada neće dati neuobičajenu formu (npr. kruške) (ERÖS [1]). Drugo je pitanje koliko se dobiveni crteži među sobom razlikuju i da li stvarno predstavljaju formu promatranog jajeta.

1. OZNAČAVANJE

Ptičje jaje smatramo rotacijskom plohom, a njegov osni presjek jajolikom krivuljom. Veličinu l nazivamo duljinom, a $2b$ širinom jajeta (Slika 1). Ravnina najvećeg presjeka okomitog na os rotacije dijeli l u omjeru $p : q$, $p \geq q$.



Slika 1

Označavanje

Uobičajeno je da se za klasifikaciju ptičjih jaja po obliku uz ostalo koriste omjer duljine i širine $l/2b$ (≥ 1), odnosno omjer odsječaka na duljinskoj osi p/q (≥ 1) (SCHÖNWETTER [5]).

W. Wunderlich je za crtanje jajolike krivulje predložio Descartesov oval, simetričnu paraboličnu kubiku, torusnu liniju i Kirsteov profil.

Prema WUNDERLICHU [6], *simetrična parabolična kubika* dana funkcijom

$$ky^2 = x(l-x)(x+u) \quad (1.1)$$

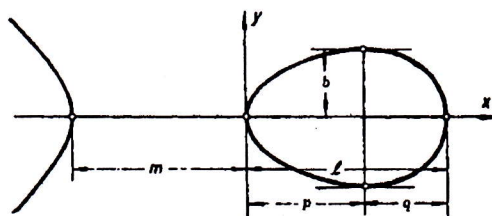
predstavlja jajoliku krivulju nad intervalom $[0, l]$ s ekstremnim točkama $(p, \pm b)$ ako su parametri

$$l = p + q,$$

$$u = \frac{pq}{p-q} - p, \quad (1.2)$$

$$k = \frac{p^2 q^2}{b^2 (p-q)}$$

Očito je da se ova formula na zadanom intervalu i uz uvjete ekstrema *ne može* koristiti za crtanje kuglastih i elipsoidnih ptičjih jaja.



Slika 2

Simetrična parabolična kubika

Kirsteov profil dan je sustavom parametarskih jednadžbi

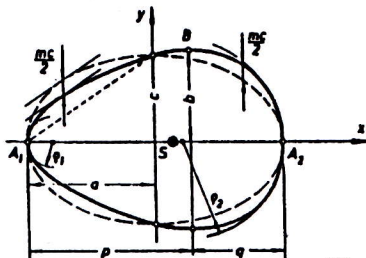
$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= c \sin t(1 + m \cos t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$(0 < m < 1), t \in [0, 2\pi]$

Wunderlich je pokazao da (1.3) daje jajoliku krivulju ako je

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{2} = \frac{p+q}{2}, \\ c &= \frac{bl\sqrt{pq}}{8p^2q^2} (6pq - p^2 - q^2), \\ m &= \frac{p^2 - q^2}{6pq - p^2 - q^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

To bi bila nekonveksna krivulja ako je $\sqrt{2}/2 < m < 1$. No, stvarne dimenzije ptičjih jaja ne zadovoljavaju ovaj uvjet (NAGY F. [4]).



Slika 3

Kirsteov profil

2. PRIMJENA SIMETRIČNE PARABOLIČNE KUBIKE I KIRSTEOVA PROFILA

Za crtanje jajolikih krivulja koristimo JAKABOVE [2] podatke o tri vrste ptičjih jaja iste duljine i širine, ali raznih oblika, dane u Tabeli 1.

duljina l (mm)	$1/2$ širine b (mm)	p	q
36	14,5	19,0	17,0
37	14,75	20,5	16,5
38	14,80	20,4	17,6
39	14,70	21,2	17,8
40	14,85	22,0	18,0
41	14,85	22,6	18,4
42	15,05	23,9	18,1
43	15,15	24,3	18,7

Tabela 1.

Sterna hirundo, *Sterna paradisaea*, *Sterna dougallii*

Prvo promatramo simetričnu paraboličnu kubiku. Uvrštavanjem parametara (1.2) u formulu (1.1) dobivamo u eksplicitnom obliku funkciju

$$y = \frac{b}{pq} \sqrt{x(p+q-x)(p-q)} \sqrt{x + \frac{pq}{p-q} - p}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.1)$$

Ova jednadžba ovisi o vrijednostima p , q i b i predstav-

lja polovicu jajolike krivulje.

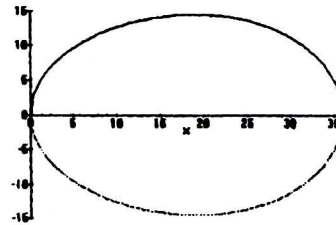
Ako je iz prvog retka tabele

$$f_1 := \text{subs}(p=19, q=17, b) \quad (2.2)$$

onda

$$\text{plot}(\{f_1, -f_1\}, x=0..36) \quad (2.3)$$

u programu Maple V znači naredbu za crtanje jajolike krivulje na slici 4.



Slika 4

Crtež jajolike krivulje duljine 36 mm pomoću simetrične parabolične kubike

Sada promatramo *Kirsteov profil*. Uvrštavanjem formula (1.4) u jednadžbe (1.3) slijedi

$$x_1 := \frac{p+q}{2} \cos t \quad (2.4a)$$

$$y_1 := \frac{(6pq - p^2 - q^2)b(p+q) \sin t (1 + \frac{(p^2 - q^2) \cos t}{6pq - p^2 - q^2})}{8p^{3/2}q^{3/2}} \quad (2.4b)$$

Dobivene jednadžbe jajolike krivulje ovise o mjerenim podacima dobivenim za p , q i b . Zamjenom vrijednosti prvog retka tabele dobivamo

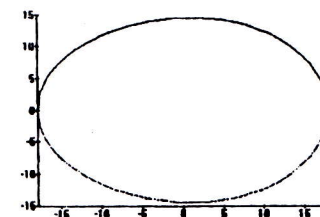
$$x_{11} := 18 \cos t \quad (2.5a)$$

$$y_{11} := 14.4775 \sin t (1 + 0.0559 \cos t). \quad (2.5b)$$

Nareba za crtanje

$$\text{plot}(\{x_{11}, y_{11}\}, t=0..2*\text{Pi}) \quad (2.6)$$

daje krivulju sa slike 5.



Slika 5

Crtež jajolike krivulje duljine 36 mm pomoću Kirsteova profila

Na isti način, za sedam ostalih grupa podataka iz Tabele 1 nacrtane su obje krivulje, parabolična simetrična kubika i Kirsteov profil.

Razlike u dobivenim crtežima jajolikih krivulja nismo mogli primijetiti. Usporedba s crtežima oologa pokazala je da su krivulje pogodne za crtanje jaja ptice *Sterna hirundo*, ali ne i za jaja ptica *Sterna paradisaea* i *Sterna dougallii*, gdje su odstupanja bila značajna, naročito na užim krajevima.

U sljedećem je koraku valjalo ispitati zakrivljenost krivulja. Pomoću Maple V programa bilo je moguće izračunati prve i druge derivacije obje funkcije za sve podatke. Međutim, nisu se mogle primijetiti razlike u krivuljama ovih funkcija kao ni u grafovima zakrivljenosti.

3. FUNKCIJA RAZLIKE

Ipak, da bismo usporedili dobivene krivulje, definirali smo funkciju razlike. U tu svrhu simetrična parabolična kubika translirana je tako da se njeno područje definicije poklapa s područjem definicije Kirsteova profila. Sada je simetrična parabolična kubika umjesto s (2.1) prikazana jednažbom

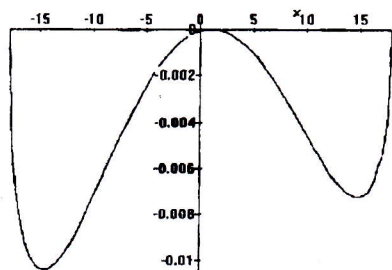
$$y := \frac{b}{pq} \sqrt{\left(x + \frac{p+q}{2}\right)\left(\frac{p+q}{2} - x\right)} \sqrt{x + \frac{pq}{p-q} - \frac{p-q}{2}} \sqrt{p-q}. \quad (3.1)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za p , q i b iz Tabele 1 dobivamo dio simetrične parabolične kubike koja je polovica jajolike krivulje nacrtane na intervalu $[-(p+q)/2, (p+q)/2]$.

Obilježimo s y_i i y_{1i} , $i=1,2,\dots,8$, funkcije koje dobivamo uvrštavanjem podataka iz i -tog retka Tabele 1 u formule (3.1) i (2.4b).

Funkciju razlike za podatke iz i -tog retka Tabele 1 definirali smo s

$$d_i := y_i - y_{1i}. \quad (3.2)$$

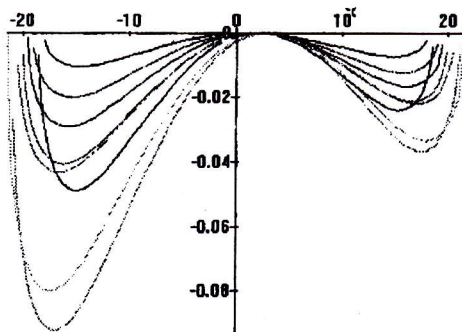


Slika 6

Funkcija razlike d_1

Funkcija d_1 je pokazala da su odstupanja vrlo mala, a da su kod parabolične kubike vrijednosti uvijek manje.

Na slici 7 nacrtano je u istom koordinatnom sustavu svih osam funkcija razlike.



Slika7

Funkcije razlike za podatke iz Tabele 1.

Možemo zaključiti:

1. maksimalno je odstupanje vrijednosti parabolične kubike i Kirsteova profila u slučaju $l = 42$ mm, ali ni to se golim okom ne može primijetiti. Stoga je opravdano reći da su za crtanje jaja *Sterna hirundo* obje funkcije jednako pogodne;
2. parabolična kubika je uvijek unutar Kirsteova profila, znači pogodnija je za crtanje užih jajolikih krivulja.

LITERATURA

- [1] ERÖSS, L.: The Function of Shape in Bird-eggs, AQUILA — Ann. Inst. Ornith. Hung. 1983., pp. 159-175.
- [2] JAKAB, B.: A küszvágó csér-(Sterna hirundo l.) — tojások meghatározásának kérdése, A Móra F. Múzeum Évkönyve Vol. 15, No. 1, 1972-73. pp. 225-235.
- [3] MAKATSCH, W.: *Die Eier der Vögel Europas*, Neumann Verlag, Leipzig-Radebeul 1972.
- [4] NAGY F., Gy.: Practical and Theoretical Determination of Bird-eggs. Proceedings of 6th ICECGDG, Tokyo 1994. pp. 150-154.
- [5] SCHÖNWETTER, M.: *Handbuch der Oologie*, Vol. 41. Akademie-Verlag, Berlin, 1985. pp. 1-64.
- [6] WUNDERLICH, W.: Zur Geometrie der Vogeleier, Sitzungsberichte der ÖAW, Mathem.-Naturw. Kl., Abt. II, Vol. 187, No. 1-3, 1979. pp. 1-19.

Dr. sc. Györgyi Führer Nagy
Erdészeti és Faipari Egyetem
Sopron, Pf. 132
H - 9401
tel: 9936 99 311 103
e-mail: fur@efe.hu