

Die Brennpunktskurven der vierfachen Brennpunkte in Büscheln zirkulärer Kurven dritter Ordnung

The Focal Curve of Fourfold Foci in the Pencil of 3rd Order Circular Curves

ABSTRACT

In this paper it is proved that the curve of fourfold foci in the pencil of circular and rational cubics, which is deduced by ordinary inversion, is a circle, and its construction is shown. An analogous foci circle f is constructed in one pencil (k_i^3) of circular cubics of 1st genus. It is shown that by means of this circle focus of any cubics belonging to (k_i^3) can be obtained.

Key Words

circular curve, fourfold focus, focal curve

Fokalna krivulja četverostrukih fokusa u pramenu cirkularnih krivulja trećega reda

SAŽETAK

Dokazuje se da je žarišna krivulja četverostrukih fokusa f u pramenu cirkularnih racionalnih krivulja 3. reda, izvedenom običnom kvadratnom inverzijom, kružnica, te se ona i konstruira. Analogna se žarišna kružnica f konstruira i u jednom pramenu (k_i^3) cirkularnih krivulja 3. reda prvoga. Pokazuje se kako se pomoću ove žarišne kružnice određuje žarište bilo koje kubike iz takvog pramena (k_i^3).

Ključne riječi

cirkularna krivulja, četverostruki fokus, fokalna krivulja

Der vierfache Brennpunkt einer zirkulären ebenen Kurve ist, wie bekannt, der Schnittpunkt ihrer isotropen Tangenten. Das Problem der Konstruktion eines solchen Punktes ist für einzelne Kurven dritter und vierter Ordnung vom Geschlecht Null schon gelöst [1]. Es ist aber nicht bekannt, wie man den vierfachen Brennpunkt einer allgemeinen zirkulären Kurve konstruieren kann. Um ein solches Problem zu lösen, ist es nützlich, die Kurvenbüschel wie auch ihre Brennpunktskurven zu betrachten.

Die Brennpunktskurve im Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Null ist ein Kreis. Dieser Brennpunktskreis wurde konstruiert in den Fällen, wenn das Büschel durch verallgemeinerte Quadratinversion erzeugt wird [4] und wenn ein solches Büschel als das Büschel der Fußpunktskurven der Parabeln eines Parabelbüschels erzeugt wird [5].

Da ein Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung mit-

tels gewöhnlicher Quadratinversion aus einem Kegelschnittbüschel ausführbar ist, soll folgendes Theorem beweisen.

Theorem 1.

Die Brennpunktskurve in einem mittels gewöhnlicher Quadratinversion erzeugten Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung ist ein Kreis.

Beweis. Es sei eine gewöhnliche Quadratinversion $i: P^2 \rightarrow P^2$ mit dem Grundkreis c und dem Pol im Mittelpunkt D des Kreises c gegeben. Sei ein Kegelschnittbüschel (k_i^2) mit vier Grundpunkten A, B, C und D gegeben, wobei beliebige drei von vier Punkten nicht kollinear sind (Abb.1).

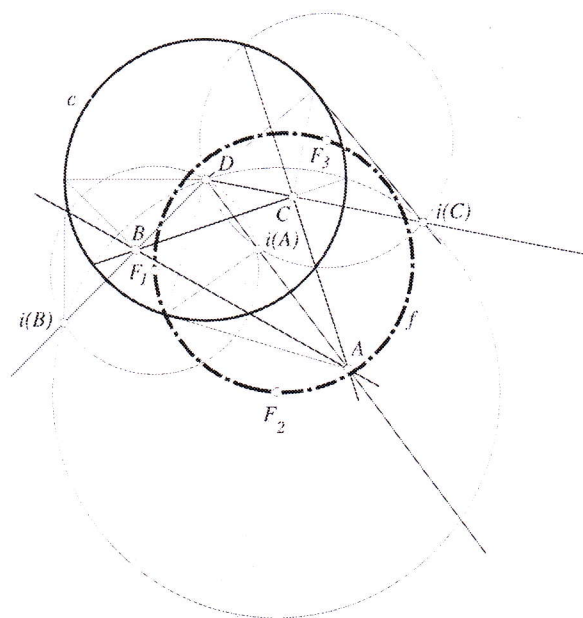


Abb.1.

Mittels Quadratinversion i in Bezug auf den Kreis c und den Pol D bildet sich dieses Kegelschnittbüschel in das Büschel (k_i^3) zirkulärer Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Null ab. Die Grundpunkte des Büschels (k_i^3) sind: $i(A), i(B), i(C)$ der Doppelpunkt D , wie auch die absoluten Punkte der Ebene. Jede der Kurven dritter Ordnung des Büschels (k_i^3) besitzt zwei isotrope Tangenten, die sich in ihrem vierfachen Brennpunkt schneiden. Um das Theorem zu beweisen, soll man folgende Lemmas nutzen.

Lemma 1. Ordnen wir in einem mit vier Grundpunkten

gegebenen Kegelschnittbüschel der Tangente eines Kegelschnittes in einem Grundpunkt die Tangente desselben Kegelschnittes in einem anderen Grundpunkt zu, so sind die entstehende Tangentenbüscheln projektiv zugeordnet [2].

Lemma 2. Die gewöhnliche Quadratinversion ist eine Konformabbildung [3].

Aus der Lemmen geht hervor, daß durch zwei beliebige Grundpunkte gelegten Tangenten der zirkulären Kurven dritter Ordnung eines solchen Kurvenbüschels projektiv zugeordnete Geradenbüschel bilden. Wie bekannt, ist das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Geradenbüschel ein durch die Grundpunkte der Tangentenbüschel verlaufender Kegelschnitt [1].

Nehmen wir die absoluten Punkte als Grundpunkte der Tangentenbüschel, so wird ihr Erzeugnis ein Kreis f . Dieser Kreis ist die gesuchte Brennpunktskurve im gegebenen Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung.

Zur Konstruktion des Brennpunktskreises bemerken wir, daß es im gegebenen Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung drei entartete Kurven gibt. Es sind jene Kurven, die als Quadratinversionsbilder der drei entarteten Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels entstehen. Die entarteten Kegelschnitte sind die Geradenpaare $AB, CD; BC, DA;$ und AC, BD , wobei sich jedes Paar in einen Kreis und eine Gerade abbildet. Die drei Mittelpunkte F_1, F_2 und F_3 dieser Kreise bestimmen den gesuchten Brennpunktskreis f (Abb.1).

Das Theorem 1. ermöglicht die Konstruktion des vierfachen Brennpunkts jeder beliebigen zirkulären Kurve dritter Ordnung k^3 vom Geschlecht Null, im Fall dass diese Kurve durch vier auf einer Geraden nichtliegender einfacher Punkte M, N, P und Q , und einen Doppelpunkt D gegeben ist. Man soll nur einen beliebigen Kreis c mit dem Mittelpunkt im Doppelpunkt D als einen Grundkreis einer gewöhnlichen Quadratinversion auswählen, und die obige Kurve dritter Ordnung als die Kurve der zwei Kurvenbüschel (k_i^3) und (l_i^3) betrachten. Seien die Büschel (k_i^3) und (l_i^3) , zum Beispiel mit Grundpunkten M, N, P , bzw. M, N, Q und mit dem Doppelpunkt D gegeben. Die vier Punkte $i(M), i(N), i(P)$ und D , bzw. $i(M), i(N), i(Q)$ und D sind dann die Grundpunkte der zwei Kegelschnittbüschel (k_i^2) und (l_i^2) . Mittels Quadratinversion dieser Büschel entstehen die Büschel (k_i^3) und (l_i^3) .

Die zwei Brennpunktskreise f_1 und f_2 der Büschel (k_i^3) und (l_i^3) schneiden sich in zwei reellen Punkten. Einer von zwei Schnittpunkten ist der vierfache Brennpunkt der gegebenen Kurve k^3 . Der andere Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des gemeinsamen Kreises einer entarteten Kurve im Büschel (k_i^3) und einer im Büschel (l_i^3) .

Man beachte, dass jetzt die Möglichkeit besteht, eine Konstruktion des vierfachen Brennpunktes aller möglicher zirkulären Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Null zu machen. Es bleibt noch die Frage, diese Konstruktion für die allgemeine zirkuläre Kurve dritter Ordnung durchzuführen. Um ein solches Problem zu lösen,

sollte man zuerst die Brennpunktskurve im Büschel allgemeiner zirkulärer Kurven dritter Ordnung konstruktiv bestimmen.

Da ein allgemeines Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung die absoluten Punkte als Grundpunkte besitzt, ist es nicht schwer zu schließen, daß auch im solchen Büschel die Brennpunktskurve ein Kreis ist.

Man wird jetzt den Brennpunktskreis in einem speziellen Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung vom Geschlecht Eins konstruieren.

Gegeben sei ein solches Büschel durch zwei entartete zirkuläre Kurven dritter Ordnung k_1^3 und k_2^3 . Die Kurve k_1^3 wird in den Kreis k_a und die Gerade a , und die Kurve k_2^3 in den Kreis k_b und die Gerade b zerfällt (Abb.2). Die Schnittpunkte A, B, C, D, E, F und G der Kurven k_1^3 und k_2^3 sind die Grundpunkte eines Büschels zirkulärer Kurven dritter Ordnung, die im allgemeinen ohne Doppelpunkt sind. Die Kurven k_1^3 und k_2^3 haben wir so ausgewählt, daß die Punkte A, B, C, D, E und F die Eckpunkte eines Vierecks a, b, c, d sind. Der Punkt G ist deswegen der Brennpunkt derjenigen Parabel, welche die Geraden a, b, c, d als Berührungsgereaden besitzt [5]. Die Kreise k_a und k_b sind die Brennpunktskreise der zweiten, mit den Grundtangente b, c, d , bzw. a, c, d bestimmten, Parabelscharen [5].

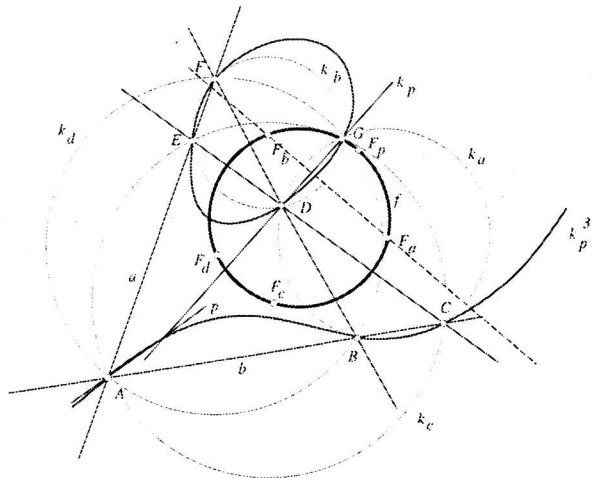


Abb. 2.

Betrachten wir jetzt ein Kreisbüschel (k_i^2) mit den Grundpunkten D und G , sowie ein Geradenbüschel (A) mit dem Grundpunkt A . Ordnen wir dem Kreis $k_a \in (k_i^2)$ die Gerade $b \in (A)$, dem Kreis $k_b \in (k_i^2)$ die Gerade $a \in (A)$, sowie dem entarteten Kreis k_p eine beliebige Gerade $p \in (A)$, zu. Damit wird eine Projektivität zwischen den Büscheln (k_i^2) und (A) gegeben (Abb. 2). Das Erzeugnis dieser projektiv zugeordneten Büschel ist bekanntlich eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung, die durch die Punkte A, B, C, D, E, F und G verläuft.

Jeder Gerade $p_i \in (A)$ wird auf dieser Weise eine durch die Punkte A, B, C, D, E, F, G bestimmte Kurve k_i^3 dritter Ordnung zugeordnet. Im allgemeinen, haben alle solchen Kurven keinen Doppelpunkt. Der unendlich ferne Punkt für jede Kurve ist $P_i^\infty \in p_i$. Eine solche ist

auch die Kurve k_p^3 , deren Asimptote mit der Gerade p parallel ist (Abb. 2).

Wir möchten den vierfachen Brennpunkt der Kurve k_p^3 konstruieren. Dieser Brennpunkt wird auf dem Brennpunktkreis des Büschels (k_i^3) liegen und deswegen müssen wir zuerst den Brennpunktkreis bestimmen.

Man soll bemerken, daß sich im Büschel (k_i^3) außer den Kurven (k_1^3) und (k_2^3) noch zwei entartete Kurven (k_3^3) und (k_4^3) finden. Die Kurve (k_3^3) besteht aus dem durch die Punkte A, B, F, G bestimmten Kreis k_c und der Gerade c , und (k_4^3) aus dem durch die Punkte A, C, E, G bestimmten Kreis k_d und der Gerade d . Die Mittelpunkte F_a, F_b, F_c und F_d der Kreise k_a, k_b, k_c und k_d bestimmen den gesuchten Brennpunktkreis f (Abb. 2).

Es ist möglich, für jede zirkuläre Kurve dritter Ordnung des Büschels (k_i^3) ihren vierfachen Brennpunkt zu konstruieren. Da eine zirkuläre Kurve dritter Ordnung einen einzigen unendlich fernen Punkt wie auch einen einzigen vierfachen Brennpunkt besitzt, ist es möglich, eine Projektivität zwischen unendlich ferner Punktreihe (g_∞) und der Reihe der vierfachen Brennpunkte auf dem Kreis f in Bezug auf das Büschel (k_i^3) herzustellen. Mittels dieser Projektivität wurde der vierfache Brennpunkt F_p der Kurve (k_p^3) konstruiert. Damit ist das Problem der Konstruktion des vierfachen Brennpunktes für alle möglichen zirkulären Kurven dritter Ordnung gelöst.

LITERATUR

- [1] NIČE, V.: Konstrukcija četverostrukog fokusa cirkularnih krivulja 3. reda i nekih 4. reda roda nultoga, *Nast. Vjesnik (Zagreb)* 51 (1943), 271-280;
- [2] PALMAN, D.: *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984;
- [3] SAVELOV, A. A.: *Ploskie krivie*, Gasudarstvenoe izdateljstvo fiziko-matematičeskoj literaturi, Moskva, 1960;
- [4] SLIEPČEVIĆ, A.: Das Brennpunktgebilde im Büschel zirkulärer Kurven dritter Ordnung, *RAD JAZU* [444] 8 (1989), 93-96;
- [5] SLIEPČEVIĆ, A.: Žarišna krivulja u pramenu bicirkularnih krivulja 4. reda, *Zbornik radova XVII Jug. savjetovanja za nacrtnu geometriju*, Zagreb, 1990.

* Die Abbildungen wurden mittels einem PC486 und dem Programm Autodesk AutoCAD for MS Windows Release 12 gezeichnet.

Mr. sc. Ana Sliepčević,
 Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,
 10000 Zagreb, Kačićeva 26
 tel: 677-191
 fax: 45-61-206