Originälle wissenschaftliche Arbeit
Angenommen am 19.12.2007.

IVANKA BABIĆ, ANA SLIEPČEVIĆ

Regelmäßige Polygone in der projektiv-erweiterten hyperbolischen Ebene

Regular Polygons in the Projectively Extended Hyperbolic Plane

ABSTRACT

Regular, semi-regular and polygons with right angles are constructed in Cayley-Klein's model of the projectively extended hyperbolic plane (H-plane). Some of the construction are analogous with the Euclidean ones. The ones for which there are not Euclidean analogues are carried out in original way characteristic for a H-plane. The construction of the defect of an equilateral triangle is of a special interest having the construction of the regular heptagon as its consequence.

Key words: hyperbolic plane, regular polygons, orthogon

MSC 2000: 51M09, 51M10, 51M15, 14H50

Pravilni poligoni u projektivno proširenoj hiperboličkoj ravnini

SAŽETAK

Na Cayley-Kleinovom modelu projektivno proširene H-ravnine konstruiraju se pravilni, polupravilni i pravokutni poligoni, odnosno ortogoni. Neke su konstrukcije potpuno analogne euklidskima, a one za koje ne postoje euklidski analogoni, izvode se na originalne načine svojstvene H-ravnini. Posebno je zanimljiva konstrukcija defekta jednakostraničnog trokuta, što ima za posljedicu konstrukciju pravilnog sedmerokuta.

Ključne riječi: hiperbolička ravnina, pravilni poligon, ortogon

Einleitung

Zur Erklärung der verschiedenen planimetrischen Konstruktionen in der projektiv erweiterten hyperbolischen Ebene (i.w. H-Ebene) zieht man zweckmäßig das klassische, projektive Modell dieser Ebene von F. Klein und A. Cayley heran. Dieses Modell benutzt eine mit einer hyperbolischen absoluten Polarität ausgestattete projektive Ebene, in der dann die (im Außengebiet des absoluten Kegelschnittes liegenden) hyperbolisch uneigentlichen Punkte zur Konstruktion mit herangezogen werden können. Die übliche Wahl eines euklidischen Kreises als absolutem Kegelschnitt a erlaubt zusätzliche Vereinfachungen. Dennoch ist zu beachten, dass die planimetrischen Konstruktionen mittels euklidischer Werkzeuge ausgeführt werden müssen, dass wir also nicht über einen "hyperbolischen Zirkel" verfügen.
Unter Benützung der Grund-Konstruktionen, wie Strecken- und Winkelsymmetralen, sowie von H-Kreisen [1], [7], [8], [9] werden in diesem Artikel einige Konstruktionen für regelmäßige und rechtwinklige Polygone in der H-Ebene angegeben.

Wir betrachten zwei Klassen von Polygonen:

- Die Klasse der *vollständig regelmäßigen* Polygone; das sind solche Polygone, die gleiche Seiten und gleiche Eckenwinkel haben. Sie besitzen einen Inkreis und einen Umkreis, wie auch in der euklidischen Ebene.

- Die Klasse der Polygone für welche gilt, daß je zwei aufeinanderfolgende Seiten normal zueinander stehen. Diese Polygone heißen *vollständige Orthogone*.

Bekanntlich haben in der euklidischen Ebene nur Rechtecke die Eigenschaft, dass alle vier Eckenwinkel rechte sind. Demgegenüber existiert in der H-Ebene kein solches Viereck mit vier rechten Winkeln; hingegen existieren vollständige n-Orthogone für jedes $n \geq 5$.

In diesem Artikel werden nun Polygone aus jeder der Klassen im Cayley-Kleinschen Modell der projektiv erweiterten H-Ebene konstruiert, wobei der absolute (fundamentale) Kegelschnitt durch einen Kreis a gegeben wird. Man bemerkt, dass nur das gleichseitige Dreieck, das dann automatisch auch gleichwinkelig ist, analog zum euklidischen Fall konstruiert werden kann. Andere regelmäßige Polygone, wie auch vollständige Orthogone, wurden auf andere Weisen konstruiert.

1 Regelmäßige Polygone

1.1. Dreieck

Das gleichseitige Dreieck ist das einfachste regelmäßige Polygon. In der Fig. 1 ist ein solches Dreieck durch die Seite $\overline{AB}$ gegeben.

Die Konstruktion wurde ganz analog zur euklidischen Konstruktion durchgeführt. Die dritte Ecke C des Dreiecks ABC ist als Schnittpunkt der Seitensymmetrale s und des H-Kreises $k(A,\overline{AB})$ mit dem Mittelpunkt A und Radius $\overline{AB}$ konstruiert. Um den Punkt C konstruktiv zu erreichen, wurde die perspektive Kollineation (O,o,B,B_1) angewendet. Durch diese Kollineation bildet sich der H-Kreis k in den absoluten Kreis a ab, und die Symmetrale s in die Gerade s_1 [9]. Die Ecke C des gesuchten Dreiecks ABC ist dabei dem Schnittpunkt $C_1 = a \cap s_1$ zugeordnet. Man bemerkt, dass noch ein solches Dreieck ABH existiert, welches symmetrisch zum ersten bezüglich AB liegt.

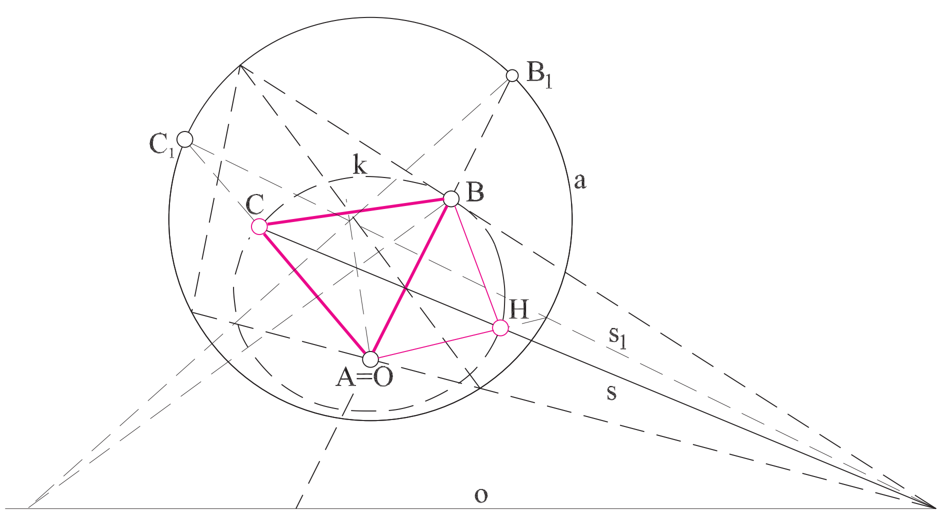
1.2. Vierecke

1.2.1. H - Rhombus

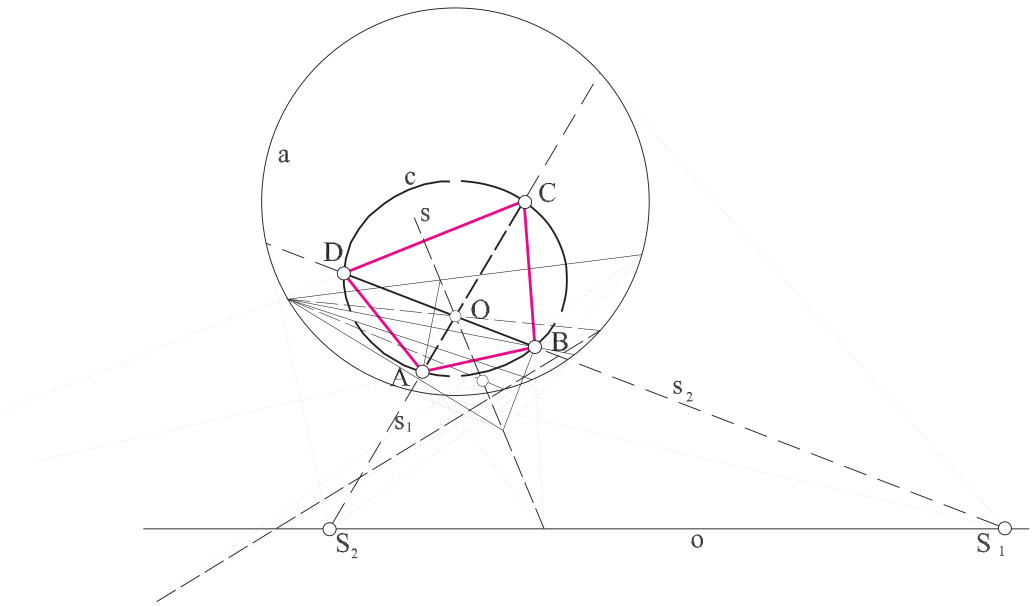
Das Dreieckspaar ABC und ABH in der Fig. 1 stellt ein gleichseitiges Viereck $ACBH$ mit kongruenten Paaren gegenüberliegender Winkel und hyperparallelen gegenüberliegenden Seitenpaaren dar. Die Diagonalen des Vierecks stehen senkrecht zueinander und halbieren sich, sind aber nicht kongruent. Da die gegenüberliegende Winkelsymmetralenpaare zusammen fallen, besitzt dieses Viereck einen Inkreis. Da kein Vierecksumkreis existiert, handelt es sich hier um ein "halbregelmäßiges" Viereck, das ein Analogon zur euklidischen Rhombus ist.

1.2.2. Pseudoquadrat

In der H-Ebene kann man ein regelmäßiges H-Viereck konstruieren, welches vier kongruente Winkel und Seiten, wie auch senkrechtstehende kongruente Diagonalen hat. Dieses wird "Pseudoquadrat" der H-Ebene genannt, weil es bis auf die Rechtwinkligkeit aufeinanderfolgender Seiten die gleichen Eigenschaften, wie das euklidische Quadrat hat. Die Konstruktion des solchen durch die Diagonale $\overline{AC}$ gegebenen Vierecks ist in Fig. 2a gegeben. Zuerst konstruiert man den Kreis c mit dem Durchmesser $\overline{AC}$. Der zum $\overline{AC}$ senkrechtstehende Durchmesser schneidet den Kreis c in den anderen beiden Ecken B,D des gesuchten Vierecks $ABCD$. Es ist zentral- und achsensymmetrisch in Bezug auf die Achsensymmetrien (S_1,s_1,B,D) und (S_2,s_2,A,C) [1], [8], aber auch in Bezug auf die gemeinsamen Seitensymmetralen der Gegenseitenpaare. Da dieses Viereck offensichtlich einen Inkreis hat, der zum Umkreis c konzentrisch ist, handelt es sich um ein vollständig regelmäßiges H-Viereck, eben ein Pseudoquadrat.



Figur 1: *Gleichseitiges Dreieck*

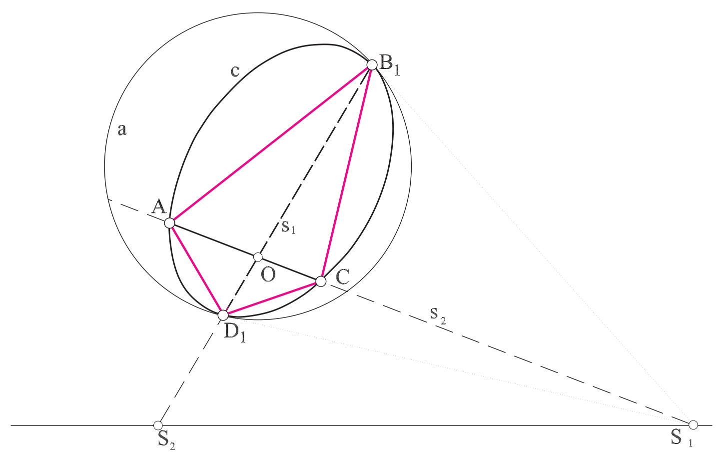


Figur 2a: *Pseudoquadrat*

Das Pseudoquadrat ist auch durch eine vorgegebene Seite $\overline{AB}$ festgelegt. Zur Konstruktion bestimmt man zunächst die (eigentliche) Seitensymmetrale s von $\overline{AB}$. Ordnet man jeder Geraden des Geradenbüschels (A) die H-orthogonale Gerade des Geradenbüschels (B) zu, so schneiden solche projektiv zugeordnete Geradenbüschel die Symmetrale s in zwei kollokalen Punktreihen. Die Doppelpunkte dieser kollokalen Projektivität (s) sind die Mittelpunkte zweier Pseudoquadrate. Die Angabe ist damit auf die vorherige zurückgeführt, die anderen zwei Ecke konstruiert man dann mittels Zentralsymmetrie (O,o,C,A).

Bemerkung:

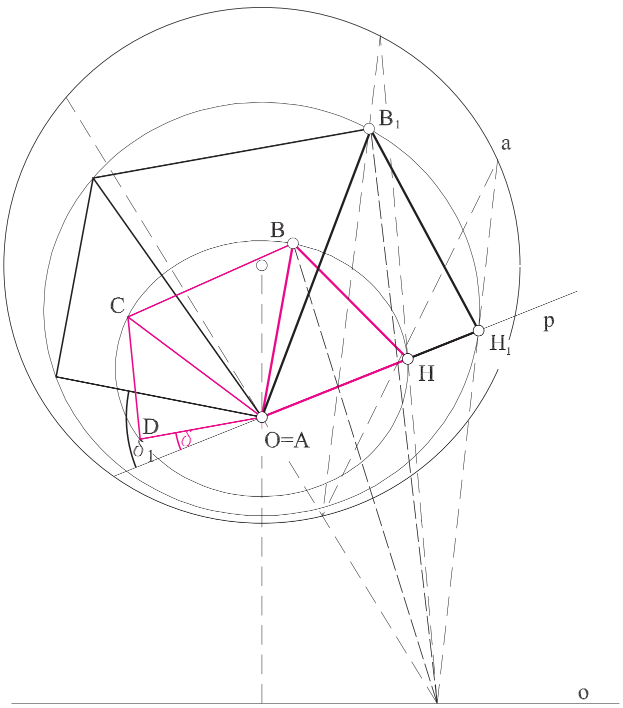
Durch den Durchmesser $\overline{AC}$ ist noch ein spezieller H-Kreis - ein Hyperzykel mit dem uneigentlichen Mittelpunkt S_1 gegeben. Auf die beschriebene Art kann man in diesen Hyperzykel ein spezielles Viereck einschreiben (Fig.2b). Es ist ein sogenanntes "Pseudorhombus" mit zwei Paaren parallelen Nebenseiten und hyperparallelen gegenüberliegenden Seiten. Es hat normalstehende nicht-kongruente Diagonalen und besitzt auch einen Inkreis. Es existiert kein Analogon eines solchen Vierecks in der euklidischen Ebene.



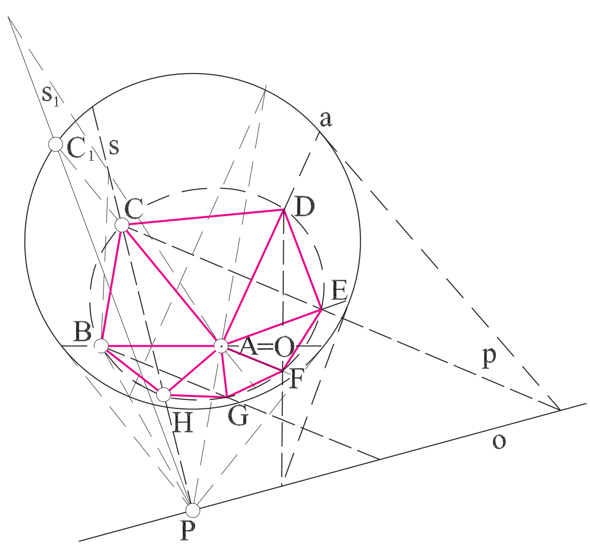
Figur 2b: *Pseudorhombus*

1.3. Sechsecke

Konstruiert man in der Fig. 1 noch ein zum Dreieck ABC, bzw. ABH kongruentes Dreieck ACD mit der Seite $\overline{AC}$, so sollten diese drei Dreiecke, gemäß der euklidischen Logik die Hälfte eines regelmäßigen Sechsecks bilden. Es ist aber anders in der H-Ebene, weil die Summe der drei Winkel bei der Ecke $O=A$ weniger als π beträgt (Fig. 3a). Da nämlich, ein Winkel in einem gleichseitigen Dreieck weniger als $\frac{\pi}{3}$ beträgt, können die drei erwähnten kongruenten Dreiecke keine Hälfte des in den Kreis k eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks bilden. Das regelmäßige Sechseck in der H-Ebene besteht nämlich nicht aus sechs gleichseitigen, sondern aus gleichschenkeligen Dreiecken. Die Rosette aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit einer gemeinsamen Ecke im H-Kreiszentrum O erfüllt keinen vollen Winkel. Der Rest bis zum vollen Winkel hängt vom so genannten Defekt des Grunddreiecks ABC ab. Wie man in der Fig. 3a sieht, hängt der Dreiecksdefekt von der Länge und der Lage der Dreiecksseite ab. Je kleiner die Dreiecksseite, desto kleiner ist der Dreiecksdefekt δ. Somit ist eine didaktisch brauchbare Möglichkeit gegeben, den Defekt eines gleichseitigen H-Dreiecks anschaulich darzustellen.



Figur 3a: *Defekt des gleichseitigen Dreiecks*



Figur 3b: *Regelmäßiges Siebeneck*

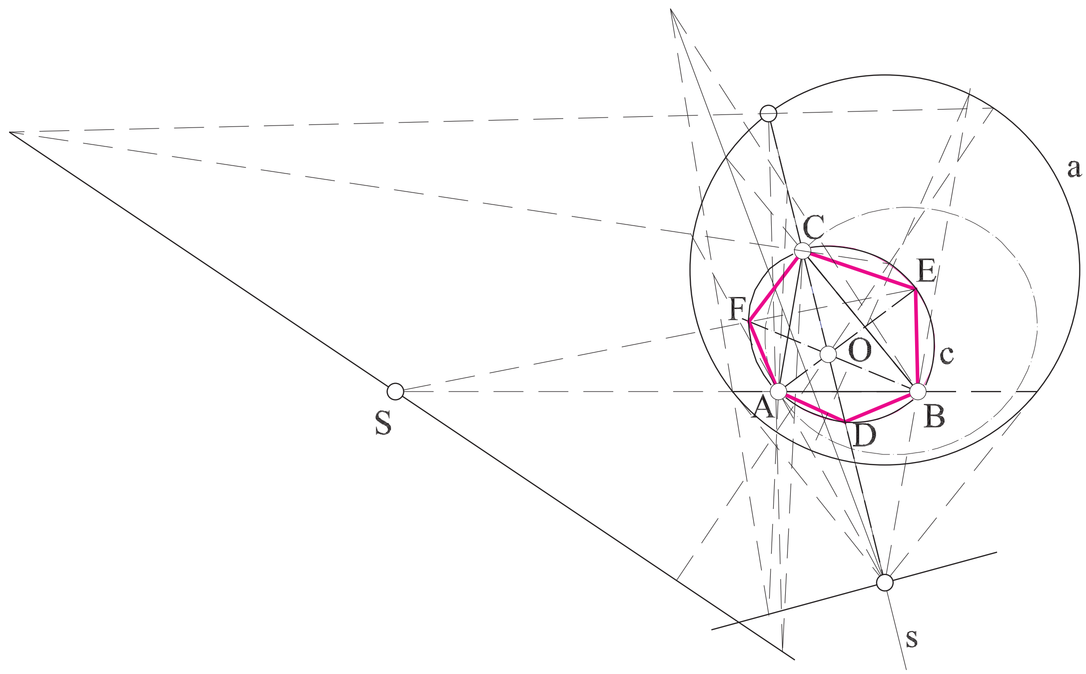
Der Dreiecksdefekt kann speziell gerade die Hälfte des Eckenwinkels eines gleichseitigen H-Dreiecks betragen. In diesem Fall erfüllen sieben gleichseitige Dreiecke ein in den Kreis k eingeschriebenes *gleichseitiges Siebeneck* (Fig. 3b). Es zeigt sich, dass die Dreiecksseite so lange sein kann (also der Defekt so groß), dass acht (bzw. mehr) kongruente gleichseitige Dreiecke ein regelmäßiges Achteck (bzw. n-Eck) bilden.

In der H-Ebene kann man auch ein durch eine Seite gegebenes regelmäßiges Sechseck konstruieren. Für die Konstruktion werden einige Kongruenztransformationen verwendet, welche das Lösungs-Sechseck in ein regelmäßiges Sechseck, dessen Mittelpunkt in dem absoluten Mittelpunkt liegt, verbinden. In der Fig. 4 ist eine Konstruktion des durch die kürzere Diagonale $\overline{AB}$ gegebenen regelmäßigen Sechsecks gezeichnet. Zuerst konstruiert man das gleichseitige Dreieck ABC wie in der Fig. 1. Der Mittelpunkt O des Dreiecksumkreises c ist auch sein Orthozentrum und eines der vier Inkreiszentren. Eine von Seitensymmetrale jeder Dreiecksseite stellt gleichzeitig die Höhe dieser Seite, wie auch eine der Winkelsymmetralen des ihr gegenüberliegenden Winkels dar. Die drei Seitensymmetralen schneiden den Dreiecksumkreis c in den restlichen Ecken D, E, F des gesuchten regelmäßigen Sechsecks $ADBECF$ (Fig. 4). Das regelmäßige Sechseck besteht aus den sechs kongruenten, gleichschenkeligen Dreiecken mit der gemeinsamen Ecke O.

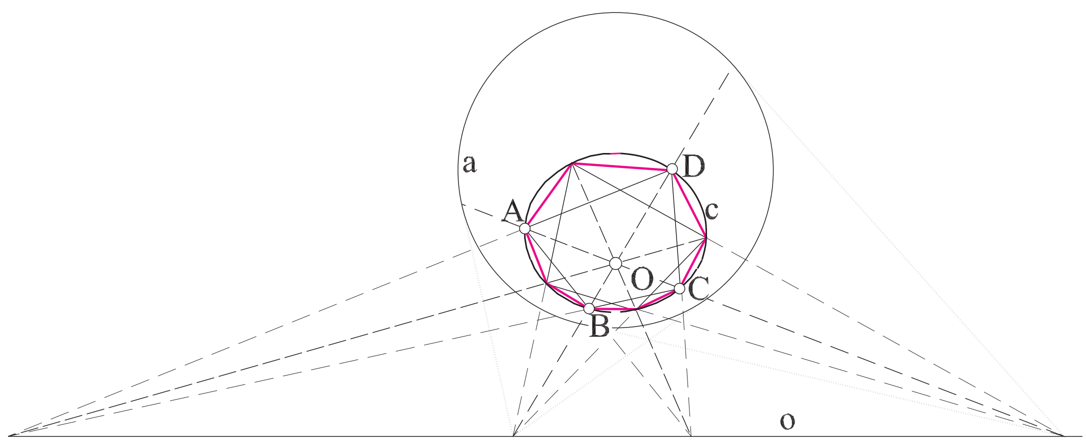
Bemerkung:
Man kann die Frage stellen, ob mit der kürzeren Diagonale ("Nebendiagonale") $\overline{AB}$ ein einziges regelmäßiges Sechseck gegeben ist? Bekanntlich besitzt das Dreieck ABC noch weitere drei H-Umkreise [8]. Konstruiert man die Schnittpunkte der eigentlichen Seitensymmetralen des Dreiecks ABC mit jedem der Umkreise, bekommt man noch drei Dreiecke, die mit dem Dreieck ABC noch drei weitere Sechsecke bilden. Diese zusätzlichen Sechsecke sind aber nicht vollständig regelmäßig; sie bestehen aus drei kongruenten Deltoiden.

1.4. Achteck

Ein regelmäßiges Achteck kann z.B. durch seine das Zentrum enthaltende Hauptdiagonale $\overline{AC}$ angegeben werden (siehe Fig. 5). Mit dem Duchmesser $\overline{AC}$ konstruiert man zuerst den Kreis c und dann das Pseudoquadrat $ABCD$ wie in der Fig. 2. Die anderen vier Ecken des gesuchten Achtecks sind die Schnittpunkte der Seitensymmetralen des Pseudoquadrats mit dem Kreis c (Fig. 5). Da die Winkelsymmetrale der gegenüberliegenden Winkel des Achtecks mit den Seitensymmetralen des Pseudoquadrats zusammenfallen, handelt es sich hier um ein solches regelmäßigs Achteck, das einen zum Umkreis c konzentrischen Inkreis besitzt. Das Achteck besteht aus den gleichschenkeligen Dreiecken.



Figur 4: *Regelmäßiges Sechseck, gegeben durch eine nicht durch den Sechseck-Mittelpunkt gehende Nebendiagonale*



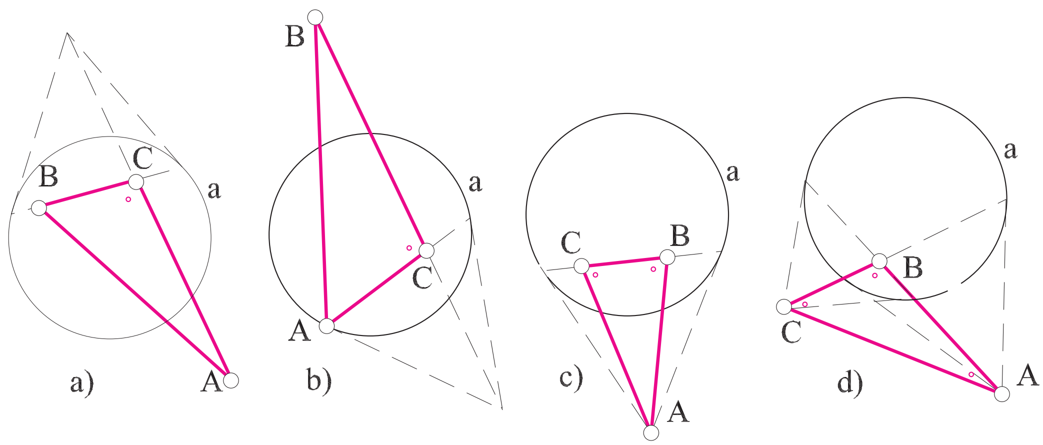
Figur 5: *Regelmäßiges Achteck*

Bemerkung:
Wie im euklidischen Fall kann durch fortgesetztes Halbieren des Zentralwinkels aus jedem n-Eck ein $2^k n$-Eck erzeugt werden. Auch in der H-Ebene stellt sich die Frage, welche regelmäßigen n-Ecke mit Zirkel und Lineal allein konstruiert werden können. Sei ein solches n-Eck durch den Mittelpunkt M und eine Ecke A gegeben. Dann existiert eine (keineswegs eindeutige) H-Spiegelung derart, dass M in die (euklidische) Mitte des absoluten Kreises a gelangt. Das zu konstruierende regelmäßige H-Vieleck erscheint dann auch als euklidisch reguläres n-Eck. Somit folgt unmittelbar:

Ein hyperbolisch regelmäßiges n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn es das euklidisch regelmäßige n-Eck ist.
Es wäre also eine interessante und vielleicht lohnende Aufgabe, nach einer unmittelbaren Konstruktion eines hyperbolisch regulären Fünfecks zu suchen.

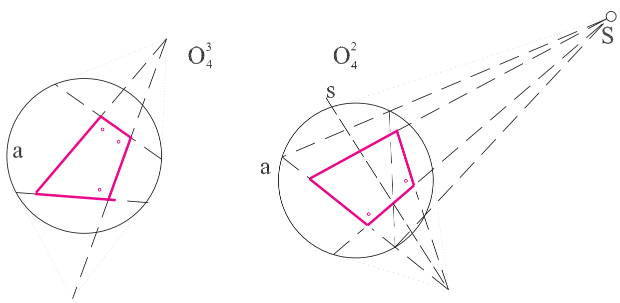
2 Rechtwinkelige Polygone

Wie bekannt hat ein Dreieck in der euklidischen Ebene höchstens einen rechten Winkel. Demgegenüber kann ein Dreieck in der projektiv erweiterten H-Ebene (und in der elliptischen Ebene) entweder einen, zwei oder im speziellen Fall sogar alle drei rechte Winkel besitzen. Die Dreiecke in der Fig. 6a und 6b haben einen rechten Winkel bei der Ecke C. Zwei-rechtwinkelig ist das Dreieck in Fig. 6c, und ein spezielles Dreieck mit drei rechten Winkeln ist in der Fig. 6d gegeben. Bei diesem Dreieck ist jede der Dreiecksseiten die absolute Polare der gegeüberliegenden Ecke. Es ist ein sogenanntes "autopolares Dreieck"; es besitzt naturgemäß nur eine eigentliche Ecke, die beiden anderen liegen im Außengebiet von a. Ein Dreieck mit drei eigentlichen Ecken kann offensichtlich nur einen einzigen rechten Winkel haben.



Figur 6: *Rechtwinkelige Dreiecke*

In der euklidischen Ebene existieren Vierecke mit lauter rechten Eckenwinkeln. In der H-Ebene gilt anderes: Da nämlich zwei beliebige Geraden in dieser Ebene eine einzige Normale haben, existiert kein Viereck mit nur rechten Winkeln. Das bekannteste Viereck mit drei rechten Winkeln ist das *Viereck vom J.H. Lambert*. Das *Viereck von G.G. Saccheri* ist hingegen zwei-rechtwinkelig und gleichschenkelig (Fig. 7).



Figur 7: *Vierecke vom J.H. Lambert und G.G. Sacheri*

Ein ebenes Polygon mit mindestens einem rechten Eckenwinkel nennt man unabhängig von der Metrik in seiner Trägerebene "Orthogon". Ein Orthogon mit lauter rechten Winkeln heißt *vollständiges Orthogon*. Sei mit O_n^m, $(m \leq n)$, ein n-Orthogon mit m rechten Winkeln bezeichnet. Es ist bekannt, dass für jede $n \geq 5$ das vollständige Orthogon O_n^n existiert [4].

Die Konstruktion der eigentlichen Orthogone kann man beispielsweise durch eine spezielle Modifikation des n-Ecks $(n \geq 3)$ mit mindestens einer Idealecke durchführen. Jede Idealecke eines n-Ecks transformiert sich durch die absolute Polarität in eine eigentliche Gerade, die zum bestimmten Seitenpaar des n-Ecks orthogonal steht, bzw. jede Idealecke definiert im Allgemeinen zwei rechte Winkel. Trasformiert man ein n-Eck mit nur Idealecken und nur eigentlichen Seiten, dass man jeder der Idealecken ihre absolute Polare ordnet, entsteht ein Orthogon mit $2n$ Seiten und $m = 2n$ rechten Winkeln. Im Fall eines n-Ecks mit $k = 1, 2, ..., (n-1)$ eigentlichen Ecken bekommt man ein Orthogon mit $2n - k$ Seiten und mit $m \leq 2n - k$ rechten Winkeln. Die Seiten des Orthogons liegen dabei entweder auf den eigentlichen Seiten des n-Ecks oder auf der absoluten Polaren der Idealecken des n-Ecks.

Beispielsweise, aus den Dreiecken mit drei bzw. zwei Idealecken und alle drei eigentlichen Seiten wurden auf die beschriebene Weise die vollständige Orthogone O_6^6 bzw. O_5^5 konstruiert, wobei O_5^5 aus dem rechtwinkeligen Dreieck entsteht (Fig. 8).

Aus einem allgemeinen Dreieck mit zwei Idealecken bekommt man ein vier-rechtwinkeliges Fünfeck. Aus einem asymptotischen Dreieck mit zwei Idealecken und einer Grenzecke bekommt man ein asymptotisches, vierrechtwinkeliges Fünfeck mit einer Grenzecke. Das dreirechtwinkelige Viereck vom Lambert O_4^3 kann durch die Modifikation des rechtwinkeligen Dreiecks 6a) bzw. 6b) entstehen (Fig. 7). Die zwei-rechtwinkeligen Vierecke O_4^2 erstes Typs modifizieren sich aus den Dreiecken mit einer Idealecke. Unter diesen Vierecke ist auch ein gleichschenkeliges Saccherisches Viereck (Fig. 7). Ein zweirechtwinkeliges Viereck O_4^2 des zweiten Typs entsteht aus einem Dreieck mit zwei Idealecken, wobei zwei Dreiecksseiten auf eigentlichen Geraden liegen und eine liegt auf einer Idealgeraden oder einer Grenzgeraden (Fig. 9).

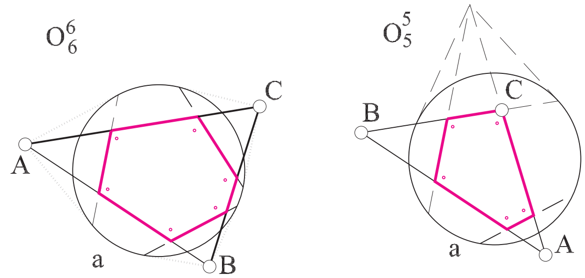
Bemerkung:

In [8] wurde bewiesen, dass 28 Dreieckstypen existieren. Zwölf Paare der Dreieckstypen stehen dual zueinander, und 4 Dreieckstypen sind selbstdual. Für die beschriebene Modifikation sind nur die Dreiecke mit Idealecken interessant. Dabei induziert jedes Dreieck eines dualen Dreieckspaars das gleiche Orthogon (Fig 10).

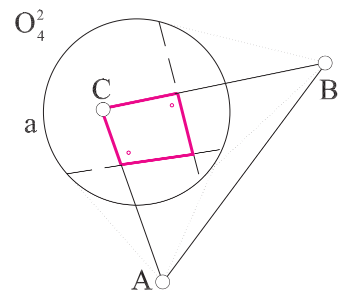
Durch die Modifikation eines Vierecks mit vier, drei, zwei bzw. eine Idealecke und allen Seiten auf eigentlichen Geraden entstehen die Orthogone O_8^m, O_7^m, O_6^m bzw. O_5^m, die auch vollständig sein können. Es ist einfach zu sehen, dass man durch die Modifikation eines Vierecks mit einer Idealecke Orthogone O_5^2, O_5^3, O_5^4 oder O_5^5 konstruieren kann.

Im Allgemeinen kann ein n-Eck, $n>3$, durch die beschriebene Modifikation in die vollständigen Orhogone $O_{2n-k}^{2n-k}(k=0,1,,n-1)$ transformiert werden. Jedes der vollständigen Orthogone kann als ein Vertreter des Mengentyps $O_{2n-k}^{2n-2k+j}(k=0,1,,n-1;j=0,1,...,k)$ betrachtet werden. Mit k ist die Zahl der eigentlichen Ecken des n-Ecks bezeichnet. Z. B. für $n=5$ und $k=0,1,2,3,4$ kann man von einem Fünfeck die vollständigen Orthogone $O_{10}^{10}, O_9^9, O_8^8, O_7^7, O_6^6$ ableiten. Dabei ist, z.B., ein vollständiges Orthogon O_7^7 nur ein Vertreter des Mengentyps $O_7^{4+j}(j=0,1,2,3)$.

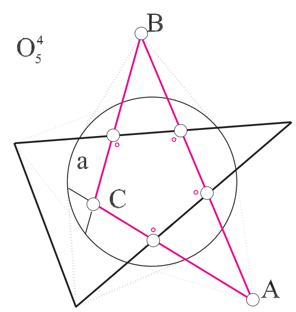
Natürlich lassen sich manche der Orthogone auch auf andere Weise konstruieren.



Figur 8: *Vollständige Orthogone*



Figur 9: *Zweirechtswinkeliges Viereck des II Typs*



Figur 10: *Duale Dreiecke modifizieren das gleiche Orthogon*

Literatur

[1] BABIĆ, I., *Neke kolineacije H-ravnine*, KoG 9, (2005), 1-5

[2] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. Auflage, Springer Verlag (Berlin-Heidelberg-New York, 1973)

[3] KAGAN, V. F., *Osnovanija geometrii*, č.1. Geometrija Lobačevskogo i jejo predistorija, Moskva - Lenjingrad, 1949

[4] KLEIN, F., *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin, Springer-Verlag, 1928., Nachdruck 1968

[5] KOSTIN, V. I., *Osnovanija geometrii*, Moskva-Lenjingrad, 1946

[6] MÓLNAR, E., *Inversion auf der Idealebene der Bachmannschen metrischen Ebene*, Acta Mathematica Scientiarum Hungaricae, 37 (4), (1981), 451-470

[7] RAJČIĆ, L., *Obrada osnovnih planimetrijskih konstrukcija geometrije Lobačevskog sintetičkim sredstvima*, Glasnik mat. Fiz. Astr. 5 (1950), 57-120

[8] SLIEPČEVIĆ, A., BABIĆ, I., *Charakteristische Dreieckpunkte in der projektiv-erweiterten hyperbolischen Ebene*, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, (im Druck)

[9] SLIEPČEVIĆ, A., KOS-MODOR, J., *Neke planimetrijske konstrukcije u H-ravnini*, KoG 9, (2005), 1-3

Ivanka Babić
Technische Hochschule, Abteilung für Bauwesen
Zagreb
e-mail: ibabic@tvz.hr
Ana Sliepčević
Fakultät für Bauwesen, Zagreb
e-mail: anas@master.grad.hr